1965 г. Сентябрь *Том 87, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

535.8

РАБОТЫ Л. И. МАНДЕЛЬШТАМА ПО ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ И СОВРЕМЕННАЯ КВАЗИОПТИКА

В. И. Таланов

На примере работ Л. И. Мандельштама по теории оптического изображения мне хотелось бы показать, насколько глубоким и в то же время разносторонним был научный метод Леонида Исааковича, позволивший ему в уже достаточно хорошо изученном вопросе увидеть такие совершенно новые и неожиданные аспекты, значение которых стало возможным полностью оценить лишь сейчас, спустя многие десятилетия.

В настоящее время в связи с большим размахом исследований в области теории и техники когерентного света, а также в связи с задачами генерации, усиления и передачи колебаний в более длинноволновых участках электромагнитного спектра — миллиметровом и субмиллиметровом, среди самых различных групп исследователей значительно возрос интерес к квазиоптике — разделу электродинамики, занимающемуся изучением асимптотических законов дифракции на телах, размеры которых велики по сравнению с длиной волны.

Квазиоптика изучает такие закономерности дифракции волн на больших телах, для понимания и объяснения которых необходимо привлечение наряду с геометрооптическими также и волновых свойств электромагнитного поля. Более того, именно дифракционные явления определяют наиболее характерную специфику волновых процессов в квазиоптических системах.

К успехам квазиоптики последних лет относится, в первую очередь, создание теории свободных колебаний открытых резонаторов, применяемых в лазерах [1-4], теории распространения когерентных волновых пучков в линзовых и зеркальных волноводах [5], разработка теории возбуждения открытых резонаторов и волноводов [6], наконец, разработка ряда вопросов теории распространения волн в гладких волноводах большого сечения [7].

Еще задолго до того, как в квазиоптике стали интенсивно разрабатываться упомянутые направления, ее методы уже успешно применялись в теории оптических приборов для объяснения дифракционных аберраций изображения. Значительное внимание вопросам теории оптического изображения уделял и Леонид Исаакович Мандельштам. Один из подходов, развитый им в этой теории, особенно интересен в свете задач, решаемых современной квазиоптикой.

В 1912 г. в период научной деятельности в Физическом институте Страсбургского университета Мандельштамом была написана работа «О применении интегральных уравнений к теории оптического изображения» [8]. Эта работа явилась закономерным развитием его предшествующих исследований по теории микроскопического изображения [9]. Как известно, в этих исследованиях Мандельштам подверг критическому

анализу теорию Аббе и показал возможность единообразной трактовки структуры дифракционного изображения как самосветящихся (т. е. некогерентных), так и несамосветящихся (т. е. когерентных) объектов.

Работа «О применении интегральных уравнений к теории оптического изображения» отличается от предшествующих работ на эту тему прежде всего принципиально новой постановкой вопроса. Вот что пишет сам Л. И. Мандельштам:

«До сих пор преимущественно занимались изучением того, как изображается заданный объект через данную диафрагму, например, интересовались той шириной, которую по меньшей мере должна иметь диафрагма, чтобы в изображении еще выявлялась какая-либо структура. Этот вопрос сводится, как известно, к определению разрешающей силы оптических инструментов.

Вопрос, который я хотел бы ниже коротко обсудить, заключается в следующем: Какие структуры дают подобное себе изображение при заданной диафрагме (разрядка Л. И.— *В. Т.*)» (Л. И. Мандельштам [8], стр. 230).

Важным в такой формулировке вопроса о структуре оптического изображения является то обстоятельство, и оно специально отмечается Мандельштамом, что она непосредственно приводит к однородному интегральному уравнению типа

$$pf(x) = \int_{-a}^{a} K(x, x') f(x')\, dx' \tag{1}$$

относительно искомой структуры поля $f(x)$. Ядро этого уравнения является дифракционным изображением светящейся точки объекта в пространстве изображений; пределы интегрирования определяются границами объекта и его изображения.

Таким образом, мы здесь видим именно ту постановку задачи о повторяющихся структурах поля, которая составляет основу современных работ Губо и Шверинга [5], Фокса и Ли [1], Бойда и Гордона [2], Бойда и Когельника [3], Вайнштейна [4] и ряда других исследователей [7] по дифракционной теории открытых резонаторов и пучковых волноводов.

Исследование интегральных уравнений типа (1) с ядрами $K(x, x')$, обладающими свойствами дифракционного изображения светящейся точки, является сейчас одной из основных задач квазиоптической теории. К их решению широко привлекается аппарат современной вычислительной техники. Сложность исследования этих уравнений заключается в том, что в произвольном случае ядра $K(x, x')$ получаются комплексными и симметричными, но не эрмитовыми, а для таких ядер общая теория интегральных уравнений все еще слабо разработана. Только в самое последнее время появились работы, в которых рассматриваются вопросы существования решений этих уравнений при тех ограничениях на ядра $K(x, x')$, которые накладываются физическими условиями квазиоптических задач [10].

Рассмотрим несколько подробнее ту общую схему оптического прибора, которую обсуждает Мандельштам. Эта схема изображена на рис. 1.

Здесь F_1 и F_2 — две системы линз. Объект находится в фокальной плоскости $A'B'$ системы линз F_1. Изображением некоторой точки x' этого объекта является точка x в фокальной плоскости AB второй системы линз. Во второй фокальной плоскости системы линз F_1 находится ограничивающая диафрагма D. Кроме того, в плоскостях $A'B'$ и AB находятся диафрагмы, ограничивающие размер объекта и его изображения. Для простоты предполагается, что удаление точек x и x' от оптической

оси системы одинаково, т. е. увеличение системы равно единице. Для этой системы и формулируется вопрос о нахождении повторяющихся распределений. Причем Мандельштам ставит этот вопрос как для поля в случае когерентных объектов, так и для интенсивности в случае полностью некогерентных (самосветящихся) объектов. Нас в дальнейшем будет интересовать только первый случай. В качестве ограничивающей

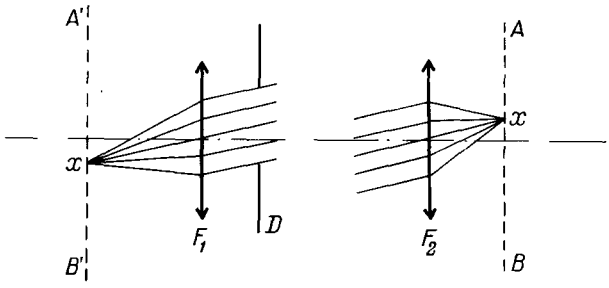

Рис. 1.

диафрагмы Мандельштам рассматривает прямоугольное отверстие, а ядром интегрального уравнения (1) берет функцию

$$K(x, x') = \text{const} \cdot \frac{\sin C(x-x')}{x-x'}, \tag{2}$$

являющуюся, как известно, фраунгоферовой дифракционной картиной прямоугольного отверстия. Константа C в (2) известным образом зависит от размера диафрагмы и длины волны λ.

Небезынтересно проследить, какой из современных квазиоптических задач из теории открытых волноводов и резонаторов соответствует такая

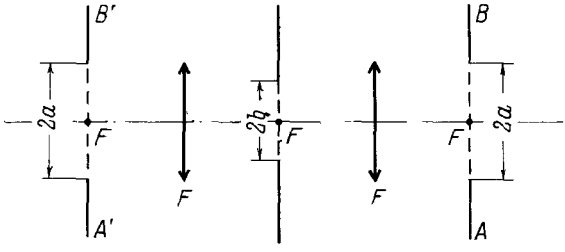

Рис. 2.

конкретная постановка. Нетрудно показать, что оптическая система, отвечающая рассматриваемому ядру (2), может быть приведена к виду, изображенному на рис. 2. Правда в последней системе коэффициент увеличения равен —1, а не 1, как принято для простоты у Мандельштама при написании интегрального уравнения, но это не имеет принципиального значения и отражается только на знаке собственных чисел p. Совершенно очевидно, что если мы найдем решение интегрального уравнения (1) для указанной оптической системы, эти же решения будут описывать нам повторяющиеся распределения поля в линзовом диафрагмированном волноводе, который может быть получен периодическим продолжением рассматриваемой одиночной оптической ячейки. Собственные значения p будут в этом случае определять затухание и фазу волновых пучков в таком волноводе. Нетрудно построить и схему открытого резонатора, соответствующую оптической системе, изображенной

на рис. 2. Для этого вместо пучка, проходящего через диафрагму D, можно рассматривать пучок, отраженный от плоского проводящего экрана, металлизирующего отверстие диафрагмы. Аналогичным образом можно поступить и с диафрагмой $A'B'$. В результате получим открытый резонатор, изображенный на рис. 3.

Уравнение (1) описывает, очевидно, распределение поля на левом зеркале этого резонатора. От схемы на рис. 3 можно перейти, путем замены

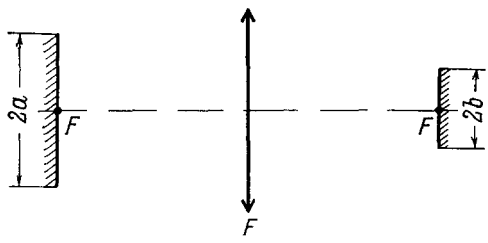

Рис. 3.

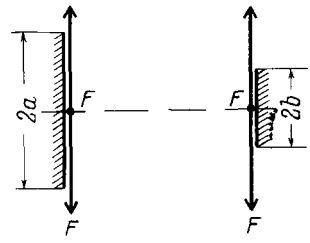

Рис 4

одиночной линзы F двумя эквивалентными ей в смысле передачи изображения линзами, к резонатору, показанному на рис. 4. В этом резонаторе линзы с фокусным расстоянием F расположены вблизи зеркал, удаленных друг от друга на расстояние F.

Эта система, в свою очередь, эквивалентна в отношении распределения поля на зеркалах резонатору с двумя конфокальными сферическими зеркалами с фокусным расстоянием $F/2$ (рис. 5). Последняя схема является в настоящее время хорошо известной и подробно изученной моделью софокусного резонатора, широко применяющегося в лазерной технике [1-4].

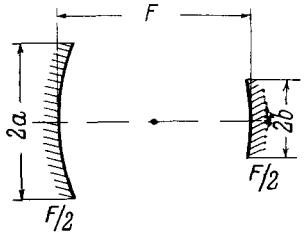

Рис. 5.

Таким образом, мы видим, что тот конкретный пример, который Мандельштам рассматривает в своей работе, с современной точки зрения является задачей о типах волн диафрагмированного софокусного лучевого волновода (рис. 2) или эквивалентного ему софокусного резонатора (рис. 5).

Мандельштам решил полученное интегральное уравнение (1) с ядром (2) при $a = \infty$, т. е. для распределения поля, недиафрагмированного в плоскости объекта и изображения. Тем самым он фактически нашел распределение поля на недиафрагмированном (левом) зеркале резонатора, изображенного на рис. 3, или эквивалентных ему резонаторов (рис. 4 и 5).

Если бы Мандельштам рассмотрел решение написанного им уравнения (1) для конечных a, то тем самым он исследовал бы известные теперь уже типы колебаний диафрагмированного лучевого софокусного волновода или софокусного резонатора с конечными зеркалами. Однако в то время интегральные уравнения с ядром типа (2) были еще слабо изучены. Основные результаты для них были получены спустя несколько десятилетий в связи с задачами, возникшими в теории информации, теории антенн и, наконец, теории открытых волноводов и резонаторов [11-14].

Поэтому в распоряжении Мандельштама в то время не было разработанного математического аппарата для подробного исследования свойств решений полученных им уравнений. Тем больший интерес представляют те соображения о характере решений, а следовательно, и харак-

тере повторяющихся распределений поля, которые высказаны Мандельштамом на основе общей теории интегральных уравнений и которые целиком относятся, в силу вышесказанного, к современным квазиоптическим волноводам и резонаторам. Так как в примере, рассматриваемом Мандельштамом, ядро (2) — действительное и симметричное, он указывает, что существует бесконечное множество собственных значений p и соответствующих им решений интегрального уравнения (1) или, как мы теперь говорим в применении к открытым резонаторам и волноводам, бесконечное множество собственных типов волн.

Исключительно по-современному звучит следующее замечание Мандельштама: «Практически важно следующее положение: ...из бесконечного множества структур, которые (при различных значениях p) дают подобные изображения, только конечному числу соответствует заметная освещенность изображения ... Структуры, соответствующие всем остальным значениям p, будут изображаться лишь с ничтожной яркостью» (Л. И. Мандельштам [8], стр. 236). Таким образом, уже тогда Мандельштам обратил внимание на важнейшее свойство диафрагмированных оптических систем избирательно с различной освещенностью передавать повторяющиеся, подобные по структуре распределения поля. На этом свойстве основывается в современных квазиоптических волноводах и резонаторах селекция колебаний, разрежение их спектра. С ним связана возможность получения в многомодовых системах с размерами, много бо́льшими длины волны, одномодовых режимов работы. Селекция колебаний в открытых резонаторах и лучевых волноводах в настоящее время является одной из важнейших проблем современной квазиоптики. От решения ее, в частности, зависят возможности успешного применения лазеров для целей связи, навигации, локации, микроскопических операций, т. е. всюду, где от лазерного пучка требуется высокая степень когерентности, одночастотность, большая направленность.

С математической точки зрения проблема оптимальной селекции заключается в отыскании такого совместимого с уравнениями электромагнитного поля оператора преобразования волнового пучка, наибольшее собственное значение которого по модулю существенно превышало бы все остальные, оставаясь при этом достаточно близким к единице. Однако в такой общей постановке эта проблема никем не рассматривалась. Анализ уже изученных до сих пор конкретных линзовых и зеркальных систем показывает, что наилучшей селективностью в этом смысле обладают софокусные резонаторы и волноводы с диафрагмами, имеющими постоянную прозрачность по всей апертуре, т. е. именно те системы, анализом которых и занимался Л. И. Мандельштам в работе 1912 г. Дополнительные возможности подавления нежелательных колебаний в открытых системах могут быть связаны с применением специальных селективных элементов.

В связи с проблемой лучевой передачи электромагнитной энергии представляет интерес еще один аспект задачи Мандельштама. Речь идет об отыскании оптимальной конфигурации волнового пучка, осуществляющего передачу энергии между двумя заданными апертурами с наименьшими потерями.

В оптической схеме, рассмотренной Мандельштамом (рис. 2), роль таких апертур играют отверстия в экранах $A'B'$ и AB соответственно в пространстве объектов и пространстве изображений. Но это могут быть и две апертуры в свободном пространстве. Можно показать, что в случае прямоугольных апертур решение этой вариационной задачи опять-таки приводит к интегральному уравнению (1) с ядром типа (2) [15]. Отсюда следует, что как основное распределение поля в оптической схеме

Мандельштама (рис. 2), так и основной тип колебаний в софокусном резонаторе или волноводе обладают наименьшими потерями на излучение по сравнению с любыми другими возможными распределениями поля между заданными апертурами в этих системах. В этом смысле те распределения поля, которые могут быть получены из интегрального уравнения, сформулированного Мандельштамом, являются оптимальными.

Таким образом, в подходе, развитом Л. И. Мандельштамом в теории оптического изображения более пятидесяти лет назад, мы видим почти все основные элементы, характерные для современной квазиоптической теории открытых резонаторов и волноводов.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. A. G. Fox, T. Li, Proc. IRE 48, 1904 (1960); Bell Syst. Tech. J. 40, 453 (1961).
2. G. D. Boyd, J. P. Gordon, Bell Syst. Tech. J. 40, 489 (1961).
3. G. D. Boyd, H. Kogelnik, Bell Syst. Tech. J. 41, 1347 (1962).
4. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ 44, 1050 (1963); ЖЭТФ 45, 648 (1963); ЖТФ 34, 193 (1964); ЖТФ 34, 205 (1964).
5. G. Goubau, F. Schwering, IRE Trans., AP-9, 248 (1961).
6. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ 34, 1541 (1964).
7. Б. З. Каценеленбаум, УФН 83, 81 (1964).
8. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, т. 1, М., Изд-во АН СССР, 1948, стр. 229—241.
9. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, т. 1, М., Изд-во АН СССР, 1948, стр. 211, 226.
10. D. J. Newman, S. P. Morgan, Bell Syst. Tech. J. 43 (1), 1, 113 (1964).
11. D. Slepian, IRE Trans., PGIT-3, 68 (1954).
12. D. Slepian, H. O. Pollak, I, Bell Syst. Tech. J. 40, 43 (1961).
13. H. J. Landau, H. O. Pollak, II, Bell Syst. Tech. J. 40, 65 (1961).
14. H. J. Landau, H. O. Pollak, III, Bell Syst. Tech. J. 41, 1295 (1962).
15. Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов, Изв. вузов (Радиофизика) 7, 313 (1964).