1965 г. Июль Том 86, вып. 3

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

535.14

К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ*)

А. Эйнштейн

Формальное сходство кривой распределения по длинам волн теплового излучения с законом распределения скоростей Максвелла слишком поразительно, чтобы оно могло долго оставаться нераскрытым. Действительно, уже В. Вин в важной теоретической работе, в которой он вывел свой закон смещения

$$\varrho = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right), \tag{1}$$

пришел благодаря этому сходству к такому определению формулы излучения, которое сыграло в дальнейшем большую роль. Как известно, он вывел при этом следующую формулу:

$$\varrho = \alpha\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \tag{2}$$

которая и сегодня считается правильной в качестве предельного закона для больших значений ν/T (формула излучения Вина). Сегодня мы знаем, что никакое рассмотрение, основанное на классической механике и электродинамике, не может привести к правильной формуле излучения и что классическая теория обязательно дает формулу Рэлея

$$\varrho = \frac{k\alpha}{h}\nu^2 T. \tag{3}$$

Когда Планк в предположении о дискретных элементах энергии вывел в своем решающем исследовании формулу излучения

$$\varrho = \alpha\nu^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \tag{4}$$

из которой как быстрое следствие развилась квантовая теория, естественно, что рассуждение Вина, которое привело к уравнению (2), снова было забыто.

Недавно я нашел применение первоначального рассуждения Вина**), а именно основанный на главных положениях квантовой теории вывод формулы излучения Планка, в котором проявляется связь между максвелловской кривой и кривой распределения по длинам волн. Этот вывод заслуживает внимания не только благодаря своей простоте, но особенно

*) A. Einstein, Zur Quantentheorie der Strahlung, Phys. Zs. 18, 121 (1917). Впервые опубликовано в Mitteilungen d. Phys. Ges. Zürich, Nr. 18 (1916). Перевод В. Иванова.

**) Verh. d. Deutsch. phys. Ges., № 13/14, 318 (1916). В настоящем исследовании повторяются рассуждения, приведенные в только что процитированной статье.

потому, что он вносит некоторую ясность в непонятный нам еще процесс испускания и поглощения излучения веществом. Положив в основу некоторые гипотезы об испускании и поглощении излучения молекулами, понятные с точки зрения квантовой теории, я показал, что при температурном равновесии молекулы с состояниями, распределенными в смысле квантовой теории, находятся в динамическом равновесии с излучением Планка; таким путем формула Планка (4) получается ошеломляюще простым и обобщенным способом. Она получается из условия, что требуемое квантовой теорией распределение состояний внутренней энергии молекул должно определяться только поглощением и испусканием излучения.

Однако если принятые гипотезы о взаимодействии излучения и вещества верны, они должны давать больше, чем правильное статистическое распределение внутренней энергии молекул. При поглощении и испускании излучения имеет место также передача молекулам импульса; это приводит к тому, что благодаря одному лишь взаимодействию излучения с молекулами устанавливается определенное распределение последних по скоростям. Очевидно, оно должно быть таким же, как распределение скоростей молекул, вытекающее из предположения, что молекулы взаимодействуют только путем взаимных столкновений, т. е. оно должно совпадать с распределением Максвелла. Необходимо потребовать, чтобы средняя кинетическая энергия, которой обладает молекула (на одну степень свободы) в поле излучения Планка температуры T, была равна $kT/2$; это условие должно выполняться независимо от природы рассматриваемых молекул и от частот излучений, которые они поглощают и испускают. В настоящей статье мы покажем, что это важное требование действительно выполняется; тем самым наши простые гипотезы об элементарных процессах испускания и поглощения получают новую поддержку.

Однако для того, чтобы получить упомянутый результат, требуется некоторое дополнение принятых ранее за основу гипотез, которое относится исключительно к обмену энергией. Возникает вопрос: испытывает ли молекула отдачу при поглощении или испускании энергии ε? Рассмотрим с точки зрения классической электродинамики, например, спонтанное излучение. Когда тело излучает энергию ε, оно испытывает отдачу (импульс) ε/c, если все количество излучения ε испускается в одном направлении. Но если излучение является пространственно-симметричным процессом, например сферическими волнами, то вообще нет никакой отдачи. Эта возможность играет роль также и в квантовой теории излучения. Если молекула при переходе из одного возможного с точки зрения квантовой теории состояния в другое получает или отдает энергию ε в виде излучения, то элементарный процесс такого рода можно представить себе либо частично или полностью пространственно-направленным, либо симметричным (не направленным). Оказывается, что к непротиворечивой теории мы придем только в том случае, если все элементарные процессы будем считать полностью направленными. В этом состоит основной результат последующих рассуждений.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ. КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТОЯНИЙ

Согласно квантовой теории молекула определенного рода, если отвлечься от ее ориентации и поступательного движения, может занимать лишь дискретный набор состояний $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ с внутренними энергиями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Если молекулы такого рода принадлежат газу с температурой T, то относительная частота W_n этого состояния Z_n дается форму-

лой, которая соответствует каноническому распределению состояний статистической механики:

$$W_n = p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}. \tag{5}$$

В этой формуле $k = \frac{R}{N}$ — известная постоянная Больцмана, p_n — не зависящее от температуры число, характеризующее молекулу и n-е квантовое состояние; оно может быть названо статистическим «весом» этого состояния. Формулу (5) можно вывести из принципа Больцмана или чисто термодинамическим способом. Равенство (5) является выражением наиболее широкого обобщения максвелловского закона распределения скоростей.

Последние принципиальные успехи квантовой теории относятся к теоретическому отысканию возможных с точки зрения квантовой теории состояний Z_n и их весов p_n. Для настоящего принципиального исследования не требуется более подробного определения квантовых состояний

§ 2. ГИПОТЕЗЫ ОБ ОБМЕНЕ ЭНЕРГИЕЙ ПОСРЕДСТВОМ ИЗЛУЧЕНИЯ

Пусть Z_n и Z_m есть два возможных в смысле квантовой теории состояния молекулы газа, энергии которых ε_n и ε_m удовлетворяют неравенству

$$\varepsilon_m > \varepsilon_n.$$

Молекула может переходить из состояния Z_n в состояние Z_m с поглощением энергии $\varepsilon_m - \varepsilon_n$; точно так же возможен переход из состояния Z_m в состояние Z_n с выделением энергии в виде излучения. Излучение, которое молекула при этом поглощает или испускает, будет иметь характеристическую частоту ν, зависящую от рассматриваемой комбинации индексов (m, n).

Помимо законов, которые служат мерилом этого перехода, введем некоторые гипотезы, которые получаются посредством переноса соотношений, известных из классической теории для резонатора Планка, в неизвестную еще квантовую теорию.

а) Спонтанное излучение (Ausstrahlung). Как известно, согласно Герцу, колеблющийся резонатор Планка излучает энергию независимо от того, возбуждается ли он внешним полем или нет. В соответствии с этим при отсутствии возбуждения внешними факторами молекула может переходить из состояния Z_m в состояние Z_n с испусканием энергии излучения $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ с частотой μ. Вероятность dW того, что этот переход действительно будет иметь место в течение времени dt, равна

$$dW = A_m^n\, dt, \tag{A}$$

где A_m^n означает характеристическую константу для рассматриваемой комбинации индексов.

Принятый статистический закон соответствует радиоактивной реакции, воображаемому элементарному процессу такой реакции, при котором излучаются только γ-лучи. Нет необходимости допускать, что этот процесс не требует времени; это время должно быть лишь пренебрежимо мало по сравнению с тем временем, которое молекула находится в состоянии Z_1, и т. д.

б) Индуцированное излучение (Einstrahlung). Если резонатор Планка находится в поле излучения, то энергия резонатора изменяется благодаря тому, что электромагнитное поле излучения совершает над резонатором работу; эта работа может быть положительной и отрицательной, в зависимости от фаз резонатора и осциллирующего поля.

В соответствии с этим мы введем следующую квантовотеоретическую гипотезу. Под действием плотности излучения ϱ с частотой ν молекула может переходить из состояния Z_n в состояние Z_m; при этом молекула принимает энергию излучения $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ согласно вероятностному закону

$$dW = B_n^m \varrho \, dt. \tag{B}$$

Точно так же пусть возможен под действием облучения переход $Z_m \to Z_n$, при котором освобождается энергия излучения $\varepsilon_m - \varepsilon_n$, по закону вероятностей

$$dW = B_m^n \varrho \, dt. \tag{B'}$$

B_n^m и B_m^n являются постоянными. Оба процесса мы назовем «изменением состояния через индуцированное излучение».

Спрашивается теперь, какой импульс передается молекуле при рассматриваемом изменении состояния. Начнем с процессов индуцированного излучения. Если пучок лучей определенного направления совершает работу над резонатором Планка, этот пучок теряет соответствующую энергию. Этому переносу энергии согласно выражению для импульса соответствует также перенос импульса от пучка лучей к резонатору. Таким образом, последний испытывает действие сил в направлении пучка лучей. Если передаваемая энергия отрицательна, то и действие сил на резонатор имеет соответствующее направление. Очевидно, в случае квантовой гипотезы это означает следующее. Если в результате облучения пучком лучей произойдет процесс $Z_n \to Z_m$, то молекула получит импульс $(\varepsilon_m - \varepsilon_n)/c$ в направлении распространения пучка. В результате процесса индуцированного излучения $Z_m \to Z_n$ передаваемый импульс имеет такую же величину, но противоположное направление. В случае, когда молекула подвержена одновременному действию нескольких пучков лучей, мы предположим, что полная энергия $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ элементарного процесса отнимается или прибавляется к одному из этих пучков, так что и в этом случае молекуле также передается импульс $\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c}$.

При потере энергии в результате спонтанного излучения в случае резонатора Планка последний в целом не получает никакого импульса, так как, согласно классической теории, спонтанное излучение имеет вид сферической волны. Однако уже отмечалось, что мы можем прийти к непротиворечивой квантовой теории лишь в том случае, если мы предположим, что процесс спонтанного излучения также является направленным. Тогда в каждом элементарном процессе спонтанного излучения $(Z_m \to Z_n)$ молекуле передается импульс, величина которого равна $(\varepsilon_m - \varepsilon_n)/c$. Если молекула изотропна, то мы должны считать равновероятными все направления спонтанного излучения. В случае неизотропной молекулы мы придем к такому же утверждению, если ее ориентация меняется в ходе времени по законам случая. Впрочем, такого рода предположение нужно принять также и для статистических законов индуцированного излучения (B) и (B′), ибо в противном случае константы B_n^m и B_m^n должны были бы зависеть от направления; мы можем избежать этого, приняв изотропность или псевдоизотропность (посредством образования среднего по времени) молекулы.

§ 3. ВЫВОД ПЛАНКОВСКОГО ЗАКОНА ИЗЛУЧЕНИЯ

Найдем теперь ту эффективную плотность излучения ϱ, которая должна существовать для того, чтобы энергетический обмен между излучением и молекулами, осуществляемый по статистическим законам (A), (B) и (B′), не нарушал распределения состояний молекул, которое отве-

чает уравнению (5). Для этого необходимо и достаточно, чтобы за единицу времени в среднем происходило столько же элементарных процессов типа (B), сколько и типа (A) и (B′) вместе взятых. В силу (5), (A), (B), (B′) это условие дает для элементарных процессов, соответствующих комбинации индексов (m, n), уравнение

$$p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} B_n^m \varrho = p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} (B_m^n \varrho + A_m^n).$$

Примем, далее, что с ростом T величина ϱ должна стремиться к бесконечности; тогда между константами B_n^m и B_m^n должно иметь место соотношение

$$p_n B_n^m = p_m B_m^n. \tag{6}$$

Тогда в качестве условия динамического равновесия получим из нашего уравнения

$$\varrho = \frac{A_m^n / B_m^n}{e^{\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}} - 1}. \tag{7}$$

Это выражение представляет собой зависимость плотности излучения от температуры, согласно закону Планка. Из закона смещения Вина (1) немедленно следует, что

$$\frac{A_m^n}{B_m^n} = \alpha \nu^3 \tag{8}$$

и

$$\varepsilon_m - \varepsilon_n = h\nu, \tag{9}$$

где α и h являются универсальными постоянными. Для того чтобы получить численное значение постоянной α, нужно иметь точную теорию электродинамических и механических процессов; здесь мы вынуждены пока что ограничиваться рассмотрением предельного рэлеевского случая высоких температур, для которых справедлива в пределе классическая теория.

Уравнение (9) образует, как известно, второе основное правило в теории спектров Бора, о котором после усовершенствования Зоммерфельда и Эпштейна можно уже утверждать, что оно принадлежит к незыблемым основам нашей науки. Как я показал, оно включает также и закон фотохимической эквивалентности.

§ 4. МЕТОД РАСЧЕТА ДВИЖЕНИЯ МОЛЕКУЛ В ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Обратимся теперь к исследованию движений, которые совершают наши молекулы под влиянием излучения. Мы воспользуемся при этом методом, который хорошо известен из теории броуновского движения и неоднократно использовался мной в числовых расчетах движений в области излучения. Для упрощения расчета мы проведем его лишь для случая движений в одном направлении, в направлении оси X системы координат. Кроме того, мы ограничимся расчетом среднего значения кинетической энергии поступательного движения, отказавшись, таким образом, от доказательства того, что эти скорости v распределены по закону Максвелла. Пусть масса M молекулы достаточно велика так, чтобы можно было пренебречь высокими степенями v/c по сравнению с более низкими; тогда мы можем применить к молекуле обычную механику. Далее, не

нарушая общности, мы можем считать, что состояния с индексами m и n являются единственными, которые могут занимать молекулы.

Импульс Mv молекулы испытывает за короткое время τ изменения двух видов. Несмотря на то, что излучение происходит равномерно по всем направлениям, молекула в результате своего движения будет испытывать действие силы, которое вызвано излучением и противодействует движению. Эта сила равна Rv, где R означает некоторую константу, которая будет вычислена позже. Эта сила заставила бы молекулу покоиться, если бы беспорядочный характер действия излучения не приводил к тому, что за время τ молекула получит импульс Δ переменного знака и переменной величины; это несистематическое влияние, вопреки сказанному ранее, вызовет определенное движение молекулы. В конце рассматриваемого короткого промежутка времени τ импульс молекулы будет иметь значение

$$Mv - Rv\tau + \Delta.$$

Поскольку распределение скоростей должно оставаться постоянным во времени, приведенная величина по своему среднему абсолютному значению должна быть равна величине Mv; средние квадратичные значения обеих величин, взятые за большой промежуток времени или по большому числу молекул, должны быть равны друг другу:

$$\overline{(Mv - Rv\tau + \Delta)^2} = \overline{(Mv)^2}.$$

Поскольку в расчете мы специально выявили систематическое влияние v на импульс молекулы, мы пренебрежем средним значением $\overline{v\Delta}$. Раскрывая левую часть уравнения, получим, следовательно,

$$\overline{\Delta^2} = 2RM\overline{v^2}\tau. \tag{10}$$

Среднее значение $\overline{v^2}$, к которому приводит взаимодействие с нашими молекулами излучения, имеющего температуру T, должно быть равно среднему значению $\overline{v^2}$, которое имеет молекула газа при температуре T, согласно газовым законам кинетической теории газа, ибо в противном случае присутствие нашей молекулы нарушало бы равновесие между тепловым излучением и любым газом с такой же температурой. Следовательно, должно быть

$$\frac{\overline{Mv^2}}{2} = \frac{kT}{2}. \tag{11}$$

Уравнение (10) переходит, таким образом, в следующее:

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = 2RkT. \tag{12}$$

Теперь исследование будет продолжено следующим образом. С помощью наших гипотез о взаимодействии между излучением и молекулами можно рассчитать $\overline{\Delta^2}$ и R для данного излучения ($\varrho(\nu)$). Если затем выразить ϱ как функцию от ν и T в соответствии с уравнением Планка (4) и подставить полученный результат в (12), то последнее уравнение должно выполняться тождественно.

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ R

Пусть молекула рассматриваемого рода равномерно движется со скоростью v вдоль оси x системы координат K. Рассмотрим вопрос о среднем значении импульса, передаваемом излучением молекуле в единицу времени. Чтобы вычислить его, мы должны описывать излучение из системы

координат K', которая покоится относительно рассматриваемой молекулы. Ибо наши гипотезы об испускании и поглощении мы сформулировали лишь для покоящейся молекулы. Преобразование к системе K' много раз проводилось в литературе, особенно точно в берлинской диссертации Мозенгейля. Полноты ради я все же повторю здесь простые рассуждения.

Относительно K излучение изотропно, т. е. определенному бесконечно малому телесному углу $d\varkappa$, относящемуся к этому направлению излучения, соответствует следующее излучение с областью частот $d\nu$ на единицу объема:

$$\varrho\, d\nu \frac{d\varkappa}{4\pi}, \tag{13}$$

где ϱ зависит только от частоты ν, но не от направления. Этому приведенному излучению соответствует в системе координат K' приведенное излучение, которое также характеризуется областью частот $d\nu'$ и определенным телесным углом $d\varkappa'$. Объемная плотность этого приведенного излучения равна

$$\varrho'(\nu', \varphi')\, d\nu' \frac{d\varkappa'}{4\pi}. \tag{13'}$$

Тем самым определено ϱ'. Оно зависит от направления, определяемого известным образом через угол φ' с осью X' и угол ψ' проекции на плоскость $Y' - Z'$ с осью Y'. Этим углам соответствуют углы φ и ψ, которые аналогичным образом определяют расчет $d\varkappa$ по отношению к K.

Прежде всего ясно, что между (13) и (13′) должен иметь место тот же самый закон преобразования, что и для квадратов амплитуд A^2 и A'^2 некоторой плоской волны соответствующего направления. Следовательно, в выбранном нами приближении

$$\frac{\varrho'(\nu', \varphi')\, d\nu'\, d\varkappa'}{\varrho(\nu)\, d\nu\, d\varkappa} = 1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi, \tag{14}$$

или

$$\varrho'(\nu', \varphi') = \varrho(\nu) \frac{d\nu}{d\nu'} \frac{dk}{dk'} \left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi\right). \tag{14'}$$

Далее, теория относительности дает в выбранном приближении обычные формулы

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\cos^2\varphi\right), \tag{15}$$

$$\cos\varphi' = \cos\varphi - \frac{v}{c} + \frac{v}{c}\cos^2\varphi. \tag{16}$$

$$\psi' = \psi. \tag{17}$$

Из (15) в соответствующем приближении следует

$$\nu = \nu'\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'\right).$$

Следовательно, в выбранном приближении имеем также

$$\varrho(\nu) = \varrho\left(\nu' + \frac{v}{c}\nu'\cos\varphi'\right), \tag{18}$$

$$\varrho(\nu) = \varrho(\nu') + \frac{\partial\varrho}{\partial\nu}(\nu')\frac{v}{c}\nu'\cos\varphi'.$$

Далее, согласно (15), (16) и (17),

$$\frac{d\nu}{d\nu'} = 1 + \frac{v}{c}\cos\varphi',$$

$$\frac{d\varkappa}{d\varkappa'} = \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi} = \frac{d(\cos\varphi)}{d(\cos\varphi')} = 1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi'.$$

В силу этих двух соотношений и соотношения (18) уравнение (14)′ переходит в следующее:

$$\varrho'(\nu', \varphi') = \left[(\varrho)_\nu + \frac{v}{c}\nu'\cos\varphi'\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\nu}\right)_\nu\right]\left(1 - 3\frac{v}{c}\cos\varphi'\right). \qquad (19)$$

С помощью (19), а также наших гипотез о спонтанном и индуцированном излучениях молекулы, мы можем легко рассчитать среднее значение импульса, передаваемого молекуле в единицу времени. Однако, прежде чем это сделать, мы должны сказать несколько слов в оправдание выбранного способа. Можно возразить, что уравнения (14), (15), (16) основаны на теории Максвелла, которая несовместима с квантовой теорией. Однако это возражение относится больше к форме, чем к существу предмета. Ибо какую бы форму ни принимала теория электромагнитных процессов, принцип Допплера и закон аберрации во всяком случае сохранятся, а следовательно, сохранятся и уравнения (15) и (16). Далее, область применения энергетического соотношения (14) шире области применения волновой теории; например, этот закон преобразования справедлив также и для плотности энергии, движущейся с (квази)световой скоростью, для массы с бесконечно малой плотностью покоя. Следовательно, уравнение (19) может претендовать на справедливость в случае любой теории излучения.

Согласно (B), излучение, относящееся к пространственному углу $d\varkappa'$, должно было бы давать в секунду

$$B_n^m \varrho'(\nu', \varphi')\frac{d\varkappa'}{4\pi}$$

элементарных процессов индуцированного излучения типа $Z_n \to Z_m$, если бы молекула после каждого такого элементарного процесса тотчас возвращалась обратно в состояние Z_n. Однако в действительности время пребывания в состоянии Z_n за секунду, согласно (5), равно

$$\frac{1}{S}p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}},$$

где для краткости положено

$$S = p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} + p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}. \qquad (20)$$

Следовательно, в действительности число таких процессов в секунду составляет

$$\frac{1}{S}p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} B_n^m \varrho'(\nu', \varphi')\frac{d\varkappa'}{4\pi}.$$

При каждом элементарном процессе такого рода атом будет получать в направлении положительной оси x импульс

$$\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c}\cos\varphi'.$$

Аналогичным образом найдем, исходя из (B), что соответствующее число элементарных процессов индуцированного излучения типа $Z_m \to Z_n$

в секунду равно

$$\frac{1}{S} p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} B_m^n \varrho'(\nu', \varphi') \frac{d\varkappa'}{4\pi}$$

и при каждом таком элементарном процессе молекуле передается импульс

$$-\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c} \cos\varphi'.$$

С учетом (6) и (9) общий импульс, передаваемый молекуле при индуцированном облучении в единицу времени, равен

$$\frac{h\nu'}{cS} p_n B_n^m \left(e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} - e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}\right) \int \varrho'(\nu', \varphi') \cos\varphi \frac{d\varkappa'}{4\pi},$$

где интегрирование распространяется на все пространственные элементарные углы. Интегрирование дает с учетом (19) выражение

$$-\frac{h\nu}{c^2 S}\left(\varrho - \frac{1}{3}\nu\frac{\partial\varrho}{\partial\nu}\right) p_n B_n^m \left(e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} - e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}\right) v.$$

При этом эффективная частота снова обозначена через ν (вместо ν').

Это выражение, однако, представляет средний импульс, передаваемый в единицу времени молекуле, движущейся со скоростью v. Ибо ясно, что имеющие место элементарные процессы спонтанного излучения, происходящие без воздействия излучения, рассматриваемые из системы K', не обладают преимущественным направлением и, следовательно, в среднем не могут передать молекуле никакого импульса. Поэтому в качестве конечного результата нашего рассмотрения мы получим

$$R = \frac{h\nu}{c^2 S}\left(\varrho - \frac{1}{3}\nu\frac{\partial\varrho}{\partial\nu}\right) p_n B_n^m e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right). \tag{21}$$

§ 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ $\overline{\Delta^2}$

Намного проще рассчитать влияние нерегулярности элементарного процесса на механическое поведение молекул. Ибо в основу этого расчета можно положить покоящуюся молекулу в приближении, которым мы довольствовались с самого начала.

Пусть какое-то событие приводит к тому, что молекула получает импульс λ в направлении оси x. Этот импульс в различных случаях имеет различные знаки и разные величины. Однако для λ справедлив такой статистический закон, что среднее значение λ исчезает. Пусть теперь λ_1, λ_2, ... есть значения импульса, которые передают молекуле в направлении оси x несколько действующих независимо друг от друга факторов, так что общий передаваемый импульс Δ дается выражением

$$\Delta = \sum \lambda_v.$$

Тогда, если для отдельных λ_v среднее значение $\overline{\lambda_v}$ исчезает, то

$$\overline{\Delta^2} = \overline{\sum \lambda_v^2}. \tag{22}$$

Если средние значения отдельных импульсов равны друг другу ($=\overline{\lambda^2}$), а l есть общее число событий, дающих импульсы, то справедливо следующее соотношение:

$$\overline{\Delta^2} = l\overline{\lambda^2}. \tag{22a}$$

Согласно нашим гипотезам при каждом процессе спонтанного и индуцированного излучения молекуле передается импульс

$$\lambda = \frac{h\nu}{c} \cos \varphi.$$

При этом φ означает угол между осью X и некоторым направлением, выбранным по закону случая. Отсюда получим

$$\overline{\lambda^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{h\nu}{c} \right)^2. \tag{23}$$

Поскольку мы принимаем, что происходящие процессы вызываются не зависящими друг от друга событиями, мы можем применить (22а). Тогда l есть общее число элементарных процессов, происходящих в единицу времени. Оно вдвое больше числа процессов индуцированного излучения $Z_n \to Z_m$ за время τ. Таким образом,

$$l = \frac{2}{S} p_n B_n^m e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \varrho \tau. \tag{24}$$

Из (23), (24) и (22) получим

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = \frac{2}{3S} \left(\frac{h\nu}{c} \right)^2 p_n B_n^m e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \varrho. \tag{25}$$

§ 7. ВЫВОДЫ

Чтобы показать теперь, что, согласно нашим основным гипотезам, получаемый молекулами от излучения импульс никогда не нарушает равновесия, нужно лишь подставить в (25) и (21) вместо $\frac{\Delta^2}{\tau}$ и R вычисленные значения, после чего в (21) величина

$$\left(\varrho - \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \varrho}{\partial \nu} \right) \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)$$

заменяется, согласно (4), на $\varrho h\nu / 3kT$. Сразу после этого следует, что наше фундаментальное уравнение (12) тождественно выполняется.

Завершенные теперь соображения дают основательную поддержку принятым в § 2 гипотезам о взаимодействии между веществом и излучением через процессы поглощения и испускания, соответственно через спонтанное и индуцированное излучения. К этим гипотезам меня привело стремление простейшим образом постулировать квантовотеоретическое поведение молекул, которое является аналогом резонатора Планка в классической теории. Из общей квантовой гипотезы для вещества легко следует второе правило Бора (уравнение (9)), а также формула излучения Планка.

Однако самым важным мне кажется вывод, касающийся импульса, который передается молекуле при спонтанном и индуцированном излучениях. Если бы одно из наших предположений об импульсах изменилось, следствием этого явилось бы нарушение уравнения (12); едва ли возможно, не кладя в основу наших гипотез, остаться в согласии с этим соотношением, требуемым теорией теплоты. Поэтому мы можем считать нижеследующее достаточно надежно доказанным.

Если пучок лучей воздействует на встретившуюся ему молекулу так, что она посредством элементарного процесса получает или отдает в форме излучения некоторое количество энергии $h\nu$ (индуцированное излучение—Einstrahlung), то молекула всегда будет получать и импульс $h\nu/c$ при

поглощении энергии — в направлении движения пучка, а при отдаче — в противоположном направлении. Если молекула находится под воздействием нескольких направленных пучков лучей, то в элементарном процессе индуцированного излучения принимает участие только один из них; тогда только этот пучок определяет направление получаемого молекулой импульса.

Если молекула теряет энергию без внешнего возбуждения (спонтанное излучение — Ausstrahlung), то этот процесс также является направленным. Спонтанного излучения в виде сферических волн не существует. В элементарном процессе спонтанного излучения молекула получает импульс отдачи, величина которого равна $h\nu/c$, а направление определяется, согласно современному состоянию теории, лишь «случайностью».

Эти свойства элементарного процесса, требуемые уравнением (12), делают почти неизбежным создание подлинно квантовой теории излучения. Слабость теории заключается, с одной стороны, в том, что она не приводит нас к более тесному объединению с волновой теорией; с другой стороны, в том, что время и направление элементарного процесса предоставляются «случаю»; впрочем, я полностью уверен в надежности выбранного метода.

Еще одно общее замечание необходимо здесь привести. Почти все теории теплового излучения основываются на рассмотрении взаимодействия между излучением и молекулами. Однако в общем ограничиваются рассмотрением обмена энергией, не учитывая обмена импульсом. Это легко чувствуется, ибо малая величина передаваемых излучением импульсов приводит к тому, что в действительности последние почти всегда отступают перед другими факторами, вызывающими движение. Но в теоретическом рассмотрении такие малые действия наряду с бросающимся в глаза переносом энергии посредством излучения нужно считать равнозначными, поскольку энергия и импульс непосредственно связаны друг с другом; поэтому теорию можно считать правильной лишь в том случае, если показано, что импульсы, переносимые, согласно этой теории, от излучения к веществу, приводят к таким движениям, которые требует тепловая теория.

3 марта 1917 г.

530.145+536.63

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ОДНОАТОМНОГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА*)

I

До настоящего времени не существует квантовой теории одноатомного идеального газа, свободной от произвольных установок. Этот пробел должен быть восполнен в дальнейшем на основании нового способа рассмотрения, предложенного Бозе, с помощью которого этот автор обосновал заслуживающий всяческого внимания вывод формулы излучения Планка **).

Метод, развиваемый ниже вслед за Бозе, можно охарактеризовать следующим образом. Фазовое пространство некоторой элементарной структуры (здесь — одноатомной молекулы), по отношению к данному

*) A. Einstein, Quantentheorie des einatomige idealen Gases, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. **22**, 261 (1924) и **23**, 3 (1925). Перевод В. Иванова.

**) В ближайшее время будет опубликовано в «Zeitschrift für Physik».

(трехмерному) объему, разделяется на «ячейки» размером h^3. Если имеется большое количество элементарных структур, то рассматриваемое в термодинамике (микроскопическое) распределение характеризуется тем видом и способом, которым элементарные структуры распределены по этим ячейкам. «Вероятность» макроскопически определенного состояния (в смысле Планка) равна числу различных микроскопических состояний, которыми данное микроскопическое состояние можно мыслить реализованным. Энтропия макроскопического состояния, а вместе с ней и статистическое и термодинамическое поведение системы, определяется тогда по формуле Больцмана.

§ 1. ЯЧЕЙКИ

Объем фазового пространства, который относится к некоторой области координат x, y, z и соответствующих моментов p_x, p_y, p_z одноатомной молекулы, выражается интегралом

$$\varphi = \int dx\, dy\, dz\, dp_x\, dp_y\, dp_z. \tag{1}$$

Если V — объем, в котором может находиться молекула, то фазовый объем всех состояний, энергия которых $E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ меньше определенного значения E, равен

$$\varphi = V\frac{4}{3}\pi(2mE)^{3/2}. \tag{1a}$$

Следовательно, число ячеек Δs, которые принадлежат к определенной элементарной области энергии ΔE, равно

$$\Delta s = 2\pi\frac{V}{h^3}(2m)^{3/2}E^{1/2}\Delta E. \tag{2}$$

Для любого как угодно малого $\frac{\Delta E}{E}$ можно всегда выбрать V настолько большим, что Δs будет очень большим числом.

§ 2. ВЕРОЯТНОСТЬ СОСТОЯНИЯ И ЭНТРОПИЯ

Определим теперь макроскопическое состояние газа.

Пусть в объеме V находится n молекул с массой m. Δn из них могут обладать энергией, величина которой заключена между E и $E+\Delta E$. Эти Δn молекул распределены между Δs ячейками. Δs ячеек должны включать:

$p_0\Delta s$ — ни одной молекулы,

$p_1\Delta s$ — 1 молекулу,

$p_2\Delta s$ — 2 молекулы, и т. д.

Тогда, очевидно, вероятности p_r, относящиеся к s-й ячейке, являются функциями числа ячеек s и целочисленного индекса r и поэтому ниже должны быть обозначены более точно через p_r^s. Ясно, что для всех s

$$\sum_r p_r^s = 1. \tag{3}$$

При данных p_r^s и Δn число возможных распределений Δn молекул в рассматриваемой энергетической области равно

$$\frac{\Delta s!}{\prod\limits_{r=0}^{r=\infty} (p_r^s \Delta s)!};$$

с учетом уравнения (3) это выражение можно заменить по формуле Стирлинга следующим:

$$\frac{1}{\prod\limits_r p_r^{s\,\Delta s p_r^s}},$$

вместо которого можно написать произведение по всем r и s:

$$\frac{1}{\prod\limits_{rs} p_r^{s\,p_r^s}}. \tag{4}$$

Если произведение взять по всем значениям s от 1 до ∞, то формула (4) представляет, очевидно, полное число *связностей*, т. е. вероятность в смысле Планка (макроскопического) состояния газа, определенного через p_r^s. Для энтропии S этого состояния формула Больцмана дает выражение

$$S = -\varkappa \ln \sum_{sr} (p_r^s \ln p_r^s). \tag{5}$$

§ 3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

При термодинамическом равновесии S максимально, причем кроме (3) должны выполняться дополнительные условия, которые заключаются в том, что полное число атомов n, а также полная энергия $\bar{E}$ должны иметь данные значения. Эти условия, очевидно, выражаются двумя уравнениями *)

$$n = \sum_{sr} r p_r^s, \tag{6}$$

$$\bar{E} = \sum_{sr} E^s r p_r^s, \tag{7}$$

где E^s обозначает энергию молекулы, которая принадлежит к s-й фазовой ячейке. Из (1а) легко получить, что

$$\begin{gathered} E^s = cs^{2/3}, \\ c = (2m)^{-1} h^2 \left(\frac{4}{3}\pi V\right)^{-2/3}. \end{gathered} \tag{8}$$

С помощью варьирования по p_r^s в качестве переменного найдем, что при надлежащем выборе констант β^s, A и B должно быть

$$\begin{gathered} p_r^s = \beta^s e^{-\alpha^s r}, \\ \alpha^s = A + Bs^{2/3}. \end{gathered} \tag{9}$$

---

*) $n^s = \sum\limits_r r p_r^s$ есть среднее число молекул, попадающих в s-ю ячейку.

и

$$\alpha^s = A + \frac{cs^{2/3}}{\varkappa T} \qquad (20) \text{ [ср. (9) и (13)]},$$

$$c = \frac{E^s}{s^{2/3}} = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{4}{3}\pi V\right)^{-2/3} \qquad (21) \text{ [ср. (8)]}.$$

Теперь мы преобразуем и обсудим эти результаты. Из рассуждений § 4 следует, что величина e^{-A}, которую мы обозначим как λ, меньше 1. Она является мерой «вырождения» газа. Уравнения (18) и (19) можно записать в виде двойных сумм:

$$n = \sum_{s\tau} \lambda^\tau e^{-\frac{cs^{2/3}\tau}{\varkappa T}}, \tag{18а}$$

$$\overline{E} = c\sum_{s\tau} s^{2/3}\lambda^\tau e^{-\frac{cs^{2/3}\tau}{\varkappa T}}, \tag{19а}$$

причем по τ суммирование нужно проводить для всех σ от 1 до ∞.

Суммирование по s можно произвести, заменив его интегрированием от 0 до ∞. Такая замена допустима из-за медленного изменения экспоненциальной функции при изменении σ. Получим, таким образом,

$$n = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{\varkappa T}{c}\right)^{3/2}\sum_\tau \tau^{-3/2}\lambda^\tau, \tag{18б}$$

$$\overline{E} = c\frac{9\sqrt{\pi}}{8}\left(\frac{\varkappa T}{c}\right)^{5/2}\sum_\tau \tau^{-5/2}\lambda^\tau; \tag{19б}$$

(18б) определяет параметр вырождения λ как функцию от V, T и n; отсюда (19б) определяет энергию и, следовательно, также давление газа.

При общем обсуждении этих уравнений может оказаться, что необходимо найти функцию, которая выражает сумму в (19б) через сумму в (18б). Вообще путем деления находим

$$\frac{\overline{E}}{n} = \frac{3}{2}\varkappa T\,\frac{\sum_\tau \tau^{-5/2}\lambda^\tau}{\sum_\tau \tau^{-3/2}\lambda^\tau}. \tag{22}$$

Таким образом, средняя энергия молекулы газа при данной температуре (и давлении) всегда меньше классического значения, причем множитель перехода тем меньше, чем больше параметр вырождения λ. Согласно (18б) и (21), последний является определенной функцией от $(V/n)^{2/3}mT$.

Если λ настолько мало, что можно пренебречь λ^2 по сравнению с единицей, то

$$\frac{\overline{E}}{n} = \frac{3}{2}\varkappa T\,[1 - 0{,}0318h^3(2\pi m\varkappa T)^{-3/2}]. \tag{22а}$$

Рассмотрим теперь, каким образом квантование влияет на распределение состояний Максвелла. Путем разложения (11) по степеням λ с учетом (20) получим

$$n^s = \text{const}\cdot e^{-\frac{E^s}{\varkappa T}}\left(1 + \lambda e^{-\frac{E^s}{\varkappa T}} + \ldots\right). \tag{23}$$

Скобки выражают влияние квантования на закон распределения Максвелла. Видно, что по сравнению с законом Максвелла медленные молекулы встречаются чаще, чем быстрые.

В заключение я хотел бы обратить внимание на один парадокс, который мне не удалось объяснить. С помощью приведенного здесь метода не представляет труда рассмотреть смесь двух различных газов. В этом случае каждый сорт молекул имеет свои особые «ячейки». Отсюда следует аддитивность энтропии компонентов смеси. Каждый компонент ведет себя в отношении энергии молекул, давления и статистического распределения так, как если бы он был один. Смесь n_1 и n_2 молекул первого и второго сорта, которые как угодно мало отличаются друг от друга (особенно в отношении масс молекул m_1, m_2), приводит, таким образом, при данной температуре к другому давлению и другому распределению состояний, нежели для объединенного газа с числом молекул $n_1 + n_2$ и практически с теми же самыми массами молекул и объемами. Однако это кажется почти невозможным.

II

В части I статьи изложена теория «вырождения» идеального газа, которая основана на применении метода Д. Бозе, предложенного им для вывода формулы излучения Планка. Эта теория интересна тем, что она основана на гипотезе о далеко идущем родстве между излучением и газом. Согласно этой теории, вырожденный газ отклоняется от газа механической статистики аналогично тому, как излучение по закону Планка отклоняется от излучения по закону Вина. Если к выводу формулы излучения Планка, предложенному Бозе, отнестись серьезно, то в этой теории нельзя обойтись также без идеального газа; ибо если точка зрения на излучение как на квантовый газ справедлива, то аналогия между квантовым и молекулярным газом должна быть полной. Ниже более ранние соображения будут дополнены некоторыми новыми, которые, как мне кажется, должны повысить интерес к этому предмету.

§ 6. НАСЫЩЕННЫЙ ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

В теории идеального газа появляется само собой разумеющееся требование, что объем и температура некоторого количества газа могут стать произвольно заданными. Теория определяет тогда энергию или давление газа. Однако изучение уравнения состояния, которое содержится в уравнениях (18), (19), (20), (21), показывает, что при данном числе молекул n и данной температуре T объем нельзя сделать как угодно малым. Ибо уравнение (18) требует, чтобы для всех s $\alpha^s \geqslant 0$; согласно (20), это означает, что $A \geqslant 0$. Из этого следует, что в уравнении (18в), которое в данном случае справедливо, λ $(=e^{-A})$ должно лежать между 0 и 1. Из (18в) следует, таким образом, что число молекул в таком газе при заданном объеме V не может быть больше, чем

$$n = \frac{(2\pi m \varkappa T)^{3/2} V}{h^3} \sum_s^{\infty} \tau^{-3/2}. \tag{24}$$

Но что произойдет теперь, если при этой температуре n/V я стану (например, путем изотермического сжатия) увеличивать дальше плотность вещества?

Я утверждаю, что в этом случае некоторое непрерывно растущее с общей плотностью число молекул будет переходить в первое квантовое состояние (состояние без кинетической энергии), в то время как остальные молекулы распределятся согласно значению параметра $\lambda = 1$. Таким образом, утверждение сводится к тому, что происходит нечто подобное

изотермическому сжатию пара после достижения объема насыщения. Происходит разделение: одна часть «конденсируется», а все остальное остается в виде «насыщенного идеального газа» ($A = 0$, $\lambda = 1$).

Тот факт, что обе части в самом деле образуют термодинамическое равновесие, станет понятным, если показать, что «концентрированное» вещество и насыщенный идеальный газ в расчете на моль имеют одну и ту же функцию Планка $\Phi = S - \frac{\bar{E}+pV}{T}$. Для «конденсированного» вещества Φ исчезает, так как исчезают порознь S, E и V *). Прежде всего для «насыщенного газа», согласно (12) и (13) для $A = 0$, имеем

$$S = -\varkappa \sum_s \ln(1 - e^{-\alpha^s}) + \frac{\bar{E}}{T}. \tag{25}$$

Сумму можно записать в виде интеграла и преобразовать с помощью интегрирования по частям. Получим прежде всего

$$\sum_s = -\int_0^\infty s \frac{e^{-\frac{cs^{2/3}}{\varkappa T}}}{1 - e^{-\frac{cs^{2/3}}{\varkappa T}}} \frac{2}{3} \frac{cs^{-1/3}}{\varkappa T} ds,$$

или, согласно (8) и (11) и (15),

$$\sum_s = -\frac{2}{3} \int_0^\infty n_s E^s \, ds = -\frac{2}{3} \frac{\bar{E}}{\varkappa T} = -\frac{pV}{\varkappa T}. \tag{26}$$

Из (25) и (26) следует, таким образом, что для «насыщенного идеального газа»

$$S = \frac{\bar{E}+pV}{T}$$

или — как требуется для существования насыщенного идеального газа с конденсированным веществом —

$$\Phi = 0. \tag{27}$$

Мы приходим, таким образом, к следующему утверждению.

Согласно полученному уравнению состояния идеального газа при каждой температуре существует максимальная плотность находящихся в движении молекул. В случае превышения этой плотности лишние молекулы выпадают, будучи неподвижными («конденсируются» без участия сил притяжения). Замечательным является то, что «насыщенный идеальный газ» представляет как состояние максимально возможной плотности движущихся молекул газа, так и ту плотность, при которой газ находится в термодинамическом равновесии с «конденсатом». Следовательно, для идеального газа аналогии с «пересыщенным паром» не существует.

§ 7. СРАВНЕНИЕ РАЗВИТОЙ ТЕОРИИ ГАЗА С ТЕОРИЯМИ, КОТОРЫЕ СЛЕДУЮТ ИЗ ГИПОТЕЗЫ О ВЗАИМНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ МОЛЕКУЛ ГАЗА

Эренфест и другие коллеги порицают теорию излучения Бозе и мою аналогичную теорию идеального газа за то, что в этих теориях кванты или соответственно молекулы не рассматриваются как образования, статистически независимые друг от друга, причем в наших статьях нет

*) «Конденсированная» часть вещества не соответствует какому-либо особому объему, так как она не дает вклада в давление.

особых указаний на это обстоятельство. Это совершенно верно. Если рассматривать кванты как статистически независимые друг от друга в их локализации, то мы придем к закону излучения Вина; если аналогично рассматривать молекулы газа, то придем к классическому уравнению состояния идеального газа, даже если во всем остальном поступать так же, как делали Бозе и я. Я хочу сопоставить здесь друг с другом оба рассмотрения для газа с тем, чтобы сделать различие совершенно ясным, а также чтобы наши результаты было удобно сравнивать с результатами теории независимых молекул.

Согласно обеим теориям, число z_ν «ячеек», которые принадлежат к бесконечно малой области ΔE энергии молекул (ниже называемой «элементарной областью»), дается выражением

$$z_\nu = 2\pi \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} \Delta E. \tag{2a}$$

Пусть состояние газа (макроскопическое) определено заданием числа молекул n_ν, находящихся в каждой такой бесконечно малой области. Нужно рассчитать число W возможностей реализации (вероятность Планка) определенного таким образом состояния.

а) По Бозе

Состояние определяется макроскопически заданием числа молекул в каждой ячейке (связность). Число связностей для ν-й бесконечно малой области тогда равно

$$\frac{(n_\nu + z_\nu - 1)!}{n_\nu!\,(z_\nu - 1)!}. \tag{28}$$

Путем образования произведения по всем бесконечно малым областям получим общее число связностей состояния, и отсюда по формуле Больцмана энтропия равна

$$S = \varkappa \sum_\nu \{(n_\nu + z_\nu) \ln (n_\nu + z_\nu) - n_\nu \ln n_\nu - z_\nu \ln z_\nu\}. \tag{29a}$$

Легко видеть, что при этом способе расчета распределение молекул по ячейкам не рассматривается как статистически независимое. Это связано с тем, что те случаи, которые названы здесь «связностями», согласно гипотезе независимого распределения отдельных молекул по ячейкам, нельзя было бы рассматривать как случаи одинаковой вероятности. Расчет этих «связностей» разной вероятности не дал бы тогда при действительной статистической независимости молекул правильного значения энтропии. Таким образом, формула выражает косвенно некую гипотезу о взаимном влиянии молекул пока совершенно непонятного вида, которое как раз и обусловливает одинаковую статистическую вероятность случаев, определенных здесь как «связности».

б) По гипотезе статистической независимости молекул

Состояние определяют макроскопически с помощью указания для каждой молекулы, в какой ячейке она находится (связность). Сколько связностей принадлежит к макроскопически определенному состоянию? Я могу n_ν определенных молекул распределить

$$z_\nu^{n_\nu}$$

различными способами между z_ν ячейками ν-й элементарной области. Если отнесение молекул к элементарным областям уже проведено

определенным образом, то существует всего

$$\Pi\left(z_\nu^{n_\nu}\right)$$

различных распределений молекул по всем ячейкам. Для того чтобы получить число связностей в указанном смысле, необходимо теперь еще умножить эту величину на

$$\frac{n!}{\Pi n_\nu!}$$

— число возможных отнесений всех молекул к элементарным областям при данных n_ν. Принцип Больцмана дает тогда для энтропии выражение

$$S = \varkappa\left\{n \ln n + \sum_\nu (n_\nu \ln z_\nu - n_\nu \ln n_\nu)\right\}. \tag{29б}$$

Первый член этого выражения не зависит от выбора макроскопического распределения, а зависит лишь от общего числа молекул. При сравнении энтропий различных макроскопических состояний одного и того же газа этот член играет роль несущественной константы, которой мы можем пренебречь. Мы д о л ж н ы ею пренебречь, если — как обычно в термодинамике — хотим, чтобы при данном внутреннем состоянии газа энтропия была пропорциональна числу молекул. Следовательно, нужно положить

$$S = \varkappa \sum_\nu n_\nu (\ln z_\nu - \ln n_\nu). \tag{29в}$$

Обычно это пренебрежение множителем $n!$ в W для газов обосновывают тем, что связности, которые получаются друг из друга простой перестановкой молекул одного вида, не рассматривают как разные и поэтому учитывают только один раз.

Теперь для обоих случаев нужно найти максимум S при дополнительных условиях

$$\overline{E} = \sum E_\nu n_\nu = \text{const},$$

$$n = \sum n_\nu = \text{const}.$$

В случае а) получается выражение

$$n_\nu = \frac{z_\nu}{e^{\alpha + \beta E} - 1}, \tag{30а}$$

которое, если не считать способа записи, совпадает с (13). В случае б) оказывается, что

$$n_\nu = z_\nu e^{-\alpha - \beta E}. \tag{30б}$$

При этом в обоих случаях $\beta \varkappa T = 1$.

Далее, видно, что в случае б) получается закон распределения Максвелла. Квантовая структура здесь не проявляется (по крайней мере она не проявляется при бесконечно большом общем объеме газа). Теперь легко видеть, что случай б) несовместим с теоремой Нернста. А именно, чтобы в этом случае рассчитать значение энтропии при абсолютном нуле температур, нужно рассчитать при абсолютном нуле (29в). При этом все молекулы будут находиться в первом квантовом состоянии. Следовательно, нужно положить

$$n_\nu = 0 \quad \text{для} \quad \nu \neq 1,$$

$$n_1 = n,$$

$$z_1 = 1;$$

(29в) даст, таким образом, для $T = 0$

$$S = -n \ln n. \tag{31}$$

Следовательно, при способе расчета б) имеется противоречие с теоремой Нернста. Напротив, способ расчета а) находится в согласии с теоремой Нернста, что сразу видно, если принять во внимание, что при абсолютном нуле в этом способе имеется только одна связность ($W = 1$). Согласно изложенному, способ рассмотрения б) приводит либо к нарушению теоремы Нернста, либо к нарушению требования, что при данном внутреннем состоянии энтропия должна быть пропорциональна числу молекул. На этом основании я считаю, что нужно отдать предпочтение способу расчета а) (т. е. статистическому подходу Бозе), хотя априори нельзя считать доказанным преимущество этого способа расчета перед другими. Этот результат образует основу для понимания глубокого родства сущностей излучения и газа, поскольку тот же самый способ рассмотрения, который приводит к формуле излучения Планка, в случае применения его к идеальному газу дает согласование теории газа с теоремой Нернста.

§ 8. ФЛУКТУАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Пусть газ объема V сообщается с другим газом такой же природы и бесконечно большого объема. Оба объема разделены перегородкой, которая пропускает только молекулы бесконечно малой энергетической области ΔE и отражает молекулы с другой кинетической энергией. Допущение такой перегородки аналогично предположению о перегородке, прозрачной для квазимонохроматического излучения, в теории излучения. Спрашивается, какова флуктуация Δ_ν числа молекул n_ν, которые принадлежат области энергии ΔE. При этом принимается, что обмен энергией между молекулами различных энергетических областей внутри V не происходит, так что флуктуации числа молекул с энергиями, отличными от ΔE, не могут иметь места.

Пусть n_ν есть среднее число молекул, принадлежащих к ΔE, а $n_\nu + \Delta_\nu$ — его мгновенное значение. Тогда (29а) дает значение энтропии как функцию от Δ_ν, если в это уравнение подставить $n_\nu + \Delta_\nu$ вместо n_ν. С точностью до квадратичных членов получим

$$S = \overline{S} + \frac{\partial \overline{S}}{\partial \Delta_\nu} \Delta_\nu + \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial^2 S}}{\partial \Delta_\nu^2} \Delta_\nu^2.$$

Подобное соотношение справедливо для бесконечно большой внешней системы, а именно

$$S^0 = \overline{S^0} - \frac{\overline{\partial S^0}}{\partial \Delta_\nu} \Delta_\nu.$$

Квадратичный член здесь бесконечно мал вследствие бесконечных размеров внешней системы. Если обозначить полную энтропию через $\Sigma\,(= S + S_0)$, то $\frac{\overline{\partial \Sigma}}{\partial \Delta_\nu} = 0$, ибо в среде существует равновесие. Путем сложения этих уравнений получим для полной энтропии соотношение

$$\Sigma = \overline{\Sigma} + \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial^2 S}}{\partial \Delta_\nu^2} \Delta_\nu^2. \tag{32}$$

Согласно принципу Больцмана отсюда получим для вероятности Δ_ν закон

$$dW = \text{const} \cdot e^{\frac{S}{\varkappa}} d\Delta_\nu = \text{const} \cdot e^{\frac{1}{2\varkappa} \frac{\overline{\partial^2 S}}{\partial \Delta_\nu^2} \Delta_\nu^2} d\Delta_\nu.$$

Отсюда следует для среднеквадратичной флуктуации

$$\overline{\Delta_\nu^2} = \frac{\varkappa}{\left(-\frac{\partial^2 S}{\partial \Delta_\nu^2}\right)}. \tag{33}$$

С учетом (29а) отсюда получается, что

$$\overline{\Delta_\nu^2} = n_\nu + \frac{n_\nu^2}{z_\nu}. \tag{34}$$

Этот закон флуктуации полностью аналогичен закону квазимонохроматического излучения Планка. Запишем его в виде

$$\overline{\left(\frac{\Delta_\nu}{n_\nu}\right)^2} = \frac{1}{n_\nu} + \frac{1}{z_\nu}. \tag{34a}$$

Квадрат средней относительной флуктуации молекул отмеченного сорта состоит из двух слагаемых. Если бы молекулы не зависели друг от друга, налицо было бы только первое слагаемое. Его дополняет вторая часть среднеквадратичной флуктуации, которая совершенно не зависит от средней молекулярной плотности и определяется лишь элементарной областью ΔE и объемом. Она соответствует интерференционной флуктуации в излучении. В случае газа ее можно истолковать соответственно, если подходящим образом связать с газом процесс излучения и рассчитать его интерференционные флуктуации. Я подробнее остановлюсь на этом толковании, так как я полагаю, что при этом речь идет больше чем о простой аналогии.

Л. де-Бройлем написан труд *), заслуживающий самого большого внимания, по вопросу о том, как связать с материальной частицей или с системой материальных частиц (скалярное) волновое поле. Прежде всего частице с массой m ставится в соответствие частота ν_0 согласно уравнению

$$mc^2 = h\nu_0. \tag{35}$$

Далее, пусть частица покоится по отношению к некоторой галилеевой системе K', в которой мы мыслим повсюду синхронное колебание с частотой ν_0. Тогда в системе K, по отношению к которой K' с массой m движется со скоростью v вдоль оси x (в положительном направлении), существует волновой процесс следующего вида:

$$\sin\left(2\pi\nu_0 \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Частота ν и фазовая скорость этого процесса даются, следовательно, выражениями

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{36}$$

$$V = \frac{c^2}{v}. \tag{37}$$

Как показал де-Бройль, v одновременно является тогда групповой скоростью этой волны. Интересно, далее, что энергия $mc^2 \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ частицы,

*) Louis de Broglie, Thèses, Paris, Ed. Musson et Co, 1924. В этой диссертации имеется заслуживающая большого внимания геометрическая интерпретация правила квантования Бора — Зоммерфельда.

согласно (35) и (36), как раз равна $h\nu$, в согласии с основным соотношением квантовой теории.

Теперь видно, что таким образом с газом можно связать скалярное волновое поле; с помощью расчета я убедился, что $1/z_\nu$ есть средняя квадратичная флуктуация этого волнового поля, что в общем соответствует исследованной нами выше энергетической области ΔE.

Эти соображения проливают свет на парадокс, о котором упоминалось в конце § 5 статьи. Для того чтобы два цуга волн могли заметно интерферировать, они должны почти совпадать по V и ν. Для этого, согласно (35), (36), (37), необходимо, чтобы v и m почти совпадали для обоих газов. Следовательно, волновые поля, соответствующие двум газам с заметно отличающимися массами молекул, не могут заметно интерферировать друг с другом. Отсюда можно сделать вывод, что, согласно настоящей теории, энтропия смеси газов так же складывается из энтропий составных частей смеси, как и по классической теории, по крайней мере до тех пор, пока молекулярные веса компонентов хотя бы немного отличаются друг от друга.

§ 9. ЗАМЕЧАНИЕ О ВЯЗКОСТИ ГАЗОВ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Согласно рассуждениям в предыдущих параграфах, оказывается, что с каждым процессом движения связано волновое поле точно так же, как с движением световых квантов связано оптическое волновое поле. Это волновое поле, физическая природа которого пока еще не ясна, в принципе должно проявляться в соответствующих ему явлениях движения. Так, при прохождении пучка молекул газа через отверстие должна наблюдаться дифракция, аналогичная дифракции пучка света. Для того чтобы такое явление можно было наблюдать, длина волны λ должна быть в какой-то мере сравнима с размерами отверстия. Из (35), (36) и (37) следует теперь, что для малых по сравнению с c скоростей

$$\lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{h}{mv}. \tag{38}$$

Это λ для молекул газа, движущихся с тепловыми скоростями, всегда чрезвычайно мало, в большинстве случаев даже значительно меньше, чем диаметр молекул σ. Отсюда следует прежде всего, что наблюдение этой дифракции на искусственно изготовленных отверстиях или экранах совершенно немыслимо.

Однако оказывается, что при низких температурах для газообразного водорода и гелия λ имеет такой же порядок, что и σ; при этом в самом деле обнаруживается, что коэффициенты трения испытывают влияние, которое следует ожидать согласно теории.

Пусть, например, поток молекул, движущихся со скоростью v, падает на другую молекулу, которую ради удобства мы представим неподвижной; эту ситуацию можно сравнить со случаем, когда последовательность волн с определенной длиной волны λ падает на пластинку диаметром 2σ. При этом происходит явление (фраунгоферовой) дифракции, подобное тому, которое наблюдалось бы в случае отверстия такого же размера. Большой угол отклонения получается в том случае, когда λ одного порядка величины с σ. Следовательно, кроме отклонений в результате удара, появляющихся в соответствии с законами механики, будут иметь место также необъяснимые с точки зрения механики отклонения молекул; эти отклонения имеют частоту, близкую к частоте первых, они и уменьшают длину свободного пробега. Таким образом, с понижением температуры вблизи такой точки внезапно наступает довольно резкое понижение вязкости.

Оценка такой температуры, согласно соотношению $\lambda = \sigma$, дает для H_2 56°, а для He 40°. Естественно, эти оценки являются довольно грубыми; однако их можно заменить более точными расчетами. Речь идет здесь о новом объяснении полученной П. Гюнтером по инициативе Нернста экспериментальной зависимости коэффициента вязкости водорода от температуры, для объяснения которой Нернст уже придумал квантовомеханическое рассмотрение *).

§ 10. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ НАСЫЩЕННОГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА. ЗАМЕЧАНИЯ О ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ГАЗА И ОБ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ МЕТАЛЛОВ

В § 6 было показано, что для идеального газа, находящегося в равновесии с «конденсированным веществом», параметр вырождения λ равен 1. В этом случае, согласно (18б), (22) и (15), концентрация, энергия и давление наделенной движением части молекул определяется только через T. Так, справедливы уравнения

$$\eta = \frac{n}{NV} = \frac{2{,}615}{Nh^3}(2\pi m\varkappa T)^{3/2} = 1{,}12\cdot 10^{-15}(MRT)^{3/2}, \tag{39}$$

$$\frac{\overline{E}}{n} = \frac{1{,}348}{2{,}615}\varkappa T, \tag{40}$$

$$p = \frac{1{,}348}{2{,}615}RT\eta. \tag{41}$$

При этом обозначения имеют следующий смысл: η — концентрация в молях, N — число молекул в моле, M — масса моля (молекулярный вес).

С помощью (39) находим, что реальные газы не достигают такого значения плотности, чтобы соответствующий идеальный газ был насыщенным. Тем не менее критическая плотность гелия приблизительно только в пять раз меньше, чем плотность насыщения η идеального газа при такой же температуре и с таким же молекулярным весом. Для водорода соответствующее соотношение составляет около 26. Так как реальные газы существуют при плотностях, которые по порядку величины приближаются к плотности насыщения, и, согласно (41), вырождение оказывает значительное влияние на давление, то в случае, если настоящая теория справедлива, влияние квантования на уравнение состояния существенным образом даст себя знать; в частности, нужно будет исследовать, нельзя ли таким образом объяснить отклонения от закона Ван-дер-Ваальса для соответственных состояний **).

Кроме того, нужно ожидать, что упомянутое в предыдущих параграфах явление дифракции, которое при низких температурах приводит к кажущемуся увеличению истинного объема молекул, также будет оказывать влияние на уравнение состояния.

Существует случай, в котором природа, пожалуй, в основном реализовала насыщенный идеальный газ,— это электроны проводимости внутри металлов. Как известно, электронная теория металлов с очень хорошим приближением количественно объяснила связь между электро- и теплопроводностью (формула Друде — Лоренца) в предположении, что внутри металла имеются свободные электроны, которые проводят как электричество, так и теплоту. Но, несмотря на большой успех, сегодня эта теория

*) См. W. Nernst, Sitzungsber. 8, 118 (1919); P. Günther, Sitzungsber. 36, 720 (1920).

**) Путем сравнения с опытом я нашел позже, что это не так. Искомое влияние замаскировано молекулярными взаимодействиями другого рода.

не считается правильной, между прочим, потому, что она не смогла объяснить, почему свободные электроны не дают заметного вклада в теплоемкость металла. Однако эта трудность исчезает, если принять за основу настоящую теорию газа. Ибо из (39) следует, что концентрация насыщения (подвижных) электронов при обычной температуре приблизительно равна $5{,}5\cdot 10^{-5}$, так что только исчезающе малая часть электронов могла бы дать вклад в термическую энергию. Средняя тепловая энергия на один электрон, принимающий участие в движении, составляет около половины величины, соответствующей классической молекулярной теории. Если имеются только очень слабые силы, которые удерживают неподвижные электроны в состоянии покоя, то понятно также, что эти электроны не участвуют в электропроводности. Возможно даже, что падение этих слабых сил связи при очень низких температурах может обусловить сверхпроводимость. Термические силы на основании этой теории вообще были бы непонятными до тех пор, пока электронный газ рассматривается как идеальный. Естественно, что в основу такой электронной теории металлов нужно было бы положить не распределение скоростей Максвелла, а распределение насыщенного идеального газа согласно настоящей теории; из (8), (9), (11) для этого специального случая получается

$$dW = \text{const}\cdot\frac{E^{1/2}\,dE}{e^{\frac{E}{\varkappa T}}-1}\,. \tag{42}$$

При рассмотрении этой теоретической возможности мы сталкиваемся с той трудностью, что для объяснения измеряемых теплопроводностей и электропроводностей металлов из-за очень малой объемной плотности электронов, которые, согласно нашим результатам, участвуют в тепловом движении, необходимо допустить очень большие значения длины свободного пробега (порядка 10^{-3} *см*). На основании этой теории оказывается также невозможным понять поведение металлов по отношению к инфракрасному излучению (отражение, эмиссия).

§ 11. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ НЕНАСЫЩЕННОГО ГАЗА

Рассчитаем теперь более точно отклонение уравнения состояния идеального газа от классического уравнения состояния в ненасыщенной области. Для этого мы снова будем исходить из уравнений (15), (18б) и (19б).

Обозначим для краткости

$$\sum_{\tau=1}^{\infty}\tau^{-3/2}\lambda^{\tau} = y(\lambda),$$

$$\sum_{\tau=1}^{\infty}\tau^{-5/2}\lambda^{\tau} = z(\lambda)$$

и поставим задачу выразить z как функцию y ($z = \varphi(y)$). Решение этой задачи, за которое я благодарен Ж. Громеру, основано на следующем общем положении (Лагранжа).

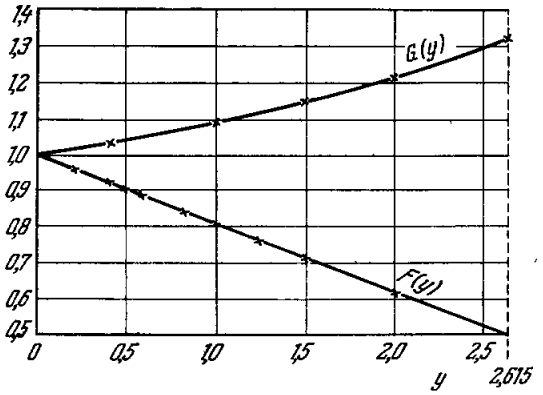
При выполняющемся в нашем случае условии, что y и z исчезают при $\lambda = 0$ и что y и z в некоторой области около нуля являются регулярными функциями λ, для достаточно малых y существует разложение Тейлора

$$z = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{d^{\nu}z}{dy^{\nu}}\right)_{\lambda=0}\frac{y^{\nu}}{\nu!}\,, \tag{43}$$

в котором коэффициенты можно выразить через $y(\lambda)$ и $z(\lambda)$ по рекуррентной формуле

$$\frac{d^{\nu}(z)}{dy^{\nu}} = \frac{\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d^{\nu-1}z}{dy^{\nu-1}}\right)}{\frac{dy}{d\lambda}}. \tag{44}$$

Таким образом, в нашем случае получается сходящийся вплоть до $\lambda = 1$



и удобный для расчета ряд

$$z = y - 0{,}1768y^2 - 0{,}0034y^3 - 0{,}0005y^4.$$

Введем теперь обозначение

$$\frac{z}{y} = F(y).$$

Тогда для ненасыщенного идеального газа, т. е. между $y = 0$ и $y = 2{,}615$, справедливы соотношения

$$\frac{\overline{E}}{n} = \frac{3}{2}\varkappa T F(y), \tag{19в}$$

$$p = RT\eta F(y), \tag{22б}$$

в которых положено

$$y = \frac{h^3}{(2\pi m\varkappa T)^{3/2}}\frac{n}{V} = \frac{h^3 N\eta}{(2\pi MRT)^{3/2}}. \tag{18в}$$

Из (19в) найдем для c_v — теплоемкости при постоянном объеме, рассчитанной на моль:

$$c_v = \frac{3}{2}R\left(F(y) - \frac{3}{2}yF'(y)\right) = \frac{3}{2}RG(y).$$

Для большей наглядности мы приводим графическое изображение функций $F(y)$ и $G(y)$.

Принимая во внимание приблизительно линейный ход $F(y)$, получим для p хорошее приближенное уравнение

$$p = RT\eta\left[1 - 0{,}186\frac{h^3N^4\eta}{(2\pi MRT)^{3/2}}\right]. \tag{22в}$$

Декабрь 1924 г.

530.145+536.63

К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА *)

Предложенный Бозе вывод формулы излучения Планка, который основан на последовательном применении гипотезы о световых квантах, недавно побудил меня разработать квантовую теорию идеального газа **). Эта теория кажется справедливой, если исходить из убеждения, что световой квант (отвлекаясь от его поляризационных свойств) по существу отличается от одноатомной молекулы только тем, что масса покоя кванта исчезающе мала. Однако поскольку предположение о такой аналогии никоим образом не одобряется всеми исследователями, поскольку, далее, примененный Бозе и мной статистический метод ни в коей мере не является бесспорным, но кажется обоснованным лишь апостериори, благодаря успеху в случае излучения, я попытался найти еще другие, по возможности свободные от произвольных гипотез соображения, касающиеся квантовой теории идеального газа. Эти соображения будут изложены ниже. Они образуют действенную опору выдвинутой ранее теории, хотя полученные результаты и не представляют полной замены такой теории. Речь идет здесь о том, чтобы перенести в область теории газа соображения, которые по методу и результату в значительной степени сходны с соображениями, приводящими в области теории излучения к закону смещения Вина.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть для идеального газа заданы объем V одного моля, температура T и масса молекулы m. Спрашивается, каким будет статистический закон распределения скоростей, аналог закона распределения Максвелла. Следовательно, ищется уравнение типа

$$dn = \varrho(L, \varkappa T, V, m)\,\frac{V\,dp_1\,dp_2\,dp_3}{h^3}\,. \tag{1}$$

При этом dn обозначает число молекул, для которых прямоугольные компоненты импульса p_1, p_2, p_3 лежат в границах, которые обозначены посредством dp_1, dp_2, dp_3. Величиной L обозначена кинетическая энергия молекулы $\left(\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)\right)$; вследствие естественного условия изотропности p_1, p_2, p_3 могут входить в ϱ лишь в комбинации L. ϱ является неизвестной заранее функцией данных четырех переменных. Если функция плотности ϱ известна, то, разумеется, известно также и уравнение состояния, поскольку нет сомнения, что для получения давления достаточен механический расчет столкновений молекул со стенкой. Напротив, мы не можем предполагать, что столкновения молекул друг с другом происходят по законам механики; в противном случае мы, естественно, пришли бы к закону распределения Максвелла и к классическому уравнению газа.

§ 2. ПОЧЕМУ КЛАССИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ НЕ ПОДХОДИТ ДЛЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ?

Начиная с первых работ Планка по квантовой теории, под величиной W в формуле Больцмана

$$S = \varkappa \lg W$$

---

*) A. Einstein, Zur Quantentheorie des idealen Gases, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. **23** (1925). Перевод В. Иванова.

**) См. в этом выпуске УФН на стр. 381.

понимают некоторое ц е л о е ч и с л о. Оно показывает, сколькими дискретными способами (в смысле квантовой теории) может быть осуществлено рассматриваемое состояние с энтропией S. И хотя в большинстве случаев сейчас невозможно теоретически рассчитать W, не внося произвола, все же эта точка зрения приводит к убеждению, что S не содержит произвольной аддитивной постоянной, но полностью определена в смысле квантовой теории и всегда положительна. Благодаря теореме Нернста это толкование Планка становится почти необходимостью. А именно, при абсолютном нуле прекращается беспорядок, вызываемый термическим движением и рассматриваемое состояние может быть реализовано только одним способом ($W = 1$). Это непосредственно означает, что выполняется теорема Нернста ($S = 0$ при $T = 0$).

Такое простое объяснение теоремы Нернста, основанное на толковании Планком принципа Больцмана, свидетельствует об общей справедливости этого толкования. В частности, оно приводит нас к пониманию того факта, что энтропия не может стать отрицательной.

Согласно классическому уравнению состояния идеального газа энтропия одного моля содержит аддитивный член $R\ln V$, который выражает ее зависимость от объема при постоянной температуре. Путем уменьшения V этот член можно сделать как угодно большой отрицательной величиной, так что сама энтропия станет отрицательной. Правда, эти значения V для реальных газов значительно ниже критического объема этих газов, так что не следует из этого делать вывод о достижении отрицательных значений энтропии для реальных газов. Однако можно быть уверенным в том, что допущение воображаемого газа, который ближе к идеальному, чем действительно встречающиеся в природе, не может привести к нарушению общих тепловых законов. Но, как уже было сказано, согласно классическому уравнению состояния, отрицательные значения энтропии должны встречаться в принципиально реализуемых состояниях. Поэтому классическое уравнение состояния мы в принципе должны отбросить и рассматривать его как предельный закон наподобие уравнения Вина для излучения.

§ 3. РАССМОТРЕНИЕ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ РАЗМЕРНОСТЕЙ. МЕТОД, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ В ДАЛЬНЕЙШЕМ

Из (1) следует, что ϱ является безразмерной величиной. Отсюда можно сделать некоторые выводы о строении функции ϱ, если допустить, что ϱ не содержит никаких других размерных констант, кроме постоянной Планка h. В таком случае известным способом можно вывести, что ϱ должно иметь вид

$$\varrho = \Psi\left(\frac{L}{\varkappa T},\ \frac{m\left(\frac{V}{N}\right)^{2/3}\varkappa T}{h^2}\right), \tag{2}$$

где Ψ является неизвестной универсальной функцией двух безразмерных переменных. При этом функция Ψ подчиняется условию

$$\frac{V}{h^3}\int \varrho\, d\Phi = N, \tag{3}$$

где

$$d\Phi = \int\limits_L^{L+dL} dp_1\, dp_2\, dp_3 = 2\pi\,(2m)^{3/2}\, L^{1/2}\, dL. \tag{4}$$

Других результатов из рассмотрения размерностей получить нельзя. Однако функцию Ψ двух переменных можно, не принимая сколько-нибудь

сомнительных гипотез, определить так, что неопределенной останется только функция одной переменной. Это можно достигнуть двумя независимыми способами, сделав выводы из двух утверждений:

1. Энтропия газа не изменяется при бесконечно медленном адиабатическом сжатии.

2. В идеальных газах при наличии внешнего статического поля консервативных сил существует также стационарное состояние, при котором повсюду господствует искомое распределение скоростей.

Оба эти утверждения должны иметь силу, если пренебречь эффектом столкновений молекул друг с другом. Правда, в силу принципиального пренебрежения столкновениями речь идет о двух предположениях, которые нельзя доказать; однако они очень естественны, и, кроме того, их справедливость становится вероятной благодаря тому, что оба они приводят к одинаковым результатам и в предельном случае, когда исчезает квантовое влияние, ведут к распределению Максвелла.

§ 4. АДИАБАТИЧЕСКОЕ СЖАТИЕ

Пусть газ заключен в сосуд, имеющий форму параллелепипеда, со сторонами l_1, l_2, l_3. Примем, что распределение по скоростям изотропно, а в остальном произвольно. Пусть столкновения со стенками являются упругими. Тогда распределение состояний не изменяется со временем. Оно дается выражением

$$dn = \frac{V}{h^3} \varrho \, d\Phi, \tag{5}$$

где ϱ — любая заданная функция от L.

Если стенки сдвигать бесконечно медленно адиабатически так, чтобы

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V}, \tag{6}$$

то распределение остается изотропным, т. е. имеет вид (5). Как изменяется при этом распределение?

Если через $|p_1|$ обозначить абсолютное значение p_1 молекулы, то, применяя закон упругого столкновения, получим

$$\Delta |p_1| = -|p_1| \frac{\Delta l_1}{l}. \tag{7}$$

Аналогичные уравнения справедливы и для $\Delta |p_2|$ и $\Delta |p_3|$. Поэтому с учетом (7) получим, что

$$\Delta L = \frac{1}{m} (|p_1| \delta |p_1| + \ldots) = -\frac{2}{3} L \frac{\Delta V}{V}. \tag{8}$$

Затем из (4) следует, что

$$\Delta \, d\Phi = 2\pi (2m)^{3/2} \left(L^{1/2} \Delta \, dL + \frac{1}{2} L^{-1/2} \Delta L \, dL \right)$$

или, согласно (8),

$$\Delta \, d\Phi = -d\Phi \frac{\Delta V}{V} \tag{9}$$

и также

$$\Delta (V \, d\Phi) = 0. \tag{10}$$

Во всех этих формулах Δ обозначают изменения, которые претерпевают при адиабатическом изменении объема рассматриваемые величины.

При адиабатическом изменении объема число dN молекул, рассматриваемых в (5), не изменяется. Отсюда

$$0 = \Delta\, dn = \Delta\,(V\varrho\, d\Phi),$$

или вследствие (10)

$$\Delta\varrho = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь энтропию газа, для которого распределение состояний дается выражением (5). При этом примем, что эта энтропия аддитивно складывается из частей, которые соответствуют отдельным энергетическим областям dL. В теории излучения эта гипотеза аналогична предположению о том, что энтропия излучения аддитивно складывается из квазимонохроматических составных частей. Она эквивалентна предположению, что для *молекул разных интервалов скоростей можно ввести полупроницаемые* стенки *). Согласно этой гипотезе, мы должны приписать газу, молекулы которого распределены изотропно и имеют импульсы в интервале $d\Phi$, энтропию

$$\frac{dS}{\varkappa} = \frac{V}{h^3}\, s\,(\varrho,\ L)\, d\Phi, \tag{12}$$

где s обозначает пока неизвестную функцию двух переменных.

При адиабатическом сжатии, которое было рассмотрено выше, эта энтропия должна оставаться неизменной, и, таким образом,

$$\Delta\, dS = 0,$$

или вследствие (7) и (10)

$$0 = \Delta s = \frac{\partial s}{\partial \varrho}\,\Delta\varrho + \frac{\partial s}{\partial L}\,\Delta L.$$

Отсюда, с учетом (11), следует, что

$$\frac{\partial s}{\partial L} = 0, \tag{13}$$

и s является. таким образом, функцией одного ϱ.

Условимся теперь, что газ находится в термодинамическом равновесии в отношении распределения скоростей. Для этого энтропия

$$\frac{S}{\varkappa} = \frac{V}{h^3}\int s\, d\Phi$$

должна иметь максимум по отношению ко всякому варьированию ϱ, которое удовлетворяет двум условиям:

$$\delta\left\{\frac{V}{h^3}\int \varrho\, d\Phi\right\} = 0,$$

$$\delta\left\{\frac{V}{h^3}\int L\varrho\, d\Phi\right\} = 0.$$

Выполнение варьирования приводит к условию

$$\frac{\partial s}{\partial \varrho} = AL + B, \tag{14}$$

где A и B не зависят от L. Но так как s (и, следовательно, также $\partial s/\partial\varrho$) является функцией только ϱ, это уравнение можно разрешить относительно ϱ:

$$\varrho = \Psi\,(AL + B), \tag{15}$$

где Ψ является неизвестной функцией. Разумеется, A и B могут зависеть от $\varkappa T$, V/N, m и h.

*) *Полупроницаемые стенки такого рода можно представить себе реализованными посредством консервативного силового поля.*

Величину A можно определить, применяя формулу энтропии к бесконечно малому изопикническому нагреву газа. Если через E обозначить энергию газа, а через D то изменение, которое имеет место при этом процессе, то прежде всего получим

$$DE = T\,dS = \frac{V}{h^3}\int LD\varrho\,d\Phi = \frac{V\varkappa T}{h^3}\int Ds\,d\Phi.$$

Так как вследствие (14)

$$Ds = D\varrho\,(AL + B)$$

и вследствие неизменности числа молекул

$$\int D\varrho\,d\Phi = 0,$$

получим, что

$$\int LD\varrho\,d\Phi\,(1 - \varkappa TA) = 0,$$

или

$$A = \frac{1}{\varkappa T}.$$

Таким образом, вместо (15) получим, следовательно,

$$\varrho = \Psi\left(\frac{L}{\varkappa T} + B\right). \tag{15a}$$

§ 5. ГАЗ В КОНСЕРВАТИВНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Газ находится в динамическом равновесии под действием консервативного силового поля. Пусть потенциальная энергия Π молекулы является функцией места, ϱ пусть снова является молекулярной плотностью, относящейся к приведенному шестимерному фазовому пространству. Пренебрежем опять столкновениями молекул и примем, что движение отдельной молекулы под влиянием внешнего силового поля следует классической механике. Условие стационарности движения приводит тогда к условию

$$\sum_i \left(\frac{\partial(\varrho\dot{x}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\varrho\dot{p}_i)}{\partial p_i}\right) = 0. \tag{16}$$

Отсюда, если принять во внимание уравнения движения молекулы

$$\dot{x}_i = \frac{1}{m}p_i,$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial\Pi}{\partial x_i},$$

следует обычным способом

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial\varrho}{\partial p_i}\dot{p}_i = 0. \tag{16a}$$

Таким образом, ϱ постоянно вдоль траектории. Кроме того, поскольку благодаря изотропности равновесного распределения ϱ может содержать p_i только в комбинации с L, ϱ может быть представлено в виде

$$\varrho = \Psi^*(L + \Pi). \tag{17}$$

Так как в различных точках нашего газа господствуют равновесные распределения, которым соответствуют различные значения V при одной и той же температуре, уравнение (17) выражает одновременно форму зависимости фазовой плотности ϱ от V (так как Π является функцией V).

§ 6. ВЫВОДЫ, КАСАЮЩИЕСЯ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Запишем подробно результаты исследований двух последних параграфов, имея в виду проблему уравнения состояния; вместо (15а) и (17) мы должны тогда написать

$$\varrho = \Psi\left(h,\ m,\ \frac{L}{\varkappa T} + B\right), \tag{15б}$$

$$\varrho = \Psi^*(h,\ m,\ \varkappa T,\ L + \Pi). \tag{17а}$$

Здесь L, B и Π — неизвестные пока универсальные функции h, m, $\varkappa T$, V. При таком способе записи Ψ и Ψ^* являются безразмерными у н и в е р с а л ь н ы м и функциями. Каждый из этих результатов показывает теперь, что уравнение (2), полученное из рассмотрения размерностей, должно быть уточнено следующим образом:

$$\varrho = \Psi\left(\frac{L}{\varkappa T} + \chi\left(\frac{m\left(\frac{V}{N}\right)^{2/3}\varkappa T}{h^2}\right)\right). \tag{18}$$

Здесь Ψ и χ — две универсальные функции соответствующих безразмерных переменных. Обе функции Ψ и χ связаны друг с другом согласно (3), так что результат содержит в действительности только неизвестную функцию Ψ, ибо из (2), (3) и (4) следует соотношение

$$\int\limits_{x=0}^{x=\infty} \Psi(x+\chi)\, x^{1/2}\, dx = \frac{Nh^3}{2\pi\,(2m\varkappa T)^{3/2}\, V}. \tag{19}$$

Если функция Ψ задана, то для каждого значения χ можно рассчитать правую часть уравнения; путем обращения получают χ как функцию правой части. Тем самым проблема фактически сводится к вопросу о функции Ψ.

§ 7. ОТНОШЕНИЕ ЭТОГО РЕЗУЛЬТАТА К КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ, А ТАКЖЕ К ПРЕДЛОЖЕННОЙ МНОЙ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Исследуем случай, когда константа h исчезает из закона распределения. Введем сокращенные обозначения

$$u = \frac{h^3 N}{(m\varkappa T)^{3/2}\, V}, \quad v = \frac{L}{\varkappa T}.$$

Из (1) и (18) следует, что h исчезает из выражения для dn лишь в том случае, если $\frac{1}{u}\Psi$ не зависит от u. В этом случае назовем эту функцию $\overline{\Psi}(v)$. Тогда при надлежащем выборе функции Φ будет выполняться уравнение вида

$$\Psi(v + \Phi(u)) = u\overline{\Psi}(v). \tag{20}$$

Если это уравнение прологарифмировать и дважды продифференцировать (по u и по v), то легко убедиться, что $\ln \Psi$ должен быть линейной функцией. В этом случае Φ также легко получить. Оказывается, что в действительности Ψ должно быть экспоненциальной функцией (распределение скоростей Максвелла).

Классической теории соответствует формула

$$\Psi(v) = e^{-v}, \tag{21}$$

а разработанной мной теории — формула

$$\Psi(v) = \frac{1}{e^v - 1}. \tag{22}$$

Следовательно, вместо экспоненциальной функции с отрицательным показателем появляется функция Планка *). То, что формула (22) в отличие от (21) удовлетворяет теореме Нернста, я показал в недавно опубликованной работе.

Благодаря настоящему исследованию достигнуты две цели. Во-первых, найдено общее условие (уравнение (18)), которому должна удовлетворять всякая теория идеального газа. Во-вторых, из предыдущего следует, что выведенное мной уравнение состояния не нарушается в результате адиабатического сжатия или наложения консервативного силового поля.

530.10

О МЕТОДЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ **)

Если вы хотите кое-что выяснить у физиков-теоретиков о методах, которые они применяют, я советую вам твердо придерживаться одного принципа: не слушайте, что они говорят, а лучше изучайте их действия. Тому, кто в этой области что-то открывает, продукты его творческого воображения кажутся столь необходимыми и естественными, что он рассматривает их не как создания мышления, а как данные реальности. И ему хотелось бы, чтобы так их рассматривали и другие.

Эти слова звучат как приглашение уйти с этой лекции. Вы можете сказать: да ведь он сам — работающий физик, и потому все размышления о структуре теоретической науки, вероятно, передоверит гносеологам.

Против такой критики я лично могу защититься, заверив вас, что не по собственной просьбе, а по любезному приглашению поднялся на эту трибуну, которая служит напоминанием о человеке, всю свою жизнь твердо боровшемся за единство знания. Но по существу мое выступление можно было бы оправдать тем, что каждому интересно знать, что́ думает о своей науке человек, со всей энергией посвятивший свою жизнь выяснению и улучшению основ науки. Тот способ, которым он рассматривает прошлое и настоящее своей области, пожалуй, очень сильно зависит от того, с чем он связывает надежды на будущее и что ставит своей целью в настоящем; но это — неизбежный удел всякого, кто интенсивно вжился в мир идей. То же самое происходит и с историком, который точно таким же образом, хотя, может быть, и неосознанно, группирует действительные события вокруг идеалов о человеческом обществе, которые он сам создал для себя.

Бросим теперь беглый взгляд на развитие теоретической системы и при этом обратим особое внимание на отношение между содержанием теории и совокупностью опытных фактов. Здесь мы встречаемся с вечным противоречием между двумя нераздельными компонентами знания в нашей области — эмпирическим и рациональным знанием.

---

*) Это легко следует из (18), (20), (21) цитированной выше статьи.

**) Albert Einstein, On the Methode of Theoretical Physics, в сб. Ideas and Opinions by Albert Einstein, 3nd ed., London, 1956,; сверено с немецким текстом — см. Albert Einstein, Mein Weltbild, Herausgegeben von Carl Seelig, Europa Verlag, Zürich, 1953. Спенсеровская лекция, прочитанная в Оксфорде 10 июня 1939 г. Перевод С. Г. Суворова.

Мы почитаем древнюю Грецию как колыбель западной науки. Здесь впервые было создано чудо мысли — логическая система, теоремы которой вытекали друг из друга с такой точностью, что каждое из доказанных ею предложений было абсолютно несомненным: я говорю о геометрии Евклида. Этот замечательный триумф мышления придал человеческому интеллекту уверенность в себе, необходимую для последующих действий. Если труд Евклида не смог зажечь ваш юношеский энтузиазм, то вы не рождены быть теоретиком.

Но прежде чем человечество созрело для науки, охватывающей действительность, необходима была вторая истина, которая не была достоянием философии до появления Кеплера и Галилея. Чисто логическое мышление не могло принести нам никакого знания эмпирического мира. Все познание реальности отправляется от опыта и возвращается к нему. Предложения, полученные при помощи чисто логических средств, при сравнении с реальностью оказываются совершенно пустыми. Именно потому, что Галилей знал это, и особенно потому, что он вдалбливал это в головы ученых, он является отцом современной физики, да, пожалуй, и современного естествознания вообще.

Но если опыт есть начало и конец всего нашего знания реальности, какова же роль логического мышления в науке?

Полная система теоретической физики состоит из понятий, фундаментальных законов, которые должны иметь силу для этих понятий, и следствий, выведенных посредством логической дедукции. Это те заключения, которые должны соответствовать нашему единичному опыту; в любом теоретическом трактате их логический вывод занимает почти все страницы.

Здесь имеет место точно то же, что и в геометрии Евклида, за исключением того, что там фундаментальные законы называются аксиомами и не возникает вопроса о том, что выводы должны соответствовать какому-либо опыту. Если, однако, евклидову геометрию рассматривают как науку о возможности взаимного расположения практически твердых тел в пространстве, т. е. если ее трактуют как физическую науку, не абстрагируясь от ее первоначального эмпирического образа, то логическая однородность геометрии и теоретической физики становится полной.

Таким образом мы определили место логического мышления и опыта в системе теоретической физики. Логическое мышление определяет структуру этой системы; то, что́ содержит опыт и взаимные соотношения опытных данных, должно найти свое отражение в выводах теории. В том, что такое отражение возможно, состоит единственная ценность и оправдание всей системы и особенно понятий и фундаментальных законов, лежащих в ее основе. В остальном эти последние суть свободные изобретения человеческого разума, которые не могут быть оправданы ни природой этого разума, ни каким-либо другим видом априори.

Эти фундаментальные понятия и законы, которые дальше не могут быть сводимы, образуют неотъемлемую часть теории, которая не поддается рациональной трактовке. Важнейшая цель всей теории состоит в том, чтобы этих несводимых элементов было как можно меньше и чтобы они были как можно проще, однако так, чтобы это не исключало точного отображения того, что содержится в опыте.

Кратко обрисованный здесь взгляд, согласно которому основы научной теории имеют чисто произвольный (fiktiven) характер, еще не был господствующим в XVIII и XIX веках. Но постепенно он получает все более прочную почву, по мере того как в мышлении все более отдаляются друг от друга фундаментальные понятия и законы, с одной стороны, и те выводы, которые должны быть сопоставлены с опытом, с другой, чем больше унифицируется логическая структура, т. е. чем меньше становится число

логически независимых друг от друга концептуальных элементов, которые оказываются необходимыми, чтобы поддержать всю структуру.

Ньютон, первый основатель обширной, работоспособной системы теоретической физики, был еще убежден в том, что основные понятия и законы его системы происходят из опыта. Его слова hypotheses non fingo («гипотез я не строю») можно понять в этом смысле.

Действительно, появившиеся в это время понятия пространства и времени не создавали никаких проблем. Понятия массы, инерции и силы и связанные с ними законы казались взятыми непосредственно из опыта. Раз эта база была принята, то и выражение для силы тяготения казалось выведенным из опыта, и было основание ожидать то же самое в отношении других сил.

Правда, из ньютоновых формулировок мы видим, что понятие абсолютного пространства, связанное с понятием абсолютного покоя, доставляло ему неприятное чувство; он понимал, что в опыте, по-видимому, нет ничего, что соответствовало бы этому понятию. Он чувствовал также беспокойство в связи с введением дальнодействующих сил. Но огромный практический успех его учения, по-видимому, воспрепятствовал ему и физикам XVIII и XIX веков признать произвольный характер основ его системы.

Напротив, большинство естествоиспытателей тех времен были проникнуты идеей, что фундаментальные понятия и основные законы физики не были в логическом смысле свободными изобретениями человеческого разума и что они могли быть выведены из экспериментов посредством «абстракции», т. е. логическими средствами. Ясное осознание неправильности этого понимания по существу принесла только общая теория относительности. Эта теория показала, что на фундаменте понятий, сильно отличающемся от ньютонова, можно соответствующий круг опытов объяснить даже более удовлетворительным и совершенным образом, чем это было возможно на ньютоновой основе. Но совершенно не входя в обсуждение степени превосходства той или другой основы, можно сказать, что их произвольный (fiktiven) характер вполне очевиден из того факта, что мы можем указать на две существенно различные основы, которые обе в высокой степени соответствуют опыту. Во всяком случае это доказывает, что всякая попытка логического выведения основных понятий и законов механики из элементарного опыта обречена на провал.

Если, далее, справедливо, что аксиоматическая основа теоретической физики не может быть извлечена из опыта, а должна быть свободно изобретена, можем ли мы вообще надеяться найти правильный путь? Более того, существует ли этот правильный путь не только в нашем воображении? Можем ли мы вообще быть уверенными, что опыт — надежный руководитель, если существуют такие теории, как классическая механика, которые, воздавая должное опыту, не проникают в сущность вещей? Я отвечаю без колебаний, что, по моему мнению, есть правильный путь, и мы в состоянии найти его. Весь предшествующий опыт утверждает нас в вере, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы. Опыт может подсказать нам соответствующие математические понятия, но они ни в коем случае не могут быть выведены из него. Конечно, опыт остается единственным критерием пригодности математических конструкций физики. Но настоящий творческий принцип присущ именно математике. Поэтому я считаю в известном смысле справедливым, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность, как это и полагали древние.

Чтобы оправдать эту уверенность, я вынужден применить математическое понятие. Физический мир представляется в виде четырехмерного континуума. Если я предполагаю в нем риманову метрику и спрашиваю, каковы простейшие законы, которые могут удовлетворить такой метрике, я прихожу к релятивистской теории гравитации в пустом пространстве. Если в этом пространстве я предполагаю векторное поле или антисимметричное тензорное поле, которое может быть из него выведено, и спрашиваю, каковы простейшие законы, которые могут удовлетворить такому полю, я прихожу к максвелловым уравнениям для вакуума.

У нас нет еще теории для тех частей пространства, в которых плотность электрического заряда не исчезает. Де-Бройль предположил существование волнового поля, которое должно было объяснить известные квантовые свойства материи. Дирак нашел в спинорах полевые величины нового вида, простейшие уравнения которых позволили вывести общие свойства электронов. Позже, в сотрудничестве с моим коллегой доктором Вальтером Майером, я нашел, что эти спиноры образуют своеобразный вид поля, математически связанного с четырехмерной системой; мы назвали его «полувекторным». Простейшие уравнения, которым такие полувекторы могут удовлетворять, дают нам ключ к пониманию того, что существуют два вида элементарных частиц различной весомой массы и равного, но противоположного электрического заряда. Эти полувекторы, вслед за обычными векторами, являются простейшими математическими полевыми образованиями, которые возможны в метрическом континууме четырех измерений, и это выглядит так, как если бы они естественным образом описывали существенные свойства электрических элементарных частиц.

Для нашего рассмотрения существенно, что все эти образования и их закономерные связи могут быть получены в соответствии с принципом поисков математически простейших понятий и связей между ними. В ограниченности числа математически существующих простых типов полей и простых уравнений, возможных между ними, состоит надежда теоретиков на то, что они смогут понять реальность во всей ее глубине.

Наиболее тяжелым пунктом для развития подобной полевой теории является концепция атомистической структуры вещества и энергии. Потому что эта теория в основе своей не атомистична, постольку она оперирует исключительно с непрерывными функциями пространства, в противоположность классической механике, наиболее важный элемент которой — материальная точка — уже сам по себе оправдывает атомистическую структуру вещества.

Современная квантовая теория в той ее форме, которая связана с именами де-Бройля, Шрёдингера и Дирака и оперирует с непрерывными функциями, преодолела эту трудность путем смелой интерпретации; последняя впервые в ясной форме была дана Максом Борном. Согласно этой интерпретации, пространственные функции, которые встречаются в уравнениях, не претендуют на то, чтобы быть математической моделью атомистического образования. Предполагается, что эти функции определяют только математические вероятности найти такие образования в известном месте или же в известном состоянии движения, когда производятся соответствующие измерения. Это толкование логически свободно от противоречий, и оно достигло значительных результатов. Но, к сожалению, оно вынуждает нас применять континуум, размерность которого не является размерностью пространства, применяемого в физике до сих пор (а именно: четырехмерной); размерность этого континуума неограниченно возрастает вместе с ростом числа частиц, составляющих рассматриваемую систему. Не могу не признаться в том, что я придавал этой интерпретации только преходящее значение. Я все еще верю в воз-

можность модели реальности, т. е. теории, которая выражает сами вещи, а не только вероятности их появления.

С другой стороны, мне кажется несомненным, что мы должны отказаться от идеи точной локализации частиц в теоретической модели. Это кажется мне прочным выводом из гейзенберговского соотношения неопределенности. Но *атомистическая теория в собственном смысле* слова (а не только на основе интерпретации) вполне мыслима и без локализации частиц в математической модели. Например, чтобы учесть атомистический характер электричества, необходимо только полевые уравнения привести к следующему выводу: область трехмерного пространства, на границах которой плотность электрического заряда исчезает повсюду, всегда содержит общий электрический заряд, величина которого представляется целым числом.

В теории континуума атомистические характеристики могли бы быть удовлетворительно выражены через интегральные законы, без локализации тех образований, которые составляют атомистическую структуру.

Только в том случае, если бы удалось осуществить такое представление атомистической структуры, я считал бы квантовую загадку разрешенной.

920.91 : 53

АВТОБИОГРАФИЧЕСКИЕ НАБРОСКИ *)

В 1895 г. в шестнадцатилетнем возрасте я приехал из Италии в Цюрих, после того как без школы и без учителя провел год в Милане у родителей. Моей целью было поступление в политехникум, хотя я не совсем ясно представлял себе, как это можно осуществить. Я был своенравным, но скромным молодым человеком, который приобрел свои необходимые знания спорадически, главным образом путем самообразования. Я жаждал глубоких знаний, но обучение не казалось мне легкой задачей: я был мало приспособлен к заучиванию и обладал плохой памятью. С чувством вполне обоснованной неуверенности я явился на вступительный экзамен на инженерное отделение. Экзамен показал мне прискорбную недостаточность моей подготовки, несмотря на то, что экзаменаторы были снисходительны и полны сочувствия. Я понимал, что мой провал был вполне оправдан. Отрадно было лишь то, что физик Г.-Ф. Вебер сказал мне, что я могу слушать его коллег, если останусь в Цюрихе. Но ректор, профессор Альбин Герцог, рекомендовал меня в кантональную школу в Аарау, где после годичного обучения я сдал экзамен на аттестат зрелости. Эта школа оставила во мне незабываемый след, благодаря своему либеральному духу и скромной серьезности учителей, которые не опирались на какие-либо показные авторитеты; сравнение с шестилетним обучением в авторитарно управляемой немецкой гимназии убедительно показало мне, насколько воспитание в духе свободы и чувства личной ответственности выше воспитания, которое основано на муштре, внешнем авторитете и честолюбии. Настоящая демократия не является пустой иллюзией.

В этом году в Аарау у меня возник вопрос: если бы можно было погнаться за световой волной со скоростью света, то мы имели бы перед собой независящее от времени волновое поле. Но все-таки это кажется невозможным! Это был первый детский мысленный эксперимент, который

*) Albert Einstein, Autobiographische Skizze, Helle Zeit—dunkle Zeit, Herausgegeben von Carl Seelig, Europa Verlag, Zürich, 1956. Перевод В. Иванова.

относился к специальной теории относительности. Открытие не является делом логического мышления, даже если конечный продукт связан с логической формой.

1896—1900 гг.— обучение на отделении преподавателей специальных дисциплин швейцарского политехникума. Вскоре я заметил, что довольствуюсь ролью посредственного студента. Для того чтобы быть хорошим студентом, нужно обладать легкостью восприятия; готовностью сконцентрировать свои силы на всем том, что читается в лекции; любовью к порядку, чтобы записывать и затем добросовестно обрабатывать преподносимое на лекциях. Всех этих качеств мне основательно недоставало, как я с сожалением установил. Так постепенно я научился ладить с не совсем чистой совестью и организовывать свое ученье так, как это соответствовало моему интеллектуальному желудку и моим интересам. Некоторые лекции я слушал с большим интересом. Но обыкновенно я много «прогуливал» и со священным рвением штудировал дома корифеев теоретической физики. Само по себе это было хорошо и служило также тому, что нечистая совесть так действенно успокоилась, что душевное равновесие не нарушалось сколько-нибудь заметно. Это широкое самостоятельное обучение было простым продолжением более ранней привычки; в нем принимала участие сербская студентка Милева Марич, которая позднее стала моей женой. Однако в физической лаборатории профессора Г.-Ф. Вебера я работал со рвением и страстью. Захватывали меня также лекции профессора Гейзера по геометрии бесконечно малых, которые были настоящими шедеврами педагогического искусства и очень помогли мне позднее в борьбе, развернувшейся вокруг общей теории относительности. Но высшая математика еще мало интересовала меня в студенческие годы. Мне ошибочно казалось, что это настолько разветвленная область, что можно легко растратить всю свою энергию в далекой провинции. К тому же по своей наивности я считал, что для физики достаточно твердо усвоить элементарные математические понятия и иметь их готовыми для применения, а остальное состоит в бесполезных для физики тонкостях, — заблуждение, которое только позднее я с сожалением осознал. У меня, очевидно, не хватало математических способностей, чтобы отличить центральное и фундаментальное от периферийного и не принципиально важного.

В эти студенческие годы развилась настоящая дружба с товарищем по учебе, Марселем Гроссманом. Раз в неделю мы торжественно шли с ним в кафе «Метрополь» на набережной Лиммат и разговаривали с ним не только об учебе, но и, сверх того, о всех вещах, которые могут интересовать молодых людей с открытыми глазами. Он не был таким типом бродяги и чудака, как я, но был связан со швейцарской средой и по возможности не потерял внутренней самостоятельности. Кроме того, он обладал в избытке как раз теми данными, которых мне не хватало: быстрым восприятием и порядком во всех смыслах. Он не только посещал все лекции, которые мы считали важными, но и обрабатывал их таким замечательным образом, что если бы его тетради перепечатать, их вполне можно было бы издать. Для подготовки к экзаменам он одалживал мне эти тетради, которые означали для меня якорь спасения; о том, как мне жилось бы без них, лучше не гадать.

Несмотря на эту неоценимую помощь и вопреки тому, что все читавшиеся нам предметы сами по себе были интересными, я должен был перебороть себя, чтобы основательно изучить все эти вещи. Для людей моего типа, склонных к долгому раздумью, университетское образование не является безусловно благодатным. Вынужденный съесть много хороших вещей, человек может надолго испортить себе аппетит и желудок. Огонек

священного любопытства может надолго угаснуть. К счастью, у меня эта интеллектуальная депрессия после благополучного окончания учебы длилась только год.

Самое большое из того, что сделал для меня Марсель Гроссман как друг, было следующее. Приблизительно через год после окончания обучения он рекомендовал меня через своего отца директору швейцарского патентного бюро Фридриху Галлеру, которое тогда еще называлось «Бюро духовной собственности». После обстоятельного устного испытания господин Галлер принял меня на службу. Благодаря этому в 1902—1909 гг., как раз в годы наиболее продуктивной деятельности, я был избавлен от забот о существовании. Кроме того, работа над окончательной формулировкой технических патентов была для меня настоящим благословением. Она принуждала к многостороннему мышлению, а также давала импульс для физических размышлений. Наконец, практическая профессия вообще является благословением для людей моего типа. Ибо академическая карьера вынуждает молодых людей производить научные труды во все возрастающем количестве, что приводит к соблазну поверхностности, которому могут противостоять только сильные характеры. Большинство практических профессий относятся, далее, к такому роду, что человек нормальных способностей в состоянии выполнить то, чего от него ждут. В своем житейском существовании он не зависит от особых озарений. Если у него есть более глубокие научные интересы, то, наряду со своей обязательной работой, он может погрузиться в свою любимую проблему. Его не должна угнетать боязнь того, что его усилия могут остаться безрезультатными. Тем, что я оказался в таком счастливом положении, я обязан Марселю Гроссману.

Из событий научного характера, которые относятся к тем счастливым годам в Берне, я упомяну лишь одно, которое привело к наиболее плодотворной идее в моей жизни. Специальной теории относительности было уже несколько лет. Ограничен ли принцип относительности инерциальными системами, т. е. системами координат, которые движутся равномерно друг относительно друга (линейные преобразования координат)? Формальный инстинкт подсказывает: «Вероятно, нет!». Но основное положение всей прежней механики — принцип инерции — как будто бы исключает всякое расширение принципа относительности. А именно, если ввести систему координат, движущуюся с ускорением (по отношению к инерциальной системе), то «изолированная» точечная масса больше не движется прямолинейно и равномерно относительно этой системы. Свободный от мешающего привычного мышления ум спросил бы теперь: а не дает ли мне в руки это поведение способ отличить инерциальную систему от неинерциальной? Он должен был бы затем прийти к выводу (по крайней мере в случае прямолинейного равноускоренного движения), что это не так. Ибо механическое поведение тел относительно такой ускоренной системы координат можно интерпретировать так же, как действие гравитационного поля; это можно сделать благодаря эмпирическому факту, который заключается в том, что в гравитационном поле ускорение тел, независимо от их природы, всегда одно и то же. Знание этого (принцип эквивалентности) сделало вероятным не только то, что законы природы должны быть инвариантными по отношению к общей группе преобразований Лоренца (расширение принципа относительности), но также и то, что это расширение должно привести к углубленной теории гравитационного поля. В том, что эта идея в принципе является правильной, я по меньшей мере не сомневался. Но трудности ее осуществления казались почти непреодолимыми. Прежде всего элементарные соображения показывали, что переход к более широкой группе преобразований

несовместим с прямой интерпретацией пространственно-временных координат, которая проложила путь специальной теории относительности. Кроме того, нельзя было усмотреть, как должна быть выбрана расширенная группа преобразований. В действительности мне удалось подойти к этому принципу эквивалентности окольным путем, описание которого здесь неуместно.

В 1909—1912 гг., в то время как я изучал теоретическую физику в Цюрихском и Пражском университетах, я непрерывно размышлял об этой проблеме. В 1912 г., когда меня пригласили на работу в Цюрихский политехникум, я уже значительно ближе подошел к решению этой проблемы. Важным здесь оказался анализ Германа Минковского формальной основы специальной теории относительности. Его можно сконцентрировать в следующем предложении: четырехмерное пространство имеет (инвариантную) псевдоевклидову метрику; она определяет метрические свойства пространства, которые можно констатировать экспериментально, а также принцип инерции и, сверх того, форму системы уравнений, инвариантных по Лоренцу. В этом пространстве имеются предпочтительные, а именно, квазидекартовы системы координат, которые являются здесь единственными «естественными» (инерциальные системы).

Принцип эквивалентности позволяет нам ввести в таком пространстве нелинейные преобразования координат, т. е. недекартовы («криволинейные») координаты. Псевдоевклидова метрика принимает при этом общую форму

$$ds^2 = \sum g_{ik}\, dx_i\, dx_k;$$

суммирование ведется по индексам i и k (от 1 до 4). Эти g_{ik} являются тогда функциями четырех координат, которые согласно принципу эквивалентности кроме метрики описывают также «гравитационное поле». Это последнее здесь, конечно,— совершенно особого вида. Ибо с помощью преобразования его можно перевести в специальную форму

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2,$$

т. е. в форму, в которой g_{ik} не зависят от координат. В этом случае описываемое посредством g_{ik} гравитационное поле можно «преобразовать». В последней специальной форме инерционные свойства изолированных тел выражаются (времениподобной) прямой линией. В общей форме им соответствуют «геодезические линии».

Эта формулировка относилась, правда, все еще к случаю псевдоевклидова пространства. Однако она ясно показала, как нужно осуществлять переход к гравитационным полям общего вида. Здесь также необходимо описывать гравитационное поле посредством некоторого рода метрики, т. е. симметричного тензорного поля g_{ik}. Обобщение состоит просто в том, что теперь нужно отбросить предположение о том, что это поле можно превратить в псевдоевклидово с помощью простого преобразования координат.

Тем самым проблема гравитации была сведена к чисто математической. Существуют ли дифференциальные уравнения для g_{ik}, которые инвариантны относительно нелинейных преобразований координат? Такие и только такие дифференциальные уравнения принимались во внимание как уравнения гравитационного поля. Закон движения материальной точки давался бы тогда уравнением геодезической линии.

С этой задачей в голове я навестил в 1912 г. моего старого студенческого друга Марселя Гроссмана, который тем временем стал профессором математики в Швейцарском политехникуме. Он тотчас загорелся, хотя как настоящий математик имел несколько скептическую точку

зрения на физику. Когда мы оба были еще студентами и привычным образом обменивались в кафе нашими мыслями, он сделал однажды такое прекрасное, характерное замечание, что я не могу его здесь не процитировать: «Я полагаю, что из изучения физики я все же почерпнул кое-что существенное. Когда раньше я садился на стул и ощущал еще остаток тепла, которое принадлежало моему „предсественнику" (Vor-Sitzenden), мне было страшно. Все это совершенно прошло, так как физика научила меня, что теплота есть нечто совершенно безличное».

Вышло так, что хотя он охотно согласился совместно работать над проблемой, но все-таки с тем ограничением, что он не берет на себя никакой ответственности за какие-либо физические утверждения и интерпретации. Он тщательно просмотрел литературу и скоро обнаружил, что указанная математическая проблема была уже решена прежде всего Риманом, Ричи и Леви-Чивитой. Это развитие в целом примыкало к теории кривизны поверхностей Гаусса; в этой теории впервые были систематически использованы обобщенные координаты. Достижения Римана были наибольшими. Он показал, как из поля тензоров g_{ik} можно получить вторые производные. Из этого следовало, как должны выглядеть уравнения поля гравитации в случае, если поставлено требование инвариантности относительно группы всех непрерывных преобразований координат. Однако не так легко было принять, что это требование обосновано, так как я считал, что можно найти основания против него. Эта, разумеется, ошибочная мысль привела к тому, что в своей окончательной форме теория появилась только в 1916 г.

В то время, как я усердно работал совместно с моим другом, никто из нас не думал, что злой недуг так скоро унесет этого замечательного человека. Потребность по крайней мере один раз в жизни выразить мою благодарность Марселю Гроссману придала мне смелость написать эти довольно пестрые автобиографические наброски.

Со времени завершения гравитационной теории теперь прошло уже сорок лет. Они почти исключительно были посвящены усилиям вывести путем обобщения из теории гравитационного поля единую теорию поля, которая могла бы образовать основу для всей физики. С той же целью работали многие. Некоторые обнадеживающие попытки я впоследствии отбросил. Но последние десять лет привели, наконец, к теории, которая кажется мне естественной и обнадеживающей. Я не в состоянии сказать, могу ли я считать эту теорию физически полноценной; это объясняется пока еще непреодолимыми математическими трудностями; впрочем, такие же трудности представляет применение любой нелинейной теории поля. Кроме того, вообще кажется сомнительным, может ли теория поля объяснить атомистическую структуру вещества и излучения, а также квантовые явления. Большинство физиков, несомненно, ответят убежденным «нет», ибо они считают, что квантовая проблема должна решаться принципиально иным путем. Как бы то ни было, нам остаются в утешение слова Лессинга: стремление к истине ценнее, чем гарантированное обладание ею.