1965 г. Апрель *Том 85, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

532.593

КУМУЛЯЦИЯ ЭНЕРГИИ И ЕЕ ГРАНИЦЫ

Е. И. Забабахин

ВВЕДЕНИЕ

Известно много явлений кумуляции, в которых объемная плотность энергии самопроизвольно растет, и притом так, что достигает значений сколь угодно больших. К ним относятся заполнение пузырьков в жидкости, сходящиеся ударные волны (например, сферические), а также электромагнитные ударные волны (цилиндрические и конические). Эти явления вызывают понятный интерес физиков и естественное стремление найти причины, в конце концов ограничивающие рост плотности энергии в них.

Полного ответа на этот вопрос сейчас нет, несмотря на то, что для каждого из этих явлений можно написать точные уравнения и в принципе как угодно точно их решить.

Это создает почву для появления гипотез.

Ниже сделан обзор некоторых случаев неограниченной кумуляции и показано, что явления диссипации (вязкость, теплопроводность) иногда не приводят к ее ограничению. Анализ же устойчивости, если его удается провести до конца, каждый раз указывает на ограничение кумуляции из-за ее неустойчивости.

На этом основании высказана гипотеза о том, что всякая неограниченная кумуляция обязательно неустойчива, и притом так, что в результате неустойчивости она не просто видоизменяется, но и прекращается вообще (становится ограниченной).

I. ОБЗОР ЯВЛЕНИЙ КУМУЛЯЦИИ

1. Заполнение пузырьков в жидкости

Заполнение сферических пузырьков в несжимаемой жидкости или схлопывание их есть, видимо, первый изученный случай неограниченной кумуляции. Его рассмотрел Рэлей в 1917 г. [1].

В этом явлении в стадии фокусировки вблизи центра неограниченно растет центростремительная скорость поверхности пузырька, а также давление вблизи ее.

Из-за большого давления реальная жидкость будет заметно сжиматься, что изменит характер движения и, возможно, уменьшит ускорение к центру.

Учет сжимаемости, выполненный для степенного уравнения состояния вида $p = \mathrm{const}\cdot\varrho^{\gamma}$, для всех $\gamma > 1$ качественно результата не изменил [2, 3].

В фокусе по-прежнему обращаются в бесконечность давление жидкости, ее скорость, а также и плотность, хотя порядок бесконечности пони-

жается: если в несжимаемой жидкости скорость поверхности пузырька растет как $r^{-3/2}$, то в случае $\gamma = 3$ — лишь как $r^{-0,411}$ *). Температура всюду остается конечной. Таким образом, кумуляция происходит и в сжимаемой жидкости и остается неограниченной. Вблизи центра жидкость испытывает сильные и быстрые сдвиговые деформации, что могло бы привести к сильной диссипации энергии из-за вязкости.

Вязкость удалось точно учесть в задаче о несжимаемой жидкости [4], но и это не изменило результата: если начальный радиус пузырька достаточно велик (точнее, если $R \geqslant 8{,}4\sqrt{p/\varrho}$), то кумуляция происходит и в вязкой жидкости, причем не понижается даже порядок бесконечности, а роль вязкости сводится лишь к некоторому уменьшению эффективной энергии движения. Лишь пузырьки, размеры которых меньше критических, захлопываются медленно, причем движение их перед фокусировкой полностью «забывает» начальный размер и независимо от него скорость в этом случае меняется по закону

$$u = -\frac{p}{4\nu\varrho}\, r.$$

Таким образом, ни сжимаемость, ни вязкость в отдельности кумуляции в пузырьках не устраняют, по крайней мере в некоторых случаях.

Безусловный предел кумуляции устанавливает атомизм, так как там, где размер пузырька сравним с атомом, жидкость становится непохожей на сплошную среду и кумуляция прекращается. Однако этот предел очень далек и вообще непринципиален. Например, для сантиметрового пузырька в воде это не мешает формально получить скорость порядка 10^9 *см/сек*, но и этот далекий предел может быть отодвинут увеличением начального размера пузырька или давления жидкости.

2. Сходящиеся ударные волны

Сходящиеся сферические и цилиндрические волны при фокусировке тоже сопровождаются неограниченной кумуляцией. Это аналитически показали для волны в идеальном газе Ландау и Станюкович [5] для $\gamma = 3$ и Гудерлей [6] для $\gamma = 1{,}4$.

В этих случаях плотность вещества всюду ограничена, но бесконечно велики скорость, давление и температура: $T \sim r^{-1,14}$ при $\gamma = 3$ и $T \sim r^{-0,79}$ при $\gamma = 1{,}4$.

Температурные градиенты вблизи центра неограниченно велики, и это могло бы привести к сильной диссипации энергии из-за теплопроводности. Из-за нее фронт волны размывается и достигаемая в центре температура действительно делается конечной. Этот вопрос рассмотрен в статье [7].

В стадии схождения в этом случае впереди идет фронт тепловой волны, но при $\gamma < 3$ за ним движется вторая волна — изотермический скачок плотности, представляющий собой сходящуюся ударную волну с неограниченно растущей амплитудой. Таким образом, теплопроводность устранила лишь бесконечную температуру, но возникла бесконечная плотность, т. е. осталась бесконечная плотность энергии. Таким образом, кумуляция видоизменилась, но не исчезла.

Ограничение достигаемой температуры теплопроводностью, как и атомизмом, непринципиально: максимальная величина ее определяется масштабом явления (размером волны при единичной амплитуде), и за счет увеличения его она может быть сделана как угодно большой.

---

*) Здесь и далее дробные показатели степени найдены из точного решения, описывающего окрестность центра вблизи момента фокусировки.

3. Сходящиеся электромагнитные ударные волны

Электромагнитная волна может иметь скачкообразный фронт, т. е. быть волной ударной. Она может возникнуть при выходе обычной ударной волны из проводника на границу его и параллельного ему магнитного поля. Понятие о таких волнах и некоторые случаи их кумуляции, обнаружившие качественно новые особенности, рассмотрены в статьях[8, 9].

а) Цилиндрическая волна. Пусть в цилиндрической полости в проводнике имеется продольное магнитное поле. Пусть, далее, по веществу проводника идет сходящаяся цилиндрическая ударная волна, одновременно выходящая на поверхность полости. Это вызовет появление в полости сходящейся ударной электромагнитной волны, фронт которой может быть довольно резким. Как показано в работе [8], ширина фронта в вакууме при выходе из меди составит ~ 10 *см*, а из меди, охлажденной до 20° К, — 0,1 *см* (играет роль улучшение проводимости при охлаждении).

Фронт сходящейся волны несет увеличение продольного магнитного поля и появление кольцевого электрического поля.

Если фронт резкий, то по мере приближения его к оси поля на нем растут как $r^{-1/2}$, т. е. неограниченно увеличиваются.

Обнаружилась интересная дополнительная особенность: амплитуда отраженной от оси волны оказалась бесконечной не только в месте отражения, но и на конечном расстоянии от оси, т. е. бесконечно сильная волна поля, возникнув на оси, далее пробегает все точки конечного объема.

Это свойство было обнаружено при рассмотрении автомодельного решения уравнений для волны вблизи оси [8]: ряд, описывающий поле вблизи отраженной волны, по мере приближения к ней с любой стороны логарифмически расходится.

Я. Б. Зельдович [10] получил этот же результат другим методом, рассматривая цилиндрическую волну как суперпозицию плоских.

Таким же свойством обладают слабые ударные цилиндрические волны (акустические волны), т. е. оно связано не с физической природой ударной волны, а с ее геометрической формой. (Ясно, что уравнения акустики, описывающие лишь слабые волны, годятся лишь там, где вызываемые волной изменения плотности малы.)

б) Коническая волна. Понятие электромагнитной ударной волны позволило построить любопытный пример стационарной кумуляции, кажется, первый в своем роде, описанный в работе [9].

Сходящаяся коническая волна в веществе неограниченной кумуляции не дает, так как вершина конуса неизбежно притупляется из-за усиления волны и ее ускорения вблизи оси. (Это положение известно как теорема о невозможности некоторых конических течений.) Поэтому построить пример стационарной кумуляции для обычных ударных волн не удавалось.

Для ударной волны поля, скорость которой постоянна (и равна скорости света), этой помехи нет, и она может быть сходящейся конической вплоть до вершины конуса, в которой и происходит неограниченная кумуляция, и притом стационарная. Поля на фронте вблизи оси и здесь растут как $r^{-1/2}$. Как и для цилиндрической волны, амплитуда отраженной от оси волны оказалась неограниченной не только на оси, но и на всем ее фронте.

Степень кумуляции ударных волн поля не встречает физических ограничений до тех пор, пока правильны уравнения Максвелла.

Из-за постоянства скорости всех волн поля нерезкий фронт сохраняет свою нерезкость и, в отличие от волны в веществе, скачок в нем сам не вырабатывается. Нерезкость фронта, связанная с неидеальностью

проводника, «толкнувшего» поле и породившего волну, сохраняется при схождении волны к оси и, конечно, ограничивает ее кумуляцию. Однако это ограничение также не абсолютно и оно может быть преодолено увеличением масштаба явления.

II. О НЕУСТОЙЧИВОСТИ КУМУЛЯЦИИ

Причиной ограничения кумуляции может быть ее неустойчивость, т. е. нарушение симметрии явления.

Изучая поведение малых возмущений, можно узнать, устойчив ли основной режим кумуляции, но во что он переходит в случае неустойчивости, остается неизвестным. Кумуляция может быть нарушена вообще (исчезнет неограниченная плотность энергии) или лишь видоизменена. Например, схлопывающийся пузырек может деформироваться и превратиться в тор, который, схлопываясь, в свою очередь мог бы продолжить кумуляцию, но в другом виде.

Таким образом, существуют два различных вопроса: устойчив ли основной процесс и во что он переходит в случае неустойчивости, и сохраняется ли факт неограниченной кумуляции вообще?

Второй вопрос особенно интересен, но анализом малых возмущений он не решается. Желая уделить основное внимание именно ему, далее будем рассматривать лишь те случаи, в которых можно проследить поведение не только малых, но и больших возмущений. Поведение возмущений во всех стадиях процесса кумуляции удается проследить, и притом точно, в одном частном случае, оказавшемся весьма поучительным.

Пусть тонкая цилиндрическая оболочка из идеальной жидкости движется к оси, медленно вращаясь. По мере схождения оболочка утолщается, вращение внутренних слоев усиливается, и из-за центробежной силы оболочка не доходит до оси, и снова начинается ее разлет. Неограниченной кумуляции в этом случае нет.

Дополнительная степень свободы (вращение), будучи возбуждена сколь угодно слабо, постепенно отнимает все бóльшую энергию от основного движения, пока не захватит ее всю. При разлете энергия вновь постепенно переходит к радиальному движению.

Из условия сохранения момента количества движения получается, что окружная скорость пропорциональна r^{-1}. Нетрудно видеть, что в момент остановки радиального движения энергия единицы длины цилиндра

$$E = \pi\rho v^2 r^2 \ln \frac{R}{r},$$

где r и R — внутренний и наружный радиусы цилиндра, v — окружная скорость внутренней границы, т. е. максимальная скорость, достигаемая во всем процессе.

Простое вычисление показывает, что момент количества движения

$$Q = mrv,$$

где m — масса цилиндра (то и другое на единицу длины).

Из этих равенств получаем

$$v = \frac{Q}{mR} e^{\frac{m^2 E}{\pi\rho Q^2}},$$

т. е. при любом конечном Q величина скорости не бесконечно велика, а ограничена.

В этом примере малое возмущение Q устраняет неограниченную кумуляцию, но чем это возмущение меньше, тем достигаемая плотность энергии больше.

Этот результат естественно и полно объясняет ограничение кумуляции в рассмотренном случае.

Может возникнуть вопрос о том, не восстановится ли кумуляция в том случае, если ввести вязкость, которая затормозит вращение внутренних слоев относительно внешних и уменьшит центробежную силу. Однако, как оказывается, вязкость здесь устраняет кумуляцию сама по себе даже без вращения; вязкая цилиндрическая оболочка останавливается, не достигая оси. Таким образом, восстановления кумуляции из-за вязкости в этом случае не произошло. Впрочем, затухание некоторых «опасных» возмущений из-за диссипации в других случаях, конечно, не исключено.

Другой пример полного разрушения кумуляции из-за малых возмущений дают ударные волны поля. Появление особенности в центре сходящейся цилиндрической волны поля связано с одновременностью прихода туда фронта со всех сторон, что́ становится особенно ясным, если воспользоваться представлением Зельдовича [10] о цилиндрической волне, как сумме большого числа плоских волн. Если же фронт не вполне цилиндричен (точнее, его поверхность нигде строго не совпадает с цилиндром), из-за постоянства его скорости одновременность прихода в центр нарушится и особенность исчезнет, т. е. кумуляция будет разрушена.

Это, конечно, относится и к конической сходящейся волне. Как и в случае вращающейся оболочки, достигаемая в центре плотность энергии тем больше, чем меньше начальные возмущения.

III. ГИПОТЕЗА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ КУМУЛЯЦИИ

Представляется естественным ожидать, что кумуляция ограничена еще чем-то, кроме атомизма. Как показали примеры, диссипация этих ограничений не дает, по крайней мере в некоторых случаях.

С другой стороны, некоторые возмущения основного движения приводят к нарушению кумуляции, что удалось до конца проследить в двух случаях. На этом основании можно высказать следующую гипотезу: всякая неограниченная кумуляция неустойчива. Попытки доказать это пока не удались. Интересен был бы опровергающий пример, но и он пока не найден.

Заметим, что предполагаемое доказательство должно быть весьма общим, не связанным с конкретным видом уравнений процесса, так как в разных случаях эти уравнения разные (уравнения газодинамики для разных процессов и разных уравнений состояния и уравнения электродинамики для волн разных конфигураций).

Частным случаем кумуляции является коллапс вселенной, возможность которого, казалось, следовала из уравнений.

Этот вопрос изучили Е. М. Лифшиц и И. М. Халатников [11]; они показали, что коллапс мог быть лишь в случае симметричного исходного состояния, наличие же несимметрии возможность его устраняет.

Высказанная гипотеза похожа на эту теорему (является ее обобщением), и это увеличивает ее правдоподобие.

Гипотеза может иметь отношение к некоторым явлениям в звездах. Быстрое и очень сильное сжатие звезды или ее внутренней части, видимо, может произойти лишь в случае, когда исходное состояние ее достаточно симметрично, в частности, если почти нет вращения.

Если это так, то эволюция звезды и возможные катаклизмы не определяются однозначно такими параметрами, как ее масса, размер, и т. д.,

а могут зависеть от того, насколько эта звезда симметрична, в частности, как быстро она вращается.

В технике ограничение кумуляции может представлять интерес при изучении пинч-эффекта в импульсных разрядах в газах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Явление кумуляции встречается в природе и в технике. Естественно ожидать, что она чем-то ограничена. В ряде случаев физических ограничений указать не удалось, в других случаях показано, что кумуляция полностью нарушается неустойчивостью. Это и дало основание для гипотезы о том, что всякий процесс кумуляции неустойчив и что неустойчивость не только меняет основное явление неограниченной кумуляции, но и нарушает ее вообще.

Эту гипотезу интересно было бы либо доказать, либо опровергнуть каким-нибудь примером.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh, Phil. Mag. **34**, 94 (1917).
2. К. В. Брушлинский и Я. М. Каждан, УМН **18** [2(110)], 3 (1963).
3. C. Hunter, J. Fluid Mech. 8, 241 (1960).
4. Е. И. Забабахин, Прикладная математика и механика **24**, 1129 (1960).
5. К. П. Станюкович, Неустановившиеся движения сплошной среды, М., Гостехиздат, 1955.
6. G. Guderley, Luftfahrforsch. **19**, 302 (1942).
7. Е. И. Забабахин и В. А. Симоненко, Прикладная математика и механика (1965).
8. Е. И. Забабахин, М. Н. Нечаев, ЖЭТФ **33**, 442 (1957).
9. Е. И. Забабахин, Б. П. Мордвинов, ЖЭТФ **48**, 342 (1965).
10. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ **33**, 700 (1957).
11. Е. М. Лифшиц и И. М. Халатников, УФН **80** (3), 391 (1963).