1965 г. Февраль *Том 85, вып. 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

51+53

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА*)

Ф. Дайсон

В 1910 г. математик Освальд Веблен и физик Джеймс Джинс пересматривали программу по математике Принстонского университета. Джинс сказал: «Вполне можно выбросить теорию групп; этот предмет никогда не найдет применения в физике». Неизвестно, возражал ли Веблен Джинсу или просто отстаивал теорию групп из чисто математических соображений. Известно только, что теорию групп продолжали изучать. А то, что Веблен пренебрег советом Джинса, оказалось весьма существенным для развития науки в Принстоне. По иронии судьбы теория групп стала позднее одним из центральных звеньев теоретической физики и в настоящее время царит в мыслях тех, кто занимается исследованием фундаментальных частиц. По воле случая принстонские профессора Вейль и Вигнер оказались пионерами теоретико-группового направления в физике, которое начало развиваться с 20-х годов и продолжает развиваться поныне.

В этой маленькой истории отнюдь не одна мораль. Первая из них — та, что ученые не должны допускать категорических отрицаний в областях, выходящих за рамки их узкой специализации. Судьба Джинса наглядно показывает, куда ведут попытки декретировать в науке. Его неудачное выступление в случае с Вебленом было только началом: далее он шел от плохого к худшему; Джинс становится научно-популярным писателем и радиообразователем, добивается рыцарского звания и губит свою профессиональную репутацию, окунувшись в атмосферу привлекательных, но поверхностных рассуждений на религиозные и философские темы.

Однако нам не следует чересчур самодовольно относиться к закату и падению физика Джинса. В конце концов Джинс в 1910 г. был вполне уважаемым физиком (хотя в Принстоне его величали профессором прикладной математики, следуя чисто английской традиции в титулах, как псевдоготике в архитектуре). Джинс был не менее сведущ и не менее образован, чем большинство его коллег. В те времена весьма немногие имели хотя бы малейшее представление о пользе сочетания физики и теории групп. Поэтому вторая и более серьезная мораль этой истории заключается в том, что будущее науки предсказать нельзя.

Место математики в физической науке трудно определить раз и навсегда. Взаимоотношение математики с наукой столь же богато и разнообразно, как и сама наука.

При всех изгибах и поворотах истории физики один фактор остается неизменным — решающее значение математического воображения. Каждое

*) F r e e m a n D y s o n, Mathematics in Physical Science, Scientific American 211 (3), 129 (1964). Перевод В. А. Белоконя и В. А. Угарова.

столетие характерно своим особым отношением к науке и своим стилем в математике. Вместе с тем во времена крупнейших достижений более глубокое понимание физики достигалось комбинацией экспериментальных наблюдений и чисто математической интуиции. Математика для физика

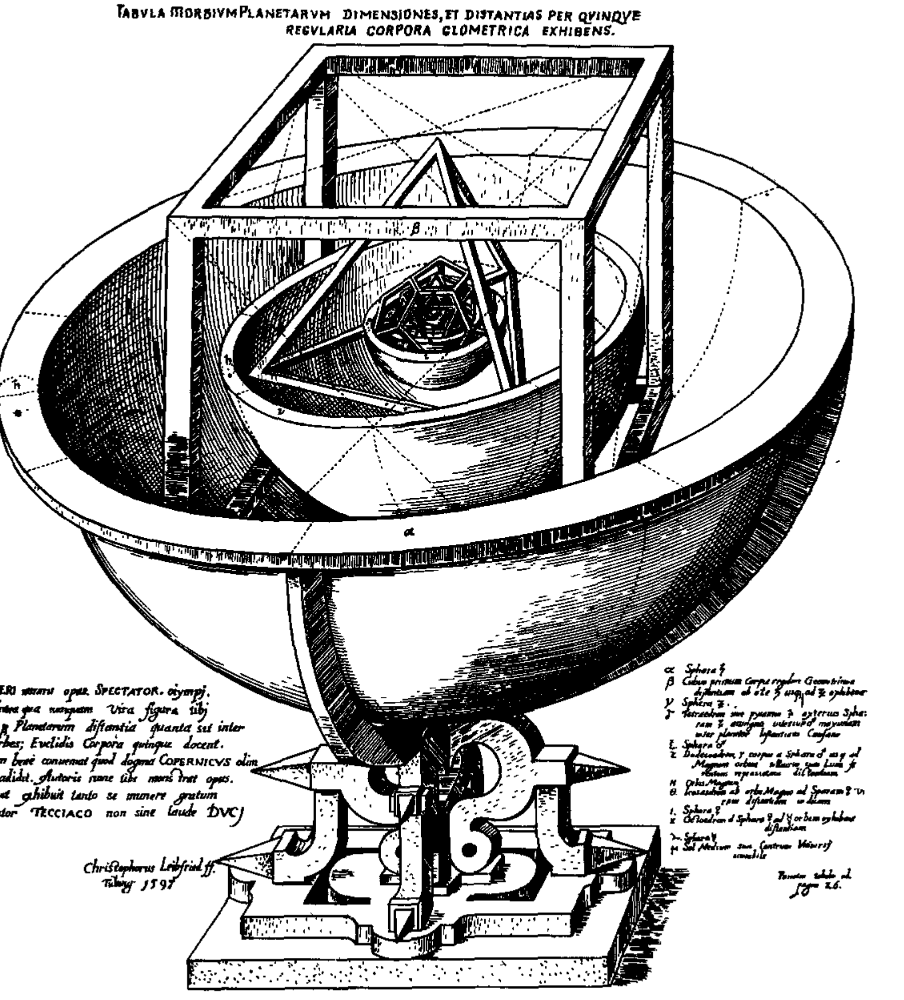


Рис. 1. Кеплеровская модель солнечной системы; опубликована в 1596 г.
Она основана на пяти «правильных» многогранниках евклидовой геометрии. Орбиты планет последовательно вписываются и описываются около октаэдра, икосаэдра, додекаэдра, тетраэдра и куба. Модель представляет собою превосходный пример математической интуиции, ведущей по ложному направлению. Хотя Кеплер и знал о расхождении между его теорией и лучшими наблюдательными данными того времени, он всегда рассматривал эту модель как одно из своих величайших достижений.

является не просто инструментом, при помощи которого он рассчитывает различные явления. Математика — это основной источник представлений и принципов, посредством которых создаются новые теории.

Способность математики отображать поведение физической вселенной изумляла физиков всех времен. Великий астроном XVII в. Иоганн Кеплер, открывший законы движения планет, выражал в религиозной форме свое удивление этим свойством математики: «И вот сам Господь, который слишком добр, чтобы оставаться праздным, начал игру со знаками, отражающими его облик. Именно эта мысль привела меня однажды к выводу, что вся природа и прекрасное небо символически отражаются в законах геометрии». В более идеалистическом XIX в. немецкий физик Генрих Герц, который впервые подтвердил уравнения Максвелла (продемонстрировав существование радиволн), писал: «Невозможно избавиться от ощущения, что эти математические формулы существуют независимо от нас и живут собственной разумной жизнью, что они умнее нас и умнее даже их создателей, что мы извлекаем из этих формул даже больше того, что было в них заложено сначала». Позже, в наш рационалистический XX в., свое изумление успехами новых математических идей выразил в своей характерной сухой и сдержанной форме Вигнер: «Мы похожи на человека со связкой ключей, который, пытаясь открывать одну дверь за другой, всегда вставляет правильный ключ с первой или второй попытки. Это заставляет его сомневаться относительно однозначного соответствия между ключами и замками».

Математика Кеплера, математика Герца и математика Вигнера не имеют между собою почти ничего общего. Кеплер пользовался евклидовой геометрией — кругами, сферами и правильными многогранниками. Герц мыслил дифференциальными уравнениями в частных производных. Вигнер писал об использовании комплексных чисел в квантовой механике и, несомненно, мечтал (хотя и не писал об этом), что ему удастся применить теорию групп в самых различных областях физики. Геометрия Евклида, дифференциальные уравнения в частных производных и теория групп — эти три отрасли математики столь удалены одна от другой, что кажутся принадлежащими разным математическим мирам. И все же все эти отрасли оказываются тесно связанными с нашим физическим миром. Таковы удивительные факты, которых еще никто не смог полностью осознать. Из этих фактов можно сделать лишь один надежный вывод: разум человека еще не подошел к сколько-нибудь полному пониманию как физического мира, так и мира математики, не говоря уже о соотношении между ними.

В этой статье не будет философской дискуссии о том, почему математика столь эффективно применяется в физике. В каждом столетии лишь немногие физики — в нашем веке это были Эйнштейн, Вейль, Бор, Бриджмен и Вигнер — могли достаточно глубоко проникнуть в основы наших знаний и достичь понимания истинно философских трудностей. Огромное же большинство работающих ученых, к которым я отношу также и себя, утешается словами французского математика Анри Лебега: «По-моему, математику, пока он остается математиком, нет нужды заниматься философией»; более того, именно это мнение высказывали и многие философы».

Оставив философию гигантам, таким как Бор или Вигнер, мы займемся исследованием природы не слишком глубоко. Поэтому я не буду говорить о том, по каким конечным причинам математические представления господствуют и торжествуют в физике. Я обойду философские доказательства, принимая на веру, что природу нужно исследовать на языке математики. Я буду заниматься лишь практическими вопросами: как идеи математики оказывают влияние на физику? Чем определяются вкус и подход физика, обусловленные математикой? На какую отрасль математики возлагают надежды сейчас, добиваясь нового уровня физического понимания? И наконец, поскольку один конкретный пример лучше многочисленных общих рассуждений, я расскажу о роли теории групп в физике вплоть до так называемого «восьмеричного пути» в теории фундаментальных частиц (см. [1]). Эта теория, независимо развитая

Гелл-Манном и Нееманом, блестяще подтвердилась открытием частицы омега-минус.

Влияние математического вкуса и подхода на физику я проиллюстрирую несколькими историческими примерами, оставив на время разбор современных проблем. При объяснении специальных понятий неспециалистам зачастую полезно проследить за историей и провести аналогию между задачами, возникавшими в прошлом, и задачами современности. Однако не следует слишком серьезно воспринимать исторические аналогии. Лишь очень немногие активно работающие ученые хорошо знают историю науки, и почти никто из них не руководствуется в своей работе историческими аналогиями. В этом отношении ученые очень схожи с политическими деятелями. Величайшим политическим деятелем нашего столетия был, пожалуй, Ленин, деятельность которого была весьма успешной, хотя он и не был профессиональным историком. Единственным видным историком новейшего времени, которому удалось достичь высокого политического поста, был Ф. Гизо, премьер-министр Франции в сороковые годы XIX в.; однако, несмотря на все свои исторические познания, как государственный деятель он оказался посредственностью. Люди, хорошо знающие прошлое, слишком привязаны к нему, чтобы стать политическими лидерами или учеными. В науке, по крайней мере если человек хочет достичь великого, нужно следовать совету Уильяма Блейка: «Пашите не глядя, что под вами кости умерших».

Теория тяготения Эйнштейна, известная также под названием общей теории относительности, все еще остается самым ярким примером успешного применения математического мышления к физике. Для построения своей теории Эйнштейн использовал неевклидову геометрию — теорию искривленных пространств, созданную в XIX в. Эйнштейн совершил революционный шаг, отождествив наше физическое пространство-время с искривленным неевклидовым пространством. Законы физики превратились в геометрические теоремы, радикально отличные от теорем классической геометрии плоского пространства. Всего этого Эйнштейн достиг при помощи самых общих соображений и эстетических требований. Экспериментально теория была подтверждена после того, как ее построение было фактически завершено и эксперимент не сыграл никакой роли в создании теории. Сам Эйнштейн, по-видимому, был настолько уверен в своей математической интуиции, что не проявлял никакого беспокойства по поводу возможных результатов соответствующих наблюдений. Положительные результаты этих наблюдений, тем не менее, были решающим аргументом в пользу его теории для других физиков.

Общая теория относительности представляет собой наиболее выдающийся пример теории, построенной при помощи «математической игры в жмурки». Этой теории могло бы не быть еще сто лет, не появись человек с воображением Эйнштейна. О квантовой механике этого сказать нельзя. Квантовая механика — это еще одно выдающееся достижение XX в.—была создана независимо Гейзенбергом и Шрёдингером. Эти физики подходили к проблеме с совершенно различных точек зрения, объединение и согласование которых было достигнуто совместными усилиями многих других. Тем не менее, и в квантовой механике решающим шагом был смелый скачок математического воображения; это особенно ярко видно из работ Шрёдингера.

Шрёдингер основывался на формальной математической аналогии между световыми лучами и траекториями материальных тел. Эта аналогия была открыта примерно за девяносто лет до этого ирландским математиком Гамильтоном. Шрёдингер заметил, что теория световых лучей представляет собой частный предельный случай теории световых волн, развитой после Гамильтона Максвеллом и Герцем. Шрёдингер рассуждал так: «Почему бы не могла существовать теория волн, соответствующих частицам, имеющая такое же отношение к орбитам частиц, какое имеет теория световых волн к световым лучам?» Это чисто математическое рассуждение и привело его к теории, в которую входили волны частиц. Эта теория называется квантовой механикой; она была быстро подтверждена экспериментальными данными, причем согласие с экспериментом оказалось еще более разительным, чем в случае общей теории относительности. Как это часто бывало в физике, на основе общих математических посылок, скомбинированных с немногими опытными фактами, была создана теория, предсказавшая огромное количество опытных фактов с безотказностью и поразительной точностью.

Общая теория относительности и квантовая механика представляют собою случаи, когда математическая интуиция выступила в плодотворной и освобождающей роли. К несчастью, имеется и оборотная сторона медали. Математическая интуиция оказывается гораздо чаще консервативной, чем революционной; она чаще сковывает, чем освобождает. Наиболее реакционной во всей истории физики была идея Аристотеля и Птолемея о геоцентрической системе, с точки зрения которой все небесные тела двигались по сферам и кругам. Астрономия Аристотеля почти полностью затмила науку на 1800 лет (с 250 г. до н. э. до 1550 г. н. э.). Этот застой в науке объяснялся, разумеется, весьма многими причинами, однако нельзя не признать, что главной причиной популярности астрономии Аристотеля была обманчивая математическая интуиция, подсказывающая, что эстетически удовлетворительны лишь сферы и круги.

Птолемей объяснял движение Луны и планет посредством циклов и эпициклов, точнее, иерархией циклов (кругов) различного диаметра, движущихся один по другому. Самой порочной особенностью системы Птолемея было то, что она была скрупулезно подогнана под известные из наблюдений движения каждой планеты и поэтому была защищена от опытного опровержения. Ко времени жизни Птолемея (150 лет н. э.) жизненные силы греческой математики иссякли и никто не выдвинул новых математических идей в противовес этому удивительному построению из евклидовых сфер и кругов. Наступила тысячелетняя ночь, не потревоженная ни новыми небесными наблюдениями, ни новыми математическими идеями.

Когда в 1604 г. Кеплер окончательно ниспроверг эпициклическую космологию открытием, что орбиты планет — эллипсы, он не пользовался какими-либо априорными математическими идеями, исходя из которых можно было бы предполагать эллиптичность этих орбит. Наоборот, ему пришлось изо всех сил вести борьбу против своих собственных предвзятых математических представлений, которые оставались бескомпромиссно средневековыми. И лишь после нескольких лет борьбы с различными системами эпициклов он сумел преодолеть свой консервативный вкус настолько, что мог рассматривать систему эллипсов. Подобный математический консерватизм представляет собою скорее правило, чем исключение среди великих умов в физике. Человек, открывающий новую эру в науке, сам все еще остается в плену старых идей. Даже Исаак Ньютон, который изобрел математический анализ, послуживший орудием его великих открытий в физике и астрономии, предпочитал выражаться архаичным геометрическим языком. Его «Principia Mathematica» написана языком классической греческой геометрии. Ассистент Ньютона Пембертон, который был редактором и издателем третьего издания «Principia», заявлял, что Ньютон всегда испытывал огромное восхищение геометрами древней Греции и терзался тем, что не мог ближе следовать их стилю. Лорд Кейнс, любимым занятием которого было коллекционирование и изучение неопубликованных рукописей Ньютона, подытожил свои впечатления о Ньютоне следующими словами: «С восемнадцатого столетия о Ньютоне думают как о первом и величайшем человеке новейшей научной эпохи, как о рационалисте, который учит нас мыслить холодно и трезво. Ничего подобного я не обнаружил. Мою точку

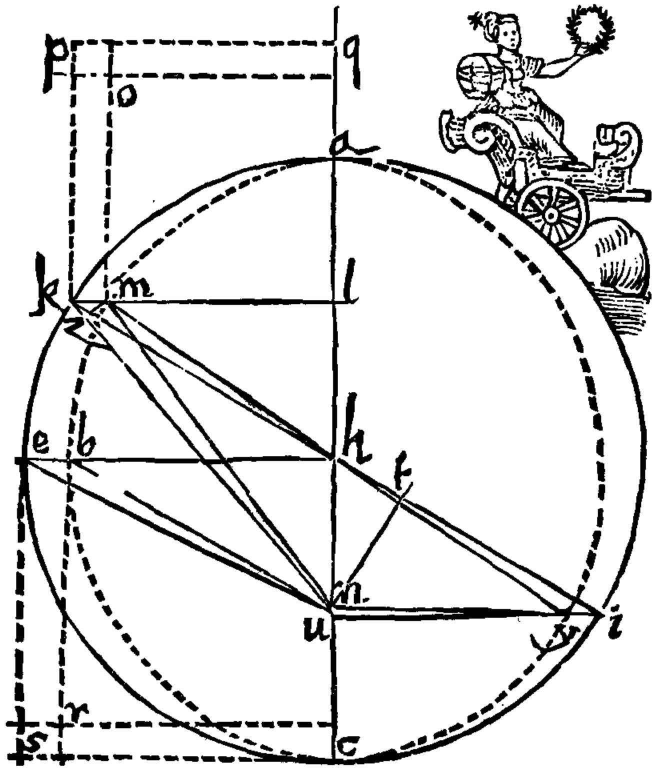


Рис. 2. Открытие эллиптичности орбиты Марса было величайшим триумфом Кеплера, достигнутым после многолетних трудов по построению круговых орбит, удовлетворяющих наблюдательным данным Тихо Браге.

На приведенной диаграмме Кеплер доказывает, что Марс «ометает» равные площади за равные времена (Солнце находится в точке *n*).

зрения разделит всякий, кто разберется в содержимом ящике с бумагами, который был упакован Ньютоном перед тем, как он окончательно покинул Кэмбридж в 1696 г. Правда, некоторые материалы утеряны и не дошли до нас. Однако ясно, что Ньютон не был первым представителем века разума. Он был последним из волшебников, последним из вавилонян и египтян, последним великим мыслителем, который взирал и на обыденный и на интеллектуальный мир теми же самыми глазами, как и те мыслители, которые начинали строить наше интеллектуальное наследие немногим менее 10 000 лет назад. Исаак Ньютон, рожденный после смерти своих духовных родителей, в рождество 1642 г., был последним гениальным ребенком, которому жрецы черной и белой магии могли бы воздать искренние и достойные почести».

Мы не будем затрагивать здесь такие темы, как характер Ньютона, его увлечение алхимией и древними апокалиптическими письменами.

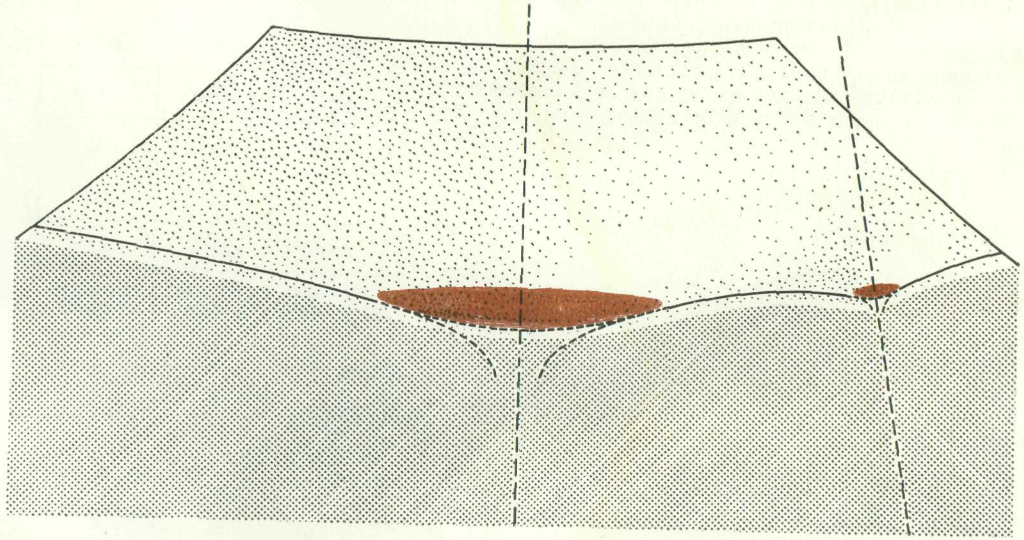
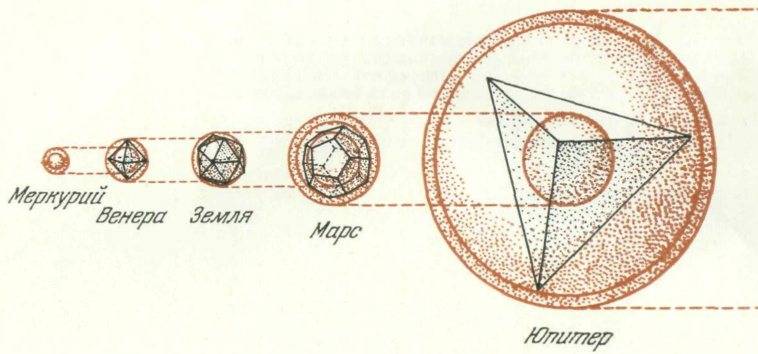
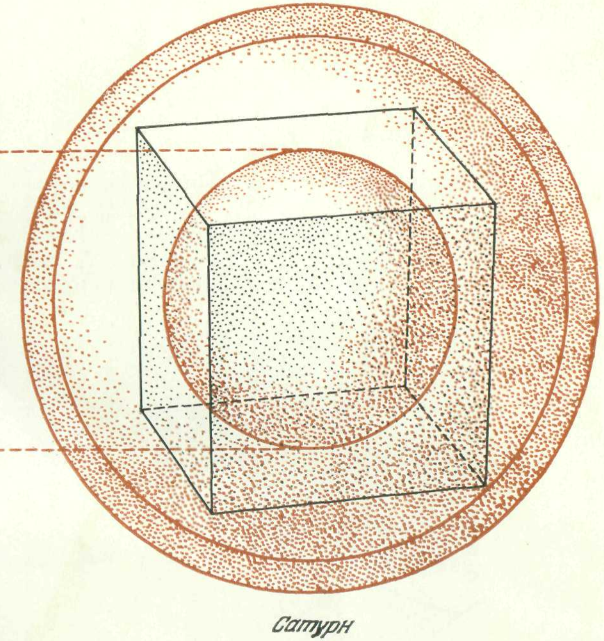


Рис. 3. Кривизна пространства была постулирована Эйнштейном на основе весьма общих соображений и эстетических требований.

Для построения своей теории Эйнштейн использовал неевклидову геометрию — теорию *искривленного пространства, разработанную* еще в XIX в. На рисунке изображены два массивных тела в двух измерениях на двумерной искривленной поверхности. Местная кривизна пространства *около тел описывает их гравитационные* свойства. Действительное физическое пространство-время является четырехмерным.





Отношение орбит	Значения Коперника	Модель Кеплера	Современные значения
Меркурий максимум / Венера минимум	0,723	0,707	0,650
Венера максимум / Земля минимум	0,794	0,795	0,741
Земля максимум / Марс минимум	0,757	0,795	0,735
Марс максимум / Юпитер минимум	0,333	0,333	0,337
Юпитер максимум / Сатурн минимум	0,635	0,577	0,604

Рис. 4. Развернутая модель кеплеровских многогранников, изображающих солнечную систему, показывает, каким образом каждая орбита занимала свой сферический слой, толщина которого соответствовала разнице между апогеем и перигеем при обращении вокруг Солнца.

В таблице приведены три колонки цифр, показывающих отношение апогея одной орбиты к перигею орбиты следующей внешней планеты. Первая колонка содержит наблюдательные данные, полученные Кеплером от Коперника. Вторая колонка содержит теоретические значения по модели многогранников Кеплера. Третья — современные величины. Кеплер «сжульничал» в случае орбиты Меркурия, чтобы не слишком противоречить данным Коперника: хотя четыре внешних многогранника обведены «орбитальным слоем» обычным способом (слой касается граней многогранника), октаэдр окружен слоем орбиты Меркурия особым образом: слой касается ребер октаэдра.

Нас интересуют лишь его математический стиль и вкус, а также влияние его математики на его науку. Все, что нам известно об его отношении к математике, согласуется с заключениями Кейнса. Вряд ли можно сомневаться, что Ньютон, как и Кеплер, пришел к своим отрытиям, преодолев глубоко консервативные математические предрассудки.

Из этих исторических примеров можно заключить лишь следующее. Математическая интуиция сама по себе ни хороша, ни плоха; она необходима для творческой работы в физике и вместе с тем крайне ненадежна. Причина ее двустороннего характера заключена в природе самой математики. Как заметил Мах, «сила математики основана на исключении всех лишних рассуждений и ее удивительной экономии мысленных операций». Физик строит свои теории из математического материала, ибо математика позволяет его воображению создать больше того, чем он может придумать сам. Искусство физика заключается в подборе математического материала и в построении из него картины природы. При этом он скорее смутно и интуитивно, нежели сознательно, прикидывает, подходящий ли материал избран для этой цели. Когда построение теории завершено, сознательный критический подход и опытная проверка покажут, покоится ли его теория на здоровой основе. Математическая интуиция необходима в процессе построения физической теории потому, что «исключение лишних рассуждений» дает свободу воображению. Математическая интуиция опасна, ибо в науке часто бывает, что для понимания проблемы требуется не «исключение мышления», а усиленное привлечение его.

Теперь я подхожу к обстановке в современной физике. Вовсе не намереваясь обидеть специалистов по твердому телу, ядерной спектроскопии и т. п., я буду употреблять слово «физика» как сокращение для «физики высоких энергий» — исследования фундаментальных частиц. Физика (в этом узком смысле) находится сейчас в необычайно благоприятных условиях. Новейшее поколение ускорителей позволило открыть в течение последних пяти лет совсем новый мир частиц с различными особенностями и необычайным богатством структуры; такого никто не мог ожидать заранее. Мы должны быть благодарны тем физикам и государственным деятелям, которые 10 лет назад нашли в себе достаточно веры и мужества, чтобы предпринять строительство больших ускорителей, не зная, приведет ли это к существенным открытиям. Но теперь мы обладаем огромным количеством точной информации о природе, и природа предстает перед нами столь же новой и странной, каким нам казался мир атомов в 1910 г. Как и в 1910 г., мы не обладаем всеобъемлющей теорией, и теоретики свободно выбирают те экспериментальные данные, которые нужны им для подтверждения своих теорий.

В такой обстановке физики-теоретики подыскивают свои объекты и методы, руководствуясь критерием математического вкуса. Первым для теоретика представляется не вопрос: «Будет ли полезной моя теория?», а вопрос: «Представляет ли собой то, что я строю, теорию?». Материал для теоретической работы состоит из фрагментов математики, рецептов вычислительной техники и немногих общих принципов, уцелевших от более ранних времен. Какая комбинация этих компонент заслуживает названия теории — это вопрос математического вкуса.

Три главных метода современной теоретической физики называются: теорией поля, теорией S-матрицы, теорией групп. Эти методы не исключают друг друга; по крайней мере, нет никакого противоречия между тем, что́ делают приверженцы различных методов, хотя словесные противоречия между ними возникают. Вероятно, все три точки зрения окажутся в конечном счете полезными для понимания природы.

Эти три метода различаются не только по своему математическому содержанию, но и по тому, какое место в каждом методе занимает математика. Теория поля с самого начала отдает предпочтение математической глубине, т. е. считается, что глубокое понимание физики и глубокая математика должны идти рядом. Здесь в качестве математического материала выбрана алгебра операторов в гильбертовом пространстве в комбинации с прочими сложными разделами математики. В результате получается построение, в котором воплощены некоторые характернейшие особенности реального мира. В этой теории центр тяжести лежит на математической строгости теории, а не на детальном сопоставлении с экспериментом. Из всех трех методов теория поля наиболее далека от опыта и наиболее строга математически, она наиболее возвышенна интеллектуально и наименее ясна физически. Я сам отношусь к приверженцам теории поля и поэтому с достаточным основанием могу говорить о ее ограниченности.

В теории S-матрицы (где S — первая буква немецкого слова Streu, означающего «рассеяние») математический аппарат подбирается произвольно, но так, чтобы он был по возможности элементарен. Эта теория включает в себя обычную теорию аналитических функций комплексных переменных, оставшуюся, по существу, неизменной с момента своего создания французским математиком Огюстом Коши в XIX в. Теория S-матрицы компенсирует слабость своего математического аппарата интенсивным использованием опытных данных. Типичная цель теоретика, использующего метод S-матрицы, заключается в предвычислении или предсказании результата одного опыта по результатам другого. Иногда предсказания делаются исходя из «основных принципов», без использования результатов других экспериментов. Именно на вывод из основных принципов всех нужных величин возлагаются в конечном счете все надежды. Одной из наиболее приятных и оживляющих особенностей метода S-матрицы является то, что при его применении правила игры могут меняться по ходу вычислений. В его нынешней форме этот метод является переходным: он не столько позволяет теоретически дать ответ «да» или «нет», сколько дает возможность строить теорию явления, подгоняя ее под эксперимент методом проб и ошибок. На каждом этапе применения этого метода безжалостно устраняются идеи, не выдерживающие сравнения с опытом; этим создается свобода для поисков правильных идей.

Успех теории S-матрицы в интерпретации экспериментов и установлении правильного направления экспериментальных работ был грандиозным. Мое собственное предрасположение к теории поля основано на личном вкусе, на который, как это ясно исторически, твердо полагаться нельзя. Метод S-матрицы кажется мне слишком простым, ему не хватает математической глубины, и я не могу поверить, что все на свете можно свести к S-матрице. Если окажется, что S-матрица может все объяснить, то я почувствую разочарование неизобретательностью природы. Однако я понимаю, что природа часто изобретательна как раз там, где мы этого совсем не ждем.

Теперь я перейду к теории групп, третьему главному методу современной теоретической физики; теорию групп мы рассмотрим несколько подробнее. Математический аппарат этой теории отличается значительной глубиной и силой. Наибольшее развитие эта теория получила в первую четверть XX в. Двумя главными понятиями этого метода являются «группа» и «представление». Группа представляет собой набор операций, обладающих тем свойством, что последовательность любых двух операций эквивалентна некоторой операции из того же набора. Например, трехмерная группа вращений O_3 определяется как множество всех возможных вращений обычного трехмерного пространства вокруг фиксированного центра. Очевидно, что если R_1 и R_2 символизируют два любых вращения, то комбинацию R_1 с R_2 можно заменить третьим вращением R_3. Представление группы — это ряд чисел вместе с правилом их преобразования; каждой операции группы соответствует определенное преобразование чисел. Преобразования в представлениях могут быть только линейными. Это означает, что, если, скажем, данное преобразование превращает

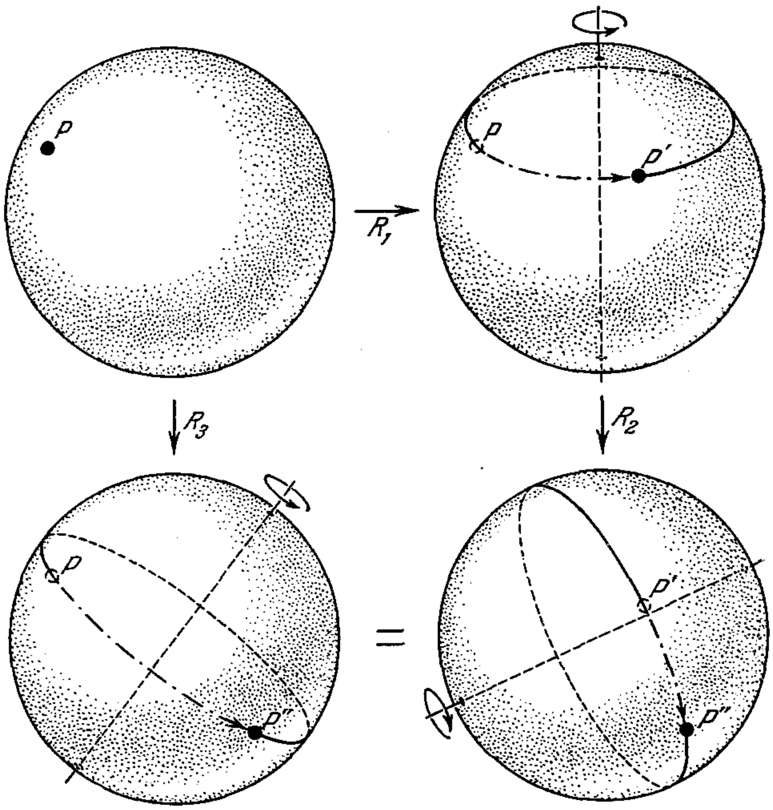


Рис. 5. Трехмерная группа вращений O_3 определяется как совокупность вращений обычного трехмерного пространства около заданного центра.

Если R_1 и R_2 — любые два вращения, то результат этих операций эквивалентен результату третьего вращения R_3.

p в p' и q в q', то оно превращает $p+q$ в $p' + q'$. Примером представления O_3 является набор трех координат (x, y, z), которые определяют положение любой точки P в пространстве (рис. 5). Когда производится операция вращения R, точка P перемещается в новое положение P' с координатами x', y', z', и этим определено правило преобразования чисел x, y, z. Данное представление O_3 называется триплетным представлением, поскольку в нем используется тройка чисел.

Неограниченная мощь теории групп в физике происходит по двум обстоятельствам. Первое состоит в том, что согласно квантовой механике, если какой-либо физический объект обладает симметрией, то существует вполне определенная группа (G) операций, сохраняющих эту симметрию.

При этом все возможные квантовые состояния объекта находятся в точном соответствии с представлениями группы G. Второе обстоятельство заключается в том, что перечисление и классификация «хороших» групп и их представлений — все это раз и навсегда сделано математиками, работавшими независимо от физиков, применивших группы. Эти два обстоятельства говорят о возможности построения чисто абстрактной теории симметрии элементарных частиц, основанной на абстрактных свойствах групп и представлений и избегающей произвольного выбора механических и динамических моделей частиц.

Переход от конкретной теории групп к абстрактной легче всего понять на примерах. У атома, находящегося в разреженном газе, нет выделенного направления в пространстве; такой атом обладает симметрией обычной группы вращения O_3. Среди представлений O_3 имеется триплетное представление. Те состояния атома, спин которых равен единице, принадлежат этому представлению и называются триплетными состояниями: они существуют всегда группами по три состояния с одинаковой энергией. Если приложить магнитное поле, нарушающее вращательную симметрию, три одинаковые до этого энергии станут несколько различаться, и в спектроскопе возникнет триплет спектральных линий (см. рис. 7). Классификация состояний атома по их вращательной симметрии является классическим примером применения конкретной теории групп.

Перейдем теперь к совершенно иному примеру. Существуют три вида фундаментальных частиц, называемых пионами; одни пионы заряжены положительно, другие отрицательно, а третьи — нейтральны. Все пионы обладают примерно одинаковой массой и способны к ядерным взаимодействиям примерно одинаковой интенсивности. Теперь представим себе, что пионы являются триплетным представлением группы O'_3, обладающей той же абстрактной структурой, что и группа вращений O_3, но не имеющей никакого отношения к вращению в обычном пространстве. В таком случае мы в состоянии предсказать многие свойства пионов, исходя из абстрактной теории групп, ничего не зная о «внутренней природе» операций, из которых образована группа O'_3. Оказалось, что все свойства пионов, предсказанные таким образом, правильны. Но еще более замечательно, что эти предсказания были сделаны на основе абстрактной теории групп Николасом Кеммером в 1938 г., за девять лет до открытия первого пиона. Группа O'_3 (с незначительной модификацией) известна в физике как «группа изотопического спина».

Наконец, мы подошли к рассмотрению «восьмеричного пути», который оказался ключом к классификации частиц, открытых совсем недавно. Эта классификация определяется свойствами группы U_3, которая обширнее группы O_3 и менее известна. Чтобы сделать группу U_3 более понятной, опишем механическую модель, которая имеет такое же отношение к абстрактной группе U_3, какое имело трехмерное пространственное вращение к абстрактной группе O_3. Вовсе не обязательно предполагать, что эта механическая модель реально существует. Она просто иллюстрирует структуру группы U_3.

Рассмотрим солнечную систему, закон тяготения в которой необычен: сила притяжения прямо пропорциональна первой степени расстояния вместо обратной пропорциональности квадрату расстояния. Предположим, что планеты малы и их взаимными возмущениями можно пренебречь. Тогда каждая планета движется независимо по своей эллиптической орбите, в центре которой расположено «солнце». Характерной особенностью этих орбит является то, что их периоды одинаковы, так что внешние планеты движутся быстрее внутренних. Назовем период каждой орбиты «годом», так что положения всех планет повторяются через годичные интервалы.

Движение планет можно задать полностью, указав две точки пространства, обозначенные у нас символами $(P,\ Q)$, где P — положение планеты в настоящий момент времени, а Q — положение, которое планета займет тремя месяцами позже. Другая планета, обращающаяся вокруг «солнца» по той же орбите и опережающая первую на три месяца, будет определена значениями координат $(Q,\ -P)$, где $-P$ обозначает точку, диаметрально противоположную точке P. Полная энергия любой из этих планет определяется величиной $(OP^2 + OQ^2)$, которая представляет собою сумму квадратов расстояний точек P и Q от «солнца», расположенного в точке O. Группа U_3 в случае нашей модели определена как совокупность всех преобразований движений планет при трех ограничениях: 1) преобразования линейны, 2) преобразования оставляют полную энергию каждого движения неизменной, 3) если по данной орбите движутся две или более планеты, то преобразование, переводящее одну из них на новую орбиту, переводит на новые орбиты и все остальные.

Если оставить только первые два условия, то получается группа всевозможных линейных преобразований координат $(P,\ Q)$, оставляющих неизменной сумму $(OP^2 + OQ^2)$. Эта группа была бы попросту группой вращений O_6 в пространстве шести измерений (три измерения для P и три для Q). Группа U_3 представляет собой, таким образом, подгруппу группы O_6. Третье ограничение, накладываемое на U_3, может быть сформулировано более развернутым, но эквивалентным образом так: преобразование движения $(P,\ Q)$ в $(R,\ S)$ должно также переводить $(Q, -P)$ в $(S, -R)$.

Легко видеть, что к группе U_3 относятся два следующих частных преобразования. В качестве первого рассмотрим обычные операции вращения, действующие одновременно на P и на Q. Эти операции удовлетворяют одновременно трем условиям, упомянутым выше. Следовательно, группа вращения O_3 представляет собой подгруппу группы U_3. Во-вторых, рассмотрим преобразования сдвига во времени, при котором каждая планета переходит в самое себя, но в состояние, которое смещено на заданный интервал времени в прошлое или будущее. Сдвиг во времени также принадлежит группе U_3 и образует еще одну подгруппу (T) группы U_3.

Для физических применений удобно приведение группы U_3 к меньшей группе SU_3 (когда мы пишем SU_3, то это означает группу, которую специалисты называют группой SU_3/Z_3). SU_3 получается из группы U_3, если забыть о времени. Для SU_3 все движения, принадлежащие одной и той же орбите, равноправны, безотносительно ко времени. В то время как U_3 преобразует одно движение планет в другое, соответствующее данному моменту времени, преобразование SU_3 переводит орбиту в орбиту безотносительно ко времени. Если выразиться на математическом языке, SU_3 представляет собой не что иное, как группу U_3 без подгруппы T (сдвига во времени). Представлениями группы SU_3 являются как раз те представления U_3, которые независимы от времени.

Найдем теперь простые представления SU_3. Движение планет $P,\ Q$ определяется шестью координатами, соответствующими P и Q: p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3. Эти координаты сами по себе задают представление U_3, но не SU_3, поскольку они зависят от времени. Простейшие величины, не зависящие от времени, состоят (мы не будем здесь пояснять почему) из произведений величин p и q в различных комбинациях, как это показано на рис. 6. Таких комбинаций девять и только девять. Три из них представляют собою компоненты углового момента и обозначаются символами a_{12}, a_{23} и a_{31}; шесть — компоненты иного рода, имеющие отношение к полной энергии системы: S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}, S_{31}. (Здесь индексы обозначают, какие именно p и q входят в величину; например, $a_{12} = p_1q_2 - p_2q_1$ или $S_{12} = p_1p_2 + q_1q_2$.)

Поскольку указанное представление SU_3 включает в себя девять величин, о нем говорят как о девятимерном. Сумма $S_{11} + S_{22} + S_{33}$ представляет собой полную энергию системы и остается неизменной при любых операциях, входящих в группу U_3. Когда сумма трех величин постоянна, очевидно, что лишь две из них независимы, а значение третьей определено, когда заданы две другие. Три величины S_{11}, S_{22} и S_{33} можно свести к двум независимым различными способами; в целях удобства их обычно комбинируют следующим образом: одну величину выражают в виде $S_{11} - S_{22}$, а другую — как $S_{33} - \frac{1}{2}(S_{11} + S_{22})$. В результате мы получаем только пять независимых компонент S, а не шесть. Вместе с тремя компонентами a они дают всего восемь величин, которые и преобразуются фактически друг в друга в группе преобразований U_3. Эти восемь величин не зависят от времени и образуют восьмимерное представление группы SU_3. Представление, полученное таким образом, является простейшим из существующих. Оно и есть знаменитый «восьмеричный путь».

Наконец, представим себе, что SU_3-симметрия в природе соблюдается не идеально. Предположим, к примеру, что «третье направление» (т. е. направление, которому соответствуют координаты p_3 и q_3) несколько отличается от двух других равноправных направлений. Для нашей воображаемой солнечной системы это означает, что симметрия сохраняется лишь тогда, когда все орбиты лежат в одной плоскости; при вращениях, выводящих орбиты из этой плоскости, симметрия не сохраняется. В таком случае группа симметрии U_3 заменяется ее подгруппой U_2, состоящей лишь из тех преобразований U_3, которые оставляют третье направление неизменным. При операциях группы U_2 «восьмеричный путь» уже не является единственным представлением. Его восемь компонент подразделяются на подсовокупности следующим образом:

$$S_{33}-\frac{1}{2}(S_{11}+S_{22}) \quad \text{(синглет)},$$

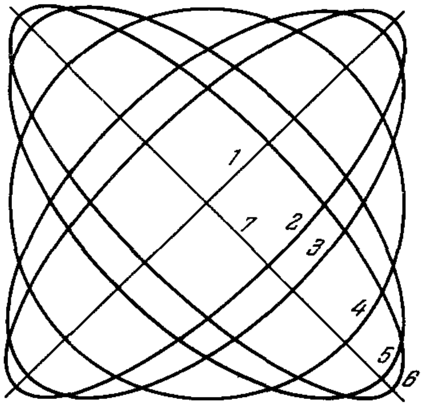
$$\left.\begin{matrix} S_{23}, & S_{31} \\ a_{23}, & a_{31} \end{matrix}\right\} \quad \text{(два дублета)},$$

$$(S_{11}-S_{22}),\ S_{12},\ a_{12} \quad \text{(триплет)}.$$

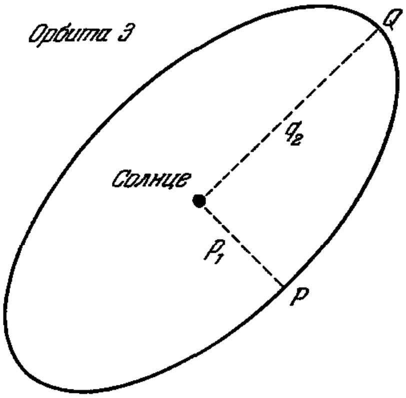
Каждая из этих подсовокупностей образует представление группы U_2. Иными словами, преобразование, определяемое синглетным представлением, относится только к одной подсовокупности всей совокупности — к подсовокупности из одного члена. Каждый из двух дублетов представляет собой несколько бóльшую подсовокупность — из двух членов. Аналогично, триплетная подсовокупность состоит из трех членов.

Возвращаясь снова в реальный физический мир, сравним эту восьмичленную структуру с восемью «основными» барионами — наиболее знакомыми тяжелыми «элементарными» частицами, составляющими лямбда (Λ)-синглет, протон-нейтронный (нуклонный) дублет, кси(Ξ)-дублет и сигма(Σ)-триплет. Согласие — полное (рис. 8).

В других представлениях группы SU_3 имеется 10, 27 и более членов. Гелл-Манн первый отметил, что законам симметрии 10-членной а)



б)



Орбита	1	2	3	4	5	6	7
p_1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	3	$\sqrt{10}$
q_2	$\sqrt{10}$	3	$\sqrt{8}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	1	0

Орбита 3: $p_1=\sqrt{2}$, $q_2=\sqrt{8}$, $p_2=q_1=p_3=q_3=0$.
Полная энергия орбиты 3$=[p_1^2+q_2^2]=[2+8]=10$.

в) Представление орбит в восьмеричном пути:

$$a_{12}=p_1q_2-p_2q_1,$$
$$a_{23}=p_2q_3-p_3q_2=0,$$
$$a_{31}=p_3q_1-p_1q_3=0,$$
$$S_{11}=p_1^2+q_1^2,$$
$$S_{22}=p_2^2+q_2^2,$$
$$S_{33}=p_3^2+q_3^2=0,$$
$$S_{12}=p_1p_2+q_1q_2=0,$$
$$S_{23}=p_2p_3+q_2q_3=0,$$
$$S_{31}=p_3p_1+q_3q_1=0.$$

г) Значения S_{11}, a_{12}, S_{22}:

Орбита	1	2	3	4	5	6	7
S_{11}	0	1	2	5	8	9	10
a_{12}	0	3	4	5	4	3	0
S_{22}	10	9	8	5	2	1	0

Полная энергия для всех орбит $=S_{11}+S_{12}=10$.

Рис. 6. Модель «восьмеричного пути» имеет такое же отношение к абстрактной группе SU_3, какое имеет к абстрактной группе O_3 вращение в трехмерном пространстве (см. рис. 5).

Модель (*а*) содержит семь планетарных орбит, которые преобразуются одна в другую операциями, принадлежащими группе SU_3, о которой рассказывается в тексте. То, что орбит именно семь, несущественно: можно взять любое число других орбит, чтобы удовлетворить требованиям данной модели. Орбита 3 показана отдельно (*б*), чтобы показать, как движение определяется точками P и Q со значениями координат p_1 и q_2. Для задания точки в пространстве обычно нужны шесть координат (три p и три q). Однако из-за специального выбора координатных осей в данной модели p_2 и q_1 равны нулю, а поскольку все орбиты расположены в одной плоскости, значения координат p_3 и q_3 также равны нулю. Все показанные орбиты имеют одну и ту же полную энергию ($p_1^2+q_2^2=10$), но различные угловые моменты, выражаемые значениями a_{12}. В частности, две прямолинейные орбиты (*1* и *7*) имеют нулевые угловые моменты, в то время как круговая орбита (*4*) имеет наибольший угловой момент. В соответствии с восьмеричным путем семь орбит можно представить совокупностью из девяти чисел, приведенных в (*в*). Очевидно, что шесть из этих чисел равны нулю, ибо p_2, p_3, q_1 и q_3 равны нулю. Таким образом, остаются лишь три компоненты: S_{11}, a_{12}, S_{22}. При подстановке соответствующих значений p_1 и q_2 три компоненты принимают значения, указанные в таблице (*г*). Эти значения таковы, что они преобразуются одно в другое, когда к ним применяется операция группы SU_3, что, отчасти, возможно из-за одинаковой энергии на всех орбитах $S_{11}+S_{22}=10$.

подсовокупности могут удовлетворить девять известных барионов, если их дополнить недостающим синглетом, который он заранее назвал омега-минус (Ω^-)-барионом (рис. 9). Известными членами десятки были: дельта (Δ)-квадруплет, другой сигма-триплет и еще один сигма-дублет. Предсказанный синглет был открыт в феврале 1964 г. (см. в следующем выпуске УФН статью У. Фаулера и Н. Сеймиоса «Открытие омега-минус-частицы»).

Теперь не оставалось никаких сомнений: абстрактная симметрия группы SU_3 действительно существует в природе, и ей подчиняются сильно взаимодействующие частицы. Эта симметрия неидеальна; она нарушается под действием относительно слабого возмущения, которое сводит группу SU_3 к ее подгруппе SU_2. Симметрия группы U_2, которая остается после этого, в сущности, тождественна с абстрактной симметрией изотопического спина, рассмотренной нами ранее. Вся картина сильно взаимодействующих частиц, до этих пор хаотическая, была в значительной мере упорядочена, причем это удалось сделать при помощи примитивно простых идей теории групп.

Теория групп во многих отношениях самая удовлетворительная среди обсуждавшихся нами методов теоретической физики. В отличие от метода S-матрицы теория групп обладает элегантным и непогрешимым математическим базисом; в отличие от теории поля она имеет четкое и твердое опытное подтверждение. Чего же не хватает этому методу? Теория групп вызывает неудовлетворение тем, что оставляет без объяснения многое, что желательно было бы объяснить. Она прекрасно выделяет те аспекты природы, которые можно понять на языке одной только абстрактной симметрии. Но с ее помощью трудно надеяться получить объяснение таинственных проявлений живой материи, числовых значений времен жизни частиц, различной интенсивности их взаимодействия. Следовательно, значительная часть количественного экспериментального материала еще ждет своего объяснения. Метод теории групп означает столь сильную абстракцию, что многие существенные и конкретные особенности реального мира выпадают из рассмотрения. И вообще теория групп достигает цели только потому, что эта цель заранее ограничена: она не претендует на объяснение всего, и вряд ли из этой теории возникнет законченная или всеобъемлющая теория физического мира.

Итак, в распоряжении физиков-теоретиков имеются три метода: теория поля, теория S-матрицы и теория групп. Ни один из этих методов не заслуживает названия «теории», если под термином «теория» подразумевать нечто подобное великим теориям прошлого, например общую теорию относительности или квантовую механику. Упомянутые методы слишком неясны, слишком частны или слишком фрагментарны. Разумеется, это мое сугубо личное мнение. Если даже они успешно решают намеченные задачи, они все равно не смогут удовлетворить эстетическим требованиям, предъявляемым к теории. Я не могу не поддаться искушению назвать эти методы «снежными мостиками над пропастями незнания», чтобы описать свое чувство неудовлетворенности. Этой образной фразой удобно характеризовать теоретические идеи, не вызывающие симпатии. Следует, однако, помнить, что впервые такую характеристику использовал Карл Пирсон в горячем споре против закона наследственности Менделя.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Koester, The Sleepwalkers, Grosset and Dunlap, 1963.
2. М. Гелл-Манн, А. Розенфельд и Дж. Чу, УФН 83 (4), 695 (1964).
3. E. Wigner, Communic. Pure and Appl. Math. 13 (1), (1960).

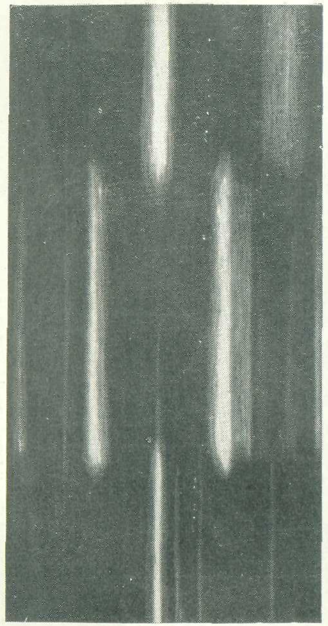


Рис. 7. Спектральная линия ниобия (внизу) расщепляется на три компоненты, когда магнитное поле нарушает вращательную симметрию атомов.

Две компоненты наблюдаются в направлении, перпендикулярном *к магнитному полю (середина), третья компонента наблюдается* в направлении, параллельном магнитному полю (вверху). Триплет линий соответствует трем возможным состояниям атома, обладающего спином, равным единице. Эти состояния встречаются только вместе, группами по три состояния с одной и той же энергией. Такая классификация состояний атома по вращательной симметрии состояний представляет собой пример применения конкретной теории групп. Спектрограммы получены в спектроскопической лаборатории Массачузетского технологического института.

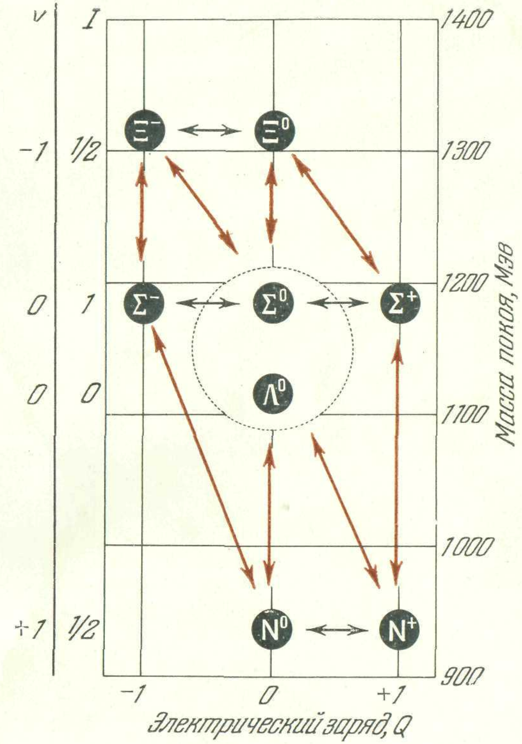


Рис. 8. Расширенное семейство из восьми частиц было первой группировкой, которую предлагал «восьмеричный путь».

Эта группа содержит восемь наиболее известных барионов: *нейтрон* N^0 *и протон* N^+, *известные также под названием* нуклонного дублета, лямбда(Λ)-синглет, исходный сигма (Σ)-триплет и исходный кси(Ξ)-дублет. Сигма-триплет и кси-дублет, которые появляются в расширенном семействе, состоящем из десяти членов, содержащем омега-минус (см. рис. 9), представляют собой более тяжелые частицы с теми же значениями Y и T.

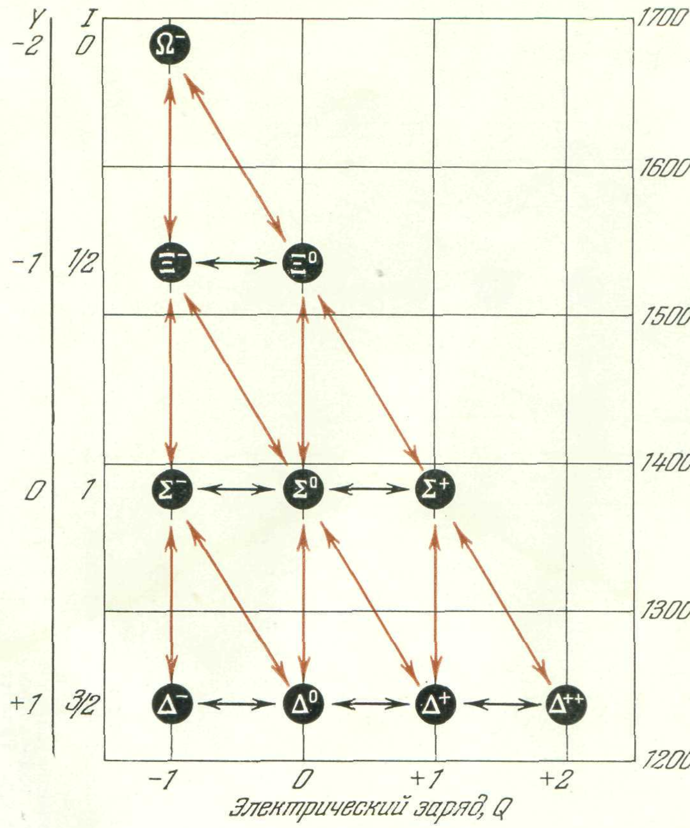


Рис. 9. Успех теории групп в физике фундаментальных частиц выявился драматическим образом в начале 1964 г., когда была открыта частица омега-минус(Ω^-)-барион в Брукхейвенской лаборатории.

Существование омега-минус было предсказано «восьмеричным путем» — теорией, выдвинутой независимо Гелл-Манном и Нееманом. Термин «восьмеричный» относится к схеме классификации, основанной на абстрактной теории групп. Более ранняя теория гласила, что симметрия «изотопического спина» (горизонтальные стрелки) связывает семейства частиц с различными электрическими зарядами (Q). «Восьмеричный путь» вызывает новый вид симметрии (наклонные стрелки) и позволяет объединить более широкий класс частиц — с различными величинами гиперзаряда (Y) и изотопического спина (I). Омега-минус-бариона недоставало для того, чтобы этот расширенный класс частиц имел все десять возможных членов, из которых девять были уже известны: дельта(Δ)-квартет, сигма(Σ)-триплет и кси(Σ)-дублет. Омега-минус является единственным барионным синглетом с отрицательным электрическим зарядом; его наблюдаемая масса с точностью до нескольких *Мэв* совпала с теоретически предсказанной массой.