1965 г. Февраль *Том 85, вып. 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОЙ ЖИЗНИ *)

Р. Курант

Возрастающая роль математики в современном мире прежде всего проявляется в резком увеличении числа математиков. По сравнению с 1900 г. число членов нескольких профессиональных объединений математиков в Соединенных Штатах увеличилось примерно в тридцать раз. На сегодняшний день число людей, имеющих докторскую степень, составляет около 4800. За последние двадцать пять лет число математиков, работающих вне университетов, в промышленности и на государственной службе, возросло в двенадцать раз. Деятельностью более или менее математического характера заняты сейчас десятки тысяч людей самой различной квалификации. В колледжах число студентов-математиков в 1962 г. было в три раза больше, чем в 1956 г. Теперь математика уже не является занятием академической элиты; профессия математика стала массовой профессией, привлекающей к себе все увеличивающееся число одаренных мужчин и женщин. Область математических исследований в настоящее время невероятно расширилась; студенты изучают все больше и больше разделов математики. Математическая техника глубоко проникла за пределы собственно математики: в физику, в новые области технологии, в биологию и даже в экономику и другие социальные науки. Счетные машины и вычислительная техника стимулировали новые области исследований, играющие, несомненно, чрезвычайно важное, но, по-видимому, еще недостаточно понятое значение для самой математики и всех других наук, включающих в себя неотъемлемые элементы математики.

Однако роль математики в современной жизни можно лучше всего оценить, уяснив себе ее значение на предшествующих стадиях развития этой науки. Всего лишь три века назад основное здание математического мышления представляла геометрия, унаследованная нами от древних народов, лишь незначительно развившаяся за двадцать веков ее использования. Затем началось радикальное и стремительное преобразование математики. Строгий, аксиоматический дедуктивный стиль геометрии уступил место индуктивному интуитивному подходу, а чисто геометрические представления уступили место понятиям числа и алгебраической операции, воплощенных в аналитической геометрии, интегральном и дифференциальном исчислении, а также в механике. Крохотная группа интеллектуальной аристократии новой математики сумела

*) R. Courant, Mathematics in the Modern World, Scient. Amer. 211 (3), 41 (1964). В оригинале — резюме: «Очерк математики, как чистой, так и прикладной. Хотя эти отрасли математики иногда разделяют, границы между ними не существует; как правило, они взаимно обогащают друг друга». Перевод В. А. Угарова.

угадать запросы науки будущего. Ко времени Великой французской революции накопленные фундаментальные результаты и отчетливо проявившая себя мощь математической науки повлекли за собой заметное расширение узкого круга людей, принимавших до этого участие в активной научной деятельности. Этот процесс был обусловлен появлением учебников, открывших доступ к новым достижениям математики, систематическим преподаванием математики в университетах и, наконец, открывшимися перспективами расширения и углубления человеческих познаний.

«Классическая» математика, возникшая в XVII в., отнюдь не утеряла сегодня своего значения и ведущего положения. Некоторые из самых плодотворных современных работ возникли как результат уточнения и обобщения двух основных понятий дифференциального исчисления — понятия функции (рассматривающего взаимную зависимость одной или двух переменных) и понятия предела, которое ставит интуитивное представление о непрерывности в жесткие рамки строгого исследования. Представления математического анализа, включая сюда и теорию дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных), являющиеся важнейшим инструментом исследования скорости изменения различных величин, проникают на всю необыкновенно расширившуюся территорию, охваченную современной математикой. Как это будет ясно из дальнейшего, геометрия имела наиболее плодотворное развитие, получив свободу с появлением понятия функции и числового континуума; ее самые молодые отрасли — топология и дифференциальная геометрия — стоят в ряду самых деятельных и «современных» разделов математики. Вопросы теории вероятностей заслуживают специального рассмотрения, так как они нашли широчайшее применение в науке и технологии и позволили дать математическое выражение некоторым важным нерешенным проблемам философии науки.

Сегодняшняя математика отражает в себе также заметную тенденцию, появившуюся в начале XIX в. и направленную на закрепление достигнутых успехов в духе математической строгости, столь любимой древними. Эти усилия вызвали энергичную деятельность по обоснованиям математики, направленную на выяснение структуры математики и уяснение смысла «существования» объектов математического мышления.

Расширение математической науки неизбежным образом вызвало определенную тенденцию к специализации и изоляции; математика оказалась под угрозой потери единства и взаимосвязи. Взаимопонимание представителей различных областей математики стало довольно слабым, а контакт математики с другими науками заметно нарушился. Тем не менее все время достигались значительные успехи, главным образом молодыми талантливыми людьми, щедро поддержанными обществом, осознавшим возрастающую роль математики. В то же самое время увеличивающаяся по своему объему математическая деятельность вызвала захлестывающий поток публикаций, многочисленные конференции, административные объединения и нажим со стороны деловых кругов. И совершенно неотложным долгом математиков стало четкое осознание существа математики, ее мотивов и целей и вместе с тем отыскание идей, которые могли бы объединить людей самых различных интересов. Для этой цели не существует более удобного случая, чем возможность рассказать о своей работе самой широкой публике.

На вопрос «что такое математика» нельзя дать разумный ответ ни на базе философских обобщений, ни с помощью определений семантики, ни многословными литературными описаниями. Точно так же нельзя дать ответ на тот же вопрос по отношению к музыке или живописи. Никто не может дать оценку этих форм искусства, не обладая пониманием того, что такое ритм, гармония и строй в музыке или форма, цвет и композиция — в живописи. Однако для понимания математики подлинный контакт с ее элементами еще более необходим.

С этими оговорками можно тем не менее сделать некоторые замечания по поводу природы математики в общем. Как часто говорят, целью математики является последовательное абстрагирование, логически строгая аксиоматическая дедукция и еще более широкое обобщение. Такая характеристика содержит в себе правду, однако не всю правду; она является однобокой и даже почти карикатурой на то, что есть на самом деле. Прежде всего, математика никак не обладает монополией на абстракцию. Понятия массы, скорости, силы, напряжения и силы тока — все они являются абстрактными идеализациями физической реальности. Такие математические понятия, как точка, пространство, число и функция едва ли абстрактны намного более.

Модель строгой аксиоматической дедукции, до сих пор оказывающей свое влияние на математиков, изложенная Евклидом в его «Элементах», послужила примером заманчивой формы, в которой часто может выкристаллизоваться математическое мышление на конечном этапе. Это означает в конечном счете успех в осознании и упорядочении математического материала и раскрытии его скелетной структуры. Однако излишнее подчеркивание именно этого аспекта математики полностью сбивает с правильного пути, если при этом предполагается, что конструктивные элементы, индукция воображения и трудно уловимый процесс мышления, называемый интуицией, играют второстепенную роль в плодотворной математической деятельности или подлинном понимании. В процессе математического образования, без сомнения, дедуктивный метод, исходящий от аксиом, на первый взгляд довольно догматических, дает способ быстрого проникновения на значительные территории математики. Однако конструктивный метод Сократа, идущий от частного к общему и тщательно избегающий догматического принуждения, указывает куда более надежный путь для независимого творческого мышления.

Точно так же как дедукция должна дополняться интуицией, так и порывы к последовательному обобщению должны сдерживаться и уравновешиваться уважением и любовью к характерным деталям. Частные проблемы не должны деградировать до мелких иллюстраций величественных общих теорий. Фактически все общие теории возникают из рассмотрения частных проблем и не имеют никакого смысла, если они не служат для разъяснения более частных вопросов и наведения в них порядка.

Взаимная игра между общим и частным, дедукцией и конструктивным началом, логикой и воображением — все это составляет глубочайшую сущность математической жизни. Какой-то один из перечисленных аспектов математики может быть основой некоторого конкретного достижения. Однако всякий далеко идущий результат, несомненно, содержит в себе все эти элементы. В общих чертах этот процесс можно представить так: все начинается на конкретной «почве», затем, отделавшись от ненужного балласта, с помощью абстракции можно воспарить в необъятные просторы разреженной атмосферы, где навигация и наблюдения значительно упрощаются; однако такой полет заканчивается решающим испытанием при приземлении: теперь уже можно установить, достигнуты ли поставленные цели на примере конкретной «реальности», находящейся на «земле», но рассматриваемой теперь уже с новой точки зрения. Короче говоря, полет в область абстрактной общности должен начинаться и должен заканчиваться на конкретном и частном.

Эти принципы самым театральным и убедительным способом иллюстрируются эволюцией математической науки. Иоганн Кеплер с гениальностью настоящего диагноста абстрагировал из многочисленных наблюдений Тихо Браге эллиптическую форму планетарных орбит. Дальнейшая абстракция позволила Ньютону вывести из этой модели закон всемирного тяготения и дифференциальные уравнения механики. На этом весьма высоком уровне ничем не связанной математической абстракции механика получила необъятную свободу. Снизойдя до конкретных, частных вопросов на Земле, она добивалась успеха за успехом в обширнейших областях за пределами небесной механики, откуда она вела свое начало.

Аналогично этому развивалась теория электромагнетизма. Фарадей установил целый ряд экспериментальных фактов и связал их между собой своей собственной весьма остроумной интерпретацией. Эта интерпретация позволила вскоре абстрагировать несколько математических качественных законов электромагнетизма. Далее, после того как эти законы были сформулированы для простых частных случаев, Максвеллу удалось придумать весьма общий количественный закон, который позволил объединить напряженности электрического и магнитного полей и их производные в систему дифференциальных уравнений. Эти уравнения, абстрагированные и освобожденные от частного и осязаемого, представляются на первый взгляд слишком сложными, чтобы ими можно было воспользоваться. Однако очень скоро выяснилось, что уход в высокие сферы абстракции открывает путь к дальнейшему продвижению по многим направлениям. Из уравнений Максвелла удалось выявить волновую природу электромагнитных явлений; этот результат вдохновил Герца на эксперименты по исследованию распространения радиоволн, что обусловило развитие совершенно новой технологии и привело экспериментаторов к новым направлениям исследований, среди которых можно отметить, например, новую, бурно развивающуюся науку — магнитогидродинамику.

Нельзя сказать, что уравнения Максвелла явились результатом последовательного дедуктивного мышления. Точно так же нельзя утверждать, что его успех можно приписать чисто индуктивному сократовскому методу. Скорее всего Максвелла следует отнести к тем редким умам, которые могут уловить сходство и параллели между весьма отдаленными и разрозненными с виду фактами и встать на новую, более глубокую точку зрения, терпеливо объединяя отдельные элементы в единую систему.

В подлинной математике соответствующая линия развития — от конкретного индивидуального предмета через абстракцию снова к конкретному и индивидуальному — придает теории смысл и значение. Чтобы полностью оценить значение этого фундаментального обстоятельства, следует лишь не забывать, что такие слова, как «конкретный», «абстрактный», «индивидуальный» и «общий», в математике не имеют ни постоянного, ни абсолютного значения. Они непосредственно относятся к рамкам нашего мышления, к состоянию нашего знания и к характеру математического предмета. Например, то, что уже стало вполне привычным, легко принимается за конкретное. Слова «абстракция» и «обобщение» описывают не статическую ситуацию или конечный результат, а динамический процесс, идущий от некоторого конкретного уровня к другому, «высшему».

Новые плодотворные открытия в математике появляются иногда совершенно неожиданно, без особых видимых усилий: общая перспектива проясняется через абстракцию конкретного материала и построение скелетного остова из структурно основных элементов. Все аксиоматики, несмотря на их типично евклидовскую форму, означают именно этот процесс. Совсем свежим примером плодотворного применения абстракции может служить обобщение Нейманом «спектральной» теории Гильберта, той ее специальной формы, которая, как оказалось, соответствует случаю «ограниченных» линейных операторов, к случаю «неограниченных» операторов.

Этот далеко идущий результат можно отчетливо проследить как последовательное абстрагирование от хорошо известных конкретных представлений аналитической геометрии. В элементарной аналитической геометрии трехмерного пространства, в котором введены координаты x_1, x_2, x_3, плоскости задаются линейным уравнением, а поверхности второго порядка, такие, например, как эллипсоиды или сферы, характеризуются квадратичной формой (т. е. уравнением, в которое переменные входят не более чем во второй степени) относительно x_1, x_2, x_3. Так, уравнение общего вида

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1 \qquad (*)$$

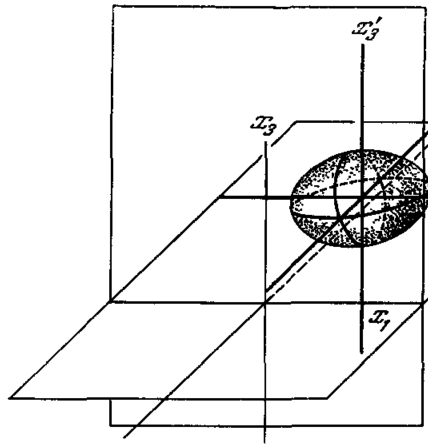
соответствует центральной поверхности второго порядка, главные оси которой направлены по координатным осям. Для эллипсоида «коэффициенты» λ_1, λ_2 и λ_3 являются положительными числами. Они равны соответственно $1/a_1^2$, $1/a_2^2$ и $1/a_3^2$, где a_1, a_2 и a_3 — полуоси эллипсоида. Поверхность эллипсоида образована точками, координаты которых удовлетворяют уравнению (*) (рис. 1).

Без лишних хлопот алгебраизация геометрии позволяет легко перейти к пространству с числом измерений больше трех, скажем, к пространству n измерений с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В этом пространстве плоскости по-прежнему определяются линейными уравнениями, а поверхности второго порядка уравнениями квадратичными относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Один из наиболее важных результатов «линейной алгебры» состоит в том, что поверхность второго порядка можно привести к нормальной алгебраической форме $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = 1$ путем подходящего преобразования системы координат (или перемещения фигуры как целого), приводящего к тому, что центр фигуры оказывается в начале координат, а ее главные оси направлены по координатным осям. Эта теорема является ключевой для многих приложений, например, для теории механических или электрических систем, в которых могут возникать колебания (n материальных точек или в n элементах электрической цепи) относительно положения равновесия.

Физики, например, Рэлей, никогда не смущались применять этот вывод, не дожидаясь математического обоснования, и для более общего случая, когда число n становится бесконечно большим. Такой шаг в направлении дальнейшего обобщения и абстракции элементарной математики оказывается чрезвычайно полезным для изучения колебательных систем, состоящих не из конечного числа точечных масс или элементов электрических цепей, а из вещества, непрерывно распределенного, например, по струне, мембране, или — в случае электрических схем — из элементов, распределенных по передающей линии.

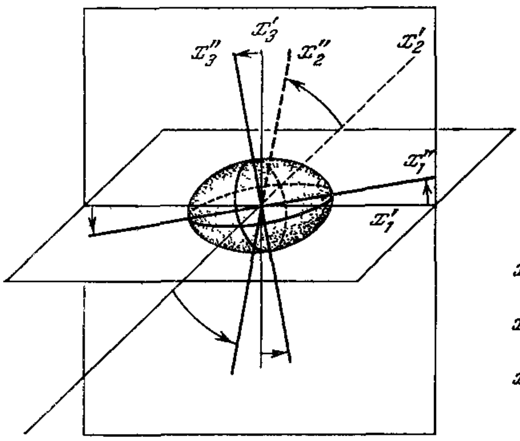
Гильберт, один из величайших математиков прошлого поколения, понял, что в полной математической теории следует сохранить аналогичную квадратичную форму для случая бесконечно большого числа переменных. Пытаясь сделать это, он обнаружил, что прежде всего следует ограничить область переменных требованием, чтобы сумма их квадратов «сходилась», другими словами, имела конечное значение. Это же

$$25x_1^2+22x_2^2+16x_3^2+20x_1x_2-4x_1x_3-16x_2x_3-62x_1-32x_2-44x_3+55=0$$



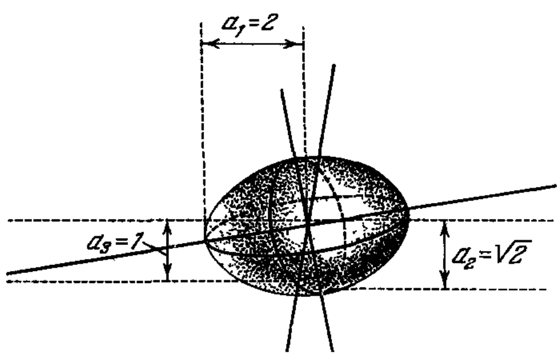
$$x_1=x_1'+1,$$
$$x_2=x_2'+1,$$
$$x_3=x_3'+2$$

$$25x_1'^2+22x_2'^2+16x_3'^2+20x_1'x_2'-4x_1'x_3'-16x_2'x_3'-36=0$$



$$x_1'=\frac{1}{3}(-x_1''+2x_2''+2x_3''),$$
$$x_2'=\frac{1}{3}(2x_1''-x_2''+2x_3''),$$
$$x_3'=\frac{1}{3}(2x_1''+2x_2''-x)$$

$$\frac{1}{4}x_1''^2+\frac{1}{2}x_2''^2+x_3''^2=1$$



$$\lambda_1=\frac{1}{a_1^2}=\frac{1}{4},$$
$$\lambda_2=\frac{1}{a_2^2}=\frac{1}{2},$$
$$\lambda_3=\frac{1}{a_3^2}=1$$

Рис. 1. Алгебра и геометрия приведения поверхности второго порядка к нормальной форме показаны для случая эллипсоида с центром в точке (1, 1, 2) координатной системы, в которой он задается.

Параллельным переносом координатная система может быть перемещена в новое положение (жирные оси на верхнем чертеже), так что центр эллипса окажется в начале координат (0, 0, 0) Алгебра этого переноса требует подстановки, которая приводит к уравнению, выписанному над средним рисунком Главные оси эллипсоида можно совместить с новой координатной системой поворотом осей в положения, обозначенные на среднем рисунке жирными линиями Следующая подстановка приводит уравнение к нормальной форме, выписанной над эллипсоидом, которому она соответствует Длина полуосей выражается через коэффициенты уравнения по формулам, выписанным справа внизу

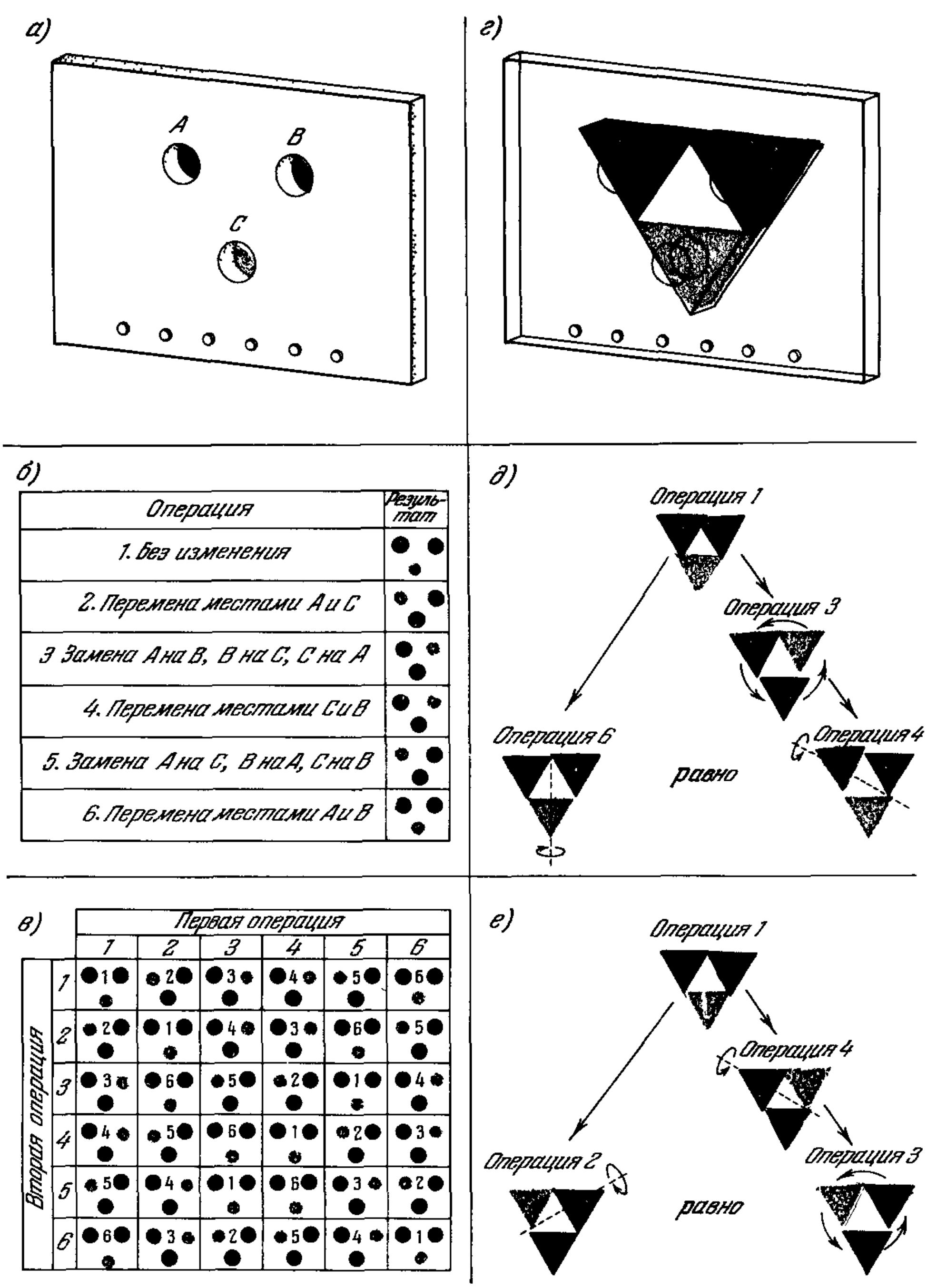


Рис 2 Алгебра групп прилагается к гипотетическому явлению физического мира

Представьте себе стенку с тремя отверстиями, в которых появляются три различных цвета (*а*) Порядок кружков можно изменять шестью различными способами нажимая шесть кнопок на нижней части стены Эти изменения или операции происходят в порядке, удовлетворяющем четырем основным требованиям предъявляемым к группе 1) если последовательно применены две операции то их результат может быть достигнут применением той или другой операции из шести 2) любая последовательность операций подчиняется ассоциативному закону символически записываемому в виде $x(yz) = (xy)z$, 3) каждой операции можно сопоставить обратную операцию (операции 3 и 5 взаимно обратны, другие операции имеют свои собственные обратные операции) 4) имеется одна единичная операция оставляющая исходный порядок неизменным (операция 1) Результат применения любой пары операций можно найти в таблице *в*) (эта таблица называется матрицей) «Простейшим» физическим объяснением наблюдаемого явления может служить допущение что за стенкой расположен треугольный блок изображенный на рисунке *г*) Сохраняя свое расположение на плоскости треугольник может поворачиваться или переворачиваться только шестью различными способами которые соответствуют в точности шести расположениям цветных кружков наблюдаемых через отверстия в стенке Эта частная группа называется конечной некоммутативной группой конечной потому что она содержит конечное число операций некоммутативной потому что от последовательности выполнения операции зависит получаемый результат (xy вовсе не обязательно равно yx) Некоммутативный характер группы демонстрируется на рисунках *д*) и *е*) на которых видно что операция 3 следующая за операцией 4 дает иной результат, чем операция 4 следующая за операцией 3

утверждение можно выразить другим способом, используя «обобщенную» теорему Пифагора; тогда говорят, что точка «в пространстве Гильберта» бесконечного числа измерений должна находиться на конечном расстоянии $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+\ldots}$ от начала координат. Далее, Гильберт определяет квадратичную форму для бесконечного множества переменных — ограниченную форму — в виде бесконечной двойной суммы вида

$$\begin{aligned}&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\ldots\\&\quad+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+\ldots\\&\quad+\ldots,\end{aligned}$$

где первый индекс (например, x_1 в первой строке, x_2 во второй и т. д.) стремится к бесконечности при переходе от одной строки к другой, а второй индекс (например, x_2 в первой строке, x_3 во второй и т. д.) стремится к бесконечности вдоль строки. Эта двойная бесконечная сумма ограничена критическим требованием ее сходимости в любой точке гильбертова пространства.

В таком пространстве многие понятия геометрии конечного числа измерений, относящиеся к свойствам плоскостей и поверхностей второго порядка, сохраняют свою силу. В частности, это относится к приведению квадратичной формы к ее главным осям. Гильберт показал, что любая квадратичная форма этого класса может быть приведена к нормальной форме вращением координатной системы. По аналогии со случаем конечного числа измерений, Гильберт назвал серию значений λ_1, λ_2, λ_3, ..., появляющихся в этой нормальной форме, «спектром» квадратичной формы.

Обобщая теорию главных осей от обычных квадратичных форм n переменных к квадратичным формам в пространстве бесконечного числа измерений, Гильберт обнаружил также много новых явлений, например, появление непрерывного математического спектра. Кроме этого, работы Гильберта сыграли заметную роль в возникновении квантовой механики. Введенный им термин «математический спектр» оказался пророчески связанным со спектром энергетических состояний атомов и частиц, из которых эти атомы состоят. Однако гильбертова теория квадратичных форм не совсем соответствовала проблемам квантовой механики; та форма, которая была необходима квантовой механике, как это выяснилось, была «неограниченной».

Именно в этом пункте фон Нейман под влиянием Эрхардта Шмидта, более склонный к абстракции, чем представители старшего поколения, совершил еще один критический шаг в сторону еще более высокой абстракции. Отказавшись от представления Гильберта, рассматривавшего квадратичную форму как нечто, что может быть выражено конкретно в форме бесконечного алгебраического выражения, и найдя вместо этого определение квадратичной формы в абстрактном виде, Нейман сумел избежать ограничения старого подхода. Таким образом, расширение спектральной теории Гильберта произошло как ответ на вполне реальные, конкретные запросы современной физики.

Теория групп, важнейшее построение современной математики, развилась аналогичным последовательным применением абстракций. Возникновение теории групп можно проследить уже на проблеме, которая привлекала внимание математиков, начиная со средних веков: проблеме решения алгебраических уравнений степени выше второй алгебраическим путем, т. е. с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня. Теория решения квадратного уравнения была известна вавилонянам, а решение уравнений третьей и четвертой степени в общем виде было получено в эпоху Возрождения Кардано и Тартальей. Однако решение уравнений пятой степени и выше наталкивалось на невероятные трудности.

На заре XIX в. эта старая задача подверглась новому и очень глубокому анализу со стороны Лагранжа, Руффини, Абеля и наиболее оригинальным образом Эваристом Галуа. Этот новый подход исходил из общеизвестных фактов; из того, во-первых, что алгебраическое уравнение степени n, записанное в форме

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

имеет n корней $r_1, r_2, \ldots, r_n$ и, во-вторых, что совокупность этих корней определяет алгебраическое уравнение единственным образом (например, если единица и тройка являются корнями квадратного уравнения, то этим уравнением будет $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3 = 0$). Коэффициенты уравнения представляют собой симметрическую функцию корней; это означает, что они зависят от совокупности корней уравнения так, что порядок выбора этих корней для них безразличен (например, в кубическом уравнении $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, корни которого равны r_1, r_2, r_3, коэффициенты могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} -a &= r_1 + r_2 + r_3, \\ b &= r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1, \\ c &= r_1r_2r_3, \end{aligned}$$

и если переменить нумерацию корней, то значения, a, b и c останутся неизменными).

Многолетнее исследование таких уравнений позволило установить, что ключ к проблеме нахождения корней уравнения по его коэффициентам лежит не только в изучении симметрических выражений, а скорее в изучении не совсем симметричных выражений и анализа тех симметрий, которые для них характерны. Например, выражение $E = r_1\,r_2 + r_3r_4$ меняется при произвольных перестановках четырех симолов r_1, r_2, r_3, r_4. Если же произвести замену индексов 1 на 2 или 3 на 4, то выражение E останется инвариантным, т. е. не изменится. Если произвести взаимную замену 1 и 3, то полученное выражение уже не будет равно E. С другой стороны, последовательность двух перестановок, одна из которых нарушает, а другая восстанавливает выражение E, образует перестановку, которая оставляет E неизменным. Совокупность этих перестановок, называемая «группой» Галуа, отражает внутреннюю симметрию выражения E. Понимание перестановочных групп, как это понял проницательный Галуа, и есть ключ к глубочайшей теории алгебраических уравнений. Вскоре после этого математики обнаружили наличие перестановочных групп и в других областях математики. Совокупность шести движений, переводящих равносторонний треугольник сам в себя, например, тоже образует группу (рис. 2). Другие группы также были обнаружены как фундаментальные структурные элементы в большинстве отраслей математики.

Чтобы охватить эти группы во всех их различных обликах и проявлениях в виде единого понятия и в равной степени предвидеть еще более широкий круг невыясненных возможностей, необходимо было сформулировать основное понятие группы в наиболее абстрактной форме. Это и было сделано; совокупность математических объектов была названа группой, если было установлено правило «комбинирования» двух элементов так, чтобы снова получался элемент S этой же совокупности; это правило *должно обладать свойством ассоциативности*, так что

$(ST)\,U = S\,(TU)$. Далее, эта совокупность должна содержать в себе «единичный» элемент I, который в комбинации с любым другим элементом совокупности S снова дает элемент S, так что $IS = SI = S$. Наконец, для каждого элемента совокупности S должен существовать «обратный» элемент S^{-1}, такой, что комбинация SS^{-1} производит единичный элемент, так что $SS^{-1} = I$.

Этим абстрактным определением, конечно, открыты самые широкие возможности для частной «субстанциональной» природы группы. Элементами группы могут быть числа, вращения геометрических тел, деформации пространства (такого рода деформации могут быть определены линейными или другими преобразованиями координат) или, как это уже упоминалось, перестановки n объектов.

В целом представление о группе и те ясность и единообразие, которые были внесены в различные отрасли математики с его появлением, следует считать главным достижением последних 150 лет. Значительная часть усилий была направлена на промежуточный, но важнейший участок основной линии развития, а именно на анализ структуры абстрактных представлений. Эта работа все время способствовала прояснению более частных конкретных областей математики, таких, как теория чисел и алгебра. Одно из самых замечательных достижений в этом направлении — знаменитая классификация различных разделов геометрии Феликса Клейна, в соответствии с различными группами преобразований, при которых определенные геометрические свойства остаются инвариантными. Эта классификация была высказана в 1870 г. (рис. 3).

Абстрактная теория групп занимает видное место и в еще более конкретных проблемах физики элементарных частиц. В этих проблемах возможности теории групп обусловливаются довольно запутанными группами явных и неявных симметрий, которые существуют в конфигурациях и взаимодействиях ядерных частиц. Успех теории групп в систематизации огромного количества экспериментальных данных и предсказание новых частиц убедительно показывают, как абстракции могут оказаться полезными для поисков вполне реальных объектов *).

Интуиция, этот неуловимый жизненный агент, никогда не покидает нас в математическом творчестве, мотивируя и направляя даже самое абстрактное мышление. Ее наиболее привычное проявление — геометрическая интуиция; значение геометрической интуиции можно легко обнаружить во многих важных достижениях математики последнего времени, которые как относятся к самой геометрии, так и вытекают из работ в области геометрии. Однако имеется сильнейшее побуждение к уменьшению видимой роли интуиции или, быть может, лучше сказать, к подведению точных и строгих рассуждений под интуитивные догадки.

Самая молодая и наиболее мощная ветвь геометрии — топология — очень наглядным образом иллюстрирует плодотворное влияние взаимной борьбы между интуицией и мышлением. Имея в прошлом небольшое число разрозненных, но весьма важных достижений (я напомню, как пример, одностороннюю поверхность Мёбиуса), составляющих ее основной капитал, топология только в XIX в. предстала как область серьезной научной деятельности. Долгое время она была почти полностью во власти геометрической интуиции; поверхности разрезались и склеивались для того, чтобы наглядно представить себе математическую сущность топологии,

*) См. следующую за этой статьей статью Ф. Дайсона «Математика и физика», а также статью Гелл-Манна, Розенфельда и Чу «Сильновзаимодействующие частицы» (УФН 83 (4), 695 (1964)).

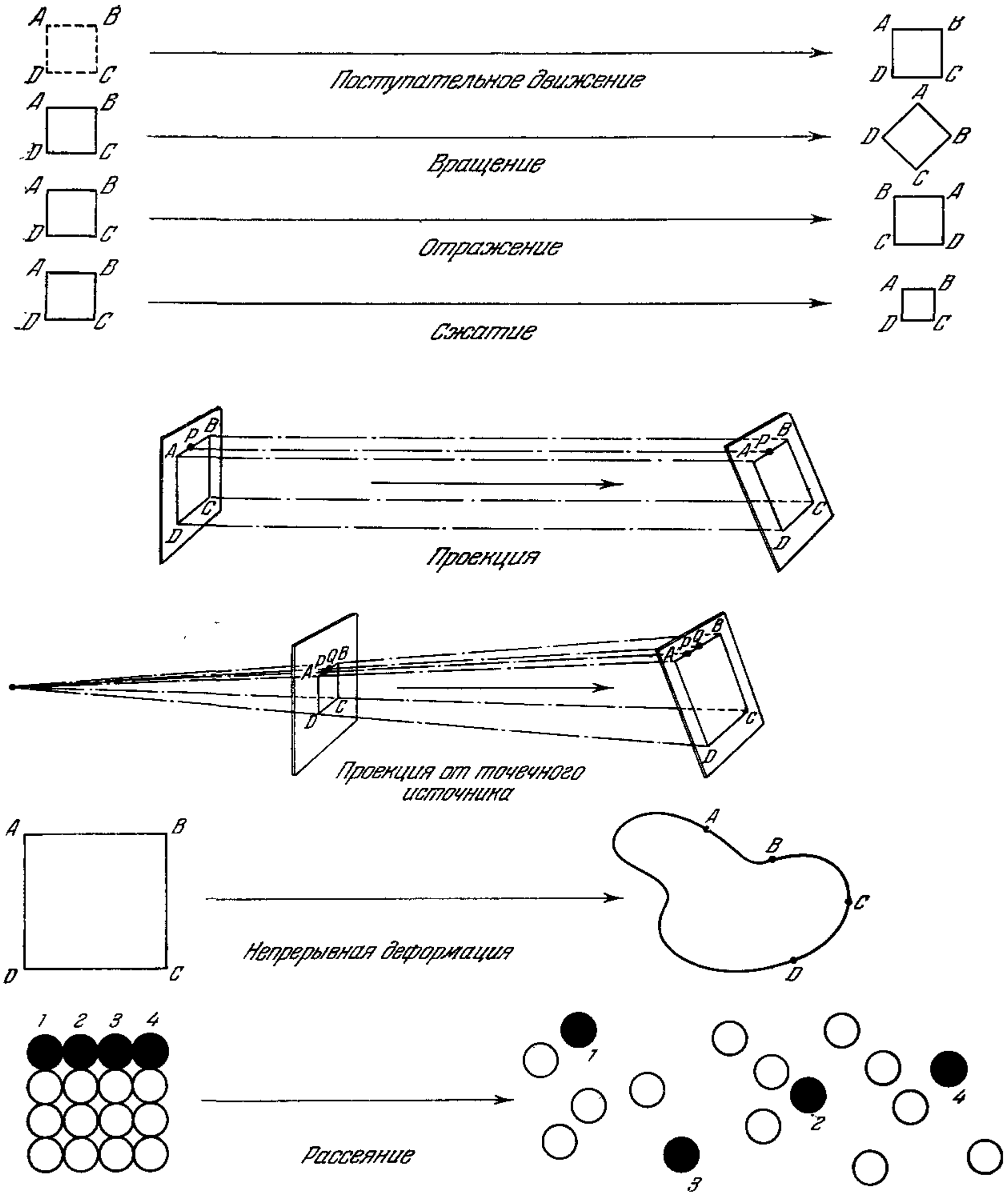


Рис. 3. Различные типы геометрии были классифицированы Феликсом Клейном согласно инвариантным свойствам фигур, когда эти фигуры подвергаются группам деформаций.

Евклидова геометрия представлена на чертеже наверху, как геометрия, изучающая свойства, подобные «углу», который не меняется, когда квадрат $ABCD$ совершает поступательное движение, поворачивается, отражается или сжимается. Аффинная геометрия представлена на рисунке ниже; она допускает все указанные преобразования и, кроме того, параллельную проекцию на плоскость, которая может быть и наклонена. В этом случае отношение коллинеарных точек постоянно. (Если P — точка на линии AB, то отношение AP к PB не меняется при преобразовании фигуры.) Еще ниже представлена проективная геометрия, которая допускает проекцию из точечного источника на произвольно повернутую плоскость. Инвариантным свойством фигур, проектируемых таким способом, является поперечное отношение коллинеарных точек. (Если P и Q — точки на линии AB, то отношение $AP/PQ : AD/PD$ остается неизменным при этих преобразованиях.) Топология, представляющая собой четвертый тип геометрии (представлена вторым рисунком снизу), изучает свойства, сохраняющиеся при операциях изгибания, вытягивания и скручивания, называемых непрерывной деформацией. Порядок следования четырех точек A, B, C и D сохраняется после деформации. В теории точечных совокупностей (этот тип геометрии представлен на нижнем рисунке) порядок следования точек не сохраняется после некоторой разновидности преобразования, называемой «рассеянием». Рассеиваемые точки сохраняют соответствие в нумерации с точками в исходной фигуре. Таким образом, теория точечных совокупностей может быть описана как теория изучающая свойства, сохраняющиеся при всех одно-однозначных соответствиях.

т. е. отыскать те свойства поверхностей, которые остаются неизменными при произвольных непрерывных деформациях. Однако в самом начале эволюции новой дисциплины Риман сумел сделать ее центром

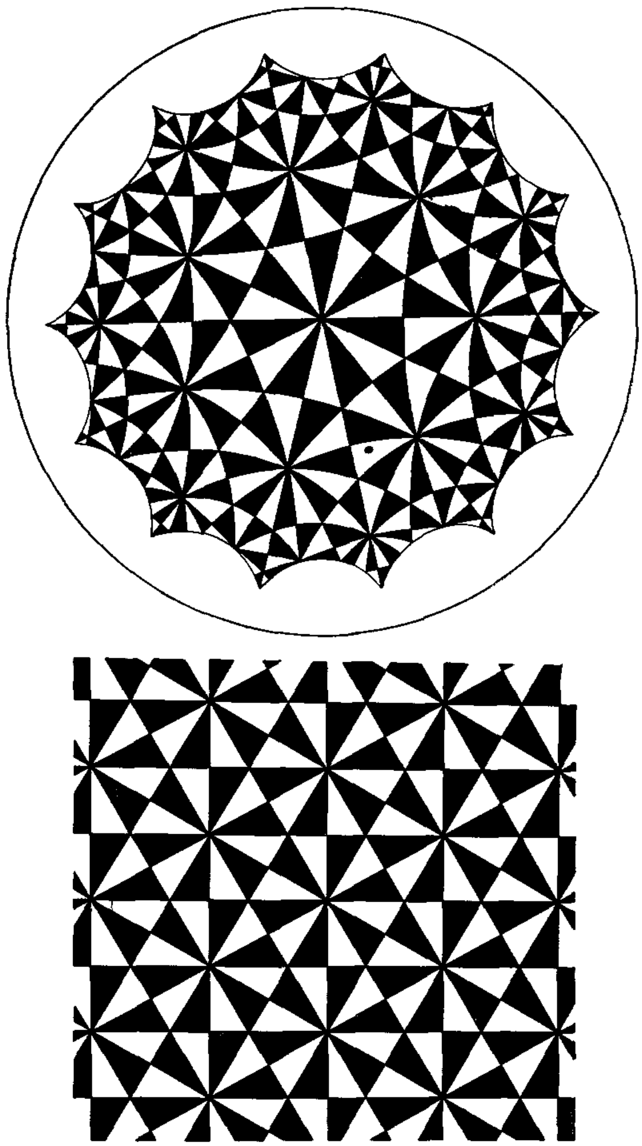


Рис. 4. Картирование функции комплексного переменного из бесконечной многолистной римановой поверхности приводит к рисунку, воспроизведенному в верхней части.

Многоугольники, образованные дугами окружностей, становятся бесконечно малыми при приближении к внешней окружности, они соответствуют прямолинейным многоугольникам (внизу), которые простираются неограниченно, сохраняя свои размеры по всей плоскости, на которой они и воспроизведены

внимания. В своей сенсационной работе по теории алгебраических функций комплексного переменного он показал, что для настоящего понимания таких функций весьма существенны топологические особенности поверхности, которая называется теперь римановой поверхностью.

На протяжении XIX в. математики обнаружили и систематически изучали большое количество топологических свойств поверхностей двух, трех и, наконец, n измерений.

На более или менее интуитивной базе в самом начале этого столетия Анри Пуанкаре построил великолепное здание топологической теории. Эта работа была выполнена в тесной связи с развивающейся теорией групп и нашла свое применение в других областях математики и в эволюции самой математической науки на более высокий уровень.

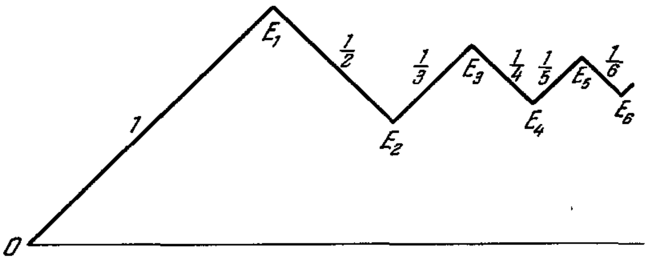


Рис. 5. Бесконечный зигзаг состоит из последовательных сегментов длиной 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6 . . .
Последовательность указанных элементов не составляет конечной суммы, а сама кривая не обладает конечной длиной.

Ее результаты были использованы в небесной механике, в частности для нахождения орбит планет в пространстве, искривленном гравитационными полями.

Вместе с тем специалисты по топологии очень быстро почувствовали, что им необходимо более острое оружие, чтобы визировать плоды геометрической интуиции в рамки современной математической строгости; вместе с тем они совсем не хотели, хотя бы в какой-то степени, нарушить чарующую красоту выводов геометрической интуиции. И эта задача была решена в первом десятилетии нашего века, можно сказать, одним человеком, голландским математиком Броуэром. Благодаря его титаническим усилиям топология допускает теперь вполне строгий подход, не менее строгий, чем геометрия Евклида; прогресс в области топологии осуществляется на твердой основе логически безупречных рассуждений.

В сердцевине всех трудностей, с которыми столкнулся Броуэр, была дилемма, выдвинутая представлением о непрерывности. У каждого из нас есть интуитивное представление о том, что такое непрерывность; мы представляем себе, например, плавную кривую. Однако каждый, кто начинает изучать дифференциальное исчисление, теряет свою уверенность, как только он пытается дать точную математическую формулировку непрерывности. От этой трудности уйти никуда нельзя, потому что геометрическая интуиция дает такое представление о непрерывности, которое не совсем сходится с логическим математическим представлением. Строгие определения приводят нас к выводам, которые с точки зрения геометрической интуиции кажутся парадоксальными. Легко сконструировать, например, непрерывную кривую (соответствующую точному определению), у которой нет конечной длины (рис. 5), которая не имеет ни в какой точке направления, которая может виться без самопересечений, находясь внутри квадрата, причем так, что она подходит сколь угодно близко к любой данной точке квадрата. Эти странные построения ярко показывают, что следует соблюдать осторожность в рассуждениях, доказывающих те или иные топологические свойства поверхностей или других объектов, подвергаемых сложной непрерывной деформации.

Необходимость осторожной аргументации вовсе не сразу очевидна интуитивно для тех, кто не занимается топологией. Рассмотрим, например, знаменитую теорему Жордана, утверждающую, что всякая непересекающаяся непрерывная замкнутая кривая на плоскости ограничивает две четко разделимые области — внутреннюю и внешнюю (рис. 6). Любой ученый, инженер и студент, опираясь на свой наивный здравый смысл, скажет, что усилия по доказательству этой теоремы излишни, фактически

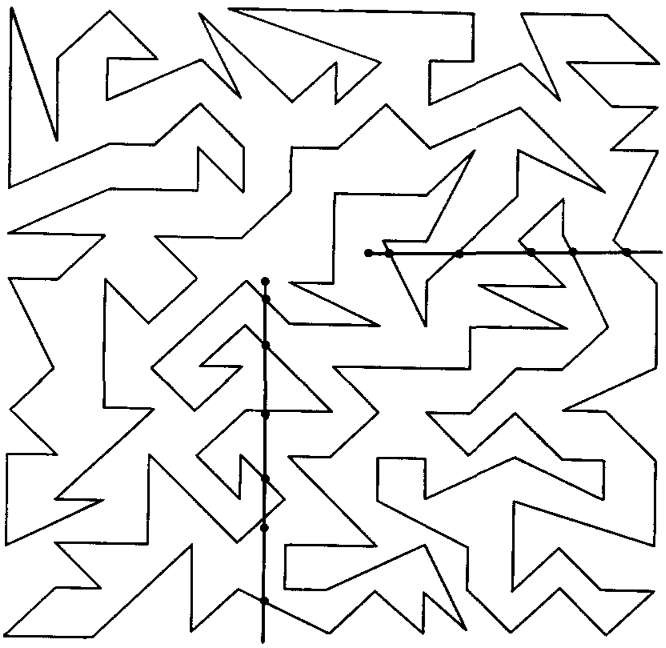


Рис. 6. Теорема Жордана о кривой утверждает, что всякая замкнутая кривая, подобная изображенной на этом рисунке, образует внешнюю и внутренюю области.

Прямая, проведенная из внутренней части во внешнюю, имеет нечетное число пересечений с кривой; прямая, проведенная из внешней части, — четное число пересечений.

представляют собой самообман и почти что мазохистское упражнение. Но когда Жордан писал свой классический учебник анализа, он явно чувствовал необходимость доказательства этого утверждения и сумел дать нужное доказательство. Можно судить о всей тонкости этой проблемы хотя бы по тому, что доказательство Жордана оказалось не безукоризненным! Точно так же никто не станет сомневаться в том, что мерность двумерной или трехмерной геометрической фигуры не меняется при любых непрерывных деформациях. Однако строгое доказательство этого факта, исходя из общего предположения простой абстрактной непрерывности, следует считать одним из главных достижений Броуэра.

Конечно, возможно избежать некоторых трудностей при введении понятия непрерывности, ограничив группу непрерывных деформаций некоторыми требованиями, например, требованием «гладкости» или дифференцируемости вместо чистой непрерывности. Это и было проделано с большим успехом. Дифференциальная топология, как ее называют, добилась в последнее время выдающихся успехов. Исследование деформаций, происходящих с соблюдением «разумной» гладкости, привело к несколько иной классификации топологических структур по сравнению с той, которая получалась при требовании непрерывности в соверешнно общей форме.

Эти достижения следует также приветствовать, поскольку они указывают на вполне обоснованное отклонение от тенденций к безграничному обобщению. С тех пор, как в последние десятилетия XIX в. были получены блестящие результаты Кантора в теории рядов, эта тенденция привлекала к себе многих математиков. Некоторые величайшие математики, в особенности Пуанкаре, считали ее даже угрозой для математики, в частности потому, что она заводит нас в дебри неразрешимых парадоксов. Хотя воинствующий критицизм Пуанкаре оказался чрезмерно суровым и даже реакционным, он был тем не менее полезным, потому что он вдохновил математиков конструктивного толка, имеющих дело с частными и вполне осязаемыми проблемами.

Стимулом к математической деятельности служат совершенно различные побуждения как у отдельного человека, так и у разных людей. Совершенно несомненно, что корни, уходящие в физическую реальность от большей части математики, и в особенности от анализа, поставляют в изобилии побуждения и вдохновение. Ситуация по отношению к другим проявлениям материального мира едва ли существенно иная. В теории чисел и алгебре представлена загадочная реальность мира чисел, прочно связанного с человеческим разумом. Еще более удаленной от физической реальности, как это можно подозревать, является реальность логических процессов, входящих составной частью в математическое мышление. И, наконец, основные идеи мало известных широкой публике работ по математической логике оказались весьма полезными для понимания и даже для проектирования автоматических счетных машин.

Короче говоря, математика должна черпать свои стимулы от конкретных частных вещей и иметь на прицеле опять же некоторый уровень «реальности». Полет в абстракцию должен означать нечто большее, чем простой взлет; отрыв от земли и возвращение на землю неотделимы друг от друга, даже если один и тот же пилот не в состоянии вести корабль на всех фазах его трактории. Предмет самых отвлеченных математических операций может быть обусловлен вполне ощутимой физической реальностью. То, что математика — эта чистая эманация человеческого разума — может столь эффективно служить для описания и понимания физического мира, представляет собой обстоятельство, требующее разъяснения; недаром к этому вопросу всегда было привлечено внимание философов. Однако, оставляя в стороне философию, следует признать, что связь с решением физических вопросов или видимое отсутствие такой связи не может служить критерием для установления различия между теми или иными видами математики или самими математиками.

Нельзя провести четкую линию раздела между «чистой» и «прикладной» математикой. Не следует создавать прослойку верховных жрецов непогрешимой математической красоты, следующих исключительно собственным склонностям, и пролетариат, обслуживающий своих хозяев. Различия такого рода являются в лучшем случае симптомами человеческой ограниченности; эти различия удерживают значительную часть людей от неосмысленного блуждания по необъятным просторам человеческих интересов.

Хотя математика едина, вполне допустимы существенные различия в подходе отдельного математика или различных математиков к данной проблеме. Сторонник строгого математического подхода (а у всякого человека со склонностью к научному мышлению такой подход время от времени возникает) требует бескомпромиссного совершенства.

Никаких логических разрывов и белых пятен при решении поставленных проблем не допускается, и результат должен вытекать из неразрывной цепи безупречных рассуждений. Если такая попытка встречает непреодолимые трудности, сторонник строгого математического подхода охотнее заново сформулирует проблему или поставит перед собой другую проблему, с трудностями которой есть возможность справиться. Он может также «разрешить» свою проблему за счет переопределения того, что он называет решением; фактически такая процедура представляет собой обычный предварительный шаг к настоящему решению исходной проблемы.

В прикладных исследованиях положение совсем иное. Прежде всего поставленная задача не может быть столь же легко видоизменена или обойдена; все, что здесь необходимо, так это правдоподобный и с человеческой точки зрения надежный ответ. Поэтому, если нужно, математик может пойти на компромисс; он должен быть готов интерполировать догадки в последовательность рассуждений и допустить известную неопределенность в числовых значениях. Однако даже наиболее практически мотивированные задачи, например, анализ течений с ударными разрывами, могут требовать фундаментальных математических исследований для установления корректной постановки вопроса. Теоремы существования также могут оказаться существенными в прикладных исследованиях; уверенность в том, что решение существует, может придать достоверность используемой математической модели. Наконец, в прикладной математике доминируют аппроксимации; они являются неизбежными при попытке отразить физические процессы на математических моделях.

Обращение с реальностью, преобразованной в абстрактные модели математики, и оценка степени точности, достигаемой при этой операции, требуют интуитивных навыков, обостренных опытом. Часто требуется приспособление исходной математической проблемы, которая сама по себе слишком трудна, чтобы получить ее решение с помощью современной науки. Такова отчасти природа интеллектуального риска и удовлетворения, испытываемых математиками, работающими бок о бок с инженерами и естествоиспытателями над овладением «реальными» проблемами, которые возникают всюду, куда доходит человеческое понимание природы и контроль над ней.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Klein, Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint, The Macmillan Company, 1939 (см. перевод: Ф. Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей, т. I, ОНТИ, 1935).
2. H. Rademacher, O. Toëplitz, The Enjoiment of Mathematics for the Amateur, Princeton Univ. Press (см. перевод: Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, М., Физматгиз, 1962).
3. E. Kasner a. J. Newman, Mathematics and the Imagination, Simon and Schuster, 1963.
4. M. Kline, Mathematics in Western Culture., Oxf. Univ. Press., 1953.
5. H. Poincare, Science and Hypothesis, Dover Publ. Inc., 1952 (см. перевод: А. Пуанкаре, Наука и гипотеза, 1906).
6. H. Weyl, Symmetry, Princeton Univ. Press., 1952.