1965 г. Ноябрь | Том 87, вып. 3

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

535.0

КОГЕРЕНТНЫЕ СВОЙСТВА ОПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ. I *)

Э. Вольф, Л. Мандель

Статья посвящена когерентным свойствам электромагнитных полей и вопросам, связанным с экспериментальным обнаружением этих свойств. Особое внимание уделено оптической области спектра. Рассмотрение ведется как на основе классической, так и на основе квантовой теории. После краткого исторического введения описываются элементарные представления, часто используемые при объяснении явлений интерференции. Затем на основе анализа простых интерференционных экспериментов вводится мера когерентности второго порядка; далее изучаются некоторые наиболее важные эффекты когерентности второго порядка. Описываются применения этих явлений в звездной интерферометрии и интерференционной спектроскопии. Рассматривается также вопрос о частичной поляризации с точки зрения корреляционной теории. Проводится общее статистическое описание поля. Описывается полученное в последнее время универсальное «диагональное» представление оператора плотности для свободных полей, показывается, каким образом с помощью присоединенной обобщенной функции распределения в фазовом пространстве можно выразить квантовомеханическую корреляционную функцию в той же самой форме, как и в классическом случае. Последующие разделы посвящены статистическим свойствам теплового и нетеплового излучения и временно́й и пространственной когерентности излучения абсолютно черного тела. Заключительные разделы посвящены когерентным эффектам четвертого и более высоких порядков и включают в себя также обсуждение процессов фотоэлектрической регистрации. Среди эффектов четвертого порядка, описанных достаточно подробно, рассмотрены явление группирования, эффект Хэнбери Брауна — Твисса и его применение в астрономии. Статья завершается рассмотрением различных неустановившихся эффектов суперпозиции, таких, например, как световые биения и интерференционные полосы, образуемые независимыми световыми пучками.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 492
2. Некоторые элементарные представления и определения 495
§ 2.1. Временна́я когерентность и время когерентности. § 2.2. Пространственная когерентность и площадь когерентности. § 2.3. Объем когерентности и параметр вырождения.
3. Законы интерференции и описание когерентности второго порядка 498
§ 3.1. Классическое описание. § 3.2. Квантовомеханическое описание.
Цитированная литература 513
4. Общее статистическое описание поля. § 4.1. Классическое описание. § 4.2. Описание с помощью квантованных полей. § 4.3. Представление в фазовом пространстве. § 4.4. Порядок и степень когерентности. § 4.5. Тепловое излучение света. § 4.6. Нетепловое излучение света. § 4.7. Энтропия оптического поля.

*) E. Wolf, L. Mandel, Coherence Properties of Optical Fields, Rev. Mod. Phys. 37 (2), 231 (1965). Перевод В. А. Угарова. В этом выпуске публикуются разделы 1—3. Примечания, дополнительная литература и общая редакция В. П. Козлова.

5. Некоторые эффекты когерентности второго порядка. § 5.1. Законы распространения. § 5.2. Звездная интерферометрия. § 5.3. Интерференционная спектроскопия. § 5.4. Время когерентности и ширина полосы. § 5.5. Взаимная спектральная чистота. § 5.6. Частичная поляризация. § 5.7. Когерентные свойства излучения абсолютно черного тела.
6. Эффекты когерентности четвертого и более высокого порядка. § 6.1. Процессы фотоэлектрической регистрации. § 6.2. Распределение вероятности для фотоэлектронов. § 6.3. Эффекты группирования при фотоэлектрической регистрации. § 6.4. Корреляция интенсивности и корреляционная интерферометрия.
7. Неустановившиеся эффекты суперпозиции. § 7.1. Световые биения независимых пучков. § 7.2. Интерференционные полосы, образуемые независимыми пучками. § 7.3. Квантовая теория неустановившихся эффектов суперпозиции.
8. Заключение.
Дополнение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хотя многие проявления оптической когерентности хорошо известны физикам, не существует общего соглашения о том, что, строго говоря, означает термин «когерентность» или определения той области, которую должна охватывать теория когерентности. Отсутствие единого мнения частично может быть объяснено тем, что сам объект исследований намного вышел за свои традиционные границы. Постепенно стало очевидным, что идея когерентности охватывает всю область статистической оптики и, если встать на более общую точку зрения, входит в схему квантового описания смешанных состояний.

Любое оптическое поле, с которым мы сталкиваемся в природе, испытывает определенные флуктуации, тесно связанные с самим полем. В самом широком смысле теория оптической когерентности имеет дело со статистическим описанием флуктуаций, а явления оптической когерентности, можно сказать, есть проявление корреляции между ними. Представление об оптической когерентности долгое время связывалось с интерференцией, по-видимому, потому, что интерференция как раз и является простейшим явлением, в котором обнаруживается корреляция между световыми пучками. Однако в связи с появлением современных световых детекторов и электронных схем с очень малым разрешающим временем началось изучение других видов корреляций в оптических полях. Эти исследования, наряду с развитием световых источников некоторых новых типов, поставили ряд вопросов, связанных с необходимостью систематической классификации явлений оптической корреляции и полного статистического описания оптических полей.

Самые ранние исследования по когерентности *) принадлежат Верде (1865, 1869), Лауэ (1907, 1915c, стр. 405—410), Береку (1926a, b, c; 1927), Лакману и Гроосмуллеру (1928a, b, c) и Шрёдингеру (1928). Некоторые исследования Стокса (1852) и Майкельсона (1890, 1891a, b, 1892, 1920), выполненные значительно раньше, хотя и не в полной мере посвящены вопросам когерентности, тем не менее немало содействовали пониманию проблемы (сравнить Цернике, 1948). Дальнейшее развитие вопроса связано с именами Винера (1928, 1929, 1930), Ван-Циттерта (1934, 1939), Цернике (1938), Гопкинса (1951, 1953, 1957), Вольфа (1954a, b 1955, 1956, 1959), Блан-Ланьерра и Дюмонте (1955), Дюмонте (1956b) и Панхарантнама (1956a, b; 1957a, b; 1963a, b). Главным результатом всех этих исследований было установление точной меры корреляций между параметрами поля в двух точках пространства-времени и формулировка

*) Подробный исторический обзор можно найти в книге М. Борна и Э. Вольфа «Оптика» (1964), гл. X.

динамических законов, которым эта корреляция, описываемая в общем случае тензорами 2-й валентности, подчиняется. Эта теория «второго порядка», кроме всего прочего, представляет собой унифицированную схему для рассмотрения самых простых и общеизвестных явлений когерентности и поляризации.

Вскоре после появления теории эффектов второго порядка несколько важных экспериментов Хэнбери Брауна и Твисса (1956a, 1957a, b) обнаружили, что можно измерять также и корреляцию между величинами, которые зависят от параметров поля квадратично. Эти результаты привели к изучению эффектов корреляции высших порядков в оптической области. В тех случаях, когда рассматриваемые поля создавались тепловыми источниками (т. е. раскаленными телами или газовым разрядом), корреляционная функция второго порядка оказывалась адекватной для описания эффектов второго и высших порядков; это связано с тем, что тепловое излучение по своей статистике имеет характер случайного гауссовского процесса, а такие процессы исчерпывающе характеризуются корреляционными моментами второго порядка (ср. Давенпорт и Рут, 1958, стр. 154). Однако появление новых типов световых источников (например, источник Смита — Перселла и оптического мазера) вызвало необходимость создания более общего подхода, обеспечивающего полное статистическое описание произвольного оптического поля. Такой подход, опирающийся на представления теории стохастических процессов, был предложен Вольфом (1963) [ср. также Мандель (1964a), Вольф (1964)].

Эти исследования, использовавшие почти исключительно классическое описание поля *), за последнее время были дополнены параллельными исследованиями на основе систематического квантовомеханического описания [Глаубер (1963b, c)]. Связь между двумя этими описаниями была уже достаточно ясна из когерентно-матричного представления состояния поляризации света [Винер (1928, 1929, 1930); Вольф (1954b, 1959); Мак-Мастер (1954); Толхук (1956); Фано (1957); Паррент и Роман (1960)], являющегося разновидностью матрицы плотности даже в классическом описании. Глаубер ввел квантовый аналог корреляционных функций классической теории. Эти квантовые корреляционные функции представляют собой математические ожидания от нормально упорядоченных произведений операторов рождения и уничтожения и имеют прямое отношение к величинам, непосредственно измеряемым с помощью фотоэлектрических детекторов.

Следуя этим идеям, несколько авторов занимались вопросом о связи между классическим и квантовым описанием когерентности. Отправной точкой для некоторых из этих исследований явился результат, полученный Сударшаном (1963a, b), согласно которому квантовомеханическая корреляционная функция может быть представлена в такой же форме, как и классическая, если использовать для описания статистических свойств поля определенным образом обобщенное распределение в фазовом пространстве.

Практически корреляция величин поля измеряется фотоэлектрическими приемниками. Во всех случаях, рассмотренных до сих пор и представляющих практический интерес, было установлено, что корреляция между числами фотонов для квантованных полей может быть найдена из корреляции между фотоэлектронами в подходящих фотоэлектрических экспериментах. Более того, было показано, что корреляция такого

*) Вплоть до самого недавнего времени не существовало систематического рассмотрения когерентности в рамках квантовой механики, хотя известны многочисленные работы по частным вопросам [ср. Уиттекер (1953), стр. 96; Паули (1958), стр. 133; Фано (1961)].

рода может быть подсчитана на основании полуклассической теории, в которой электромагнитное поле описывалось классически, а взаимодействие трактовалось квантовомеханически [Мандель, Сударшан, Вольф (1964); см. также Джейнс и Каммингс (1963), Сеницкий (1965)].

Развитие теории оптической когерентности попутно прояснило многие вопросы, связанные с рядом смежных проблем. Среди таких вопросов стоит упомянуть широко распространенное убеждение, что интерференционные эффекты между полностью независимыми световыми пучками невозможны и что измерения по счету фотонов с помощью фотоэлектрических приемников не могут дать сведений о спектральном составе света. Фактически же возникновение биений [Форрестер, Гудмусен и Джонсон (1955); Джаван, Баллик и Бонд (1962); Липсетт и Мандель (1964)], наряду с интерференционными полосами, образующимися в результате суперпозиции независимых световых пучков, к настоящему времени надежно установлено и может быть объяснено как на основе классического, так и на основе квантового описания. Мало этого, анализ фотоэлектрических флуктуаций стал важным техническим способом определения чрезвычайно узких спектральных профилей, таких, например, как в лазерных пучках.

В нашем обзоре мы ограничиваемся рассмотрением когерентных свойств свободных полей и измерения соответствующих характеристик. Мы опустим вопросы, связанные с возникновением и развитием когерентности внутри самих источников (эти вопросы рассматривались Дике (1954), Сеницким (1959, 1960, 1961a, b; 1962a, b) и другими авторами), равно как и вопросы индуцированной когерентности и оптической накачки, которые обсуждаются весьма подробно уже давно [Броссел и Кастлер (1949); Броссел и Биттер (1952); Кастлер (1957); Барра (1961); Барра и Коэн — Таннуджи (1961a, b); Белл и Блум (1961a, b); Броссель (1961); Коэн — Таннуджи (1961a, b); Сериес (1961); Додд, Сериес и Тэйлор (1963); Кастлер (1963); Коэн — Таннуджи и Кастлер (1965)].

Раздел 2 мы начинаем сводкой некоторых самых элементарных представлений, обычно используемых при анализе простейших интерференционных явлений. Количественное описание явлений когерентности второго порядка содержится в разделе 3; оно производится как на основе квантовой, так и на основе классической теории. Раздел 4 посвящен проблеме полного статистического описания оптического поля. Этот вопрос снова рассматривается с точки зрения классической и квантовой теории; здесь же описано представление в фазовом пространстве, предложенное Сударшаном, которое позволяет установить формальную тождественность между обоими случаями. Вводится понятие когерентности различного порядка; устанавливается различие между свойствами флуктуаций теплового и лазерного излучений. Наиболее важные эффекты когерентности второго порядка *) обсуждаются в разделе 5, а самые интересные эффекты высших порядков, включая сюда эффект Хэнбери Брауна — Твисса, в разделе 6 **).

В последнем, седьмом, разделе описываются различные неустановившиеся процессы интерференции и биений, создаваемые независимыми световыми пучками.

---

*) Более полное описание эффектов когерентности второго порядка можно найти в книге М. Борна и Э. Вольфа «Оптика» (1964), гл. X.

**) Более полное рассмотрение эффектов когерентности четвертого порядка можно найти у Л. Манделя (1963d).

2. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ*)

§ 2.1. Временна́я когерентность и время когерентности

Допустим, что «стабильный» световой пучок, исходящий из небольшого источника света σ, разделяется на два пучка в интерферометре Майкельсона; затем эти два пучка вновь соединяются, получив разность хода, равную $\Delta s = c\Delta t$ (c — скорость света) (рис. 1). Если разность хода Δs достаточно мала, в плоскости $\mathfrak{B}$ образуются интерференционные полосы. Тогда говорят, что возникновение полос есть проявление *временно́й когерентности* между двумя пучками, поскольку контраст между полосами зависит от времени запаздывания Δt, возникшего для этих двух пучков. В общем случае интерференционные полосы наблюдаются только в том случае, если

$$\Delta t \cdot \Delta \nu \leqslant 1,$$

где $\Delta \nu$ представляет собой эффективную ширину полосы света. Время запаздывания

$$\Delta t \sim 1/\Delta \nu \qquad (2,1)$$

называется *временем когерентности* света, а соответствующий оптический путь $c\Delta t$ называется *длиной когерентности*.

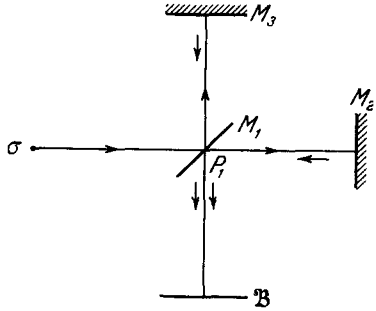

Рис. 1. Временна́я когерентность, иллюстрируемая на примере интерферометра Майкельсона.

Элементарный вывод соотношения (2,1) состоит в том, что полная интенсивность результирующей картины раскладывается на сумму компонент различной частоты; затем выписывается условие, чтобы различные монохроматические составляющие подстраивались «вровень» (т. е. все максимумы интенсивности были бы расположены достаточно близко друг к другу).

§ 2.2. Пространственная когерентность и площадь когерентности

Рассмотрим теперь интерференционный эксперимент типа опыта Юнга, используя квазимонохроматический свет от протяженного источника, создающего *тепловое* излучение. Термин «*квазимонохроматический*» означает, что эффективная ширина полосы $\Delta \nu$ света мала по сравнению со средней частотой этой полосы ν_0,

$$\Delta \nu / \nu_0 \ll 1. \qquad (2,2)$$

Для простоты на рис. 2 изображена симметричная схема, причем источник имеет форму квадрата со стороной Δl. Если точечные отверстия P_1 и P_2 достаточно близки друг к другу, можно наблюдать интерференционные полосы вблизи центральной точки P экрана $\mathfrak{B}$. Возникновение этих полос является, как говорят, проявлением *пространственной когерентности* световых колебаний, приходящих в точку P от двух отверстий; это название связано с тем, что контраст между полосами зависит от расстояния между этими отверстиями. Вообще говоря,

*) Уточнение определений некоторых величин, введенных эвристически в § 2.1 и 2.2, будет сделано позже (см. § 5.1 и 5.4); см. также А. Форрестер (1956).

интерференционные полосы вблизи точки P будут наблюдаться только в том случае, если

$$\Delta\vartheta\Delta l \leqslant \lambda_0, \tag{2,3}$$

где $\Delta\vartheta$ — угол, под которым виден отрезок P_1P_2 из источника, а $\lambda_0 = c/\nu_0$ — эффективная длина волны света. Если обозначить через R расстояние между источником σ и плоскостью $\mathfrak{Q}$, в которой расположены отверстия, то оказывается, что для того, чтобы около точки P наблюдались интерференционные полосы, круглые отверстия должны быть расположены на плоскости $\mathfrak{Q}$ внутри области, с центром в точке Q и площадью (см. рис. 2)

$$\Delta A \sim (R\Delta\vartheta)^2 \sim R^2(\lambda_0/\Delta l)^2 = (c^2/\nu_0^2)(R^2/S), \tag{2,4}$$

где $S = (\Delta l)^2$ представляет собой площадь, занятую источником. Про площадь ΔA и говорят, что она есть *площадь когерентности* света в плоскости $\mathfrak{Q}$ около точки Q. Следует подчеркнуть, что согласно (2,4) площадь когерентности будет тем больше, чем больше R, т. е. если плоскость $\mathfrak{Q}$, в которой расположены отверстия, будет удаляться от источника. Телесный угол $\Delta\Omega$, под которым видна площадь когерентности из источника, в этом случае (тепловое излучение) равен

$$\Delta\Omega \sim \Delta A/R^2 \sim (c^2/\nu_0^2)(1/S). \tag{2,5}$$

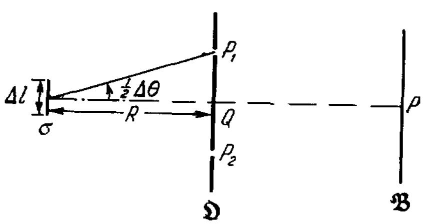

Рис. 2. Пространственная когерентность, иллюстрируемая интерференционным опытом Юнга.

Элементарный вывод условия (2,3) состоит в том, что интерференционная картина, возникающая в плоскости $\mathfrak{B}$, считается суперпозицией независимых интерференционных картин, создаваемых светом, идущим от различных элементов источника; далее записывается условие того, что каждая отдельная интерференционная картина подстраивается примерно «вровень» к другой.

Хотя все то, что говорилось до сих пор, относится только к свету от теплового источника, который непосредственно падает на удаленную плоскость, очевидно, что представление о площади когерентности имеет куда более общее значение. Площадь когерентности может быть определена рассмотрением аналогичного эксперимента с двумя отверстиями, но уже без всякой связи с источником света. Площадь когерентности, конечно, будет зависеть от положения плоскости, в которой расположены отверстия, и в общем случае уже не будет определяться соотношением (2,4).

§ 2.3. Объем когерентности и параметр вырождения

Теперь будем считать, что поле представляет собой почти плоскую, квазимонохроматическую волну. Прямой цилиндр, основанием которого является площадь когерентности в плоскости, нормальной к направлению распространения, и высота которого равна длине когерентности, можно назвать *объемом когерентности*. Этот объем соответствует также одной ячейке фазового пространства фотонов [см. также Кастлер (1964)]. Он занимает в пространстве объем, равный $\Delta V = c\Delta t\cdot\Delta A$.

Если Δt определяется выражением (2,1), а ΔA — выражением (2,4), то

$$\Delta V \sim c\lambda_0^2R^2/\Delta\nu\,(\Delta l)^2 = (R/\Delta l)^2(\lambda_0/\Delta\lambda)\lambda_0^3, \tag{2,6}$$

где $\Delta\lambda = \Delta(c/\lambda_0) = c\Delta\nu/\nu_0^2$.

ν_0

Как мы увидим ниже, среднее число фотонов в определенном состоянии поляризации, которое можно обнаружить в «объеме когерентности», т. е. среднее число фотонов в определенном состоянии поляризации, которое пересекает площадь когерентности за время когерентности, представляет собой очень важный параметр. Этот параметр известен как *параметр вырождения* δ для света [Мандель (1961а)].

Если E_ν представляет собой среднее число фотонов, испускаемых единицей площади источника, в единичном интервале частот и в единичном телесном угле, с осью, совпадающей с нормалью к поверхности источника, за единицу времени, то, очевидно,

$$\delta = \frac{1}{2} E_\nu S \Delta\nu \Delta\Omega \Delta t. \tag{2,7}$$

Множитель $1/2$ в правой части появился из-за предположения, что свет исходит от теплового источника и, следовательно, неполяризован; поэтому его можно рассматривать как смесь фотонов с двумя взаимно перпендикулярными поляризациями, содержащую равное число фотонов того и другого сорта. В обычных условиях, когда применимы соотношения (2,5) и (2,1), определяющие $\Delta\Omega$ и Δt, выражение (2,7) для δ упрощается:

$$\delta = \frac{1}{2} (c^2/\nu_0^2) E_\nu. \tag{2,8}$$

Очевидно, что выражение (2,8) не зависит от геометрических параметров.

В частности, для излучения абсолютно черного тела, возникающего в равновесных условиях в замкнутой оболочке,

$$E_\nu = (2\nu^2/c^2) [\exp(h\nu/kT) - 1]^{-1}, \tag{2,9}$$

где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура излучения, h — постоянная Планка. В этом случае (2,8) переходит в

$$\delta \sim [\exp(h\nu/kT) - 1]^{-1}. \tag{2,10}$$

Выражение, стоящее в правой части (2,10), в точности совпадает с тем выражением, которое было впервые получено Эйнштейном (1912), изучавшим излучение в полости, находящееся в тепловом равновесии со стенками полости. Он показал, что величина, описывающая среднее число фотонов в ячейке фазового пространства, в квантовой статистике представляет именно то, что называют параметром *вырождения* для излучения. Однако определение вырождения, приведенное здесь и использующее «объем когерентности», может быть применено к свету, достаточно удаленному от своего источника, независимо от того, тепловое или нетепловое происхождение имеет этот свет.

Можно показать, что представление об объеме когерентности соответствует квантовомеханической ячейке фазового пространства [ср. Хэнбери Браун и Твисс (1957а), стр. 321]. Для этого рассмотрим снова пучок квазимонохроматического света, распространяющегося в направлении z, перпендикулярном к плоскости удаленного теплового источника в форме квадрата со стороной Δl. В этом случае фотоны с различным импульсом и различной поляризацией будут эффективно независимы, а сам пучок можно описать в терминах «однофотонного» фазового пространства. С другой стороны, объем элементарной ячейки фазового пространства определяется выражением

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \Delta q_x \Delta q_y \Delta q_z = h^3, \tag{2,11}$$

где $\Delta p_x \ldots$ и $\Delta q_x \ldots$ — неопределенности значений компонент импульса и координат фотона в пучке *). В рассматриваемом случае легко найти из элементарных геометрических соображений, что

$$\Delta p_x = \Delta p_y = (h\nu_0/c)\,(\Delta l/R). \tag{2,12}$$

Если, далее, квадрат «углового размера» $\Delta l/R$ источника считать пренебрежимо малым по сравнению с $\Delta\nu/\nu_0$, неопределенность в Δp_z, обусловленная главным образом неопределенностью в частоте, дается выражением

$$\Delta p_z = (h/c)\Delta\nu. \tag{2,13}$$

Подставляя (2,12) и (2,13) в выражение (2,11), получим

$$\Delta q_x \Delta q_y \Delta q_z = c\lambda_0^2 R^2/\Delta\nu\,(\Delta l)^2; \tag{2,14}$$

последнее выражение совпадает с выражением (2,6), определяющим объем когерентности.

Наконец, может оказаться небесполезным указать типичные порядки величин некоторых параметров, о которых шла речь. Значения этих параметров очень резко различаются для света тепловых источников и света, генерируемого различными мазерами в оптическом диапазоне. Например, ширина полосы $\Delta\nu$ лучшего «монохроматического» теплового источника света, который может быть создан в лаборатории, имеет порядок 10^8 *гц*, тогда как для светового излучения мазеров можно получить значение 10^2 *гц* или даже еще меньше. Соответствующие времена когерентности имеют поэтому значения 10^{-8} и 10^{-2} *сек* и длины когерентности 1 и 10^6 *м* соответственно. Наибольшее значение параметра вырождения, которое может быть достигнуто с помощью теплового источника света в лаборатории, имеет порядок 10^{-3}, тогда как с помощью света от мазера можно достичь значений выше 10^{14} [ср. Мандель (1961а); Габор (1961), стр. 133, 146]. Таким образом, обычное тепловое излучение невырождено ($\delta \ll 1$), тогда как излучение мазера обычно в высшей степени вырождено ($\delta \gg 1$).

3. ЗАКОНЫ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ И ОПИСАНИЕ КОГЕРЕНТНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 3.1. Классическое описание

В предшествующих разделах мы рассмотрели грубые критерии, устанавливающие условия, при которых обычно возникают простые интерференционные явления. Теперь мы рассмотрим более подробно некоторые интерференционные эффекты и введем точную количественную меру так называемой *когерентности второго порядка*, проявлением которой и являются эти эффекты. Эта мера, которая в этом параграфе является классической, в точности соответствует, как это будет показано ниже, аналогичной мере, определяемой квантовомеханическим путем.

Пусть $V^{(r)}(\mathbf{r}, t)$ обозначает действительную классическую волновую функцию, характеризующую поле в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t. Эта функция может представлять, например, электрическое поле или векторный потенциал. Мы умышленно не конкретизируем природу волновой функции $V^{(r)}$ на этой стадии, поскольку общий анализ не зависит от частного выбора волновой функции, а различный выбор волновых функций может оказаться более удобным для описания различных экспериментальных ситуаций. В случае фотоэлектрических экспериментов удобно выбрать, как

*) Строго говоря, положение фотона не может быть определено более точно, чем в пределах области, линейные размеры которой порядка длины волны [ср. Ахиезер и Берестецкий (1953), стр. 17; Ахарайя и Сударшан (1960)].

это будет показано в § 6.1, векторный потенциал (фактически—в определенном комплексном представлении) в качестве основной переменной поля. Однако могут встретиться также процессы измерения, для которых более подходящим окажется другой выбор.

Для любого реального светового пучка $\mathbf{V}^{(r)}$ будет флуктуирующей функцией времени, которую можно рассматривать как характерный член ансамбля, состоящего из всех возможных реализаций поля. Существует несколько причин, обусловливающих флуктуации $\mathbf{V}^{(r)}$. Когда свет излучается, например, тепловым источником, флуктуации возникают главным образом потому, что $\mathbf{V}^{(r)}$ содержит большое число компонент Фурье, независимых друг от друга; суперпозиция этих компонент и ведет к появлению флуктуирующего поля, которое может быть описано только статистическим образом. Но даже свет, идущий от жестко стабилизированного источника, такого, например, как оптический мазер (для которого компоненты Фурье могут быть до некоторой степени связаны между собой за счет свойства насыщения мазера), будет обнаруживать некоторые случайные флуктуации, поскольку спонтанное излучение исключить полностью невозможно. Кроме того, в флуктуации вносят свой вклад колебания зеркал на концах резонансной полости.

Как уже об этом говорилось, эффекты когерентности являются по самой своей сути проявлением корреляции, которая может существовать между флуктуациями в двух или более точках пространства-времени. Конечно, эффекты корреляции самым удобным образом описываются аппаратом теории вероятностей, и общее рассмотрение в этом плане будет дано в разделе 4. Вместе с тем описание усредненной интенсивности света требует рассмотрения корреляций только второго порядка; в этом разделе мы вкратце введем ее в связи с простейшими экспериментами. Но до того, как сделать это, полезно ввести комплексное представление поля, которое представляет собой обобщение известного представления, используемого для описания идеализированного случая строго монохроматического поля; это представление оказалось чрезвычайно важным в процессе развития теории когерентности. Предположим, что $\mathbf{V}^{(r)}$ можно представить в виде интеграла Фурье относительно временно́й переменной *)

$$\mathbf{V}^{(r)}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}(\mathbf{r}, \nu) \exp(-2\pi i \nu t)\, d\nu, \tag{3,1}$$

и заметим, что в силу того, что $\mathbf{V}^{(r)}$ действительно, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, -\nu) = \mathbf{v}^*(\mathbf{r}, \nu)$, где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Поскольку компоненты с отрицательной частотой ($\nu < 0$) не несут в себе дополнительную информацию, которая не содержалась бы в компонентах с положительной частотой ($\nu > 0$), их можно без ущерба для дела опустить. Таким образом,

---

*) В том случае, когда $\mathbf{V}^{(r)}(\mathbf{r}, t)$ представляется типичным членом стационарного ансамбля случайных функций, как это будет предполагаться в дальнейшем, она не будет квадратично интегрируемой и, следовательно, представление этой функции в виде интеграла Фурье может и не существовать. Эта трудность может быть обойдена, если вместо функции $\mathbf{V}^{(r)}$ рассмотреть «обрезанную» функцию (т. е. функцию, совпадающую с исходной в интервале $-T$, $+T$ и продолженную нулем вне этого интервала. — *Ред.*)

$$\mathbf{V}_T^{(r)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}^{(r)}(\mathbf{r}, t) \quad \text{при} \quad |t| < T,$$

$$\mathbf{V}_T^{(r)}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{при} \quad |t| > T,$$

а затем перейти к пределу $T \to \infty$ в окончательных расчетах, включая сюда и формулы, содержащие в себе аналитический сигнал, связанный с $\mathbf{V}_T^{(r)}$ [ср. М. Борн и Э. Вольф (1964), гл. X].

вместо функции $\mathbf{V}^{(r)}$ можно рассматривать функцию

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \mathbf{v}(\mathbf{r}, \nu) \exp(-2\pi i \nu t)\, d\nu \qquad (3{,}2)$$

Функция $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ известна под названием *комплексного аналитического сигнала* или комплексной амплитуды, ассоциированной с функций $\mathbf{V}^{(r)}(\mathbf{r}, t)$. Это представление было введено Габором (1946) [см. также М. Борн и Э. Вольф (1964), § 10.2; Беран и Паррент (1964), гл. 2]. Сам термин «комплексный аналитический сигнал» появился в связи с хорошо известной теоремой [Титчмарш (1948), стр. 128] о том, что отсутствие компонент с отрицательной частотой в (3,2) достаточно для того, чтобы все декартовы компоненты $\mathbf{V}$, рассматриваемые как функции комплексного t, были бы аналитическими и регулярными функциями в нижней полуплоскости комплексной t-плоскости. Далее, из (3,2) и (3,1) вытекает, что действительная часть $\mathbf{V}$ равна $1/2\ \mathbf{V}^{(r)}$, тогда как из свойства аналитичности, о которой только что шла речь, следует, что действительная и мнимая части $\mathbf{V}$ образуют пару преобразований Гильберта:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}[\mathbf{V}^{(r)}(\mathbf{r}, t) + i\mathbf{V}^{(i)}(\mathbf{r}, t)], \qquad (3{,}3)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}^{(i)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{V}^{(r)}(\mathbf{r}, t')}{t'-t}\, dt', \\ \mathbf{V}^{(r)}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{V}^{(i)}(\mathbf{r}, t')}{t'-t}\, dt', \end{aligned}\right\} \qquad (3{,}4)$$

причем P обозначает главное значение интеграла по Коши при $t' = t$.

Этот переход от действительного поля $\mathbf{V}^{(r)}$ к комплексному полю $\mathbf{V}$ обладает и другими замечательными особенностями. Комплексное поле $\mathbf{V}$, как это будет показано далее, естественным образом возникает в теории фотоэлектрического обнаружения световых флуктуаций. Как это выяснится, оно является собственным значением оператора, используемого в квантовой теории поля и представляющего аннигиляцию фотона в некоторой точке пространства-времени $(\mathbf{r}, t)$.

Рассмотрим теперь пучок квазимонохроматического света. Мы предположим, во-первых, что свет линейно поляризован, так что его можно представить (комплексной) скалярной функцией $V(\mathbf{r}, t)$. Далее, в силу высокой частоты оптических колебаний величину V как функцию времени невозможно измерить, поскольку ни один из существующих в настоящее время оптических приемников для этой цели не годится. Средний период оптических колебаний составляет около 10^{-15} *сек*, тогда как наиболее быстрые оптические приемники, доступные сейчас (лучшие фотоприемники), имеют время разрешения порядка 10^{-10} *сек*; правда, специальная техника позволяет получить время разрешения и до 10^{-12} *сек*. И хотя изучение быстрых изменений полей во времени экспериментально невозможно, вполне возможно измерить корреляцию поля в двух или более точках пространства-времени. Мы рассмотрим корреляцию в двух точках пространства-времени и ее определение с помощью простейших интерференционных экспериментов.

Световые колебания в точках $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$ выделятся введением непрозрачного экрана $\mathfrak{Q}$, расположенного поперек пучка, с небольшими круглыми отверстиями в этих двух точках. Мы наблюдаем, что происходит на экране $\mathfrak{B}$, расположенном на некотором расстоянии за экраном $\mathfrak{D}$ (рис. 3). В первом приближении мгновенное значение поля в точке P на экране $\mathfrak{B}$ дается выражением

$$V(\mathbf{r}, t) = K_1 V(\mathbf{r}_1, t - t_1) + K_2 V(\mathbf{r}_2, t - t_2), \tag{3,5}$$

в котором $t_1 = s_1/c$ и $t_2 = s_2/c$ — времена, необходимые для того, чтобы свет прошел от точки P_1 к точке P и от точки P_2 к точке P соответственно; c — скорость света, а K_1 и K_2 — постоянные множители, зависящие от размеров отверстий и геометрии схемы. Из элементарной теории дифракции вытекает, что множители K_1 и K_2 чисто мнимые.

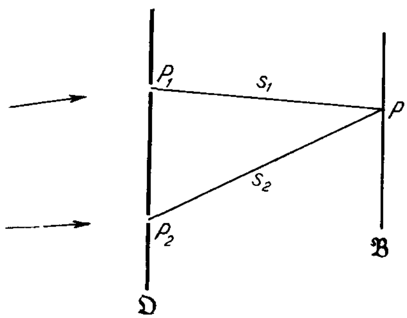

Рис. 3. Смысл когерентных функций второго порядка $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ и $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$, иллюстрируемый интерференционным экспериментом с двумя пучками.

Мгновенная интенсивность $I(\mathbf{r}, t)$ в точке $P(\mathbf{r})$ и в момент времени t определяется формулой *)

$$I(\mathbf{r}, t) = V^*(\mathbf{r}, t) V(\mathbf{r}, t). \tag{3,6}$$

Из (3,5) и (3,6) следует, что

$$I(\mathbf{r}, t) = |K_1|^2 I_1(\mathbf{r}_1, t - t_1) + |K_2|^2 I_2(\mathbf{r}_2, t - t_2) + 2\mathrm{Re}\{K_1^* K_2 V^*(\mathbf{r}_1, t - t_1) V(\mathbf{r}_2, t - t_2)\}, \tag{3,7}$$

где символ Re обозначает действительную часть. Если взять среднее от $I(\mathbf{r}, t)$ по ансамблю различных реализаций поля и обозначить среднее по этому ансамблю в виде $\langle\ldots\rangle_e$, мы получим

$$\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle_e = |K_1|^2 \langle I(\mathbf{r}_1, t - t_1)\rangle_e + |K_2|^2 \langle I(\mathbf{r}_2, t - t_2)\rangle_e + 2\mathrm{Re}\{K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t - t_1, t - t_2)\}, \tag{3,8}$$

где

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1) V(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle_e \tag{3,9}$$

и

$$\langle I(\mathbf{r}_j, t_j)\rangle_e = \langle V^*(\mathbf{r}_j, t_j) V(\mathbf{r}_j, t_j)\rangle_e = \Gamma(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j, t_j, t_j) \quad (j = 1, 2). \tag{3,10}$$

$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$, очевидно, характеризует корреляцию между полем в точке $\mathbf{r}_2$ и комплексно сопряженным полем в точке $\mathbf{r}_1$ в моменты времени t_2 и t_1 соответственно, а $\langle I(\mathbf{r}_j, t_j)\rangle_e$ представляет среднюю (по ансамблю) интенсивность света в отверстии P_j в момент времени t_j ($j = 1, 2$). Мы обнаружим вскоре (см. (3,20)), что при обычных условиях третий член правой части (3,8) вызывает синусоидальную модуляцию усредненной интенсивности $\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle$ в зависимости от $\mathbf{r}$.

Обычно нас интересуют *стационарные поля*, для которых все средние по ансамблю не зависят от выбора начала отсчета времени; более того, как правило, поля являются также и *эргодическими*. В этих условиях средние по ансамблю уже не зависят от времени и могут быть заменены

*) $I(\mathbf{r}, t)$, строго говоря, не пропорциональна квадрату действительной переменной поля $V^{(r)}(\mathbf{r}, t)$. Однако нетрудно показать, что если свет квазимонохроматический, $1/2\, I(\mathbf{r}, t)$ представляет собой среднее от $(V^{(r)})^2$ за короткий промежуток времени; это среднее берется за промежуток времени, составляющий несколько периодов световых колебаний.

соответствующими средними по времени *). Обозначим среднее по времени для стационарного процесса $f(\mathbf{r}, t)$ через $\langle f(\mathbf{r}, t)\rangle_t$, т. е.

$$\langle f(\mathbf{r}, t)\rangle_t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(\mathbf{r}, t)\, dt. \tag{3,11}$$

Тогда «выборочную корреляционную функцию» $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$**) можно заменить корреляционной функцией по времени, а последняя зависит от аргументов t_1 и t_2 только через их разность $t_1 - t_2$. Следовательно, если мы запишем

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t)\, V(\mathbf{r}_2, t+\tau)\rangle_t = \\ = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} V^*(\mathbf{r}_1, t)\, V(\mathbf{r}_2, t+\tau)\, dt, \tag{3,12}$$

выражение (3,8) для усредненной интенсивности в точке P примет вид (при условии стационарности и эргодичности)

$$\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle = |K_1|^2 \langle I(\mathbf{r}_1, t)\rangle + |K_2|^2 \langle I(\mathbf{r}_2, t)\rangle + 2\mathrm{Re}\{K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1 - t_2)\}, \tag{3,13}$$

где опущены индексы t или e, отличающие два способа усреднения, поскольку в этом случае нет необходимости в различии.

Заметим теперь, что если последний член в правой части (3,13) не обращается в нуль, усредненная интенсивность $\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle$ не равна сумме (усредненных) интенсивностей двух пучков, приходящих в точку наблюдения P от двух отверстий. Она отличается от этой суммы членом $2\mathrm{Re}\{K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1 - t_2)\}$. Следовательно, если $\Gamma \neq 0$, суперпозиция двух пучков может привести к *интерференционному эффекту*.

Корреляционная функция $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ известна под названием *взаимной функции когерентности* ***); она является основной величиной в элементарной теории оптической когерентности. Удобно нормировать Γ, положив

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{[\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)]^{1/2} \cdot [\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)]^{1/2}} = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{[\langle I(\mathbf{r}_1)\rangle]^{1/2} [\langle I(\mathbf{r}_2)\rangle]^{1/2}}. \tag{3,14}$$

Из неравенства Шварца непосредственно вытекает, что в силу этой нормировки

$$0 \leqslant |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \leqslant 1. \tag{3,15}$$

---

*) При рассмотрении реальных интерференционных экспериментов, в которых приемник фактически интегрирует за промежуток времени, большой по сравнению со временем когерентности, может показаться, что среднее по времени описывает экспериментальную ситуацию куда более правильно, чем среднее по ансамблю. Однако не следует забывать, что для стационарного эргодического светового пучка достаточно длительная запись временны́х изменений поля содержит в себе также и большое число типичных членов статистического ансамбля. В любом случае среднее по ансамблю представляет собой среднее по очень большому числу отдельных измерений.

Подробности об условиях стационарности и эргодичности можно найти у Давенпорта и Рута (1958), Голдмана (1953) или Яглома (1962).

**) Т. е. функцию, полученную усреднением по различным выборкам (реализациям) процесса. (*Прим. ред.*)

***) Взаимная функция когерентности, обычно используемая в литературе, определяется согласно Вольфу (1955) [см. также Вольф (1954b) и Блан-Лапьер и Дюмонте (1955)]. Она соответствует величине, которая в обозначениях, принятых в этой статье, была бы равна $1/4\ \Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \tau)$. Множитель 1/4 появляется потому, что в этой статье опущен множитель 2 в определении аналитического сигнала. Изменение порядка радиусов-векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ сделано по аналогичным причинам.

Положим также

$$\langle I^{(j)}(\mathbf{r}, t)\rangle = |K_j|^2 \langle I(\mathbf{r}_j, t)\rangle =$$
$$= |K_j|^2 \langle V^*(\mathbf{r}_j, t) V(\mathbf{r}_j, t)\rangle = |K_j|^2 \Gamma(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j, 0) \qquad (j=1, 2). \tag{3,16}$$

$\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t)\rangle$, очевидно, представляет собой среднюю интенсивность света, достигающего точки $P(\mathbf{r})$ и идущего только через отверстие в P_1; член $\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t)\rangle$ имеет совершенно аналогичную интерпретацию.

Из (3,13), (3,14) и (3,16) вытекает, что средняя интенсивность света в точке P может быть представлена в виде

$$\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle = \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t)\rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t)\rangle +$$
$$+ 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t)\rangle]^{1/2} [\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t)\rangle]^{1/2} \operatorname{Re}[\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (s_1 - s_2)/c)]. \tag{3,17}$$

Из (3,17) и (3,14) очевидно, что экспериментальное определение средних интенсивностей $\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle$, $\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t)\rangle$, $\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t)\rangle$, $\langle I(\mathbf{r}_1, t)\rangle$ и $\langle I(\mathbf{r}_2, t)\rangle$ непосредственно предоставляет информацию о действительной части корреляционных функций *) $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ и $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$. Вместе с тем скорее абсолютное значение нормированной *комплексной* корреляционной функции γ, чем ее действительная часть, является истинной мерой «резкости» интерференционных эффектов, возникающих в результате суперпозиции двух пучков. Чтобы доказать это утверждение, приглядимся внимательнее к (3,17). Положим

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \exp\{i[\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) - 2\pi\nu_0\tau]\}, \tag{3,18}$$

где

$$\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \arg\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) + 2\pi\nu_0\tau. \tag{3,19}$$

Подставляя (3,18) в (3,17), мы получаем следующее выражение для средней интенсивности в плоскости наблюдения $\mathfrak{B}$:

$$\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle = \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t)\rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t)\rangle +$$
$$+ 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t)\rangle]^{1/2} [\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t)\rangle]^{1/2} |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (s_1 - s_2/c)| \times$$
$$\times \cos[\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (s_1 - s_2)/c) - \delta)], \tag{3,20}$$

где

$$\delta = 2\pi\nu_0 (s_1 - s_2)/c = k_0 (s_1 - s_2), \tag{3,21}$$

причем $k_0 = 2\pi\nu_0/c = 2\pi/\lambda_0$; в этих формулах λ_0 представляет собой эффективную длину волны света. Вообще говоря, интенсивности $\langle I^{(1)}\rangle$

*) Мнимая часть этих функций в принципе может быть определена по известной действительной части при всех значениях τ. Поскольку, как это легко можно показать из (3,2) и (3,12), Γ и, следовательно, также γ представляют собой аналитические сигналы, их действительные и мнимые части связаны между собой преобразованиями Гильберта.

Мнимая и действительная части $\Gamma^{(r)}$ и $\Gamma^{(i)}$ могут быть выражены через действительное поле $V^{(r)}$ и сопряженную с ней по Гильберту часть $V^{(i)}$. Действительно [ср. Роман и Вольф (1960a), стр. 474—476; Мандель (1963d), стр. 241—242],

$$\Gamma^{(r)} = \frac{1}{2} \langle V^{(r)}(\mathbf{r}_1, t) V^{(r)}(\mathbf{r}_2, t+\tau)\rangle = \frac{1}{2} \langle V^{(i)}(\mathbf{r}_1, t) V^{(i)}(\mathbf{r}_2, t+\tau)\rangle,$$

$$\Gamma^{(i)} = \frac{1}{2} \langle V^{(r)}(\mathbf{r}_1, t) V^{(i)}(\mathbf{r}_2, t+\tau)\rangle = -\frac{1}{2} \langle V^{(i)}(\mathbf{r}_1, t) V^{(r)}(\mathbf{r}_2, t+\tau)\rangle.$$

В частности из этих соотношений вытекает, что

$$\langle (V^{(r)}(\mathbf{r}, t))^2\rangle = \langle (V^{(i)}(\mathbf{r}, t))^2\rangle = \frac{1}{2} \langle V^*(\mathbf{r}, t) V(\mathbf{r}, t)\rangle, \quad \langle V^{(r)}(\mathbf{r}, t) V^{(i)}(\mathbf{r}, t)\rangle = 0.$$

и $\langle I^{(2)}\rangle$ двух пучков слабо изменяются в зависимости от положения P (**r**) на экране $\mathfrak{B}$. И, кроме того, как мы увидим позже (ср. (3,26) и (3,27)), величины $|\gamma|$ и α будут меняться также весьма медленно в любой области экрана $\mathfrak{B}$, для которой изменение разности хода $(s_1 - s_2)$ мало по сравнению с длиной когерентности света. Однако множитель с косинусом в (3,20) будет меняться очень быстро из-за наличия величины δ, которая обратно пропорциональна эффективной длине света λ_0, которая очень мала. Следовательно, в достаточно малой области экрана $\mathfrak{B}$ средняя интенсивность $\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle$ будет меняться почти гармонически и периодически, в зависимости от положения.

Обычной мерой резкости интерференционных полос является так называемая *видимость*, введенная Майкельсоном. Видимость $\mathfrak{V}$ (**r**) в точке P (**r**) в интерференционной картине определяется формулой

$$\mathfrak{V}(r) \equiv \frac{\langle I\rangle_{\max} - \langle I\rangle_{\min}}{\langle I\rangle_{\max} + \langle I\rangle_{\min}}, \tag{3,22}$$

где $\langle I\rangle_{\max}$ и $\langle I\rangle_{\min}$ представляют собой максимальную и минимальную интенсивности в непосредственной окрестности P. Далее, из (3,20) мы получаем хорошую аппроксимацию:

$$\begin{aligned}\langle I\rangle_{\max} &= \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t)\rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t)\rangle + \\ &+ 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t)\rangle]^{1/2}[\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t)\rangle]^{1/2}\,|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (s_1 - s_2)/c)|, \\ \langle I\rangle_{\min} &= \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t)\rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t)\rangle - \\ &- 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t)\rangle]^{1/2}[\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t)\rangle]^{1/2}\,|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ((s_1 - s_2)/c)|;\end{aligned} \tag{3,23}$$

следовательно, (3,22) принимает вид

$$\mathfrak{V}(\mathbf{r}) = 2(\mu + \mu^{-1})^{-1}\,|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (s_1 - s_2)/c)|, \tag{3,24}$$

причем в этой формуле $\mu = [\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t)\rangle / \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t)\rangle]^{1/2}$. В частности, когда средние интенсивности двух пучков равны, как это часто бывает, $\mu = 1$ и (3,24) превращается в $\mathfrak{V}(\mathbf{r}) = |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (s_1 - s_2)/c)|$, т. е. $|\gamma|$ попросту равно видимости всех полос и таким образом может быть определено непосредственно из несложных измерений.

Аргумент (фаза) γ также имеет простой операционный смысл. Из (3,19)—(3,21) вытекает, что положение максимумов средней интенсивности в интерференционной картине полос с высокой степенью точности определяется через

$$\begin{aligned}\arg\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (s_1 - s_2)/c) &\simeq \alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (s_1 - s_2)/c) - (2\pi/\lambda_0)(s_1 - s_2) = \\ &= 2m\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).\end{aligned} \tag{3,25}$$

Положения максимумов, определяемые формулой (3,25), совпадают с положениями, которые мы получили бы, если бы оба отверстия освещались строго монохроматическим светом с длиной волны λ_0, а фаза колебаний в P_1 запаздывала бы по отношению к фазе в точке P_2 на величину $\Delta = \alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (s_1 - s_2)/c)$. Следовательно, при описании интерференционных эффектов вблизи точки P величина $\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (s_1 - s_2)/c)$ может интерпретироваться как «эффективное запаздывание» света в точке P_1 относительно точки P_2. Соотношение (3,25) показывает, что аргумент γ может быть определен из измерений положения максимумов полос интерференционной картины.

Мы обнаружили, что, с одной стороны, γ представляет собой меру корреляции комплексного поля в двух точках P_1 и P_2, а с другой—является мерой резкости картины и вместе с тем определяет положение максимумов полос, возникающих при суперпозиции пучков, идущих от этих двух точек. В связи с этим γ обычно называют *комплексной степенью когерентности* поля в точках P_1 и P_2. Эта терминология не совсем точна, поскольку γ зависит не только от расположения точек P_1 и P_2, но также и от положения точки наблюдения (определяемой положениями P_1, P_2, *а также* величиной $\tau = (s_1 - s_2)/c$). Может быть, более разумным будет оставить термин «*комплексная степень когерентности*» за величиной $\max_\tau \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$. Однако следует подчеркнуть, что в случае монохроматического света при условии, что значение τ достаточно мало́, как это обычно имеет место, различие между предложенными определениями становится несущественным. Действительно, в этих условиях можно показать [ср. ниже (3,36) и (3,14)], что

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_1) \approx \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_2) \exp[-2\pi i \nu_0 (\tau_1 - \tau_2)] \tag{3,26}$$

(ν_0 — средняя частота света) для любой пары значений τ_1 и τ_2, такой, что

$$|\tau_1 - \tau_2| \ll \frac{1}{\Delta\nu}, \tag{3,27а}$$

другими словами, когда абсолютная величина разности $\tau_1 - \tau_2$ мала по сравнению со временем когерентности света *) [ср. соотношение (2,1)]. Таким образом, в интервале изменения τ, удовлетворяющем условию (3,27а), величина γ, а также Γ эффективно являются периодическими функциями τ, с периодом, равным среднему периоду $2\pi/\nu_0$ света.

Связывая корреляционные функции γ и Γ с результатами измерений, мы должны, разумеется, молчаливо предположить, что измерительная аппаратура определяет значения средней мгновенной интенсивности $I(\mathbf{r}, t) = V^*(\mathbf{r}, t) V(\mathbf{r}, t)$. Практически это будет почти что наверняка в том случае, когда V совпадает с удачно выбранной переменной поля, а приемник производит усреднение по времени за промежуток времени, достаточно большой по сравнению с характерными временами флуктуаций поля, или, иначе, по периоду, достаточно большому по сравнению со средним периодом и временем когерентности света. (Альтернативный случай — средняя интенсивность по ансамблю может быть найдена из последовательности измерений, независимо от того, большое или маленькое время измерения.) В этих условиях можно считать, что среднее за время измерения почти не отличается от среднего, взятого за бесконечное время, определяемое согласно (3,11). Если эти условия не выполнены, могут иметь место другие интерференционные эффекты (переходные или неустановившиеся эффекты); эти эффекты будут обсуждаться в разделе 7.

Вернемся теперь к соотношению (3,20) и ограничимся рассмотрением такой области интерференционной картины, для которой справедливо (3,27), другими словами, где (см. рис. 3)

$$|s_1 - s_2| \ll \Delta s, \tag{3,27}$$

а $\Delta s = c/\Delta\nu$ — когерентная длина света (ср. § 2.1). Тогда из (3,24), принимая во внимание (3,26), следует, что при $\gamma = 0$ не возникает никаких интерференционных полос в той области интерференционной картины, которую мы рассматриваем ($\mathfrak{V} = 0$). Это и есть именно то, что при традиционном подходе формулируется как утверждение, что два световых пучка, достигающих точки P и ее окрестности, являются взаимно *некогерентными*. С другой стороны, когда $|\gamma| = 1$, согласно (3,24) и (3,26) мы получаем интерференционные полосы с максимально возможной види-

*) Если свет не удовлетворяет условию взаимной спектральной чистоты (ср. § 5.5), эффективная спектральная ширина $\Delta\nu$ должна вводиться с известной осторожностью.

мостью; более того, если средняя интенсивность обоих пучков одинакова ($\mu = 1$), как это часто имеет место, видимость $\mathfrak{V}$ равна единице (нулевой минимум полной средней интенсивности). Это и есть именно то, что при традиционном подходе формулируется как утверждение о том, что два пучка взаимно *полностью когерентны*. Промежуточные случаи, соответствующие $0 < \gamma < 1$, отвечают *частичной когерентности*.

Мы будем называть эффекты когерентности, о которых только что шла речь, *эффектами когерентности второго порядка*, поскольку они характеризуются корреляционной функцией, которая зависит от *двух* точек пространства-времени. Общая классификация эффектов когерентности и количественное определение когерентности любого порядка будет дано в § 4.4.

Основное свойство взаимной функции когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$, через которую определяется степень когерентности, состоит в том, что в вакууме она удовлетворяет двум волновым уравнениям:

$$\nabla_j^2\Gamma = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\tau^2}\right) \qquad (j = 1, 2), \tag{3,28}$$

где ∇_j^2 представляет собой оператор Лапласа относительно координат точки P_j $(\mathbf{r}_j)$. Эти два волновых уравнения для взаимной функции когерентности *) были впервые получены Вольфом (1955) [см. также Борн и Вольф (1964), раздел X, 7.1]. С помощью уравнения (3,28) можно находить распределение когерентности второго порядка в оптическом поле. Соответствующие примеры будут приведены в § 5.1.

Очевидно, что явления временнóй и пространственной когерентности, о которых шла речь в § 2.1 и 2.2, характеризуются соответственно величинами $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ и $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$. В первом случае существенна зависимость корреляции от параметра τ, причем точки P_1 и P_2 совпадают и заданы; во втором случае подчеркивается зависимость корреляции от двух точек, тогда как время запаздывания τ $(\tau \ll 1/\Delta\nu)$ считается заданным. Вместе с тем совершенно ясно, что различие между временнóй и пространственной когерентностью может быть четко проведено только в самых простейших случаях. В общем случае эти два типа когерентности не являются независимыми. Это ясно из того, что Γ подчиняется двум волновым уравнениям (3,28).

Интересным следствием этих двух волновых уравнений является то, что пространственно-некогерентный свет становится частично когерентным или даже почти полностью пространственно-когерентным в результате самого процесса распространения. Хорошо известным примером такой ситуации является когерентность света, попадающего в телескоп от удаленной звезды. Свет звезды создается многими почти совершенно независимыми излучающими атомами и, таким образом, вначале в самом источнике (звезде) является полностью пространственно-некогерентным. Но в удобные для наблюдения ночи в фокальной плоскости телескопа наблюдаются относительно резкие дифракционные кольца (с очень глубокими минимумами) в изображении звезды: это и означает, что

---

*) Соответствующие уравнения для «выборочной корреляционной функции» $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$, определяемой соотношением (3,9), имеют вид

$$\nabla_j^2\Gamma = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t_j^2} \qquad (j = 1, 2). \tag{3,28a}$$

Это вытекает непосредственно из того факта, что $V(\mathbf{r}, t)$ подчиняется волновому уравнению Уравнения (3,28a) сводятся к уравнениям (3,28), если соблюдаются условия стационарности и эргодичности.

звездный свет в процессе распространения приобрел пространственную когерентность. Это и некоторые другие следствия элементарной теории когерентности будут рассмотрены в § 5.1 и 5.2.

По терминологии теории стохастических процессов взаимная функция когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ называется комплексной *взаимной корреляционной функцией* двух случайных процессов, характеризуемых функциями $V(\mathbf{r}_1, t)$ и $V(\mathbf{r}_2, t)$, а «одноточечная функция когерентности» $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t)$ известна под названием *автокорреляционной функции случайного процесса* $V(\mathbf{r}, t)$. Основная теорема стохастической теории, называемая *теоремой Винера — Хинчина* [см. Райс (1944), разделы 2.1 и 2.2; Ванг и Уленбек (1945)] утверждает, что *спектр мощности* (*спектральная плотность*) $W(\mathbf{r}, \nu)$ случайного процесса и автокорреляционная функция $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)$ образуют пару относительно преобразований Фурье. В рассматриваемом нами случае, где V представляет собой аналитический сигнал, можно сказать даже больше. Можно показать, что и Γ также представляет собой аналитический сигнал [см. примечание к формуле (3,17)] и поэтому Фурье-преобразование Γ не содержит компонент с отрицательными частотами:

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) = \int_0^\infty W(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu) \exp(-2\pi i \nu\tau)\, d\nu, \tag{3,29}$$

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) \exp(2\pi i \nu\tau)\, d\tau. \tag{3,30}$$

Если переменная поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ совпадает с аналитическим сигналом, ассоциированным с электрическим полем (мы все еще предполагаем, что оно линейно поляризовано), то $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu)$ представляет спектр света в точке $P(\mathbf{r})$ или, точнее, *спектр электрической энергии* света. Может быть, здесь следует подчеркнуть, что этот спектр *вовсе не* является преобразованием Фурье от переменной поля V, как это часто и совсем неправильно предполагают. Действительно, в случае стационарного случайного поля, которое мы сейчас и имеем в виду, переменная случайного поля V, вообще говоря, не является квадратично интегрируемой (это сразу же вытекает из (3,12), если предположить, что средняя интенсивность $\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle = \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0)$ отлична от нуля), так что преобразование Фурье может даже и не существовать.

В общем случае взаимный спектр мощности $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ и взаимная корреляционная функция (взаимно когерентная функция) $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ образуют пару преобразований Фурье, и снова интеграл по частотам распространяется только по области положительных частот:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int_0^\infty W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) \exp(-2\pi i \nu\tau)\, d\nu, \tag{3,31}$$

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \exp(2\pi i \nu\tau)\, d\tau. \tag{3,32}$$

Иногда величину $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ называют *взаимной спектральной плотностью* световых колебаний в точках $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$.

Если свет квазимонохроматический, $|W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)|$ будет иметь заметную величину только для тех значений ν, которые приходятся на интервал $\nu_0 - \frac{1}{2}\Delta\nu$, $\nu_0 + \frac{1}{2}\Delta\nu$, при условии $\Delta\nu/\nu_0 \ll 1$. Перепишем (3,31) несколько иначе:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}_1\ \mathbf{r}_2, \tau)\exp(-2\pi i\nu_0\tau), \tag{3,33}$$

где введены обозначения

$$\widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int\limits_{-\nu_0}^{\infty} \widetilde{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mu)\exp(-2\pi i\mu\tau)\,d\mu \tag{3,34}$$

и

$$\widetilde{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0 + \nu). \tag{3,35}$$

Учитывая поведение $|W|$, «сдвинутая» взаимная спектральная плотность $|\widetilde{W}|$, рассматриваемая как функция μ, будет принимать заметные значения только тогда, когда μ лежит в узком интервале эффективной ширины $\Delta\nu$ около значения $\mu = 0$. Таким образом, функция $\widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ включает в себя только низкочастотные компоненты и, следовательно, рассматриваемая как функция τ, она будет меняться очень медленно по сравнению с изменениями, обусловленными периодическим множителем $\exp(-2\pi i\nu_0\tau)$. Фактически $\widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$, рассматриваемая как функция τ, эффективно будет оставаться постоянной величиной в любом интервале изменения τ (τ_1, τ_2), для которого соблюдено условие $|\tau_1 - \tau_2| \ll 1/\Delta\nu$, т. е. для всех интервалов, длительность которых мала по сравнению со временем когерентности света. Из этого результата, а также из (3.33) вытекает следующая полезная формула:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_2) = \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_1)\exp[-2\pi i\nu_0(\tau_1 - \tau_2)], \qquad |\tau_1 - \tau_2| \ll \frac{1}{\Delta\nu}. \tag{3,36}$$

До сих пор мы рассматривали линейно поляризованный свет, однако наши результаты легко распространяются на свет с любым состоянием поляризации. Только вместо комплексной скалярной переменной поля $V(\mathbf{r}, t)$ следует ввести подходящие комплексные векторные переменные поля, например комплексные поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, которые представляют собой аналитические сигналы, ассоциированные с действительными векторами электрического и магнитного полей $\mathbf{E}^{(r)}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}^{(r)}(\mathbf{r}, t)$ соответственно. Вместо взаимной функции когерентности Γ приходится вводить тензоры когерентности второго порядка:

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{E}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= \langle E_j^*(\mathbf{r}_1, t_1)E_k(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle,\\
\mathscr{H}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= \langle H_j^*(\mathbf{r}_1, t_1)H_k(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle,\\
\mathscr{G}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= \langle E_j^*(\mathbf{r}_1, t_1)H_k(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle,\\
\widetilde{\mathscr{G}}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= \langle H_j^*(\mathbf{r}_1, t_1)E_k(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle,
\end{aligned}\right\} \tag{3,37}$$

где индексы i и j относятся к декартовым компонентам, а средние величины рассматриваются как среднее по ансамблю.

Если поле стационарное и эргодическое, любой из тензоров когерентности (3,37) опять-таки зависит от времен t_1 и t_2 только через их разность $t = t_1 - t_2$ и переходит в соответствующий тензор, определяемый с помощью средних по времени [ср. Вольф (1954b, 1956)]:

$$\mathscr{E}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle E_j^*(\mathbf{r}_1, t)E_k(\mathbf{r}_2, t+\tau)\rangle, \tag{3,38}$$

и т. д.

Введенные тензоры когерентности составляют ту математическую схему, с помощью которой можно описывать все явления когерентности второго порядка и которая дает возможность единым образом рассматривать когерентные явления и явления поляризации. Примеры, относящиеся к поляризационным явлениям, будут приведены в § 5.6. Другие применения этих тензоров к задачам интерференции и дифракции описаны Джерми (1963) и Карчевским (1963a, b).

Так как электрическое и магнитное поля связаны между собой уравнениями Максвелла, можно показать, что введенные тензоры когерентности связаны между собой двумя группами тензорных дифференциальных уравнений. Если поля стационарны и эргодичны, одна группа этих уравнений, относящаяся к полям *в вакууме*, принимает вид *) [Вольф (1956); Роман и Вольф (1960a)]

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{jkl}\partial_k^1\mathscr{E}_{lm}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\widetilde{\mathscr{G}}_{jm}&=0,\\
\varepsilon_{jkl}\partial_k^1\mathscr{G}_{lm}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\mathscr{H}_{jm}&=0,\\
\varepsilon_{jkl}\partial_k^1\widetilde{\mathscr{G}}_{lm}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\mathscr{E}_{jm}&=0,\\
\varepsilon_{jkl}\partial_k^1\mathscr{H}_{lm}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\mathscr{G}_{jm}&=0,\\
\partial_j^1\mathscr{E}_{jk}=0,\qquad \partial_j^1\mathscr{G}_{jk}&=0,\\
\partial_j^1\widetilde{\mathscr{G}}_{jk}=0,\qquad \partial_j^1\mathscr{H}_{jk}&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(3,39)$$

В этих формулах ε_{jkl} представляет собой совершенно антисимметричный единичный тензор Леви-Чивита, $\partial_k^1=\partial/\partial x_1^k$ — декартовы компоненты оператора ∇, которые берутся относительно координат точки $P_1(\mathbf{r}_1)$. Другая группа уравнений аналогичным образом относится к точке $P_2(\mathbf{r}_2)$.

Некоторые законы сохранения были получены из этих уравнений Романом и Вольфом (1960b) и Романом (1961b).

§ 3.2. Квантовомеханическое описание

Теперь мы дадим квантовомеханическое описание простого интерференционного эксперимента, представленного на рис. 3. Поскольку практически все приемники света, дающие изображение, используют фотоэлектрический эффект (сюда относятся как сами фотоэлектрические приемники, так и фотоэмульсии, глаз и т. д.), оператором, наиболее тесно связанным с «наблюдаемыми» в эксперименте, будет та часть оператора поля, которая содержит положительные частоты, или $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$. Этот же оператор $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ одновременно является и оператором аннигиляции, ассоциированным с вектором-потенциалом поля в точке $\mathbf{r}$, t в гейзенберговском представлении [ср. Швебер (1961), стр. 170]. Оператор, соответствующий измерению полной интенсивности света по всем направлениям

*) Тензоры когерентности, определенные в виде (3,38), тривиальным образом отличаются от оригинально введенных тензоров. В связи с этими незначительными изменениями во всех членах, куда входит производная $\partial/\partial\tau$, в (3,39) знак меняется на обратный по сравнению с соответствующими уравнениями в других статьях.

Обобщение уравнений (3,39) на области пространства, содержащие заряды и токи, было сделано Романом (1961a) и Бераном и Паррентом (1962, 1964).

поляризации в точке пространства-времени $\mathbf{r}$, t, имеет *) вид $\hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \times \hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ (ср. § 6.1, ниже). Это становится очевидным из рассуждений, принадлежащих Глауберу (1963b). Скорость поглощения фотонов идеальным детектором пропорциональна

$$\sum_j |\langle s_j | \hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | s_i \rangle|^2 = \langle s_i | \hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | s_i \rangle,$$

где $|s_i\rangle$ и $|s_j|$ — начальное и конечное состояния поля излучения, а сумма берется по всем конечным состояниям [см. также (4,5)]. Оператор $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ можно выразить через аннигиляционные операторы $\hat{a}_{k,s}$ для фотонов с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и поляризацией s ($s = 1, 2$) в виде [см. Мессиа (1962), стр. 1031)]

$$\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{hc}{L^3}\right)^{1/2} \sum \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \hat{a}_{k,s} \boldsymbol{\varepsilon}_{k,s} \exp[i(\mathbf{kr} - ckt)], \qquad (3,40)$$

причем $\hat{a}_{k,s}$ и $\hat{a}^{+}_{k,s}$ подчиняются перестановочным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} [\hat{a}_{k,s}, \hat{a}_{k',s'}] &= 0, \\ [\hat{a}^{+}_{k,s}, \hat{a}^{+}_{k',s'}] &= 0, \\ [\hat{a}_{k,s}, \hat{a}^{+}_{k',s'}] &= \delta_{k,k'}\delta_{s,s'}, \end{aligned}\right\} \qquad (3,41)$$

а $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,s}$ образуют последовательность комплексных ортогональных единичных векторов, определенных с точностью до унитарного преобразования [Мессиа (1962), стр. 1032)] и удовлетворяющих условиям

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{k,s}\boldsymbol{\varepsilon}_{k,s'} = \delta_{s,s'}, \qquad \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}_{k,s} = 0. \qquad (3,42)$$

Если $\hat{\varrho}$ *является оператором плотности* [Тер-Хаар (1961)] *комбинированного поля, обязанного обоим световым пучкам, то согласно обычным правилам квантовой механики ожидание* $\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle$ интенсивности в точке $\mathbf{r}$, t, просуммированное по всем возможным значениям поляризации, будет определяться выражением

$$\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle = \mathrm{Tr}[\hat{\varrho}\hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)]. \qquad (3,43)$$

Стоит отметить, что операторы $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ и $\hat{a}_{k,s}$ тесно связаны с комплексными полями $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ и их комплексными амплитудами разложения в ряд Фурье классического описания $v_{k,s}$, потому что все собственные значения $\hat{a}_{k,s}$ являются комплексными числами $v_{k,s}$. Пусть $|v_{k,s}\rangle$ — собственное состояние, соответствующее собственному значению $v_{k,s}$; тогда **)

$$\hat{a}_{k,s}|v_{k,s}\rangle = v_{k,s}|v_{k,s}\rangle. \qquad (3,44)$$

*) В этой статье над операторами всюду ставится шляпка. Отсюда и далее угловые скобки $\langle\ldots\rangle$ следует понимать как квантовомеханическое ожидание оператора, стоящего внутри скобок, или среднее по ансамблю от статистической переменной.

**) Это можно видеть сразу из определения $\hat{a}_{k,s}$, считая, что $\hat{a}_{k,s}$ действуют на состояние, определенное следующим образом:

$$|v_{k,s}\rangle = \exp(-|v_{k,s}|^2/2) \sum_{n_{k,s}=0}^{\infty} [v_{k,s}^{n_{k,s}}/(n_{k,s}!)^{1/2}]|n_{k,s}\rangle,$$

где $|n_{k,s}\rangle$ — состояния Фока, а $v_{k,s}$ — любые комплексные числа. Тогда мы придем к выражению (3,44). По поводу введения состояний $|v_{k,s}\rangle$ см. Луселл (1946), стр. 126, а также Шифф (1955), стр. 67. Эти состояния были подробно рассмотрены Глаубером (1963b, c), который называет их когерентными состояниями по причинам, которые станут ясными в § 4.4. Эти состояния использовались также Швингером (1953) в его формулировке квантовой электродинамики. [По этому поводу см. также K. E. Cahill, Phys. Rev. 138, 1566 (1965).—*Прим. ред.*]

Далее рассмотрим состояние

$$|\{v_{k,s}\}\rangle \equiv \prod_{k,s} |v_{k,s}\rangle, \tag{3,45}$$

где под символом $\{v_{k,s}\}$ понимается вся совокупность значений $v_{k,s}$. Из (3,40), (3,44) и (3,45) мы найдем, что

$$\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)|\{v_{k,s}\}\rangle = (hc/L^3)^{1/2} \sum_{k,s} \frac{1}{\sqrt{k}} v_{k,s}\boldsymbol{\varepsilon}_{k,s} \exp[i(\mathbf{kr}-ckt)]|\{v_{k,s}\}\rangle =$$

$$= \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)|\{v_{k,s}\}\rangle, \tag{3,46}$$

так что комплексная аналитическая волновая амплитуда $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, определяемая соотношением

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = (hc/L^3)^{1/2} \sum_{k,s} k^{-1/2} v_{k,s}\boldsymbol{\varepsilon}_{k,s} \exp[i(\mathbf{kr}-ckt)], \tag{3,47}$$

также будет собственным значением оператора $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$. Одно это уже указывает на тесную связь между квантовомеханическим описанием и классическим описанием поля с помощью комплексных аналитических сигналов, которые будут дальше рассматриваться в § 4.3.

Естественно выбрать последовательность состояний $|\{v_{k,s}\}\rangle$ в качестве базиса представления оператора плотности $\hat{\varrho}$ [см. Глаубер (1963a, b, c)]. Хотя они не ортогональны и образуют избыточную систему, они удовлетворяют соотношению замкнутости вида [Клаудер (1960), стр. 125—126]

$$\hat{1} = \prod_{k,s} \frac{1}{\pi} \int |v_{k,s}\rangle\langle v_{k,s}|\, d^2v_{k,s}, \tag{3,48}$$

где $d^2v_{k,s}$ указывает на интегрирование по комплексной $v_{k,s}$-плоскости. Ценные свойства-представления в базисе $|\{v_{k,s}\}\rangle$ были обнаружены Сударшаном (1963a, b) и строго сформулированы Клаудером, Мак-Кенной и Кюри (1965) и Метой и Сударшаном (1965) [см. § 4.3 и Дополнение].

Таким образом, если мы описываем состояние одного пучка в базисе $|\{v'_{k,s}\}\rangle$, а другого пучка—в базисе $|\{v''_{k,s}\}\rangle$, оператор плотности комбинированного поля может быть представлен в форме

$$\hat{\varrho} = \int\int \Phi(\{v'_{k,s}\}, \{v''_{k,s}\})|\{v'_{k,s}\}, \{v''_{k,s}\}\rangle\langle\{v''_{k,s}\}, \{v'_{k,s}\}|\, d^2\{v'_{k,s}\}\, d^2\{v''_{k,s}\}. \tag{3,49}$$

Чтобы не заниматься вопросом симметризации состояний комбинированного поля, мы будем считать, что у обоих пучков нет общих $(\mathbf{k}, s)$-мод. Это будет иметь место, если рассматривается суперпозиция двух плоских волн, направленных под достаточно малым углом друг к другу. Функционал $\Phi(\{v'_{k,s}\}, \{v''_{k,s}\})$ играет в этом случае роль обобщенного веса или «вероятностного» функционала.

Подставляя (3,49) в (3,43), получим

$$\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle = \mathrm{Tr} \int\int \Phi(\{v'_{k,s}\}, \{v''_{k,s}\})\,|\{v'_{k,s}\}, \{v''_{k,s}\}\rangle\langle\{v''_{k,s}\}, \{v'_{k,s}\}| \times$$

$$\times \hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)\,\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)\, d^2\{v'_{k,s}\}\, d^2\{v''_{k,s}\}. \tag{3,50}$$

Далее, $\hat{\mathbf{A}}^{(-)}(r, t)$ является полным оператором комбинированного поля, так что, имея в виду (3,46),

$$\langle\{v''_{k,s}\}, \{v'_{k,s}\}|\,\hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \{\mathbf{V}'^*(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}''^*(\mathbf{r}, t)\}\langle\{v''_{k,s}\}, \{v'_{k,s}\}|. \tag{3,51}$$

Используя (3,51) и комплексно сопряженное ему выражение в формуле (3,50) и вспоминая, что след является инвариантом циклической перестановки операторов, мы получим

$$\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle = \mathrm{Tr}\int\int \Phi(\{v'_{k,s}\}, \{v''_{k,s}\})\,[\mathbf{V}'^*(\mathbf{r}, t)+\mathbf{V}''^*(\mathbf{r}, t)]\,[\mathbf{V}'(\mathbf{r}, t)+\mathbf{V}''(\mathbf{r}, t)]\times$$
$$\times\,|\{v''_{k,s}\}, \{v'_{k,s}\}\rangle\langle\{v'_{k,s}\}, \{v''_{k,s}\}|\,d^2\{v'_{k,s}\}\,d^2\{v''_{k,s}\} =$$
$$=\int\int \Phi(\{v'_{k,s}\}, \{v''_{k,s}\})\,[\mathbf{V}'^*(\mathbf{r}, t)+\mathbf{V}''^*(\mathbf{r}, t)]\times$$
$$\times\,[\mathbf{V}'(\mathbf{r}, t)+\mathbf{V}''(\mathbf{r}, t)]\,d^2\{v'_{k,s}\}\,d^2\{v''_{k,s}\}. \qquad (3,52)$$

Поскольку $\Phi(\{v'_{k,s}\}, \{v''_{k,s}\})$ является весовой функцией распределения различных комплексных амплитуд $\mathbf{V}'(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{V}''(\mathbf{r}, t)$, представляется весьма естественным интерпретировать интеграл в (3,52) как величину, определяющую среднее по ансамблю. О том, что связано с такой интерпретацией, будет более подробно сказано ниже, в § 4.3. Принимая эту интерпретацию, мы можем написать

$$\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle = \langle[\mathbf{V}'^*(\mathbf{r}, t)+\mathbf{V}''^*(\mathbf{r}, t)]\,[\mathbf{V}'(\mathbf{r}, t)+\mathbf{V}''(\mathbf{r}, t)]\rangle. \qquad (3,53)$$

Правая часть (3,53) тождественна среднему по ансамблю от классического соотношения (3,6), если $\mathbf{V}'(\mathbf{r}, t)+\mathbf{V}''(\mathbf{r}, t)$ заменить на $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, как это можно сделать для частного случая линейно поляризованного света.

Если, подобно тому как это было сделано в (3,5) и (3,6), в целях простоты мы ограничимся линейно поляризованным светом и выразим $\mathbf{V}'(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{V}''(\mathbf{r}, t)$ через их значения в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ соответственно, т. е. положим

$$V'(\mathbf{r}, t) = K_1 V'(\mathbf{r}_1, t-t_1),$$
$$V''(\mathbf{r}, t) = K_2 V''(\mathbf{r}_2, t-t_2),$$

мы, конечно, раскрывая (3,53), сумеем воспроизвести все стадии перехода от (3,8) к (3,13).

Два вывода из предыдущих рассуждений заслуживают того, чтобы их отметить. Прежде всего, поскольку, раскрыв (3,53), мы получим

$$\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle = \langle|\mathbf{V}'(\mathbf{r}, t)|^2\rangle + \langle|\mathbf{V}''(\mathbf{r}, t)|^2\rangle + 2\mathrm{Re}\,\langle[\mathbf{V}'^*(\mathbf{r}, t)\,\mathbf{V}''(\mathbf{r}, t)]\rangle, \qquad (3,54)$$

ясно, что никаких перекрестных или интерференционных членов возникнуть не может, если $\mathbf{V}'(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{V}''(\mathbf{r}, t)$ ортогональны друг другу. Таким образом, два взаимно перпендикулярно поляризованных световых пучка не могут давать интерференционных эффектов, даже если корреляция между ними значительна. Во-вторых, хотя

$$\langle\mathbf{V}'(\mathbf{r}, t)\,\mathbf{V}''(\mathbf{r}, t)\rangle = \langle\mathbf{V}'(\mathbf{r}, t)\rangle\langle\mathbf{V}''(\mathbf{r}, t)\rangle = 0, \qquad (3,55)$$

если оба пучка статистически независимы, обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Отсутствие корреляции второго порядка вовсе не гарантирует статистическую независимость, за исключением случая «гауссовского света» (создаваемого тепловыми источниками, § 4.5). В принципе возможно наблюдение корреляционных эффектов высших порядков со световыми пучками, которые не вызывают появления интерференционных полос.

Но даже когда два световых пучка совершенно независимы, что находит свое отражение в факторизации диагональной матрицы плотности $\Phi(\{v'_{k,s}\}, \{v''_{k,s}\})$, когда она распадается на произведение отдельных матриц плотности

$$\Phi(\{v'_{k,s}\}, \{v''_{k,s}\}) = \Phi_1(\{v'_{k,s}\})\,\Phi_2(\{v''_{k,s}\}), \tag{3,56}$$

мы обнаружим, что могут наблюдаться некоторые неустановившиеся, не вполне предсказуемые интерференционные эффекты. Но об этом речь пойдет в разделе 7.

(Продолжение см. в следующих выпусках журнала.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА *)

Acharya R. and Sudarshan E. C. G., 1960, J. Math. Phys. **1**, 532.
Adam A., Janossy L. and Varga P., 1955a, Acta Phys. Acad. Sci. Hung. **4**, 301—315 (на русском языке); стр. 315 (English abstract).
—, Janossy L. and Varga P., 1955b, Ann. Phys. **16**, 408.
⁎ Akhiezer A. I. and Berestetsky V. B., 1953, *Quantum Electrodynamics*, Office of Technical Services, Dept. of Commerce, Washington, D. C.; translation of original Russian edition published in Moscow, 1953, vol. 1.
Alford W. P. and Gold A., 1958, Amer. J. Phys. **26**, 481.
Alkemade C. T. J., 1959, Physica **25**, 1145.
Armstrong J. A. and Smith A. W., 1964, Appl. Phys. Letts. **4**, 196.
—, 1965, Phys. Rev. Letts. **14**, 68.
Bailey R. L. and Sanders J. H., 1964, Phys. Letts. **10**, 295.

Baker G. A., 1958, Phys. Rev. **109**, 2198.
Barakat R., 1963, J. Opt. Soc. Amer. **53**, 317.
Barrat J. P., 1959a, J. phys. et radium **20**, 541.
—, 1959b, J. phys. et radium **20**, 633.
—, 1959c, J. phys. et radium **20**, 657.
—, 1961, Proc. Roy. Soc. (London) **A263**, 371.
— and C. Cohen-Tannoudji, 1961a, Compt. rend. (Paris) **252**, 93.
— and C. Cohen-Tannoudji, 1961b, Compt. rend. (Paris) **252**, 255.
Bartlett M. L., 1945, Proc. Cambridge Phil. Soc. **41**, 71.
Bay Z. and Farago P. S., 1963, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **A66**, 111.
Bell W. E. and Bloom A. L., 1961a, Phys. Rev. Letts. **6**, 280.
— and Bloom A. L., 1961b, Phys. Rev. Letts. **6**, 623.
Bellisio J. A., Freed C. and Haus H. A., 1964, Appl. Phys. Letts. **4**, 5.
Beran M. and Parrent G. B., 1962, J. Opt. Soc. Amer. **52**, 98.
— and Parrent G. B., 1963, Nuovo Cimento **27**, 1049.
— and Parrent G. B., 1964, *Theory of Partial Coherence*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
Berek M., 1926a, Zs. Phys. **36**, 675.
—, 1926b, Zs. Phys. **36**, 824.
—, 1926c, Zs. Phys. **37**, 387.
—, 1927, Zs. Phys. **40**, 420.
Blanc-Lapierre A., 1956, *Proceedings of the International Congress of Mathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, vol. 3, стр. 399.
— and P. Dumontet, 1955, Rev. Opt. **34**, 1.
Bloch F., 1932, Z. Phys. **74**, 295.
Bloembergen N., 1963, *Proceedings of the Symposium on Optical Masers*, John Wiley & Sons, New York, стр. 13.
—, 1964, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 1501.
Bolgiano L. P., Jr., 1964, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 187.
Bolwijn P. T., Alkemade C. T. J. and Boschloo G. A., 1963, Phys. Letts. **4**, 59.
Born M. and Wolf E. 1964, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford; The Macmillan Company, New York, 2nd ed.

*) В конце статьи этот же список будет приведен в русской транскрипции имен. Книги, имеющиеся на русском языке, отмечены звездочкой слева.

Bothe W., 1927, Zs. Phys. **41**, 345.
Bourret R. C., 1960, Nuovo Cimento 18, 347.
Bracewell R. N., 1958, Proc. IRE **46**, 97.
Brannen E. and Ferguson H. I. S., 1956, Nature **178**, 481.
—, Ferguson H. I. S. and W. Wehlau, 1958, Canad. J. Phys. **36**, 871.
Brossel J., 1961, *Advances in Quantum Electronics*, edited by J. R. Singer, Columbia University Press, New York, стр. 95.
— and Bitter F., 1952, Phys. Rev. **86**, 308.
— and Kastler A., 1949, Compt. rend. (Paris) **229**, 1213.
Brown, Hanbury R., 1960, National Physical Laboratory, *Symposium on Interferometry*, Her Majesty's Stationary Office, London, стр. 355.
—, 1964, Sky and Telescope **28**, 64.
—, Hazard C., Davis J. and Allen L. R., 1964, Nature **201**, 1111.
— and R. Q. Twiss, 1956a, Nature **177**, 27.
— and R. Q. Twiss, 1956b, Nature **178**, 1046.
— and R. Q. Twiss, 1956c, Nature, **178**, 1447.
— and R. Q. Twiss, 1957a, Proc. Roy. Soc. (London) **A242**, 300.
— and R. Q. Twiss, 1957b, Proc. Roy. Soc. (London) **A243**, 291.
— and R. Q. Twiss, 1958a, Proc. Roy. Soc. (London) **A248**, 199.
— and R. Q. Twiss, 1958b, Proc. Roy. Soc. (London) **A248**, 222.
Brunet H., 1964, Phys. Letts. **10**, 172.

Cohen—Tannoudji C., 1961a, Compt. rend. (Paris) **252**, 394.
—, 1961b, *Advances in Quantum Electronics*, edited by J. B. Singer, Columbia University Press, New York, стр. 114.
— and Kastler A., 1965, *Progress in Optics*, edited by E. Wolf, North-Holland Publishing Company, Amsterdam; John Wiley & Sons, New York (будет опубликовано), vol. 5, стр. 1.
Colegrove F. D., Franken P. A., Lewis R. R. and Sands R. H., 1959, Phys. Rev. Letts. **3**, 420.
Corcoran V. J. and Pao Y., 1962, J. Opt. Soc. Am. **52**, 1341.

* Davenport W. B. and Root W. L., 1958, *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.
Decomps B. and A. Kastler, 1963, Compt. rend. (Paris) **256**, 1087.
DeLang H. and G. Bouwhuis, 1963, Phys. Letts. **7**, 29.
Dicke R. H., 1954, Phys. Rev. **93**, 99.
—, 1964, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 35.
* Dirac P. A. M., 1947, *Quantum Mechanics*, Oxford University Press, London, 3rd ed.
Dodd J. N., Fox W. N., Series G. W. and Taylor M. J., 1959, Proc. Phys. Soc. (London) **74**, 789.
— and Series G. W., 1961, Proc. Roy. Soc. (London) **A263**, 353.
—, Series G. W. and Taylor M. J., 1963, Proc. Roy. Soc. (London) **A273**, 41.
Ducuing J. and Bloembergen N., 1964, Phys. Rev. **133**, A1493.
Dumontet P., 1955, Publ. Sci. Univ. Alger., Ser. B, **1**, 33.
—, 1956a, Publ. Sci. Univ. Alger., Ser. B, **2**, 151.
—, 1956b, Publ. Sci. Univ. Alger., Ser. B, **2**, 203.

Einstein A., 1905, Ann. Physik **17**, 132.
—, 1909a, Phys. Z. **10**, 185.
—, 1909b, Phys. Z. **10**, 817.
—, 1912, «*La Theorie du rayonnment et les quanta*», Instituts Solvay, Brussels, Conseil de Physique 1er 1911, edited by P. Langevin and L. de Broglie, Gauthier — Villars, Paris, стр. 407.
—, 1915, Ann. Phys. **47**, 879.
— and L. Hopf, 1910, Ann. Phys. **33**, 1096.

Falkoff D. L. and MacDonald J. E., 1951, J. Opt. Soc. Amer. **41**, 861.
Fano U., 1954, Phys. Rev. **93**, 121.
—, 1957, Rev. Mod. Phys. **29**, 74.
—, 1961, Amer. J. Phys. **29**, 539.
Fellgett P., 1958a, J. phys. et radium **19**, 187.
—, 1958b, J. phys. et radium **19**, 237.
Fellgett P. and Linfoot E. H., 1955, Phil. Trans. Roy. Soc (London) **A247**, 369.
Forrester A. T., 1956, Amer. J. Phys. **24**, 192.
—, 1961a, J. Opt. Soc. Amer. **51**, 253.

Forrester A. T., 1961b, *Advances in Quantum Electronics*, edited by J. R. Singer, Columbia University Press, New York, стр. 233.
—, Gudmundsen R. A. and Johnson P. O., 1955, Phys. Rev. **99**, 1691.
Franken P. A., 1961, Phys. Rev. **121**, 508.
— and Ward J. F., 1963, Rev. Mod. Phys. **35**, 23.
Freed C. and Haus H. A., 1965, Appl. Phys. Letts. **6**, 85.
Friedman B., 1956, *Principles and Techniques of Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, гл. 3.
Fürth R., 1928a, Zs. Phys. 48, 323.
—, 1928b, Zs. Phys. **50**, 310.

Gabor D., 1946, J. Inst. Elec. Engrs. **93**, 429.
—, 1950, Phil. Mag. **41**, 1161.
—, 1956a, *Proceedings of a Symposium on Astronomical Optics and Related Subjects*, edited by Z. Kopal, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, стр. 17.
—, 1956b, *Information Theory*, Third London Symposium, edited by C. Cherry, Butterworths Scientific Publications, London, стр. 26.
—, 1961, *Progress in Optics*, edited by E. Wolf, North-Holland Publishing Company, Amsterdam; John Wiley & Sons, New York, том 1, стр. 109.
Gamo H., 1956, J. Appl. Phys. Japan **25**, 431.
—, 1957a, J. Opt. Soc. Amer. **47**, 976.
—, 1957b, J. Appl. Phys. Japan **26**, 414.
—, 1958a, J. Opt. Soc. Amer. 48, 136.
—, 1958b. J. Appl. Phys. Japan **27**, 577.
—, 1960, IRE Intern. Conv. Rec. 4, 189.
—, 1961, *Advances in Quantum Electronics*, edited by J. R. Singer, Columbia University Press, New York, стр. 252.
—, 1963a, J. Appl. Phys. 34, 875.
—, 1963b, *Electromagnetic Theory and Antennas*, edited by E. C. Jordan, The Macmillan Company, New York, part 2, стр. 801.
—, 1964a, *Progress in Optics*, edited by E. Wolf, North-Holland Publishing Company, Amsterdam; John Wiley & Sons, New York, том 3, стр. 187.
—, 1964b, J. Phys. Soc. Japan **19**, 1955.
Germey K., 1963, Ann. Physik **10**, 141.
Ghielmetti F., 1964, Phys. Letts. **12**, 210.
Givens M. P., 1961a, J. Opt. Soc. Amer. **51**, 1030.
—, 1961b, J. Opt. Soc. Amer. **51**, 1032.
—, 1962, J. Opt. Soc. Amer. **52**, 225.
Glauber R. J., 1963a, Phys. Rev. Letts. **10**, 84.
—, 1963b, Phys. Rev. **130**, 2529.
—, 1963c, Phys. Rev. **131**, 2766.
—, 1964, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 111.
Golay M. J. E., 1961, Proc. IRE **49**, 958.
Goldberger M. L., Lewis H. W. and Watson K. M., 1963, Phys. Rev. **132**, 2764.
— and Watson K. M., 1964, Phys. Rev. **134**, B919.
— and Watson K. M., 1965, Phys. Rev. **137**, B1396.
*Goldman S., 1953, *Information Theory*, Prentice-Hall, New York.
Gordon J. P., 1962, Proc. IRE **50**, 1898.
—, Louisell W. H. and Walker L. R., 1963, Phys. Rev. **129**, 481.
—, Walker L. R. and Louisell W. H., 1963, Phys. Rev. **130**, 806.
Grobner W. and Hofreiter N., 1950, *Integraltafel*, Springer-Verlag, Vienna, 2 Teil.

Haken H., 1964, Phys. Rev. Letts. **13**, 329.
— and Sauermann H., 1963, Zs. Phys. **173**, 261.
Hamm R. N. and Harris E. G., 1963, Nuovo Cimento **29**, 568.
Harwit M., 1960, Phys. Rev. **120**, 1551.
Haus H. A. and Mullen J. A., 1962, Phys. Rev. **128**, 2407.
— and Mullen J. A., 1963, *Proceedings of the Symposium on Optical Masers*, John Wiley & Sons, New York, стр. 131.
Helstrom C., 1964, Proc. Phys. Soc. (London) **83**, 777.
Herriott D. R., 1962, J. Opt. Soc. Amer. **52**, 31.
Hodara H., 1964, WESCON/64, paper 17.4.
Holliday D., 1964, Phys. Letts. 8, 250.
— and Sage M. L., 1964, Ann. Phys. **29**, 125.

Hopkins H. H., 1951, Proc. Roy. Soc. (London) **A208**, 263.
—, 1953, Proc. Roy. Soc. (London) **A217**, 408.
—, 1957, J. Opt. Soc. Amer. **47**, 508.
Hsu, Hsien-Yu, Richartz M. and Yung-Kang Liang, 1947, J. Opt. Soc. Amer. **37**, 99.
Huang K., 1963, *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, New York.
Hurwitz H., 1945, J. Opt. Soc. Amer. **35**, 525.

Ishiguro K. and Tako T., 1961, Opt. Acta **8**, 25.

Jacobson A. D., 1964, Tech. Report No. 32, Antenna Laboratory, California Institute of Technology (не опубликовано).
Jacquinot P., 1958, J. phys. et rad. **19**, 223.
—, 1960, Rept. Progr. Phys. **23**, 267.
Janossy L., 1957, Nuovo Cimento **6**, 111.
—, 1959, Nuovo Cimento **12**, 370.
—, Z. Naray and Varga P., 1961, Közp. Fiz. Kut. Intez. Közl. (Budapest) **9**, 197.
Javan A., Ballik E. A. and Bond W. L., 1962, J. Opt. Soc. Amer. **52**, 96.
Jaynes E. T. and Cummings F. W., 1963, Proc. IEEE **51**, 89.
Jones R. C., 1941a, J. Opt. Soc. Amer. **31**, 488.
—, 1941b, J. Opt. Soc. Amer. **31**, 500.
—, 1942, J. Opt. Soc. Amer. **32**, 486.
—, 1948, J. Opt. Soc. Amer. **38**, 671.
—, 1953, J. Opt. Soc. Amer. **43**, 138.
Jordan T. F., 1964, Phys. Letts. **11**, 289.
— and Ghielmetti F., 1964, Phys. Rev. Letts. **12**, 607.

Kahan T., 1952, Nuovo Cimento Suppl. **9**, 304.
Kahn F. D., 1958, Opt. Acta **5**, 93.
Kano Y., 1964a, Ann. Phys. (N. Y.) **30**, 127.
—, 1964b, J. Phys. Soc. Japan **19**, 1555.
—, 1965, поступило в J. Math. Phys.
— and Wolf E., 1962, Proc. Phys. Soc. (London) **80**, 1273.
Karczewski B., 1963a, Phys. Letts. **5**, 191.
—, 1963b, Nuovo Cimento **30**, 906.
— and Wolf E., 1963, *Electromagnetic Theory and Antennas*, edited by E. C. Jordan, The Macmillan Company, New York, том II, стр. 797.
— and Wolf E., 1965a, J. Opt. Soc. Amer. (будет опубликовано).
— and Wolf E., 1965b, J. Opt. Soc. Amer. (будет опубликовано).
Kastler A., 1955, Nuovo Cimento Suppl. **2**, 761.
—, 1957, J. Opt. Soc. Amer. **47**, 460.
—, 1963, J. Opt. Soc. Amer. **53**, 902.
—, 1964, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 3.
Kay I. and R. Silverman, 1957, Information and Control **1**, 64.
— and R. Silverman, 1959, Information and Control **2**, 396.
Kelley P. L. and Kleiner W. H., 1964, Phys. Rev. **136**, A316.
Kendall M. G., 1952, *The Advanced Theory of Statistics*, C. Griffin, London, 5th ed., том 1.
Kenney J. F. and Keeping E. S., 1954, *Mathematics of Statistics*, D. Van Nostrand, New York, 3rd ed.
Khalfin L. A., 1957, ЖЭТФ **33**, 1371.
—, 1960, ДАН СССР **132**, 105.
—, 1961, ДАН СССР **141**, 599.
⁎ Kharkevich A. A., 1960, *Spectra and Analysis* (translated from Russian, Consultants Bureau, New York).
Klauder J. R., 1960, Ann. Phys. **11**, 123.
—, McKenna J. and Currie D. G., 1965, J. Math. Phys. **6**, 733.
Klein M. J., 1962, Arch. Hist. Exact Sci. **1**, 459.
Ko H. C., 1961, Proc. Natl. Electron. Conf. **17**, 500.
—, 1962, Proc. IRE **50**, 1950.
Kothari D. S. and Auluck F. C., 1957, Current Sci. **26**, 169.
Kuscer I. and Ribaric M., 1959, Opt. Acta **6**, 42.

Lakeman C. and Groosmuller J. T., 1928a, Physica (Gravenhage) 8, 193.
— and Groosmuller J. T., 1928b, Physica (Gravenhage) 8, 199.
— and Groosmuller J. T., 1928c, Physica (Gravenhage) 8, 305.

Lamb W. E., Jr., 1964, Phys. Rev. **134**, A1429.
*Landau L. D. and Lifshitz E. M., 1958, *Statistical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts).
Laue M., 1906, Ann. Phys. **20**, 365.
—, 1907, Ann. Phys. **23**, 1 and 795.
—, 1909, Ann. Phys. **30**, 225.
—, 1910, Ann. Phys. 31, 547.
—, 1915a, Ann. Phys. 48, 668.
—, 1915b, Ann. Phys. **47**, 853.
—, 1915c, Encykl. Math. Wiss. 5, Heft 3, 360 стр. 360—487.
Lee Y. W., 1932, J. Math. & Phys. (MIT) **11**, 83 (1931—1932).
Lighthill M. J., 1959, *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, Cambridge).
Linfoot E. H., 1955, J. Opt. Soc. Amer. 45, 808.
Lipsett M. S. and Mandel L., 1963, Nature **199**, 553.
— and Mandel L., 1964a, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 1271.
— and Mandel L., 1964b, Appl. Opt. 3, 643.
London F., 1938, Phys. Rev. 54, 947.
—, 1943, J. Chem. Phys. **11**, 203.
Louisell W. H., 1964, *Radiation and Noise in Quantum Electronics* (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York).
—, Yariv A. and Siegman A. E., 1961, Phys. Rev. **124**, 1646.

Magyar G. and Mandel L., 1963, Nature **198**, 255.
— and Mandel L., 1964, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 1247.
Mandel L., 1958, Proc. Phys. Soc. (London) **72**, 1037.
—, 1959, Proc. Phys. Soc. (London) **74**, 233.
—, 1960, J. Opt. Soc. Amer. **50**, 1131.
—, 1961a, J. Opt. Soc. Amer. **51**, 797.
—, 1961b, «*Coherence Properties of Electromagnetic Radiation*», Report on Conference, University of Rochester, Technical note No. 5 (не опубликовано), стр. 58 (Cont. AF 49 (638) —602; AFOSR-583).
—, 1961c, J. Opt. Soc. Amer. **51**, 1342.
—, 1962a, J. Opt. Soc. Amer. **52**, 1335.
—, 1962b, J. Opt. Soc. Amer. **52**, 1407.
—, 1963a, Phys. Letts. **7**, 117.
—, 1963b, *Electromagnetic Theory and Antennas*, edited by E. C. Jordan, The Macmillan Company, New York, part. 2, стр. 811.
—, 1963c, Proc. Phys. Soc. (London) 81, 1104.
—, 1963d, *Progress in Optics*, edited by E. Wolf, North-Holland Publishing Company, Amsterdam; John Wiley & Sons, New York, том. 2, стр. 181.
—, 1964a, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 101.
—, 1964b, Phys. Rev. **134**, A10.
—, 1964c, Phys. Letts. **10**, 166.
—, 1964d, Phys. Rev. **136**, B1221.
—, 1965, Phys. Rev. **138**, B753.
—, Sudarshan E. C. G. and Wolf E., 1964, Proc. Phys. Soc. (London) 84, 435.
— and Wolf E., 1961a, J. Opt. Soc. Amer. 51, 815.
— and Wolf E., 1961b, Phys. Rev. **124**, 1696.
— and Wolf E., 1962, Proc. Phys. Soc. (London) **80**, 894.
— and Wolf E., 1963a, Phys. Rev. Letts. **10**, 276.
— and Wolf E., 1963b, J. Opt. Soc. Amer. **53**, 1315.
Marathay A. S., On the theory of partial polarization and Phase Retrival, Dissertation, Boston University, 1963 (не опубликовано).
Martienssen W. and Spiller E., 1964, Amer. J. Phys. **32**, 919.
Mayer A. G. and Leontovich E. A., 1934, ДАН СССР 4, 353.
McMurtry B. J., 1963, Appl. Opt. **2**, 767.
— and Sigman A. E., 1962, Appl. Opt. **1**, 51.
McCumber D. E., 1963, Phys. Rev. **130**, 675.
McMaster W. H., 1954, Amer. J. Phys. **22**, 351.
Mehta C. L., 1963, Nuovo cimento **28**, 401.
—, 1964, J. Math. Phys. **5**, 677.

Mehta C. L. 1965a, Nuovo Cimento **36**, 202.
—, 1965b, *Lectures on Theoretical Physics*, edited by W. E. Brittin, University of Colorado Press, Boulder, Colorado, vol. 7 (в печати).
— and Wolf E., 1964a, Phys. Rev. **134**, A1143.
— and Wolf E., 1964b, Phys. Rev. **134**, A1149.
—, Wolf E. and Balchandran A. P., 1965, поступило в J. Math. Phys.
— and Sudarshan E. C. G., 1965, Phys. Rev. **138**, B274.
Messiah A., 1961, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, vol. I.
—, 1962, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, vol. II.
Michelson A. A., 1890, Phil. Mag. **30**, 1.
—, 1891a, Phil. Mag. **31**, 256.
—, 1891b, Phil. Mag. **31**, 338.
—, 1891c, Nature **45**, 160.
—, 1892, Phil. Mag. **34**, 280.
—, 1920, Astrophys. J. **51**, 257.
— and Pease F. G., 1921, Astrophys. J. **53**, 249.
Morse P. M., 1962, *Thermal Physics*, W. A. Benjamin, New York.
Moyal J. E., 1949, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45**, 99.

Neugebauer H. E. J., 1962, J. Opt. Soc. Amer. **52**, 470.
O'Neill E. L., 1963, *Introduction to Statistical Optics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
— and Asakura T., 1961, J. Phys. Soc. (Japan) **16**, 301.
— and Walther A., 1963, Opt. Acta **10**, 33.

Paananen R., Tang C. L. and Statz H., 1963, Proc. IEEE **51**, 63.
Pancharatnam S., 1956a, Proc. Indian Acad. Sci. Sec. **A44**, 247.
—, 1956b, Proc. Indian Acad. Sci. Sec. **A44**, 398.
—, 1957a, Proc. Indian Acad. Sci. Sec. **A45**, 1.
—, 1957b, Proc. Indian Acad. Sci. Sec. **A45**, 402.
—, 1963a, Proc. Indian Acad. Sci. **57**, 218.
—, 1963b, Proc. Indian Acad. Sci. **57**, 231.
Parrent G. B., 1959a, J. Opt. Soc. Amer. **49**, 787.
—, 1959b, Opt. Acta **6**, 285.
— and Roman P., 1960, Nuovo cimento **15**, 370.
Paul H., 1963, Ann. Phys. **12**, 290.
—, 1964, Ann. Phys. **14**, 147.
—, Brunner W. and Richter G., 1963, Ann. Phys. **12**, 325.
Pauli W., 1958, *Encyclopedia of Physics*, edited by S. Flügge, Springer-Verlag, Berlin, том. 5, part I, стр. 1.
Pease F. G., 1931, Ergeb. exact. Naturwis. **10**, 84.
Perard A., 1928, Rev. Opt. **7**, 1.
—, 1935, *Reunions de l'Institut d'Optique*, Rev. d'Optique, Paris, стр. 10.
Picard R. H. and Willis C. R., 1965 (будет опубликовано).
Planck M., 1901a, Ann. Phys. **4**, 553.
—, 1901b, Ann. Phys. **4**, 564.
—, 1959, *The Theory of Heat Radiation*, Dover Publications, New York.
Purcell E. M., 1956, Nature **178**, 1449.

Ratcliffe J. A., 1956, Rept. Progr. Phys. **19**, 188.
Rayleigh, Lord, 1892, Phil. Mag. **34**, 407.
Rebka G. A. and Pound R. V., 1957, Nature **180**, 1035.
Reed I. S., 1962, IRE Trans. on Inform. Theory **IT-8**, 194.
Rice S. O., 1944, Bell System Tech. J. **23**, 282.
—, 1945, Bell System Tech. J. **24**, 46.
Richter G., Brunner W. and Paul H., 1964, Ann. Phys. **14**, 329.
Roman P., 1961a, Nuovo cimento **20**, 759.
—, 1961b, Nuovo Cimento **22**, 1005.
— and Marathay A. S., 1963, Nuovo cimento **30**, 1452.
— and Wolf E., 1960a, Nuovo cimento **17**, 462.
— and Wolf E., 1960b, Nuovo cimento **17**, 477.

Sarfatt J., 1963, Nuovo cimento **27**, 1119.
*Schiff L. I., 1955, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 2nd ed.
Schrödinger E., 1928, Ann. Phys. **87**, 570.
Schwabl F. and Thirring W., 1964, Ergeb. Exact. Naturwiss. **36**, 219.
Schweber S. S., 1961, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Harper & Row, New York.

Schwinger J., 1953, Phys. Rev. **91**, 728.
—, 1961, J. Math. Phys. **2**, 407.
Senitzky I. R., 1958, Phys. Rev. **111**, 3.
—, 1959, Phys. Rev. **115**, 227.
—, 1960, Phys. Rev. **119**, 1807.
—, 1961a, Phys. Rev. **121**, 171.
—, 1961b, Phys. Rev. **123**, 1525.
—, 1962a, Phys. Rev. **127**, 1638.
—, 1962b, Phys. Rev. **128**, 2864.
—, 1965 (submitted to Phys. Rev.).
Series G. W., 1961, *Advances in Quantum Electronics*, edited by J. R. Singer, Columbia University Press, New York, стр. 128.
Shannon C. E., 1948, Bell System Tech. J. **27**, 623.
Shewell J. R., 1959, Amer. J. Phys. **27**, 16.
Sillitto R. M., 1963, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **A66**, 93.
Slepian D., 1958, Bell System Tech. J. **37**, 163.
Smith A. W. and Williams G. W., 1962, J. Opt. Soc. Am. **52**, 337.
Smith S. J. and Purcell E. M., 1953, Phys. Rev. **92**, 1069.
* Sneddon I. N., 1951, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill Book Company, New York.
* Sommerfeld A., 1954, *Optics*, Academic Press Inc., New York.
Stokes G. G., 1852, Trans Cambridge Phil. Soc. **9**, 399; reprinted in Stokes's *Mathematical and Physical Papers* (Cambridge University Press, Cambridge, 1901), том 3, стр. 233.
Streifer W., 1964, Ann. Phys. (N. Y.) **27**, 72.
Strong J. and Vanasse G. A., 1959, J. Opt. Soc. Amer. **49**, 844.
Sudarshan E. C. G., 1962, *Lectures in Theoretical Physics*, Brandeis Summer Institute, W. A. Benjamin, New York, стр. 143.
—, 1963a, Phys. Rev. Letts. **10**, 277.
—, 1963b, *Proceedings of the Symposium on Optical Masers*, John Wiley & Sons, New York, стр. 45.

Ter-Haar D., 1961, Rept. Progr. Phys. (London) **24**, 304.
* Titchmarsh E. C., 1948, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Clarendon Press, Oxford, 2nd. ed., ch. V.
Tolhoek H. A., 1956, Rev. Mod. Phys. **28**, 277.
Toll J., 1956, Phys. Rev. **104**, 1760.
Toraldo di Francia G., 1948, Rendic, Accad. Naz. Lincei (Classe di Scienze fisiche, matematiche e. naturali) **4**, 319.
—, 1960, Nuovo Cimento **16**, 61.
Twiss R. Q. and Little A. G., 1959, Australian J. Phys. **12**, 77.

—, A. G. Little and Hanbury Brown R., 1957, Nature **180**, 324.
Uhlenbeck G. E. and Gropper L., 1932, Phys. Rev. **41**, 79.
Van Cittert P. H., 1934, Physica **1**, 201.
—, 1939, Physica **6**, 1129.
Verdet E., 1865, Ann. Scientif. l'Ecole Normale Superieure **2**, 291.
—, 1869, *Leçons d'Optique Physique*, L'Imprimerie Imperiale, Paris, vol. **1**, стр. 106.

Wagner W. G. and Hellwarth R. W., 1964, Phys. Rev. **133A**, 915.
Wang M. C. and Uhlenbeck G. E., 1945, Rev. Mod. Phys. **17**, 323.
Walther A., 1963, Opt. Acta **10**, 41.
Weber J., 1957, Phys. Rev. **108**, 537.
—, 1959, Rev. Mod. Phys. **31**, 681.
Weyl H., 1931, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover Publications, New York, 1950.
Whittaker E., 1953, *A History of The Theories of Aether and Electricity* (The Modern Theories, 1900—1926), T. Nelson & Sons, London.
*— and G. N. Watson, 1940, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 4th ed.
Wiener N., 1928, J. Math. Phys. **7**, 109.
—, 1929, J. Franklin Inst. **207**, 525.
—, 1930, Acta. Math. (Stockholm) **55**, 118.
Wigner E., 1932, Phys. Rev. **40**, 749.
Wolf E., 1954a, Proc. Roy. Soc. (London) **A225**, 96.
—, 1954b, Nuovo Cimento **12**, 884.
—, 1955, Proc. Roy. Soc. (London) **230**, 246.
—, 1956, *Proceedings of a Symposium on Astronomical Optics and Related Subjects*, edited by Z. Kopal, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, стр. 177.
—, 1957, Phil. Mag. **2**, 351.

W o l f E., 1958, Proc. Phys. Soc. (London) **71**, 257.
—, 1959, Nuovo Cimento **13**, 1165.
—, 1960, Proc. Phys. Soc. (London) **76**, 424.
—, 1962, Proc. Phys. Soc. (London) 80, 1269.
, 1963, *Proceedings of the Symposium on Optical Masers*, John Wiley & Sons, New York, стр. 29.
—, 1964, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 13.
— and M e h t a C. L., 1964, Phys. Rev. Letts. **13**, 705.
—, 1965, Japan. J. Appl. Phys. (будет опубликовано).
*W o o d w a r d P. M., 1953, *Probability and Information Theory, with Applications to Radar*, Pergamon Press, London.

*Y a g l o m A. M., 1962, *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Z e r n i k e F., 1938, Physica 5, 785.
—, 1948, Proc. Phys. Soc. (London) **61**, 158.