Том 87, вып. 3

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

530.145+537.311.33

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ МЕТАЛЛОВ*)

III. КИНЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛЕ

И. М. Лифшиц, М. И. Каганов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	. 389
§ 13 Кинетическое уравнение Больцмана	. 390
§ 2. Удельная электропроводность. Закон Ома	. 398
§ 3. Теплопроводность. Закон Видемана—Франца. Термоэлектрические явлени	ия 407
§ <4. Гальваномагнитные явления. Введение	. 412
§ 5. Гальваномагнитные явления. Большие поля. Замкнутые траектор	ан 417
	100
9 0. Гальваномагнитные явления, Большие поля. Открытые трасктории	. 426
 в с. Гальваномагнитные явления. Большие поля. Открытые трасктории 7. Теплопроводность и термоэлектрические явления в силисом магнитн 	. 426 ом
 6. Гальваномагнитные явления. Большие поля. Открытые трасктории § 7. Теплопроводность и термоэлектрические явления в силисом магнитн поле	. 426 ом . 438
 8 6. Гальваномагнитные явления. Большие поля. Открытые трасктории . 8 7. Теплопроводность и термоэлектрические явления в силиком магнитн поле . 8 8. Нормальный скин-эффект	. 426 ом . 438 . 440
 6. Гальваноматнитные явления, Большие поля. Открытые трасктории	• 426 • 438 • 440 • 444
 8 6. Гальваноматнитные явления, Большие поля. Открытые трасктории	• 426 • 438 • 440 • 444 • 450
 8 6. Гальваноматнитные явления, Большие поля. Открытые трасктории	. 426 om . 438 . 440 . 444 . 450 . 454

введение

В настоящей (третьей) части обзора рассматриваются кинетические свойства металлов, главным образом при низкой температуре. При этом основное внимание, как и во второй части ¹, уделено тем явлениям и свойствам, которые чувствительны к закону дисперсии электронов проводимости. Математический аппарат, используемый здесь, — кинетическое уравнение Больцмана.

В этой части мы ограничиваемся описанием статических или квазистатических свойств. Это позволяет, как показано в первом параграфе, пользоваться «газовым» приближением, так как ферми-жидкостное взаимодействие выпадает из окончательных формул.

Большинство кинетических явлений весьма чувствительно к характеру взаимодействия электронов проводимости с примесями, с фононами, друг с другом. В частности, от этого взаимодействия зависит температурный ход кинетических коэффициентов. В задачу обзора не входит изложение общирного теоретического материала, имеющегося в настоящее

^{*)} Эта статья является третьей частью обзора; первая часть опубликована в УФН 69 (3), 419 (1959), вторая часть — УФН 78 (3), 411 (1962).

¹ УФН. т. 87. вып. 3

время по данному вопросу. Особое внимание уделяется тем закономерностям и свойствам, которые более или менее безразличны к характеру взаимодействия (см. § 5-7, 9). Иногда в обзоре используется т-приближение, т. е. интегральный оператор столкновения заменяется оператором умножения с феноменологической константой (временем релаксации т); во всех случаях это особо оговаривается.

В этой части обзора мы ограничились вопросами, связанными с вычислением коэффициентов электропроводности (сопротивления), теплопроводности и термоэлектрических коэффициентов массивного (неограниченного) металла *) в отсутствие магнитного поля H и в магнитном поле. При этом мы не учитываем эффектов, обусловленных квантованием энергии в сравнительно сильном магнитном поле ($\mu H \geqslant T$, μ — магнетон Бора). Этому кругу вопросов посвящена отдельная часть обзора.

Большинство квантовых кинетических явлений в магнитном поле имеет ту же природу, что и эффект де-Гааза — ван-Альфена (см. ¹, § 6). Однако, в отличие от эффекта де-Гааза — ван-Альфена, квантовые кинетические явления при $\mu H \ll \varepsilon_F$ (ε_F — энергия Ферми электронов проводимости) у большинства металлов проявляются в виде небольших по амплитуде осцилляций, наложенных на кривую, изображающую сравнительно плавную зависимость кинетических коэффициентов от магнитного поля. Последняя объясняется классической теорией. Благодаря этому можно разделить расчет кинетических коэффициентов на две части: классическую и квантовую, причем в первой вовсе не учитывается квантование энергии магнитным полем. Если добавить, что условие $\mu H \ll \varepsilon_F$ для большинства металлов означает, что магнитное поле значительно меньше 108 э, то становится ясным, что пренебрежение квантовыми эффектами допустимо при изложении кинетических свойств металлов в магнитных полях.

Хотя высокочастотным и, в частности, резонансным свойствам металлов будет посвящена отдельная часть обзора **), ряд вопросов из этой области (теория скин-эффекта, теория поглощения ультразвука) нам казалось целесообразным изложить здесь, так как они тесно связаны с остальным материалом этой части обзора.

Некоторые более специальные, а также громоздкие вопросы вынесены в приложения. При первом чтении они могут быть опущены. Кроме того, в приложениях излагается ряд вопросов, связанных с дальнейшим развитием механики (классической и квантовой) и статистической термодинамики электронов со сложным законом дисперсии.

Как и в предыдущих частях, авторы не ставили своей целью охватить все работы, вышедшие за последние годы, поэтому цитированная литература не является библиографией по данному вопросу. Экспериментальные работы в обзоре только уцоминаются, обсуждение же полученных экспериментальных результатов требует специального обзора.

§ 1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

В тех случаях, когда движение электрона проводимости в кристаллической решетке можно представить себе как «свободное» ***) (или как движение под действием внешних сил), изредка прерываемое столкно-

^{*)} Кинетическим свойствам ограниченных образцов (пленок, проволок) будет посвящена специальная часть обзора.

^{**)} Кроме того, мы можем отослать читателя к обзору М. Я. Азбеля и И. М. Лиф-

шица 2. ***) Чтобы избежать недоразумений, подчеркнем: речь идет об электронах со сложным законом дисперсии, механика которых изложена в первой части обзора.

вениями, справедливо кинетическое уравнение Больцмана. Длина свободного пробега *l* — среднее расстояние между столкновениями — определяется как свойствами электронов (в частности, их законом дисперсии), так и, главным образом, нарушениями периодической структуры кристалла: наличием химической и физической неоднородности, фононами, электрон-электронными столкновениями и пр.

Для построения кинетического уравнения фундаментальное значение имеет запись «интеграла столкновений»— члена в уравнении Больцмана, описывающего сравнительно редкие столкновения электронов.

Получение выражения для интеграла столкновений связано с решепием задачи о рассеянии и требует знания законов взаимодействия электронов с фононами, с примесями, друг с другом. Однако развитие элекгронной теории металлов за последнее десятилетие показало, что имеется большое число неравновесных кинетических свойств металлов, слабо зависящих от детальной структуры интеграла столкновений и определяемых главным образом кинематикой электронов проводимости, т. е. их законом дисперсии. Естественно, что именно эти свойства, как правило. чувствительны к структуре электронного энергетического спектра. Именно им будет посвящена бо́льшая часть настоящего обзора. Это дает возможность основное внимание уделить полевой части кинетического уравнения, почти не занимаясь исследованием структуры интеграла столкновений (см., однако, приложение 1).

Как уже говорилось, мы не будем учитывать квантовые эффекты: точнее, мы не будем учитывать квантование энергии электрона (например, в магнитном поле) — квантовый характер задачи проявляется в своеобразии закона дисперсии электронов проводимости и в их статистике. Между столкновениями (по предположению) электрон движется по классической траектории. Ограничения, налагаемые в связи с пренебрежением квантовым характером движения, изложены подробно в § 3 первой части обзора ³. Напомним только, что при классическом рассмотрении не нужно учитывать межзонные переходы, вызванные внешними полями. Этот эффект имеет квантовую природу. Однако многозонный характер электронного энергетического спектра проявляется при суммировании по состояниям и при расчете вероятностей различных столкновений. Последнее надо учесть при конкретной формулировке интеграла столкновений.

Состояние электронов в металле будем характеризовать функциями распределения электронов f_s (**p**, **r**, *t*), имеющими смысл плотности электронов s-й зоны $\left(\frac{2f_s}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{p} \, d\mathbf{r} -$ число электронов s-й зоны в элементе фазового объема*) $d\mathbf{p} \, d\mathbf{r} = dp_x dp_y dp_z dx \, dy \, dz$). Здесь **r** — координата, *t* — время, а **p** — кинематический импульс. В отсутствие магнитного поля кинематический импульс **p** совпадает с импульсом, канонически сопряженным координате **) **P**. Если же магнитное поле отлично от нуля,

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A},\tag{1.1}$$

где A — вектор-потенциал магнитного поля H (rot A = H).

Все интересующие нас в дальнейшем величины: плотность тока j, плотность потока энергии Q и т. п. — могут быть вычислены, если известна

391

^{*)} Пренебрежение квантовыми эффектами позволяет нам не учитывать спиновой переменной: каждое состояние электрона предполагается дважды вырожденным. **) Напомним, что при классическом рассмотрении понятия «квазнимиульс»

и «импульс» совпадают.

функция распределения fs. Так,

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{\mathbf{s}} \int \mathbf{v}_{\mathbf{s}} f_{\mathbf{s}} \left(\mathbf{p}, \, \mathbf{r}; \, t \right) d\mathbf{p} \equiv e \int \mathbf{v} f \, d\Gamma, \qquad (1,2)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{s} \int \varepsilon_s \mathbf{v}_s f_s(\mathbf{p}, \mathbf{r}; t) \, d\mathbf{p} \equiv \int \mathbf{v} \varepsilon f \, d\Gamma, \qquad (1,3)$$

где $\mathbf{v}_s = \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \mathbf{p}}$ — скорость электрона с энергией ε_s (**p**), а интегрирование по $d\Gamma$ включает суммирование по всем частично заполненным зонам металла.

Согласно теореме Лиувилля, в отсутствие столкновений изменение функции распределения со временем равно нулю, т. е.

$$\frac{df_s}{dt} \equiv \frac{\partial f_s}{\partial t} + \dot{\mathbf{p}} \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}} + \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} = 0.$$
(1,4)

Равенство (1,4) означает неизменность числа частиц в элементе фазового объема при движении электронов по фазовым траекториям. Величины $\dot{\mathbf{p}}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ должны быть взяты из уравнений движения, согласно которым $\dot{\mathbf{p}}=\mathbf{F}$, где \mathbf{F} — внешняя сила, действующая на электрон, а $\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{v}_s$. Так как $\mathbf{F}=-\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \mathbf{r}}$ (здесь ε_s — полная энергия с учетом внешних

Так как $\mathbf{F} = -\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \mathbf{r}}$ (здесь ε_s — полная энергия с учетом внешних полей), df_s/dt обращается в нуль, если f_s — произвольная функция энергии ε_s .

Если на электрон действуют электрическое поле Е и магнитное поле *) **H**, то

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \left[\mathbf{vH}\right]\right). \tag{1.5}$$

Подчеркнем еще раз классический характер последнего выражения. В частности, не учтено взаимодействие магнитного момента электрона с магнитным полем. Это вполне оправдано в большинстве наиболее интересных случаев (в однородном же магнитном поле сила, действующая на магнитный момент, вообще равна нулю).

Внешняя сила, действующая на электрон проводимости, не всегда может быть выражена через напряженности макроскопических полей (Е и Н). Так, например, при прохождении через металл звуковой волны на электрон проводимости действует, кроме силы Лоренца (1,5), дополнительная сила, обязанная деформационному взаимодействию электрона с решеткой (см. § 10).

Столкновения нарушают условие (1,4). Мерой нарушения служит «интеграл столкновений»

$$\frac{df_s}{dt} = \hat{\mathcal{L}}_{\rm CT} \{f_s\}.$$
(1,6)

Интеграл столкновений — сложный нелинейный функционал от функций распределения, структура и конкретный вид которого определяются взаимодействием электронов с примесями, друг с другом или с другими квазичастицами. В последнем случае система (1,6) должна быть дополнена кинетическими уравнениями для функций распределения соответствующих квазичастиц (например, для фононов). Запись кинетического уравнения (1,6), как указывалось, возможна только в тех случаях, когда движение частицы можно разделить на движение по фазовым траекто-

~

^{*)} Так как мы не рассматриваем ферромагнитных металлов, не будем отличать Н от индукции В.

риям и на столкновения — резкие изменения импульсов частиц без заметного (с макроскопической точки зрения) изменения координаты. Отсюда ясно, что «интеграл столкновений»— оператор, связанный с зависимостью функции распределения от импульса, но не от координаты или времени. Некоторые весьма общие свойства интеграла столкновений обсуждаются в приложении III. Здесь отметим только, что интеграл столкновений обращается в нуль равновесной функцией Ферми с произвольными значениями параметров — температуры *) *Т* и химического потенциала ζ.

Т и ζ могут зависеть от координат и времени. Кинетические уравнения Больцмана (1,6) — система сложных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, которые при точном задании граничных и начальных условий однозначно определяют состояние твердого тела. В общем случае, естественно, эту систему решить невозможно, и требуется значительное число упрощений, определяемых физической постановкой задачи.

Так как внешнее электрическое поле, непосредственно приложенное к металлу или возникшее в результате внешнего воздействия (например, звуковой волной), как правило, очень мало по сравнению с внутренним межатомным электрическим полем, отклонение системы электронов от состояния равновесия оказывается в большинстве случаев весьма малым. Это позволяет линеаризовать систему уравнений (1,6), подставляя вместо функций распределения *f*₈ сумму

$$f_s = n_F + f_1, \tag{1,7}$$

где n_F — равновесная функция Ферми (нулевое приближение), а малость функции f_1 (первое приближение) обеспечивается малостью внешнего воздействия. Другими словами, функция f_1 пропорциональна тем внешним силам, которые вывели систему из состояния равновесия (например, функция f_1 пропорциональна электрическому полю, когда по изотермическому проводнику течет ток, или градиенту температуры, когда образец металла служит переносчиком тепла). Выбор нулевого приближения, точнее, выбор параметров (T и ζ) в функции Ферми, определяется постановкой задачи. Наиболее естественно исходить из предположения о локальном равновесии, считая, что параметры в функции Ферми выбраны так, что T = T (**r**) определяет температуру в точке **r**, а $\zeta = \zeta$ (**r**) — химический потенциал. Это означает, что плотность электронов в точке **r** и их средняя энергия определяются функцией н у л е в о **г** о приближения (n_F), а

$$\int f_1 d\Gamma = \int \varepsilon f_1 d\Gamma = 0. \tag{1.8}$$

Кроме того, в энергию ε_s (р) не включается энергия внешнего электрического поля.

Как мы уже говорили, основное содержание этой части обзора вычисление тензоров электропроводности, теплопроводности и термоэлектрических коэффициентов. Поэтому естественно рассмотреть те случаи, когда выведение системы из состояния равновесия обусловлено электрическим полем Е и градиентом температуры ∇T , которые, по предположению, являются столь малыми, что обеспечивают законность линеаризации **).

393

^{*)} Если интеграл столкновений описывает столкновения с другими квазичастицами (например, с фононами), он обращается в нуль только при подстановке всех равновесных функций: для электронов — функции Ферми, для фононов — Бозе и т. п.

^{**)} Для возможности линеаризации достаточно, чтобы $l | \nabla T | \ll T$ и $eEl \ll T$. Оба условия практически не ограничивают величины электрического поля и градиента температуры.

Подставляя (1,7) в уравнение (1,6), учитывая выражение для силы Лоренца (1,5) и пренебрегая квадратичными членами, получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] - \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{cT} = -\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \mathbf{v} \left(e\mathbf{E} - \nabla \xi\right) - \frac{\partial n_F}{\partial T} \mathbf{v} \nabla T.$$
(1,9)

Здесь $\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\rm cr}$ — линеаризованный интеграл столкновений:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\rm cT} = -\hat{W}f_1,$$

где \hat{W} — линейный оператор столкновений, равный

$$-\left[\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}\left\{f\right\}}{\delta f}\right]_{f=n_{F}}.$$

Наблюдаемая напряженность поля в проводнике E', т. е. сила, действующая на единичный заряд, есть сумма напряженности поля, обусловленной приложенной к проводнику внешней разностью потенциалов ($\mathbf{E} = -\nabla \varphi$) и величины $-\frac{1}{e}\nabla \zeta$, где ζ — химический потенциал электронов (см., например, ⁴, § 25), т. е.

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \frac{1}{e} \nabla \zeta.$$

Мы в дальнейшем будем опускать штрих у электрического поля, но помнить, что производная от функции Ферми по температуре берется при постоянном химическом потенциале $\left(\frac{\partial n_F}{\partial T} \equiv \left(\frac{\partial n_F}{\partial T}\right)_{\xi}\right)$. Итак, кинетическое уравнение для линейной по возмущениям добавки

Итак, кинетическое уравнение для линейной по возмущениям добавки к функции распределения имеет вид

$$\frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial t} + \frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} + \frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{p}} \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] - \left(\frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial t}\right)_{cT} = -\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} e\mathbf{E}\mathbf{v} - \frac{\partial n_F}{\partial T} \nabla T \mathbf{v}.$$
(1,10)

Часто для оценок, а иногда и при решении сравнительно сложных задач кинетики, линейный оператор столкновений заменяют оператором умножения на феноменологически вводимую постоянную т, т. е. полагают

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\rm cT} = -\frac{f_1}{\tau} \,. \tag{1.11}$$

Положительная *) величина τ имеет размерность времени и названа временем релаксации или временем свободного пробега; величину $l = v\tau$ называют длиной свободного пробега, а равенство (1,11) — τ -приближением. Следует иметь в виду, что для анизотропного закона дисперсии τ -приближение не может быть теоретически обосновано, и потому замена (1,11) может служить либо для оценок, либо в тех случаях, когда окончательный результат не зависит от вида интеграла столкновений (см. § 9 и 10).

Остановимся на первых двух слагаемых уравнения (1,10). Производная по времени от функции распределения $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ учитывает эффекты временной дисперсии кинетических коэффициентов, т. е. эффекты, связанные с запаздыванием реакции электронного газа на внешнее воздействие. Если характерная частота внешнего поля ω , то $\frac{\partial f_1}{\partial t} \sim \omega f_1$. Это слагаемое играет существенную роль при частотах порядка и больше $v = 1/\tau$.

^{*)} Положительность т обеспечивает выполнение закона возрастания энтропии.

При $\omega \ll v$ его можно опустить. Время релаксации изменяется в очень широких пределах: от 10^{-14} сек при комнатной температуре до 10^{-9} сек для уникально чистых образцов металла⁵ при температуре жидкого гелия (4,2° K).

Производные по координате (слагаемое $\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}}$ v в уравнении (1,10) ответственны за эффекты пространственной дисперсии кинетических коэффициентов. Если характерное расстояние, на которое изменяется функция распределения, порядка d, то $\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} \sim \frac{v}{d} f_1$. Это слагаемое существенно, если $v/d \gg v$, т. е. $l \gg d$. При $l \ll d$ можно опустить и это слагаемое. Так как для самых чистых образцов длина свободного пробега l не более $10^{-3} \div 10^{-1} \, cm^5$, для расчета кинетических коэффициентов массивного металла пространственные производные могут быть опущены. Как мы увидим (см. § 8—10), расчет высокочастотной проводимости и поглощения звука при определенных условиях требует учета пространственной дисперсии.

Неоднородность образца (наличие границы и т. п.) может проявиться не только в неоднородности функции f_1 , но и в распределении электронов проводимости (например, в разомкнутом проводнике). Однако в металлах (в отличие от полупроводников) эта реально имеющая место неоднородность не приводит к наблюдаемым макроскопическим эффектам, так как радиус Дебая — Хюккеля r_D (мера неоднородности распределения заряженных частиц) для вырожденного электронного газа *) очень мал ($r_D \leq 10^{-8}$ см). Это обстоятельство позволяет в сегда при расчете кинетических коэффициентов считать функцию Ферми, входящую в уравнение (1,10), однородной (не зависящей от координат) функцией.

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения:

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{c} \left[\mathbf{v} \mathbf{H} \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} , \qquad (1,12)$$

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{\mathbf{p}} = \left(\frac{\partial n_F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{-1} \hat{\boldsymbol{W}} \left(\frac{\partial n_F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right), \qquad (1,13)$$

$$\hat{W}_{\varepsilon} = \left(\frac{\partial n_F}{\partial T}\right)^{-1} \hat{W} \left(\frac{\partial n_F}{\partial T}\right), \qquad (1,14)$$

а вместо функции f_1 (при однородных Е и ∇T) — две вектор-функции ψ_i и ϕ_i :

$$f_{1} = -eE_{i}\psi_{i}\frac{\partial n_{F}}{\partial \varepsilon} - \nabla_{i}T\phi_{i}\frac{\partial n_{F}}{\partial T}, \qquad (1,15)$$

для которых легко получаем весьма компактные уравнения

$$\frac{d\psi_i}{dt} + \hat{W}_p \psi_i = v_i, \qquad (1,16)$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} + \hat{W}_{\varepsilon}\varphi_i = v_i. \tag{1.17}$$

Сравнивая выражения (1,12) и (1,4), видим, что «время» t, по которому идет дифференцирование в уравнениях (1,16) и (1,17), — это время движения по фазовой траектории электрона в магнитном поле (см. § 5).

^{*)} По определению, $e^2/r_D = \hbar \omega_0$, где ω_0 — плазменная частота электронного газа ($\omega_0^2 = 4\pi n e^2/m$), n — плотность электронов, m — масса электрона; так как $n \sim 1/a^3$ (a — межатомные расстояния), то $r_D \approx a \sqrt{U_c/\varepsilon_F}$, а $U_c = e^2/a$ — кулоновская энергия взаимодействия электронов; $\varepsilon_F \approx \hbar^2/a^2m$ — энергия Ферми.

Подставляя выражение (1,15) для функции распределения через вектор-функции ψ_i и φ_i в формулы (1,2) и (1,3) и замечая, что при $t_s = n_F$ плотность тока *і* и поток энергии *O* равны нулю, получаем

$$j_i = -e^r \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} v_i \psi_k \, d\Gamma \, E_k - e \int \frac{\partial n_F}{\partial T} \, v_i \varphi_k \, d\Gamma \, \nabla_k T, \qquad (1,18)$$

$$Q_{i} = -e \int \frac{\partial n_{F}}{\partial \varepsilon} \varepsilon v_{i} \psi_{h} d\Gamma E_{h} - \int \frac{\partial n_{F}}{\partial T} \varepsilon v_{i} \varphi_{h} d\Gamma \nabla_{h} T. \qquad (1,19)$$

В дальнейшем (см. § 2 и 3) иногда будем пользоваться следующим обозначением:

$$-\int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \chi(\mathbf{p}) \eta(\mathbf{p}) d\Gamma \equiv \langle \chi, \eta \rangle, \qquad (1,20)$$

и рассматривать подобные интегралы как скалярное произвеление функций у и п. Легко показать, что всеми необходимыми для скалярного произведения свойствами 6 подобные интегралы обладают.

В этих обозначениях

$$j_i = e^2 \langle v_i \psi_k \rangle E_k - \frac{e}{T} \langle (\varepsilon - \zeta) v_i \phi_k \rangle \nabla_k T, \qquad (1,21)$$

$$Q_i = e \langle \varepsilon v_i \psi_h \rangle E_h - \frac{1}{T} \langle \varepsilon (\varepsilon - \zeta) v_i \varphi_h \rangle \nabla_h T.$$
(1,22)

В приложении I на ряде примеров (рассеяние на примесях и на фононах) показано, что оператор $\hat{W}_{\mathbf{p}}$ обладает следующими важными свойствами. Во-первых, он эрмитов:

$$\langle \chi, \hat{W}_{\mathbf{p}} \eta \rangle = \langle \eta, \hat{W} \chi \rangle,$$
 (1,23)

а во-вторых, положителен:

$$\langle \boldsymbol{\chi}, \ \hat{W}_{\mathbf{p}} \boldsymbol{\chi} \rangle > 0;$$
 (1,24)

аналогичными свойствами обладает оператор $\hat{W_s}$.

Мы до сих пор молчаливо предполагали, что электроны проводимости представляют почти идеальный газ квазичастиц. Иначе говоря, мы не учитывали того факта, что энергия отдельной квазичастицы зависит от состояния всей системы, т. е. от ее функции распределения *). Эта зависимость учитывается теорией ферми-жидкости, построенной (для случая He³) Ландау⁷ и распространенной⁸ на электроны в металле.

Выясним, к каким изменениям в записи кинетического уравнения Больцмана приведет учет ферми-жидкостного взаимодействия между электронами. Кинетическое уравнение для функции распределения в теории ферми-жидкости

строится совершенно аналогично тому, как это делается в газовой модели, т. е. используется формула (1, 6). Надо только учесть, что энергия отдельной квазичастицы (электрона проводимости) є определяется не только законом дисперсии є0 (p), но и функцией распределения f (р). Для состояний, близких к равновесному,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{0}(\mathbf{p}) + \int \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_{1}(\mathbf{p}') d\Gamma' \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_{0}(\mathbf{p}) + \boldsymbol{\eta}, \qquad (1,25)$$
$$f_{1}(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) - n_{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{0}), |f_{1}(\mathbf{p})| \ll n_{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{0}).$$

Здесь **) го (р) — энергия электрона с импульсом р в равновесии, описываемом функцией Ферми; Ф (р, р') — корреляционная функция — основная характеристика взаимодействия между электронами в теории ферми-жидкости Ландау ⁷. В микро-

^{*)} Напомним, что закон дисперсии элементарных возбуждений (электронов), о котором идет речь в этой и предыдущих частях нашего обзора, естественно вклю-чает в себя взаимодействие между электронами (см. ¹, начало § 7). **) В § 7 второй части обзора¹ корреляционная функция обозначена через f (**p**,**p**'), а отклонение функции распределения от равновесного значения—через v (**p**).

скопической теории корреляционная функция Ф (р, р') связывается с амплитудой рассеяния электрона на электроне⁹. Экспериментальное определение этой величины — важная задача физики металлического состояния. Как будет ясно из дальнейшего. квазистатические кинетические свойства н е пригодны для этого.

При принятом здесь определении энергии квазичастицы энергия ε_0 (p), естественно, функция температуры. Ограничения на подобное рассмотрение, конечно, есть (температура должна быть значительно меньше фермиевской) и обусловлены тем, что время жизни одночастичных возбуждений быстро убывает с удалением от поверхности Ферми. При высоких же температурах во всех явлениях принимают участие электроны с энергиями, существенно отличающимися от энергии Ферми.

Весьма важно было бы экспериментально изучить температурную зависимость закона дисперсии $\varepsilon = \varepsilon_0$ (р). Соответствующие оценки, приведенные в работе ¹⁰, показывают, что изменения закона дисперсии (от нуля температуры до температуры Дебая), по-видимому, обнаружимы, хотя температура Дебая предполагается малой по сравнению с температурой Ферми.

Вернемся к выводу линеаризованного кинетического уравнения. При использовании формулы (1,25) легко показать, что

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{H} \right] - \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{r}} ,$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} + \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{p}} ,$$

$$\dot{\varepsilon} = e\mathbf{E} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{n}} ,$$
(1,26)

где $\mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}}$ — скорость электрона в состоянии термодинамического равновесия Для дальнейшего удобно, кроме функции f_1 , описывающей отклонение системы от состояния термодинамического равновесия, ввести другую функцию, f_1^* , следующим равенством:

$$f = n_F(\varepsilon_0) + f_1 \equiv n_F(\varepsilon) + f_1^*. \tag{1,27}$$

В линейном по f₁ приближении

$$f_1^* = f_1 - \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon_0} \eta. \tag{1.27'}$$

При использовании формулы (1,26) и последовательной линеаризации левой части кинетического уравнения (1,6) можно получить *)

$$\frac{df}{dt} \cong \frac{\partial n_F(\varepsilon_0)}{\partial \varepsilon_0} \ e\mathbf{v}\mathbf{E} + \frac{\partial n_F(\varepsilon_0)}{\partial T} \mathbf{v}\nabla T + \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1^*}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} + \frac{\partial f_1^*}{\partial \mathbf{p}} \frac{e}{c} \ [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \tag{1.28}$$

При рассмотрении интеграла столкновений (правой части кинетического уравнения (1,6)) следует заметить, что зависимость от функции распределения содержится, во-первых, в вероятностях процессов столкновения (за счет статистических свойств электронов), а во-вторых, в б-функции, описывающей закон сохранения энергии. Последняя зависимость — следствие ферми-жидкостных эффектов (см. формулу (1,25)). Обе зависимости мы учтем, записав

$$\hat{\mathscr{L}}_{CT} = \hat{\mathscr{L}}_{CT} \{f, \epsilon\}.$$
(1,29)

Интеграл столкновений обращается в нуль при подстановке в него равновесной функции распределения (при произвольном законе дисперсии), т. е.

$$\hat{\mathscr{L}}_{CT} \{ n_F(\varepsilon), \varepsilon(\mathbf{p}) \} = 0.$$
(1,30)

Заметим, что є (p) включает в себя ферми-жидкостную поправку η, т. е. является сложным функционалом от функции распределения.

*) Напомним, что линеаризация производится по электрическому полю E (включающему градиент химического потенциала) и градиенту температуры (∇T). В нулевом по этим величинам приближении є и ε_0 совпадают, а скорость электрона $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{n}}$ равна

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0}{\partial \mathbf{p}}$$

Подставляя в (1, 29) второе из разложений (1, 27) и учитывая, что в линейном по возмущению приближении

$$\left\{\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}}{\delta f}\right\}_{\substack{f=n_F(\varepsilon),\\\varepsilon=\varepsilon(p)}} f_1^* \cong \left\{\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}}{\delta f}\right\}_{\substack{f=n_F(\varepsilon_0),\\\varepsilon=\varepsilon_0(p)}} f_1^*, \tag{1,31}$$

мы приходим к выводу, что в интеграле столкновений учет жидкостных эффектов приводит только к замене функции f_1 функцией f_1^* , а кинетическое уравнение (1,6) окончательно может быть записано в следующей форме:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1^*}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} + \frac{\partial f_1^*}{\partial \mathbf{p}} \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] - \left(\frac{\partial f_1^*}{\partial t}\right)_{CT} = -\frac{\partial n_F(\varepsilon_0)}{\partial \varepsilon_0} e\mathbf{v}\mathbf{E} - \frac{\partial n_F(\varepsilon_0)}{\partial T} \mathbf{v}\nabla T. \quad (1,32)$$

Отсюда видно, что во всех тех случаях, когда членом $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ можно пренебречь (квазиста-

тика), т. е. при ют « 1, кинетическому уравнению можно придать «газовую» форму, введя новую функцию распределения f_1^* (см. (1,27)). Функция корреляции Ф (р, р') выпадает из уравнения Больцмана. Если добавить, что потоки (плотность тока ј и поток энергии Q) в линейном приближении также выражаются через функцию *) f_1^* :

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f_1^* \, d\Gamma, \quad \mathbf{Q} = \int \varepsilon \mathbf{v} f_1^* \, d\Gamma, \tag{1.33}$$

то становится очевидным, что при рассмотрении квазистатических задач мы можем полностью игнорировать ферми-жидкостное взаимодействие между электронами. Корреляция между электронами проявляется только при достаточно высоких частотах ($\omega \tau \ge 1$).

§ 2. УДЕЛЬНАЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ, ЗАКОН ОМА

Рассмотрим прохождение постоянного тока через изотермический металл в отсутствие магнитного поля.

Используя результаты предыдущего параграфа, мы не будем учитывать ферми-жидкостное взаимодействие между электронами. Получаемые результаты (значения кинетических коэффициентов) можно сформулировать в «газовых» терминах. Надо, однако, помнить, что основная характеристика электрона — его закон дисперсии ε_0 (р) — зависит от электрон-электронной корреляции (см. стр. 396). Аналогичная ситуация имеет место в эффекте де-Гааза — ван-Альфена (см. ¹, § 7): периоды осцилляций определяются только формой поверхности Ферми ε_0 (р) = ε_F .

В рассматриваемом случае кинетическое уравнение естественным образом упрощается: можно ограничиться уравнением (1,16), опустив член $d\psi_i/dt$. Итак,

$$\hat{W}_{\mathbf{p}}\psi_i = v_i. \tag{2.1}$$

Пренебрежение слагаемыми с пространственными производными означает, что расстояние, на котором существенно меняется электрическое поле либо функция распределения, велико по сравнению с длиной свободного пробега, а пренебрежение временной производной означает, что частота поля ω значительно меньше частоты столкновений $v = 1/\tau$ (для оценок удобно пользоваться τ -приближением).

Вводя оператор \hat{W}_{p}^{-1} , обратный оператору столкновений, из уравнения (2,1) получим

$$\psi_i = \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_i. \tag{2.2}$$

$$\int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} n_F(\varepsilon) \, d\Gamma = \int \varepsilon \, \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} n_F(\varepsilon) \, d\Gamma = 0.$$
(2,3)

^{*)} Равенства (1,33) немедленно следуют из формул (1,2) и (1,3) если учесть, что

Если уравнение (2,1) нужно дополнить линеаризованными кинетическими уравнениями для функций распределения фононов или других квазичастиц, с которыми сталкиваются электроны, то под оператором \hat{W}_{p}^{-1} надо понимать оператор, получающийся после исключения всех функций распределения, кроме электронной.

Из формул (1,18), (1,21) и (2,2) имеем

$$j_i = -e^2 \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} v_i \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_k \, d\Gamma \cdot E_k = e^2 \langle v_i, \ \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_k \rangle E_k.$$
(2,4)

Сравнивая выражение (2,4) с законом Ома

$$j_i = \sigma_{ik} E_k, \tag{2.5}$$

находим формальное выражение для тензора удельной электропроводности:

$$\sigma_{ih} = -e^2 \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} v_i \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_h \, d\Gamma \equiv e^2 \, \langle v_i, \ \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_h \rangle. \tag{2.6}$$

Сформулированные выше свойства оператора \hat{W}_{p} (1,23) и (1,24), которыми, как легко убедиться, обладает и оператор \hat{W}_{p}^{-1} , обеспечивают симметрию тензора σ_{ik} и положительность его главных значений.

Отметим, что симметрия тензора σ_{ik} ($\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$) — проявление общего принципа неравновесной термодинамики — принципа симметрии кинетических коэффициентов. Положительность главных значений тензора σ_{ik} обеспечивает выполнение закона возрастания энтроппи.

Число независимых компонент тензора σ_{ih} определяется симметрией класса данного кристалла. Большинство металлов обладает либо кубической, либо гексагональной симметрией. В первом случае тензор вырождается в скаляр, а во втором имеет два совпадающих главных значения. Некоторые металлы (например, Mg) имеют три главных значения электропроводности — они принадлежат ромбической сингонии.

Следует отметить, что отсутствие анизотропни тензора удельной проводимости ни в коей мере не свидетельствует об изотропии закона дисперсии электронов проводимости (см., например, Au, Ag, Cu и др. металлы, обладающие кубической решеткой). Одна из основных задач теории металлов — вычисление тензора электропроводности, в частности, получение его температурной зависимости. Хотя до настоящего времени эту задачу нельзя считать окончательно решенной, ясно, что основной механизм сопротивления выяснен правильно еще в работах Ф. Блоха: в широкой области температур главную роль в сопротивлении играет рассеяние электронов на колебаниях кристаллической решетки (на фононах). При низких температурах (порядка нескольких абсолютных градусов) основной механизм сопротивления — рассеяние на статических неодпородностях (на примесных атомах, границах зерен, дислокациях, границах образца и т. п.).

К вопросу о температурной зависимости сопротивления мы еще вернемся, а пока приведем различные виды записи тензора σ_{ik} .

Если $\hat{W}_{p}^{-1}v_{k}$ — достаточно плавная функция энергии, что имеет место во всех тех случаях, когда изменение энергии электрона при столкновении мало́ по сравнению с его энергией *), в первой из формул (2,4)

^{*)} При столкновениях с фононами условие $|\Delta \varepsilon/\varepsilon| \ll 1$ ($\Delta \varepsilon$ — изменение энергин при столкновении) означает, что $\theta/\varepsilon_F \ll 1$. Для плохих металлов типа Bi, C (графита) это условие может оказаться невыполненным.

можно производную от функции Ферми заменить б-функцией. Проинтегрировав по энергиям, получим

$$\sigma_{ik} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{s} \oint_{\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\varepsilon}_F} \frac{v_i^{(s)} W_{\mathbf{p}}^{-1} v_k^{(s)}}{v_{(s)}} dS_s.$$
(2,7)

Интегрирование в этом выражении ведется по поверхности Ферми, dS_s — элемент площади на *s*-й полости.

Температурный ход компонент тензора σ_{ik} определяется зависимостью от температуры множителя $\hat{W}_{p}^{-1}v_{k}$ в подынтегральном выражении. Формуле (2,7) можно придать несколько иной вид, если ввести

Формуле (2,7) можно придать несколько иной вид, если ввести «оператор длины свободного пробега», действующий на единичную нормаль к поверхности Ферми:

$$\hat{l}_{\mathbf{p}}\left\{n_{i}\right\} \equiv \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1}v_{i}.$$
(2.8)

Тогда

$$\sigma_{ik} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{s} \oint_{\boldsymbol{e}_s(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{e}_F} n_i^{(s)} \hat{l}_{\boldsymbol{p}} n_k^{(s)} \, dS_s.$$
(2,9)

Из этой формы записи тензора электропроводности видно, что симметрия тензора σ_{ik} — следствие эрмитовости оператора длины свободного пробега.

Для кубического кристалла удобно ввести среднюю длину свободного пробега \bar{l}_{p} следующим равенством:

$$\frac{1}{3}l_{\mathbf{p}}\delta_{ik} = \frac{1}{S_F} \oint_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p})=\boldsymbol{\varepsilon}_F} n_i \hat{l}_{\mathbf{p}} n_k \, dS,$$

где S_F —площадь поверхности Ферми. Суммирование по *s* мы для простоты написания формул опустили и будем опускать впредь. Тогда электропроводность σ ($\sigma_{ik} = \sigma \delta_{ik}$) можно представить в весьма компактной форме:

$$\sigma = \frac{2e^2 S_F l_p}{3 \ (2\pi\hbar)^3},\tag{2.10}$$

или

$$\sigma(ce\kappa^{-1}) \approx 0.6 \cdot 10^{60} S_F\left(\frac{s^2 c M^2}{ce\kappa^2}\right) \bar{l}_p (cm). \tag{2.10'}$$

Приведенные здесь выражения для тензора σ_{ik} носят весьма общий характер и требуют минимального числа оговорок (например, предположения о вырождении электронного газа).

Приведем теперь ряд формул, вывод которых основан на упрощающих предположениях. Заменим оператор столкновений тензором времен свободного пробега:

$$\hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1}\boldsymbol{v}_{l} = \boldsymbol{\tau}_{il}\boldsymbol{v}_{l}. \tag{2.11}$$

Если считать, что компоненты тензора τ_{il} не зависят от квазиимпульса, то из формулы (2,7) следует

$$\sigma_{ik} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \tau_{kl} \oint_{e(\mathbf{p})=e_F} n_i v_l \, dS.$$
(2.12)

Так как $v_l = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_l}$, то, используя теорему Гаусса—Остроградского, получим (см. ¹, приложение I)

$$\sigma_{ik} = \pm \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \tau_{kl} \int \frac{\partial^2 e}{\partial p_l \partial p_i} d\mathbf{p} = \pm \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \tau_{kl} \int \left(\frac{1}{m}\right)_{li} d\mathbf{p}.$$
(2.13)

Знак определяется направлением вектора **n** относительно поверхности Ферми: если вектор **n** направлен наружу (электронная зона), то — плюс, если внутрь (дырочная зона), — минус. В первом случае (электронная зона) интегрирование идет по той области *p*-пространства, где $\varepsilon < \varepsilon_F$, а во втором (дырочная зона) — по той, где $\varepsilon > \varepsilon_F$. Величину

$$u_{ik} = \pm e \left(\frac{1}{m}\right)_{il} \tau_{kl} \tag{2.14}$$

естественно назвать тензором подвижностей. Из формул (2,13) и (2,14) имеем

$$\sigma_{ik} = neu_{ik}, \tag{2.15}$$

где черта означает усреднение по зоне, n — плотность электронов (электронная зона). либо плотность «дырок» (дырочная зона). Строгое определение плотности «дырок» см. в § 5. При нашем определении подвижности во всех случаях e < 0.

Нет смысла обсуждать всякие осложнения, которые могут возникать при применении формулы (2,13) к зонам со сложной поверхностью Ферми (в частности, может возникнуть вопрос о знаке диагональных компонент тензора эффективных масс). Исходная формула (2,11) для этого непригодна. В тех же случаях, когда поверхность Ферми — эллипсоид, расположенный вблизи экстремальной точки в *p*-пространстве, предположение (2,11) естественно, так как является следствием приближенного разложения интеграла столкновений по компонентам импульса. Никаких недоразумений при этом возникнуть не может, так как в этих случаях эффективные массы константы. Формула (2,15) в случае эллипсоидальной поверхности Ферми принимает совсем простой вид:

$$\sigma_{ik} = neu_{ik}.$$
 (2,16)

Если считать, что тензор времени свободного пробсга вырождается в скаляр,

$$\tau_{il} = \tau \delta_{il},$$

то формулу (2,12) можно записать следующим образом:

$$\sigma_{\iota h} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{\varepsilon(\mathbf{p})=\varepsilon_F} \frac{\tau v_i v_h}{v} dS.$$
(2,17)

Вводя длину свободного пробега $l = \tau v$ и пренебрегая анизотропией закона дисперсии (т. е. анизотропией поверхности Ферми), из формулы (2,17) (или (2,10)) имеем

$$\sigma_{ik} = \sigma \delta_{ik}, \quad \sigma = \frac{2e^2 l S_F}{3 \left(2\pi h\right)^3}.$$
(2.18)

Это формула, формально совпадающая с формулой (2,10), если l заменить на \overline{l}_p , носит приближенный, прикидочный характер и показывает, что большая электропроводность при фиксированной длине свободного пробега (которая допускает независимое измерение) — свидетельство большой площади поверхности Ферми. Возможны случая, когда при сравнительно небольшом объеме поверхность Ферми имеет большую площадь. Это может быть результатом развствленности поверхности Ферми.

Для сферической поверхности Ферми радиуса p_F (для которой, по сути дела, получена формула (2,18), но не формула (2,10)!)

$$S_F = 4\pi p_{I'}^2 = \frac{3\Delta_F}{p_F}$$
,

а $\frac{2\Delta_F}{(2\pi\hbar)^3} = n$ (Δ_F — объем, заключенный внутри поверхности Ферми, n — плотность электронов). При тех упрощающих предположениях, которыми мы воспользовались, естественно получается обычное выражение для удельной электропроводности

$$\sigma = \frac{ne^2l}{p_F} \,. \tag{2.19}$$

Выражением типа (2,19) (или ему аналогичным $\sigma = ne^2\tau/m^*; m^*$ — здесь модуль эффективной массы) обычно пользуются для «доказательства» правила Матиссена, согласно которому удельное сопротивление $\varrho = 1/\sigma$ — сумма удельных сопротивлений, обусловленных различными

механизмами рассеяния *). Действительно, 1/l — вероятность рассеяния на единице пути. Если имеется несколько независимых причин рассеяния, то согласно теореме о сложении вероятностей

$$\frac{1}{l} = \sum_{j} \frac{1}{l_j}, \qquad (2,20)$$

где индекс ј нумерует механизмы рассеяния.

Из формул (2,19) и (2,20) естественно следует

$$\mathbf{\varrho} = \sum_{j} \mathbf{\varrho}_{j}.\tag{2,21}$$

Правило Матиссена (2,21) часто абсолютизируется, хотя совершенно очевидно, что даже в отсутствие корреляции между процессами рассеяния формула (2,21) может быть выведена только в т-приближении. В общем случае удельное сопротивление более сложным образом зависит от различных механизмов рассеяния.

Если один из механизмов вносит малый вклад в рассеяние электронов по сравнению с остальными, томожно сформулировать правило, аналогичное правилу Матиссена, однако, как будет видно ниже, значительно более слабое.

Итак, пусть оператор столкновений \hat{W}_{p} содержит малую аддитивную добавку. Обозначим ее через \hat{W}_{1} :

$$\hat{W}_{\mathbf{p}} = \hat{W}_{\mathbf{0}} + \hat{W}_{\mathbf{1}}, \tag{2.22}$$

причем $|\hat{W}_1\{f\}| \ll |\hat{W}_0\{f\}|$. Тогда решение кинетического уравнения (2,1) можно искать методом последовательных приближений. Расчет тензора удельных проводимостей и тензора удельных сопротивлений в линейном по W_1 приближении дает

$$\mathbf{Q}_{ik} = \mathbf{Q}_{ik}^0 + \Delta \mathbf{Q}_{ik}, \qquad (2,23)$$

где

$$\Delta \mathbf{q}_{ik} = -\mathbf{q}_{il}^0 \,\Delta \sigma_{lm} \mathbf{q}_{mk}^0, \tag{2.24}$$

a

$$\Delta \sigma_{ih} = \int v_i \hat{W}_0^{-2} \hat{W}_i v_h \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} d\Gamma.$$

Тензор удельных сопротивлений ϱ_{ik}^0 связан с основным оператором столкновений \hat{W}_0 . При высоких температурах ($T \gg \theta$, θ — температура Дебая) основной причиной рассеяния, как правило, являются столкновения с фононами. В этой области температур $\varrho_{ik}^0 \sim T$ ($\varrho_{ik}^0 \sim T$ с точностью до членов $\theta/T \ll 1$), и, как ясно из соотношений (2,24), добавка к сопротивлению, обусловленная рассеянием на примесях (описываемом оператором \hat{W}_1), вовсе не зависит от температуры (в первом приближении по параметру θ/T).

При низких температурах (для очень чистых образдов при сверхнизких температурах) основной механизм сопротивления — рассеяние на примесях и прочих статических неоднородностях. Теперь оператор \hat{W}_0 описывает примесное рассеяние. Роль малой добавки играет взаимодействие с фононами (оператор W_1). Температурная добавка к сопротивлению

^{*)} Из этой формулировки немедленно следует обычная: сопротивление — сумма остаточного (не зависящего от температуры) и идеального (изменяющегося с температурой) сопротивлений.

пропорциональна T^5 (см. ниже), а коэффициент при T^5 не зависит от общего числа примесных атомов (см. (2,24)). Однако этот коэффициент зависит от характера рассеяния электронов на примесях и поэтому может меняться от образца к образцу. Такая ситуация наблюдалась в ряде случаев (например, в работе ¹¹) и обычно трактуется как отклонение от правила Матиссена *).

Сопротивление поликристалла может быть выражено через главные значения тензора сопротивлений монокристалла только в тех условиях, когда длина свободного пробега значительно меньше размеров кристаллитов. Для вычисления среднего значения проводимости поликристалла можно воспользоваться методом, разработанным в ¹² для определения средних модулей упругости. Согласно ¹³ в случае малой анизотропии **)

$$\varrho = \frac{1}{\overline{\sigma}} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} \right\},
\overline{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$
(2.25)

Здесь σ_{1, 2, 3} — главные значения тензора электропроводности отдельного кристаллита. При выводе формулы (2,25) предположено, что корреляция между кристаллитами полностью отсутствует, а поликристалл не имеет текстуры.

В случае достаточно чистых образцов при низких температурах причиной сопротивления поликристалла является рассеяние электронов на границах кристаллитов. Для вычисления удельной электропроводности образца можно воспользоваться кинетическим подходом, если задать вероятность рассеяния электрона на границе и распределение границ в образце.

Формула (2,7) и все последующие показывают, что электропроводность существенным образом зависит от динамических свойств электронов, в частности от характера закона дисперсии. Может показаться, что это утверждение, подтверждаемое всей совокупностью экспериментов по сопротивлению металлов, находится в противоречии с классическими опытами Стюарта — Толмена¹⁴, согласно которым величина e/m электронов в металле равна величине e/m_0 для свободных электронов. Это кажущееся противоречие проще всего разъясняется следующим образом. Если на электрон, кроме электрического поля, действует сила инерции, то кинетическое уравнение следует записать следующим образом ¹⁵:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{c\mathbf{T}} = -\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} e\mathbf{v} \ (e\mathbf{E} - m_0 \mathbf{a}), \tag{2.26}$$

где а — ускорение. Такое выражение для силы инерции (— m_0 а) можно оправдать двояким образом: либо, используя принцип эквивалентности, заменить силу тяжести ускорением, либо рассмотреть уравнение Шрёдингера для электрона в периодическом поле в неинерциальной системе координат (подробно это проделано в работе ¹⁵). Проводя оба доказательства, надо учесть, что число электронов проводимости (число квазичастиц) равно числу свободных электронов. Благодаря этому ферми-жидкостное взаимодействие не изменяет выражения для силы инерции. Из уравнения (2,26) видно, что возникающее в разомкнутом проводнике поле (это соответствует одной из постановок эксперимента ¹⁴) равно m_0 а/e, и мы видим, что измеряемая величина определяется отношением m_0/e для свободного электрона.

$$v = \frac{1}{3} - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} \ll 1.$$

^{*)} Обычно наблюдается монотонная зависимость коэффициента при T⁵ от концентрации примеси. Этот факт не находит объяснения в приведенных здесь формулах. **) Малость анизотропии означает, что

Согласно другой постановке эксперимента Стюарта — Толмена измеряется отношение плотности импульса $\tilde{\mathbf{P}}$ к плотности тока **j**. Легко показать, что

$$\mathbf{\overline{P}} = \frac{m_0}{e} \mathbf{j}.$$

Действительно, согласно общим принципам релятивистской механики импульс частицы равен $\varepsilon v/c^2$, где ε — ее полная энергия, включающая энергию покоя. Так как энергия взаимодействия электрона как с решеткой, так и с другими электронами значительно меньше энергии покоя, импульс электрона с большой точностью равен $m_0 v$ (m_0 — масса с в об о д н о г о электрона). Отсюда сразу следует выписанное выше соотношение.

В приведенных выше формулах молчаливо предполагалось, что температура вырождения электронного газа значительно выше характеристической температуры рассеивающих квазичастиц (например, фононов). Это позволяло использовать предельное значение для функции Ферми $\left(-\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} = -\delta (\varepsilon - \varepsilon_F)\right)$. Температурная зависимость тензора проводимостей в этих случаях определяется интегралом столкновений. Однако надо иметь в виду,

что критерий вырождения газа электронов проводимости значительно жестче, чем критерий вырождения для газа свободных электронов. В работе ¹ показано, что газ электронов проводимости можно считать вырожденным, если только

$$\min |\varepsilon_F - \varepsilon_{\rm R}| \gg T, \tag{2.27}$$

где ε_{κ} — критические значения энергии (при $\varepsilon = \varepsilon_{k}$ изменяется топология изоэнергетических поверхностей). У ряда металлов (например, у металлов V группы Bi, As, Sb, у графита и др.) поверхность Ферми проходит вблизи особых точек в импульсном пространстве. Поэтому величина min $|\varepsilon_{F} - \varepsilon_{\kappa}|$ для этих металлов аномально мала. Это означает, что у таких металлов температурная зависимость сопротивления существенно зависит от множителя — $\frac{\partial n_{F}}{\partial \varepsilon}$ под интегралом (2,6) и может быть вычислена при достаточно подробном знании структуры электронного энергетического спектра.

Однако конкретно для Ві, энергетический спектр которого хорошо изучен, построение количественной теории затруднено, так как необходимо учитывать конкретный механизм рассеяния электронов на фононах (см. примечание в работе ¹⁶).

Сложная температурная зависимость электросопротивления, не сводящаяся к зависимости от температуры длины свободного пробега (точнее, множителя $\hat{W}^{-1} \{v_i\}$ в формуле (2,6)), а определяемая структурой энергетического спектра, может иметь место в тех случаях, когда аномально малая группа электронов (или зона; см. ¹, § 3, 6) обладает сравнительно большой длиной свободного пробега. Тогда в зависимости сопротивления от температуры должна проявиться зависимость от температуры числа электронов в аномальной зоне (см. ¹, конец § 3).

Как мы уже говорили, подробное изучение механизмов сопротивления не входит в задачу настоящего обзора. Этот вопрос подробно изучается, например, в книге Займана «Электроны и фононы» ¹⁷. Поэтому мы ограничимся только несколькими общими замечаниями и соображениями.

Основные механизмы сопротивления следующие: 1) столкновения электронов с фононами, 2) столкновения электронов друг с другом и 3) столкновения электронов с примесными атомами и другими статическими дефектами кристаллической решетки *). Первые два механизма имеют место в идеальном кристалле и обусловливают так называемое идеальное сопротивление, которое обращается в нуль при абсолютном нуле температуры; третий механизм характерен для дефектных кристаллов и является причиной остаточного сопротивления, т. е. определяет значение сопротивления металла при абсолютном нуле температуры. Значение остаточного сопротивления существенно различно для различных образцов одного и того же металла.

Начнем с первого механизма. Все современные представления об энергетической структуре металла основываются на том, что электроны проводимости и фононы представляют собой две сравнительно слабо связанные подсистемы. Слабость взаимодействия между электронами проводимости и фононами (колебаниями решетки) обусловлена тем, что основное взаимодействие между электронами и решеткой входит в законы дисперсии электронов и фононов. Слабость электрон-фононного взаимодействия позволяет при рассмотрении этого взаимодействия, как правило, ограничиваться однофононными процессами — поглощением и испусканием фононов электронами. Так как скорость электронов с энергией порядка энергии Ферми значительно больше скорости звука, эти процессы разрешены законами сохранения.

Предполагая фононный газ равновесным, т. е. не учитывая увлечения фононов электронами, можно показать **), что рассеяние электронов на фононах приводит к следующей температурной зависимости сопротивления (см. приложение III):

$$\frac{\varrho_{\mathfrak{d},\Phi}(T)}{\varrho(\theta)} \approx \begin{cases} \left(\frac{T}{\theta}\right)^{\mathfrak{d}}, \ T \ll \theta, \\ \frac{T}{\theta}, \ T \gg \theta. \end{cases}$$
(2,28)

Здесь ϱ (θ) — сопротивление металла при температуре, равной температуре Дебая θ , ϱ (θ) $\approx m\theta/ne^{2}h$ (см. приложение III). Хотя эти результаты уже стали классическими, предположения, на которых они основаны, до конца не вполне ясны до сих пор. В частности, не выяснен вопрос о роли процессов увлечения фононов электронами при очень низких температурах ¹⁸.

Столкновения электронов друг с другом приводят сами по себе к конечному сопротивлению только в тех случаях, когда они сопровождаются перебросами. Благодаря тому, что поверхности Ферми, как правило, имеют участки, расположенные достаточно близко к границам зоны Бриллюэна, столкновения с перебросами не затруднены. Расчет, выполненный Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчуком ¹⁹, показывает, что эта электрон-электронная часть сопротивления пропорциональна квадрату температуры:

$$\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}} \approx \frac{m}{ne^2} \frac{\varepsilon_F}{\hbar} \left(\frac{T}{\varepsilon_F}\right)^2. \tag{2,29}$$

Сравнение формул (2,29) и (2,28) показывает, что для всех металлов (кроме переходных) электрон-электронную часть сопротивления можно

^{*)} Мы не будем обсуждать дополнительных механизмов рассеяния в металлах, обладающих каким-либо специфическим свойством. Например, в ферро- и антиферромагнитных металлах имеют место столкновения электронов со спиновыми волнами; в упорядочивающихся сплавах имеется рассеяние на флуктуациях дальнего порядка.

^{**)} Последовательный вывод для изотропного закона дисперсии (так называемое решение Блоха уравнения Больцмана) содержится в любом сколько-нибудь подробном курсе электронной теории металлов.

наблюдать только в области очень низких температур, да и то если она полностью не вуалируется остаточным сопротивлением.

Отметим, что сравнение экспериментальных данных по сопротивлению при низких температурах (когда может проявляться электронэлектронное взаимодействие) с теоретическими расчетами (речь идет не о «прикидочных» формулах типа (2,28) и (2,29), а о строгих расчетах ²⁰), по-видимому, указывает на систематическое несогласие между экспериментом и теорией. Теория дает завышенные значения величины электронэлектронного сопротивления.

Остаточное сопротивление полностью определяется чистотой металла и качеством монокристалла (наличием напряжений, дислокаций и пр.). В настоящее время удается получить столь чистые образцы, что длина свободного пробега электронов в них достигает нескольких миллиметров (у наиболее чистого вольфрама, например, $l \approx 1$ см).

На очень любопытный механизм сопротивления обратил внимание Померанчук²². Оказывается, изотопическая неоднородность металла, приводящая к неоднородности нулевых колебаний решетки, является



Рис. 1.

причиной сопротивления. Длина свободного пробега (l_{ns}), связанная с этим механизмом, по порядку величины равна

$$U_{\mu 3} pprox 10^2 a \left| rac{\overline{M}}{\Delta M} \right| \left(rac{Ms}{p_F}
ight)^2 ,$$

где a — межатомное расстояние, M — средняя масса атома металла, ΔM — среднее отклонение, s — скорость звука.

По оценкам l_{из} может достигать 0,1—1 см. Мы специально останови-

лись на этом механизме сопротивления, так как причина его существования весьма нетривиальна. Надо помнить, что электронные оболочки изотопов тождественны (незначительное различие, обусловленное сверхтонкой структурой термов, заведомо можно учитывать). Рассеяние связано (как мы уже говорили) только с возникновением неоднородности нулевых колебаний решетки.

Детальный анализ механизмов фононного и остаточного сопротивлений, проведенный недавно Р. Н. Гуржи ²³, показал, что в температурном ходе сопротивления должны наблюдаться весьма любопытные усложнения, обусловленные характером закона дисперсии электронов.

Результаты, полученные Р. Н. Гуржи и изображенные на рис. 1, основаны на предположении, что фононы увлекаются электронами, поэтому нормальные столкновения электронов с фононами (без перебросов) не могут привести к конечному сопротивлению. Вероятность же электрон-фононных столкновений с перебросами крайне мала. Последнее заведомо справедливо для металлов, у которых поверхность Ферми целиком расположена в первой зоне Бриллюэна (такая ситуация, по-видимому, имеет место у К, Na и ряда других металлов).

К рассматриваемому кругу вопросов относится наблюдающийся у ряда металлов (Au и др.) минимум сопротивления, природа которого, по-видимому, выяснена Кондо²⁴, который показал, что минимум сопротивления связан с зависимостью амплитуды рассеяния от энергии (см., кроме того, работы²⁴).

Слабая связь между электронами и фононами, о которой речь шла выше, проявляется еще в том, что возможны ситуации, в которых каждая из подсистем может описываться своей температурой. Время релаксации

ę

в этих условиях совпадает с временем выравнивания температур электронов и фононов ²⁵.

Различие температур у фононов и электронов является одной из причин зависимости сопротивления от тока (отклонение от закона Ома), наблюдавшегося экспериментально при аномально больших плотностях тока ²⁶ $(j \ge 10^7 \div 10^8 \ a/cm^2)$.

§ 3. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ. ЗАКОН ВИДЕМАНА — ФРАНЦА. ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

Электрон принимает участие не только в переносе заряда, но и в переносе тепла, причем в хороших металлах электроны являются основным переносчиком тепла. Существование термоэлектрических явлений обязано только свободным электронам.

Кинетические коэффициенты, описывающие связь между соответствующими потоками (потоком тепла q и плотностью тока j) и силами (напряженностью поля E и градиентом температуры ∇T), могут быть вычислены с помощью сформулированного выше кинетического уравнения.

Прежде чем привести подобные вычисления, остановимся на феноменологическом описании теплопроводности и термоэлектрических явлений.

Оставаясь в рамках линейных соотношений и учитывая принцип симметрии кинетических коэффициентов (см., например, 4, § 25), можно записать связь между напряженностью электрического поля *) E, градиентом температуры ∇T , плотностью тока **j** и потоком тепла **g**:

$$E_{i} = \mathbf{Q}_{ik}j_{k} + \alpha_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_{k}},$$

$$q_{i} = T\alpha_{ki}j_{k} - \varkappa_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_{k}}.$$
(3,1)

Здесь ϱ_{ik} — тензор сопротивлений, \varkappa_{ik} — тензор теплопроводности, а α_{ik} — тензор, характеризующий термоэлектрические свойства металла. Через компоненты тензора α_{ik} могут быть выражены коэффициенты Томсона, Пельтье и термоэлектродвижущая сила⁴. Заметим, что соотношения Онсагера (принцип симметрии кинетических коэффициентов), требующие симметрии тензоров ϱ_{ik} и \varkappa_{ik} , допускают существование проводников с несимметричным тензором термоэлектрических коэффициентов ($\alpha_{ik} \neq \alpha_{ki}$).

Перейдем теперь к вычислению тензоров теплопроводности и термоэлектрических коэффициентов. Для дальнейшего удобно сформулированное выше кинетическое уравнение переписать, выписав непосредственно уравнение для функции распределения фононов χ .

Напомним, что столкновения с фононами почти всегда существенны. Кроме того, во всех твердых телах (и в металлах, конечно) фононы принимают участие в переносе тепла. Если неравновесную добавку к фермиевской функции по-прежнему обозначить через f_4 , а к равновесной функции фононов (функции Бозе—Эйнштейна $N_B = (e^{\hbar\omega/T} - 1)^{-1}$, где $\hbar\omega = \hbar\omega$ (р) — энергия фонона с квазиимпульсом р)—через χ_4 , то система кинетических уравнений Больцмана может быть записана следующим образом (мы опускаем по рассмотренным выше причинам члены с производными от функций распределения по координатам и времени; кроме того, мы опускаем слагаемое, учитывающее действие магнитного поля; см. § 7):

$$\left(\frac{\partial f_{1}}{\partial t}\right)_{cT}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} + \left(\frac{\partial \chi_{1}}{\partial t}\right)_{cT}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} = \frac{\partial n_{F}}{\partial \varepsilon} \operatorname{evE} + \frac{\partial n_{F}}{\partial T} \operatorname{v} \nabla T, \\
\left(\frac{\partial f_{1}}{\partial t}\right)_{cT}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} + \left(\frac{\partial \chi_{1}}{\partial t}\right)_{cT}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} = \frac{\partial N_{B}}{\partial T} \operatorname{u} \nabla T.$$
(3.2)

^{*)} Как мы уже говорили, наблюдаемая напряженность поля в проводнике есть сумма напряженноста поля, обусловленной приложенной к проводнику разностью потенциалов, и величины — $(^{1}/e)$ Vζ, где ζ — химический потенциал электронов (см. 4). Это означает, что изменение химического потенциала, обусловленное градиентом температуры, уже включено в величину Е.

Здесь $\mathbf{u} = \frac{\partial \hbar \omega}{\partial \mathbf{p}}$ — скорость фонона с квазиимиульсом p, а линеаризованные интегралы столкновений определены следующим образом:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\rm cr}^{\mathfrak{g},\mathfrak{g}} = -\hat{W}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}}\{f_1\}, \quad \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial t}\right)_{\rm cr}^{\mathfrak{g},\mathfrak{g}} = -\hat{W}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}}\{\chi_1\}, \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\rm cr}^{\mathfrak{g},\mathfrak{g}} = -\hat{W}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}}\{f_1\}, \quad \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial t}\right)_{\rm cr}^{\mathfrak{g},\mathfrak{g}} = -\hat{W}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}}\{\chi_1\},$$
(3,3)

где

$$\hat{W}_{\boldsymbol{\vartheta},\boldsymbol{\vartheta}} = -\left\{\frac{\delta \hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{CT}}^{\vartheta}}{\delta f}\right\}_{\substack{f=n_{F},\\\chi=N_{B}}}, \quad \hat{W}_{\vartheta,\boldsymbol{\varphi}} = -\left\{\frac{\delta \hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{CT}}^{\vartheta}}{\delta \chi}\right\}_{\substack{f=n_{F},\\\chi=N_{B}}}, \quad (3,4)$$

$$\hat{W}_{\phi,\vartheta} = -\left\{\frac{\partial \mathcal{Z}_{CT}}{\delta f}\right\}_{\substack{f=n_F,\\\chi=N_B}}, \quad \hat{W}_{\phi,\phi} = -\left\{\frac{\partial \mathcal{Z}_{CT}}{\delta \chi}\right\}_{\substack{f=n_F,\\\chi=N_B}}$$

— линейные операторы, действующие на функции f_1 и χ_1 ; $\hat{\mathscr{L}}_{cr}^{\mathfrak{d}}$ и $\hat{\mathscr{L}}_{cr}^{\Phi}$ — электронный и фононный операторы столкновений; в них, естественно, включено вза-имодействие не только между электронами и фононами, но и со всеми статичес-кими неоднородностями (примесями, дислокациями и т. п.). Существование не-скольких электронных и фононных зон предполагается и учитывается аналогично тому, как это сделано в § 1 (см. формулы (1,2) и (1,3)). По аналогии с формулами (1,13)—(1,15) введем следующие обозначения для

функций распределения:

$$f_{1} = -eE_{i} \frac{\partial n_{F}}{\partial e} \psi_{i} - \nabla_{i}T \frac{\partial n_{F}}{\partial T} \phi_{i},$$

$$\chi_{1} = -eE_{i} \frac{\partial N_{B}}{\partial (\hbar \omega)} \mu_{i} - \nabla_{i}T \frac{\partial N_{B}}{\partial T} \nu_{i},$$
(3,5)

и для линеаризованных интегралов столкновений:

$$\begin{aligned}
\hat{W}_{\mathbf{p}}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} & = \left(\frac{\partial n_{F}}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \hat{W}_{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} \left\{\frac{\partial n_{F}}{\partial \varepsilon_{\star}} \dots\right\}, \\
\hat{W}_{\mathbf{p}}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} & = \left(\frac{\partial n_{F}}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \hat{W}_{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} \left\{\frac{\partial N_{B}}{\partial (\hbar \omega)} \dots\right\}, \\
\hat{W}_{\mathbf{e}}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} & = \left(\frac{\partial n_{F}}{\partial T}\right)^{-1} \hat{W}_{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} \left\{\frac{\partial n_{F}}{\partial T} \dots\right\}, \\
\hat{W}_{\mathbf{e}}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} & = \left(\frac{\partial n_{F}}{\partial T}\right)^{-1} \hat{W}_{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} \left\{\frac{\partial N_{B}}{\partial (\hbar \omega)} \dots\right\}, \\
\hat{W}_{\mathbf{e}}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} & = \left(\frac{\partial N_{B}}{\partial (\hbar \omega)}\right)^{-1} \hat{W}_{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} \left\{\frac{\partial n_{F}}{\partial \varepsilon} \dots\right\}, \\
\hat{W}_{\mathbf{p}}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} & = \left(\frac{\partial N_{B}}{\partial (\hbar \omega)}\right)^{-1} \hat{W}_{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} \left\{\frac{\partial n_{F}}{\partial (\hbar \omega)} \dots\right\}, \\
\hat{W}_{\mathbf{e}}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} & = \left(\frac{\partial N_{B}}{\partial (\hbar \omega)}\right)^{-1} \hat{W}_{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} \left\{\frac{\partial n_{F}}{\partial (\hbar \omega)} \dots\right\}, \\
\hat{W}_{\mathbf{e}}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} & = \left(\frac{\partial N_{B}}{\partial (\hbar \omega)}\right)^{-1} \hat{W}_{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} \left\{\frac{\partial n_{F}}{\partial (\hbar \omega} \dots\right\}, \\
\hat{W}_{\mathbf{e}}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} & = \left(\frac{\partial N_{B}}{\partial (\hbar \omega)}\right)^{-1} \hat{W}_{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} \left\{\frac{\partial n_{F}}{\partial (\hbar \omega} \dots\right\}.
\end{aligned}$$
(3.6)

Тогда кинетическое уравнение Больцмана записывается как система векторных уравнений для функций ψ_i, φ_i, μ_i и v_i:

$$\left. \begin{array}{c} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} \psi_{i} + \hat{W}_{\mathbf{p}}^{\mathfrak{d},\Phi} \mu_{i} = v_{i}, \quad \hat{W}_{e}^{\mathfrak{d},\mathfrak{d}} \varphi_{i} + \hat{W}_{e}^{\mathfrak{d},\Phi} v_{i} = v_{i}, \\ \hat{W}_{\mathbf{p}}^{\Phi,\mathfrak{d}} \psi_{i} + \hat{W}_{\mathbf{p}}^{\Phi,\Phi} \mu_{i} = 0, \quad \hat{W}_{e}^{\Phi,\mathfrak{d}} \varphi_{i} + \hat{W}_{e}^{\Phi,\Phi} v_{i} = u_{i} \end{array} \right\}$$

$$(3,7)$$

۹,

Используя введенные здесь операторы, легко формально построить операторы $\hat{W}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{W}_{\mathbf{e}}$ из § 1, например,

$$\hat{W}_{\mathbf{p}} = \hat{W}_{\mathbf{p}}^{\mathfrak{d}, \mathfrak{d}} - \hat{W}_{\mathbf{p}}^{\mathfrak{d}, \mathfrak{\Phi}} (\hat{W}_{\mathbf{p}}^{\mathfrak{d}, \mathfrak{\Phi}})^{-1} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{\mathfrak{d}, \mathfrak{d}}.$$
(3,8)

Обобщенными силами при пользовании кинетическим уравнением являются наблюдаемая напряженность электрического поля Е и градиент температуры (∇T). Согласно принципам термодинамики неравновесных процессов ²⁷ потоки, соответствующие этим силам, должны быть определены так, чтобы производная от энергии по времени \dot{S} (производство энтропии) выражалась следующим равенством:

$$\tilde{S} = \mathbf{j}^* \mathbf{E} + \mathbf{q}^* \left(-\nabla T \right). \tag{3.9}$$

Легко показать, что при этом потоки j* и q* имеют следующий вид:

$$\mathbf{j}^* = \frac{e}{T} \int \mathbf{v} f_1 \, d\Gamma_0, \qquad (3,10)$$

$$\mathbf{q}^* = \frac{1}{T^2} \left\{ \int \mathbf{u} \hbar \omega \left(\mathbf{p} \right) \chi_1 \, d\Gamma_{\Phi} + \int \mathbf{v} \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\zeta} \right) \, f_1 \, d\Gamma_{\vartheta} \right\} \,. \tag{3.11}$$

Здесь символом $\int \dots d\Gamma_{\mathfrak{d}}$ обозначено интегрирование по всем электронным состояниям (см. стр. 392), а символом $\int \dots d\Gamma_{\Phi}$ — по всем фононам. Естественно, что при этом учитывается суммирование по зонам фононного спектра.

Обычно вместо потоков **j**^{*} и **q**^{*} используют плотность тока **j** = T**j**^{*} и плотность потока тепла **q** = T^2 **q**^{*}, для которых выписаны феноменологические соотношения (3,1).

Если считать обобщенными силами — $\nabla \varphi$ и — ∇T , то соответствующими потоками будут **j*** и **q***', который отличается от **q*** (см. формулу (3,11)) заменой ζ на $w = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} (\zeta/T)$ (w — тепловая функция на один электрон; $w \approx \zeta$ при $T \ll \varepsilon_F$).

Используя формулы (3,5) и переходя к потокам **ј** и **q**, запишем выражения (3,10) и (3,11) следующим образом:

$$\begin{array}{c} \dot{j}_{i} = \sigma_{ik}E_{k} + b_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_{k}} , \\ q_{i} = c_{ik}E_{k} + d_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_{k}} , \end{array}$$

$$(3,12)$$

где

$$\sigma_{ik} = e^{2} \langle v_{i}\psi_{k}\rangle_{\vartheta},$$

$$b_{ik} = \frac{e}{T} \langle v_{i}\varphi_{k} (\varepsilon - \zeta)\rangle_{\vartheta},$$

$$c_{ik} = -e \{ \langle v_{i}\psi_{k} (\varepsilon - \zeta)\rangle_{\vartheta} + \langle u_{i}\mu_{k}\hbar\omega\rangle_{\psi} \},$$

$$d_{ik} = -\frac{1}{T} \{ \langle v_{i}\varphi_{k} (\varepsilon - \zeta)^{2}\rangle_{\vartheta} + \langle u_{i}v_{k} (\hbar\omega)^{2}\rangle_{\psi} \} \}$$

$$(3.13)$$

и введены обозначения

$$-\int \frac{\partial n_{F}}{\partial e} \chi(\mathbf{p}) \eta(\mathbf{p}) d\Gamma_{\mathfrak{d}} = \langle \chi \eta \rangle_{\mathfrak{d}}, -\int \frac{\partial N_{B}}{\partial (\hbar \omega)} \chi(\mathbf{p}) \eta(\mathbf{p}) d\Gamma_{\mathfrak{p}} = \langle \chi \eta \rangle_{\mathfrak{p}},$$
(3.14)

причем, как и в § 1, подобные интегралы можно рассматривать как скалярные произведения функций χ (р) и η (р).

409

При записи потоков в виде (3,12) принцип симметрии кинетических коэффициентов Онсагера требует, чтобы между компонентами тензоров σ_{ik} , b_{ik} , c_{ik} и d_{ik} существовали следующие соотношения:

$$\sigma_{ki} = \sigma_{ik}, \ d_{ik} = d_{ik}, \ c_{ik} = -Tb_{ik}. \tag{3.15}$$

Естественно, что эти соотношения — следствие определенных свойств интеграла столкновений. Мы на них не будем останавливаться (см., однако, (3,28)), напомним только, что для доказательства ряда соотношений (3,15) достаточно воспользоваться эрмитовостью оператора $\hat{W}_{\mathbf{p}}$ (1,23).

Сравнивая формулы (3,1) и (3,12), легко убеждаемся, что из (3,15) следуют онсагеровские соотношения, учтенные при записи (3,1), а

$$\begin{aligned} \varrho_{ik} &= \sigma_{ik}^{-1}, \ \alpha_{ik} &= -\sigma_{il}^{-1} b_{lk}, \\ \varkappa_{ik} &= -d_{ik} + c_{im} \sigma_{ml}^{-1} b_{lk}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Если, воспользовавшись последним из соотношений (3,15), заменить в формуле для тензора теплопроводности \varkappa_{ik} тензор c_{im} равным ему тензором — Tb_{mi} , то, согласно формулам (3,13), теплопроводность разбивается на сумму электронной и фононной частей:

$$\varkappa_{ih} = \varkappa_{ih}^{\mathfrak{d}} + \varkappa_{ih}^{\mathfrak{d}}, \qquad (3,17)$$

где

$$\varkappa_{ik}^{\mathfrak{d}} = -d_{ik}^{\mathfrak{d}} - Tb_{mi}\sigma_{ml}^{-1}b_{lk}, \ d_{ik}^{\mathfrak{d}} = -\frac{1}{T}\langle v_i\varphi_k\,(\varepsilon-\zeta)^2\rangle_{\mathfrak{d}}, \tag{3.18}$$

a

$$\boldsymbol{x}_{ik}^{\Phi} = \frac{1}{T} \langle u_i \boldsymbol{v}_k \left(\hbar \boldsymbol{\omega} \right)^2 \rangle_{\Phi}. \tag{3.19}$$

Такое разделение, конечно, не означает отсутствия взаимного влияния между электронной и фононной подсистемами. В широком интервале температур фононы — главная причина рассеяния электронов, которые в свою очередь практически при всех температурах являются главной причиной теплового сопротивления для потока фононов. Именно благодаря рассеянию электронами длина свободного пробега фононов мала и их роль в теплопроводности металлов незначительна. Формально это позволяет в формуле (3,17), а также в выражении для c_{ik} пренебречь вторыми слагаемыми. Соотношение Видемана — Франца устанавливается между электронной частью коэффициента теплопроводности и электропроводностью.

Итак, электронная часть теплопроводности металла и термоэлектрические коэффициенты определяются через величины b_{ik} , d_{ik} и σ_{ik} . Как мы видели в § 2, электропроводность выражается в виде интеграла по поверхности Ферми (см. формулы (2,9) и дальше). Аналогичный вид можно придать и формулам (3,16), разлагая полученные выражения по степеням температуры (точнее, по степеням $T/|\epsilon_F - \epsilon_{\kappa}|$); коэффициенты разложения при этом тоже — функции температуры (за счет зависимости от температуры оператора столкновений). Все встречающиеся здесь тензоры можно записать, выделив явно интегрирование по энергии:

$$\sigma_{ik} = -e^{2} \int \frac{\partial n_{F}}{\partial \varepsilon} \psi_{ik}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad b_{ik} = \frac{e}{T} \int \frac{\partial n_{F}}{\partial \varepsilon} (\varepsilon - \zeta) \varphi_{ik}(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$c_{ik} = -e \int \frac{\partial n_{F}}{\partial \varepsilon} (\varepsilon - \zeta) \psi_{ik}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad d^{\vartheta}_{ik} = \frac{1}{T} \int \frac{\partial n_{F}}{\partial \varepsilon} (\varepsilon - \zeta)^{2} \varphi_{ik}(\varepsilon) d\varepsilon,$$
(3.20)

где

$$\psi_{ih} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{\varepsilon \, (\mathbf{p}) = \varepsilon} \frac{v_i \psi_h}{v} \, dS, \quad \varphi_{ih} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{\varepsilon \, (\mathbf{p}) = \varepsilon} \frac{v_i \varphi_h}{v} \, dS, \quad (3,21)$$

а интегрирование ведется по изоэнергетической поверхности ε (p) = ε. Используя хорошо известные свойства функции Ферми (см., например, формулу (3,7) из ¹), легко показать, что

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &\approx e^2 \psi_{ik} \left(\varepsilon_F \right), \quad b_{ik} \approx -\frac{\pi^2}{3} eT \left(\frac{d \psi_{ik}}{d \varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_F}, \\ c_{ik} &\approx -\frac{\pi^2}{3} eT^2 \left(\frac{d \psi_{ik}}{d \varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_F}, \\ d_{ik} &\approx -\frac{\pi^2}{3} T \varphi_{ik} \left(\varepsilon_F \right). \end{aligned}$$

$$(3,22)$$

Отметим, что соотношения Онсагера (3,15) в этом приближении означают, что

$$\left(\frac{d\varphi_{ik}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_F} = \left(\frac{d\psi_{ki}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_F}.$$
(3,23)

Подставляя выражения (3,22) в формулы (3,16) и оставляя только члены, содержащие наинизшую степень отношения $T/|\varepsilon_F - \varepsilon_h|$, получим

По аналогии с § 2 удобно ввести операторы длины свободного пробега, действующие на единичный вектор $n_i = v_i/v$. Если воспользоваться для операторов столкновений обозначениями § 1, можно записать

$$\begin{aligned} \psi_i &= \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1}(v_i) \equiv \hat{l}_{\mathbf{p}}(n_i),\\ \varphi_i &= \hat{W}_{\varepsilon}^{-1}(v_i) \equiv \hat{l}_{\varepsilon}(n_i). \end{aligned}$$
(3.25)

Индексы р и є подчеркивают, что в первом случае при столкновении наиболее существенно изменение импульса, а во втором — энергии. Другими словами, по порядку величины $\psi \approx l_p$, где l_p — длина, на которой релаксирует импульс электрона, а φ равно l_{ε} , где l_{ε} — длина релаксации энергии (вернее, $\varepsilon - \zeta$). При низких температурах ($T \ll \theta$), когда главную роль играют столкновения с длинноволновыми фононами, эти длины существенно различны ($l_p \approx \frac{\theta^2}{T^2} l_{\varepsilon}$). Последнее обстоятельство приводит к наблюдаемому в эксперименте отклонению от закона Видемана — Франца. В тех случаях, когда неупругими столкновениями можно пренебречь *), различие между l_{ε} п l_p исчезает, что естественно, так как релаксация при этом связана только с изотропизацией движения электронов (в частности, различие между l_p п l_{ε} исчезает в тех редких случаях, когда оправдано т-приближение).

411

^{*)} Это означает не только возможность положить $\mu_i = v_i = 0$ (см. (3,7)), но н, главное, пренебречь передачей энергии от электронов равновесны м фононам в каждом акте столкновения. Напомним (см. приложение I), что при $T \gg \theta$ столкновения с фононами квазиупруги. Это — причина выполнения закона Видемана — Франца при высоких температурах.

В случае кубического металла удобно ввести усредненные длины свободного пробега. Они являются функциями энергии электрона и определяются следующей формулой:

$$\frac{1}{S(\varepsilon)} \oint n_i \hat{l}_{\mathbf{p}, \varepsilon}(n_k) \, dS = \frac{1}{3} l_{\mathbf{p}, \varepsilon}(\varepsilon) \, \delta_{ik}, \qquad (3,26)$$

причем интегрирование ведется по поверхности ε (**p**) = ε , площаль поверхности которой равна S (є).

Средняя длина свободного пробега lp, введенная в § 2, совпадает с вводимой здесь, если вместо энергии є подставить значение энергии Ферми: $l_{\rm p} = l_{\rm p}$ ($\varepsilon_{\rm F}$), аналогично $l_{\varepsilon} = l_{\varepsilon}$ ($\varepsilon_{\rm F}$). Используя формулы (3,21), (3,24) — (3,26), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{ih} &= \sigma \delta_{ih}, \quad \sigma = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} e^2 \frac{S(\epsilon_F) l_p}{3}, \\ \kappa_{ih} &= \kappa \delta_{ih}, \quad \kappa = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\pi^2 T}{3} \frac{S(\epsilon_F) l_e}{3}, \\ \alpha_{ih} &= \alpha \delta_{ih}, \quad \alpha = \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{e} \frac{\frac{d}{d\epsilon} (Sl_p)_{\epsilon = \epsilon_F}}{S(\epsilon_F) l_p}. \end{aligned}$$

$$(3,27)$$

Отметим, что в новых обозначениях соотношения Онсагера (3,15) или (3.23) записываются особенно компактно:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(Sl_{\mathbf{p}} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_F} = \frac{d}{d\varepsilon} \left(Sl_{\varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_F}. \tag{3.28}$$

Если $l_{\rm p} = l_{\rm s}$, то

$$\varkappa = \frac{\pi^2 T}{3e^2} \,\sigma, \tag{3.29}$$

т. е. выполняется известное соотношение — закон Вилемана — Франца. Как видно из вывода формулы (3,29), это соотношение определяется только характером рассеяния, например, совершенно не зависит от закона дисперсии. В случае некубического кристалла это соотношение (при $\phi_i =$ $=\psi_i$) выполняется для каждой из компонент тензоров σ_{ik} и \varkappa_{ik} .

Мы не булем останавливаться на изложении теорий, объясняющих (или, вернее, пытающихся объяснить) наблюдаемые экспериментальные факты, касающиеся термо-э.д.с. и теплопроводности (этому посвящен ряд параграфов монографии Дж. Займана «Электроны и фононы»). Отметим только, что обратный знак *) коэффициента α (т. е. термо-э. д. с.) у ряда металлов можно объяснить дырочным характером поверхности Ферми: если поверхность Ферми расположена вблизи той точки р-пространства, где энергия достигает максимума, то с ростом энергии площадь поверхности уменьшается (поверхность сжимается); кроме того, с приближением к экстремальной точке уменьшается скорость, медленные электроны чаще рассеиваются и потому с ростом энергии длина пробега также, по-видимому, уменьшается.

§ 4. ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ. ВВЕДЕНИЕ

Влияние магнитного поля на проводимость металлов обусловлено его влиянием на движение электронов (см. ³, § 3, 5). При этом следует помнить, что, в отличие от равновесных термодинамических свойств, кинетические характеристики (удельное сопротивление, коэффициент

^{*)} Для свободных электронов α < 0.

теплопроводности и т. д.) существенно зависят от магнитного поля и в классическом приближении. Иначе говоря, зависимость от магнитного поля проявляется, даже если не учитывать квантование энергии электрона в магнитном поле. Характерным безразмерным параметром, определяющим роль магнитного поля, является отношение r/l, где r — радиус орбиты электрона, а l — длина пробега. Так как раднус орбиты r обратно пропорционален магнитному полю, малыми полями следует считать те поля, для которых $r \gg l$, а большими — те, для которых выполняется обратное неравенство. Радиус орбиты r для свободного электрона равен pc/eH, где под р в этом случае следует понимать радиус ферми-сферы, а в общем

случае $p = \sqrt{S}$, где S — выделенное (например, экстремальное) сечение поверхности Ферми.

Роль квантовых эффектов оппараметрами: ределяется двумя $\hbar \omega_H / | \varepsilon_F - \varepsilon_K | \mathrm{M} \hbar \omega_H / T (\mathrm{CM}, 3, \S 3).$ Первый параметр, как правило, всегда очень мал *), что, по сути дела, п оправдывает возможность пренебрежения квантовыми эффектами. Параметр ћω_н/Т при различных полях и температурах изменяется в широких пределах. Если $\hbar \omega_H/T \ge 1$, то имеют место квантовые осцилляции гальваномагнитных характеристик — эффект Шубникова — де-Гааза прочие эффекты, аналогичные п эффекту де-Гааза — ван-Альфена (см.¹, § 6). У большинства металлов



Рис. 2. Зависимость сопротивления Zn от магнитного поля.

Верхняя кривая: $T = 4,29^{\circ}$ К, нижняя — $T = 1,81^{\circ}$ К 41.

квантовые осцилляции накладываются в виде мелкой ряби на существенную зависимость гальваномагнитных характеристик от магнитного поля (рис. 2). Это позволяет рассматривать сначала классические эффекты, а потом квантовые эффекты учитывать в виде поправок **).

Простейший вариант электронной теории кинетических явлений (т-приближение, одна группа носителей с изотропным квадратичным законом дисперсии) не может даже качественно объяснить зависимость сопротивления от магнитного поля, хотя получающаяся оценка «константы» Холла R в ряде случаев верна (R = 1/nec, n — концентрация электронов). Исследования последних лет показали, что гальваномагнитные характеристики в сильных полях весьма чувствительны электронного энергетического спектра. Они служат структуре к одним из надежнейщих методов определения топологии поверхности Ферми.

Мы не будем приводить здесь сводку экспериментальных данных (для этого понадобился бы отдельный обзор), а по мере изложения теории

^{*)} При достаточно большой разветвленности поверхности Ферми, характерной для большинства металлов, встречаются случан, когда $\hbar \omega_H / | \epsilon_F - \epsilon_{\rm K} |$ достигает

величины порядка единицы. Это, по-видимому, может приводить к явлению, анало-гичному магнитному пробою (см. также § 6 из ¹). **) Квантовые поправки всегда содержат множитель $(\hbar \omega_H / | \varepsilon_F - \varepsilon_K |)^n$, где n > 0. У некоторых металлов, например у Ві, квантовые эффекты существенным образом определяют зависимость сопротивления и особенно «константы» Холла R от магнитного поля. К этим металлам излагаемые здесь результаты надо применять с осторожностью.

результаты экспериментов будем привлекать для иллюстрации выводов теории. Отметим только несколько широко известных фактов:

а) Для поликристаллов и для ряда монокристаллов приближенно выполняется правило Колера²⁹, согласно которому величина

$$\Delta_{H} \equiv \frac{\varrho (H) - \varrho (0)}{\varrho (0)}$$

является функцией эффективного поля

$$H_{\partial \Phi \Phi} = H \frac{\varrho_{273}}{\varrho(0)}$$

((P, H) — сопротивление в магнитном поле H, Q_{273} — сопротивление при 273° К и при H = 0). Это правило, иллюстрируемое рис. 3, подтверждает виси заявное выше утвер-



Рис. 3. Зависимость увеличения сопротивления в магнитном поле от эффективной величины маг-

HETHOFO HOLH
$$H \frac{700}{r_0}$$
.
 $1 - Mg; 2 - Cd; 3 - Cu; 4 - Pb; \bullet - T = 2° K;$
 $O - T = 4,22° K; \Box - T = 14° K; \times - T = 20,35° K;$
 $\Delta - T = 78° K 33.$

высказанное выше утверждение, что параметром, от которого зависит изменение сопротивления, является r/l.

В последнее время наблюдались значительные отклонения от правила Колера ³⁰. Джонс и Зондгаймер ³¹ сделали попытку сформулировать более общее правило, которое имеет следующий вид:

$$\frac{\Delta_{H}}{\Delta_{\infty}} = f\left(\frac{H}{\varrho(0)\,\Delta_{\infty}}\right), \quad (4,1)$$

где $\Delta_{\infty} = \Delta_{H=\infty}$, а $f(\xi)$ — некоторая универсальная (для данного металла) функция, возрастающая от нуля до единицы с изменением аргумента от нуля до бесконечности.

Как и правило Колера, правило Джонса и Зондгаймера невозможно строго теоретически доказать и нужно рассматри-

вать как полуэмпирическое. На рис. 4 изображены экспериментальные данные по сопротивлению Al в магнитном поле ³², которые легли в основу формулировки правила (5,1).

б) Все исследованные до настоящего времени металлы по зависимости сопротивления от магнитного поля можно разделить на три группы. К п е р в о й г р у п п е относятся металлы, у которых сопротивление стремится к насыщению при $H \to \infty$ вне зависимости от направления магнитного поля. Увеличение сопротивления (а сопротивление всегда увеличивается в больших полях) у этих металлов достигает сотен процентов (Δ_{∞} составляет несколько единиц). К о в т о р о й г р у п п е относятся металлы, у которых сопротивление квадратично возрастает с ростом магнитного поля ($r \ll l$), опять-таки при всех направлениях магнитного поля. Сопротивление при этом может возрасти в миллионы раз (например Ві); по сути дела, металл в сильном магнитном поле обладает свойствами диэлектрика-изолятора. Т р е т ь я г р у п п а обладает промежуточными свойствами: при некоторых направлениях магнитного поля сопротивление квадратично возрастает, при других — стремится к насыщению.

Речь до сих пор шла о поперечном гальваномагнитном эффекте, т. е. о том случае, когда измерительный ток перпендикулярен к магнитному полю. Продольный гальваномагнитный эффект сравнительно мал: продольное сопротивление у всех металлов стремится к насыщению. В зависимости сопротивления от магнитного поля ($\mathbf{j} \perp \mathbf{H}$) у большинства металлов наблюдается большой участок, на котором сопротивление линейно зависит от магнитного поля (закон Капицы). У некоторых металов этот



Рис. 4. График, характеризующий правило Джонса — Зондгаймера (4,1) на Al различной чистоты (по Е. С. Боровику и др. ³²).

участок является промежуточным либо между двумя квадратичными зависимостями, либо между квадратичной зависимостью и насыщением; у других металлов (или образцов) не удалось обнаружить отклонения от линейного закона в больших полях.

Большинство экспериментальных фактов находит свое объяснение в современной кинетической теории гальваномагнитных эффектов. Правда, некоторые наблюдения заставляют предполагать, что окончательной ясности в понимании этого круга вопросов еще нет (например, очень трудно объяснить ³² поведение очень чистого Al). Изложение теории гальваномагнитных явлений начнем с пх феноменологического описания. Связь между электрическим полем и током, естественно, носит линейный характер (закон Ома):

$$j_i = \sigma_{ik} E_k, \quad E_i = \varrho_{ik} j_k, \quad \vartheta_{ik} = \sigma_{ik}^{-1}. \tag{4.2}$$

В магнитном поле тензоры σ_{ih} и $\varrho_{ih} - \phi$ ункции магнитного поля — не являются симметричными тензорами. Принцип симметрии кинетических коэффициентов требует несколько более сложного соотношения между компонентами тензора

$$\sigma_{ik} (\mathbf{H}) = \sigma_{ki} (-\mathbf{H}). \tag{4.3}$$

Тензор σ_{ik} , как и всякий тензор второго ранга, можно представить в виде суммы симметричного s_{ik} и антисимметричного a_{ik} тензоров:

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + a_{ik}. \tag{4.4}$$

Используя соотношения Онсагера (4,3), легко показать, что тензор s_{ih} — четная, а a_{ih} — нечетная функции магнитного поля:

$$s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ik}(-\mathbf{H}), \quad a_{ik}(\mathbf{H}) = -a_{ik}(-\mathbf{H}). \tag{4.5}$$

Из компонент антисимметричного тензора а_{ік} можно построить дуальный вектор а:

$$a_x = a_{yz}, \quad a_y = a_{zx}, \quad a_z = a_{xy},$$

или

$$a_i = \varepsilon_{ikl} a_{kl},$$

где е_{kl} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Аналогичное разложение можно произвести и с тензором удельного сопротивления ϱ_{ik} — тензором, обратным тензору σ_{ik} :

$$\varrho_{ik} = \varrho_{ik}^s + \varrho_{ik}^a$$

$$\varrho_{ik}^{s}(\mathbf{H}) = \varrho_{ki}^{s}(\mathbf{H}) = \varrho_{ik}^{s}(-\mathbf{H}), \quad \varrho_{ik}^{a}(\mathbf{H}) = -\varrho_{ki}^{a}(\mathbf{H}) = -\varrho_{ik}^{a}(-\mathbf{H}).$$

Компоненты тензоров ϱ_{ik}^s и ϱ_{ik}^a можно выразить через компоненты тензоров s_{ik} и a_{ik} :

$$\varrho_{ik}^{s} = \frac{|s|(\hat{s}^{-1})_{ik} + a_{i}a_{k}}{|s| + (\hat{asa})}, \quad b_{i} = \frac{(\hat{sa})_{i}}{|s| + (\hat{asa})}.$$
(4,6)

Здесь |s| — детерминант, составленный из компонент тензора s_{ik} ; as $a \equiv a_i s_{ik} a_k$, \mathbf{b}_i — вектор, дуальный антисимметричному тензору $\mathbf{q}_{ik}^a: b_i = \varepsilon_{ikl} \mathbf{q}_{kl}^a$.

Используя введенные величины, закон Ома в проводнике, помещенном в магнитное поле, записывается следующим образом:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}^{\mathbf{s}} \mathbf{j} + [\mathbf{b}\mathbf{j}]. \tag{4,7}$$

Вектор $\hat{\varrho}^{s}j$ — вектор с компонентами $\varrho^{s}_{ik}j_{k}$; второе слагаемое носит название поля Холла, Заметим, что оно, во-первых, перцендикулярно к току, а вовторых, меняет знак с изменением знака магнитного поля. Джоулево тепло, выделяющееся в проводнике, определяется только тензором ϱ_{ib}^s :

$$Q = \varrho_{ik}^{s} j_{ijk}; \tag{4.8}$$

поэтому тензор $\varrho_{i_k}^s$ (т. е. симметричную часть тензора сопротивления) часто просто называют тензором сопротивления.

Из формулы (4,7) видно, что полное описание гальваномагнитных свойств возможно, если известны при всех значениях магнитного поля три главных значения тензора $Q_{i_k}^s$, направление его главных осей и три компоненты вектора b. В общем случае главные направления тензора $Q_{i_k}^s$ не совпадают с кристаллографическими направлениями, а зависят от величины и направления магнитного поля.

Определение плотности тока и напряженности электрического поля в образце конечных размеров — сложная математическая задача, решаемая только в ряде частных случаев *), поэтому, как правило, в эксперименте используют длинные цилиндрические проводники (проволоки), в которых направление токовых линий задается геометрией образца.

Дополнительные измерительные возможности возникают, если использо вать переменные поля сравнительно низкой частоты (см. § 8).

Компоненты тензора $Q_{i_R}^{s}$ и вектора b сложным образом зависят от магнитного поля. Если магнитное поле мало, то их можно разложить по степеням магнитного поля. Из условий (4,5) следует, что разложения имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{\varrho}_{,\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}}\left(\boldsymbol{0}\right) + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{l}\boldsymbol{m}}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{m}} + \dots, \tag{4.9}$$

$$b_i = R_{ik}H_k + \dots$$

Мы ограничились первыми, отличными от нуля членами, содержащими магнитное

ноле; $\varrho_{ik}(0)$ — тензор сопротивлений при H = 0. Число независимых компонент тензоров λ_{iklm} и R_{ik} определяется классом сим-метрии металла. Поэтому угловая зависимость (зависимость от направления магнитного поля и тока) сопротивления и поля Холла в случае малых полей целиком определяется классом кристалла. Например, в случае кубического кристалла, как и для

416

^{*)} Речь идет о достаточно больших образцах, чтобы можно было не учитывать поверхностные явления и пользоваться макроскопическим описанием.

Математическая формулировка задачи об определении илотности тока ј и напряженности поля E такова: div $\mathbf{j} = 0$, rot $\mathbf{E} = 0$, причем $\mathbf{j} \mathbf{v} = 0$ во всех точках границы, кроме тех, через которые осуществляется подвод тока; в точках подвода ју непрерывно (у — нормаль к поверхности тела).

изотропного тела, $R_{ik} = R\delta_{ik}$. Величина R носит название константы Холла. Эта величина (R) для большинства металлов действительно сравнительно слабо зависит от температуры, чистоты образца и т. д. Однако более удобной характеристикой метал-лов (и то применимой отнюдь не для всех металлов), как мы увидим, является «кон-станта» Холла в больших полях R_{∞} (определение см. в § 5). В случае изотропного металла (поликристалла) выделенным является только

направление вдоль магнитного поля. Компоненту тензора вдоль поля обозначим ϱ_1^{s} , а в плоскости, перпендикулярной к полю, ϱ^{s}_{+} . Из выражения (4,9) следует, что

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \varrho_{ik}^{s} = (\varrho \ (0) + \lambda_{1}H^{2}) \ \delta_{ik} + \lambda_{2}H_{i}H_{k}, \\ \varrho_{||}^{s} = \varrho \ (0) + \lambda_{||}H^{2} \quad (\lambda_{||} = \lambda_{1} + \lambda_{2}), \\ \varrho_{\perp}^{s} = \varrho \ (0) + \lambda_{\perp}H^{2} \quad (\lambda_{\perp} = \lambda_{1}). \end{array} \right\}$$

$$(4,10)$$

Как правило, постоянные λ_{\parallel} и λ_{\perp} положительны. Исключение представляют ферромагнетики, в которых обратный знак гальваномагнитного эффекта (уменьшение

ферромагнетики, в которых ооратный знак гальваномагнитного эффекта (уменьшение сопротивления в слабом магнитном поле) находит свое объяснение в работах ³⁴, ¹³. Формулы (4,9) и (4,10) носят феноменологический характер. Задачей микро-скопической теории является вычисление тензоров λ_{iklm} и R_{ik} . В приложении, где установлена связь компонент тензоров λ_{iklm} и R_{ik} . В приложении, где установлена связь компонент тензоров λ_{iklm} и R_{ik} с микроскопическими характери-стиками электронов проводимости, доказано, что соотношения Онсагера (4,3) — следствие общих свойств оператора столкновений, сформулированных в § 1 (см. фор-мулы (1,23) и (1,24)); кроме того, исходя из этих же условий, показано, что главные значения тензора ϱ_{ik}^{s} в малых полях больше главных значений тензора ϱ_{ik} (0); другими словами, сопротивление растет с ростом магнитного поля.

Хотя зависимость компонент тензора сопротивления в случае малых полей (r >> l) может быть установлена из весьма общих соображений (см. формулы (4,9)), их зависимость от большого поля (асимптотику по магнитному полю) нельзя определить из общих соображений, и требуется анализ решений кинетического уравнения (см. следующие параграфы).

§ 5. ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ. БОЛЬШИЕ ПОЛЯ. ЗАМКНУТЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Построение микроскопической теории гальваномагнитных явлений, т. е. вычисление тензора удельного сопротивления Q_{ih} как функции магнитного поля, основывается на решении линеаризованного кинетического уравнения Больцмана (см. § 1), которое удобно переписать в несколько иной форме, чем в §1.

Характер движения электрона в постоянном и однородном магнитном поле (см. ³, § 3) показывает, что для описания положения электрона в импульсном пространстве удобно (при наличии магнитного поля) использовать не декартовы координаты (p_x, p_y, p_z), а координаты, связанные с траекторией электрона в импульсном пространстве. Положения электрона можно задать, задав его траекторию в импульсном пространстве, т. е. энергию є и проекцию импульса на магнитное поле p_z (однородное и постоянное магнитное поле H направлено, как всегда, вдоль оси z), а также положение на траектории. Для задания положения электрона на траектории можно использовать либо длину дуги (s), отсчитанную от какойлибо точки, либо (и это наиболее удобно) время (t) движения электрона от фиксированной (начальной) точки в данную. Итак, положения электрона мы будем описывать тремя величинами (координатами): є, р_г и t. Формулами преобразования координат (от p_x , p_y , p_z к ε , p_z и t) служат закон дисперсии $\varepsilon = \varepsilon (p_x, p_y, p_z)$ и уравнения движения электрона в магнитном поле

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}, \quad (5,1)$$

согласно которым

$$dt = \frac{c}{eH} \frac{ds}{v_{\perp}} ,$$

где v_{\perp} — проекция вектора v на плоскость, перцендикулярную к магнитному полю.

В выбранных переменных кинетическое уравнение Больцмана (1,6) имеет вид *)

$$\frac{\partial f}{\partial t}\dot{t} + \frac{\partial f}{\partial p_z}\dot{p}_z + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\rm cr}, \qquad (5,2)$$

причем обобщенные скорости (*i*, *p*_z и *i*) описывают изменение состояния электрона, обусловленное внешними полями (электрическим Е и магнитным Н). Их нужно вычислять с помощью уравнения движения

$$\mathbf{\dot{p}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{vH}]. \tag{5.3}$$

Используя уравнения (5,1) и (5,3), легко находим

$$\dot{\mathbf{\varepsilon}} = e\mathbf{v}\mathbf{E}, \quad \dot{p}_z = eE_z, \quad \dot{t} = 1 - \frac{c}{v_\perp^2 H} [\mathbf{v}_\perp \mathbf{E}]_z, \quad (5,4)$$

где \mathbf{v}_{\perp} — вектор с компонентами v_x , v_y , 0.

С помощью соотношений (5,4) уравнение (5,2) легко линеаризуется по электрическому полю и приобретает простой вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{cT} = -e\mathbf{v}\mathbf{E}\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} . \tag{5.5}$$

Как и в § 1, введем вместо функции f_i векторную функцию ψ_i соотношением

$$f_1 = -e \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \psi_i E_i. \tag{5.6}$$

Тогда ψ_i удовлетворяет следующему уравнению (см. (1,16)):

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} + \hat{W}_{\mathbf{p}} \{ \Psi_i \} = v_i. \tag{5.7}$$

Оператор \hat{W}_p определен в § 1 (см. стр. 395 и формулу (1,13)). Уравнение (5,7) не только формально, но и по существу совпадает с уравнением (1,16), так как без учета пространственной и временной неоднородности величина dt/dt (см. формулу (1,12)) описывает изменение распределения электронов только за счет движения их в постоянном и однородном магнитном поле. Как мы видим, уравнение (5,7) — дифференциальное уравнение по t. Обсудим условия, которые играют роль граничных. Если при данных є и р_г траектория электрона в магнитном поле замкнута, то граничным условием служит условие периодичности

$$\psi_i\left(t+T\right) = \psi_i\left(t\right),\tag{5,8}$$

418

^{*)} Мы ограничимся в этом и следующем параграфах пространственно однородным случаем, т. е. пренебрегаем границами образца. Это означает, что полученные результаты можно применять для достаточно массивных образцов. Соответствующие оценки содержатся в § 1 (см. также ^{85, 35a}). Кроме того, мы рассматриваем только статический случай.

где T = T (ε , p_z) — период ларморовской прецессии. Согласно формуле (3,12) из первой части обзора ³

$$T=-rac{c}{eH}rac{\partial S}{\partial arepsilon}$$
,

где S — площадь сечения изоэнергетической поверхности ε (**p**) = ε плоскостью $p_z = \text{const.}$

Если же траектория открытая, то граничным условием служит условие конечности ψ_k при $t = \pm \infty$.

Наличие множителя — $\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon}$ в выражении (5,6) показывает, что главную роль играют электроны с энергией порядка энергии Ферми. Благодаря этому можно отдельно рассматривать случай замкнутых поверхностей, а отдельно — открытых (см. ³, § 2). Последнему случаю посвящен следующий параграф.

Итак, мы будем в этом параграфе рассматривать только случай замкнутых поверхностей. Точнее, мы ограничимся случаем замкнутых траекторий. Во-первых, возможны случаи, когда открытые поверхности вовсе не имеют открытых сечений, а во-вторых, открытые поверхности при определенных направлениях магнитного поля могут иметь только замкнутые сечения (см. работу ³, § 2).

Усредняя уравнение (5,7) по t с учетом условия (5,8), получим

$$\overline{\hat{W}_{\mathbf{p}}\left\{\psi_{i}\right\}}=\overline{v}_{i},\tag{5.9}$$

где черта означает усреднение по периоду Т:

$$\overline{u} = \frac{1}{T(\varepsilon, p_z)} \int_0^T u \, dt.$$
 (5,10)

Равенство (5,9) мы будем рассматривать как граничное условие, наложенное на функцию ψ_i .

Большая величина магнитного поля проявляется в том, что в уравнении (5,7) член $\frac{\partial \psi_i}{\partial t} \approx \frac{\psi_i}{T}$ значительно больше «столкновительного» члена $\hat{W}_{\mathbf{p}}\psi_i \approx \frac{\psi_i}{\tau_{\mathbf{p}}}$. Условие $\left|\frac{\partial \psi_i}{\partial t}\right| \gg |\hat{W}\psi_i|$ означает, что $T \ll \tau_{\mathbf{p}}$ или $r \ll l$ (см. § 4), и позволяет воспользоваться методом последовательных приближений, который соответствует разложению по степеням обратного магнитного поля ³⁶. Можно показать, что решение уравнения (5,7), удовлетворяющее условию (5,9), можно представить в следующей форме:

$$\psi_{i} = \overline{\hat{W}_{p}^{-1}} \overline{v}_{i} + \hat{q} \left(\overline{\hat{W}_{p}^{-1}} \overline{v}_{i} - \widehat{W}_{p}^{-1} v_{i} \right) + \hat{q}^{2} \left(\overline{\hat{W}_{p}^{-1}} \overline{v}_{i} - \widehat{W}_{p}^{-1} v_{i} \right) + \dots \equiv \\ \equiv \overline{\hat{W}_{p}^{-1}} \overline{v}_{i} + \frac{\hat{q}}{1 - \hat{q}} \left(\overline{\hat{W}_{p}^{-1}} \overline{v}_{i} - W_{p}^{-1} v_{i} \right), \quad (5,11)$$

причем оператор \hat{q} задан следующим равенством *):

$$\hat{q} \varphi = \overline{\hat{W}}_{\mathbf{p}}^{-1} \widehat{W}_{\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{t} \overline{\hat{W}}_{\mathbf{p}} \varphi \, dt - \int_{-\infty}^{t} \widehat{W}_{\mathbf{p}} \varphi \, dt.$$
(5,12)

Формулы (5,11) и (5,12) представляют собой алгоритм для вычисления функций ψ_i в виде ряда по степеням обратного магнитного поля. Для

^{*)} Для того чтобы выражение (5,12) имело смысл, необходимо, чтобы функция φ удовлетворяла условию $\hat{W}_{\mathbf{p}}\varphi = 0.$

осуществления этого вычисления необходимо знать явный вид операторов \hat{W}_{p} и \hat{W}_{p}^{-1} . Однако для ряда существенных выводов, в частности, для выяснения зависимости различных компонент тензора сопротивления от сильного магнитного поля, достаточно только знать топологию поверхности Ферми и близких к ней изоэнергетических поверхностей.

В случае замкнутых траекторий из уравнения движения (5,1) следует, что

$$v_{\alpha} = 0 \ (\alpha = x, y), \quad v_z \neq 0.$$
 (5,13)

Поэтому разложение ψ_{α} ($\alpha = x, y$) начинается с членов, пропорциональных 1/H, а ψ_z — со слагаемого, не зависящего от магнитного поля. Используя формулы (5,11) и (5,12), а также уравнение движения (5,1), можно легко получить

$$\psi_{x} = -\frac{c}{eH} (p_{y} - \widehat{W}_{p}^{-1} \widehat{W}_{p} p_{y}) + \dots,$$

$$\psi_{y} = \frac{c}{eH} (p_{x} - \overline{W}_{p}^{-1} \widehat{W}_{p} p_{x}) + \dots,$$

$$\psi_{z} = \widetilde{W}^{-1} \overline{v}_{z} + \dots$$
(5.14)

Для вычисления тензора электропроводности σ_{ik} надо воспользоваться формулой (1,18), перейдя от интегрирования по p_x , p_y , p_z к интегрированию по ε , p_z и t. Якобиан перехода проще всего вычислить, воспользовавщись уравнением движения (5,1). Действительно, если записать (5,1) в компонентах в виде отношения детерминантов

$$\frac{\partial (p_x, \varepsilon, p_z)}{\partial (t, \varepsilon, p_z)} = \frac{eH}{c} \frac{\partial (\varepsilon, p_x, p_z)}{\partial (p_y, p_x, p_z)}, \quad \frac{\partial (p_y, \varepsilon, p_z)}{\partial (t, \varepsilon, p_z)} = -\frac{eH}{c} \frac{\partial (\varepsilon, p_y, p_z)}{\partial (p_x, p_y, p_z)}$$

и сократить числители, получим

$$\frac{\partial \left(p_{\mathbf{x}}, p_{\mathbf{y}}, p_{\mathbf{z}}\right)}{\partial \left(t, \mathbf{e}, p_{\mathbf{z}}\right)} = \left|\frac{eH}{c}\right|.$$
(5,15)

Таким образом,

$$\sigma_{ih} = -\frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \left| \frac{eH}{c} \right| \int \int \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} v_i \psi_h \, d\varepsilon \, dp_z \, dt. \tag{5.16}$$

Используя эту формулу записи тензора электропроводностей, можно показать, что соотношения Онсагера в магнитном поле (4,3) не требует от интеграла столкновений других предположений, кроме тех, которые сформулированы в § 1 (см. приложение IV).

Подставим теперь в выражение (5,16) разложение (5,14). Начнем с вычисления компонент σ_{xy} и σ_{yx} , причем вместо v_x и v_y подставим их значения из уравнений движения (5,1) $\left(v_x = -\frac{c}{eH}\frac{\partial p_y}{\partial t}, v_y = \frac{c}{eH}\frac{\partial p_x}{\partial t}\right)$:

$$\sigma_{xy} = -\frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \int dp_z \oint \frac{\partial p_y}{\partial t} \left[p_x - \overline{\hat{W}_p}^{-1} \overline{\hat{W}_p} p_x \right] \frac{c}{eH} dt + \dots$$

Из этого выражения *) видно, что слагаемое, содержащее $\hat{W}^{-1}\overline{\hat{W}}_{\mathbf{p}}p_{\mathbf{x}}$, вовсе выпадает за счет интегрирования по t, а

$$\oint \frac{\partial p_y}{\partial t} p_x dt = \int_{(\mathbf{e}, p_z)} p_x dp_y = \pm S(\mathbf{e}, p_z).$$
(5,17)

420

٠,

^{*)} Мы не выписываем очевидных пределов интегрирования. Напомним, что, по предположению, мы имеем дело с замкнутыми траекториями.

Здесь $S(\varepsilon, p_z)$ — площадь сечения изоэнергетической поверхности $\varepsilon(p) = \varepsilon$ плоскостью $p_z = \text{const.}$ Знак определяется направлением обхода, т. е. знаком эффективной массы m^* (см. ³, § 3). Таким образом, асимитотически в больших полях

$$\sigma_{xy} = -\frac{ec}{H} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \int dp_z \left\{ S_1(\varepsilon, p_z) - S_2(\varepsilon, p_z) \right\}, \quad (5,18)$$

причем первый интеграл берется по тем частям энергетических зон, где $m^* > 0$, а второй — по тем, где $m^* < 0$. Кроме того, предполагается суммирование по всем частично заполненным зонам.

Если считать. что $-\frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} = \delta$ ($\epsilon - \epsilon_F$), то

$$\sigma_{xy} = \frac{ec}{H} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \{S_1(\varepsilon_F, p_z) - S_2(\varepsilon_F, p_z)\} dp_z \qquad (5,19)$$

и, наконец

$$\sigma_{xy} = \frac{2ec}{(2\pi \bar{h}_1)^3 H} \{ V_1(\varepsilon_F) - V_2(\varepsilon_F) \}.$$
 (5,20)

Здесь $V_1(\varepsilon_F)$ — объем, ограниченный той частью многолистной поверхности Ферми, внутри которой энергия меньше энергии Ферми ($m^* > 0$), а $V_2(\varepsilon_F)$ — объем, ограниченный той частью поверх-

ности Ферми, внутри которой энергия больше энергии Ферми ($m^* < 0$).

Если замкнутые траектории расположены на открытой поверхности Ферми, то V_1 (V_2) — объем, ограниченный поверхностью Ферми и границами ячейки обратной решетки (рис. 5).

Замечая, что при нулевой температуре электронами заняты все состояния с энергией меньше ε_F , получаем

$$\sigma_{xy} = \frac{ec (n_1 - n_2)}{H}, \qquad (5, 21) \qquad \text{Puc.}$$

где n_1 — число занятых электронных состояний с положительной эффективной массой, а n_2 — число с в ободных электронных состояний с отрицательной эффективной массой. Величину n_1 естественно назвать числом «электронов», а величину n_2 — числом «дырок».

Итак, если поверхность Ферми замкнута (или, в случае открытой поверхности Ферми, если п р и в с е х p_z и м е ю т с я т о л ь к о з а м кн у т ы е с е ч е н и я), то асимптотика σ_{xy} определена формулой (5,21). Подчеркнем, что в этом случае σ_{xy} не зависит ни от направления магнитного поля, ни от характера столкновений электронов проводимости, а определяется только числами электронов и дырок. Компонента $\sigma_{yx} = -\sigma_{xy}$. Это утверждение доказывается непосредственным вычислением, а также следует из соотношения Онсагера (как мы увидим, симметричная часть тензора асимптотически значительно меньше: она пропорциональна $1/H^2$).

Следует особо рассмотреть случай равенства чисел «электронов» и «дырок» $(n_1 = n_2)$. В последнем случае разложение компонент σ_{xy} , σ_{yx} начинается с членов, пропорциональных $1/H^2$. При этом разложение антисимметричной части начинается с членов $\sim 1/H^3$. Выбором осей x и y можно добиться того, что симметричная часть тензора σ_{ik} (s_{ik}) будет диагональна; в этой системе координат разложение σ_{xy} и σ_{yx} начинается со слагаемых, пропорциональных $1/H^3$.

Заметим, что равенство чисел «электронов» и «дырок» не является чем-то исключительным: все металлы с четным числом электронов на

3 УФН, т. 87, вып 3



ячейку имеют электроны проводимости только вследствие того, что энергетические зоны в этих металлах пересекаются. Число освобождающихся состояний («дырок») в нижней зоне равно числу занятых состояний в верхней зоне («электронов»). Понятия «электрон» и «дырка» — вполне однозначные понятия, если поверхность Ферми замкнута. Для открытой поверхности следует говорить об «электронных» либо «дырочных» орбитах, в зависимости от направления движения на них. Если пересечения энергетических зон невелики (рис. 6), как правило, изоэнергетические поверх-



ности замкнуты. Такой структурой электронного энергетического спектра, по-видимому, обладают Bi, As, Sb.

Строго говоря, полная компенсация $(n_1 = n_2)$ возможна только при абсолютном нуле температуры, а также для идеально чистого металла. Тепловое возбуждение приводит к участию в гальваномагнитных эффектах состояний с открытыми поверхностями (аналогично тому, как это имеет место в проводимости; см. § 2, а также ³⁷). Таким образом, хотя число электронов в верхней зоне равно числу электронов в ниж-

ней, равенство $n_1 - n_2 = 0$ при этом может нарушиться. Очевидно, что при достаточно низких температурах

$$n_1-n_2=\Delta n \sim ne^{-\frac{\Delta e}{T}},$$

где n — число электронов в зоне (~ n_1 , n_2), а $\Delta \varepsilon$ ~ $|\varepsilon_F - \varepsilon_R|$ (ε_R — критическое значение энергии, при которой изоэнергетические поверхности меняют свою топологию).

Наличие примесей увеличивает либо число электронов (донорная примесь), либо число дырок (акцепторная примесь) пропорционально концентрации, делая величину Δn отличной от нуля. О зависимости компонент тензора σ_{ik} от магнитного поля в этом случае см. ниже.

Вернемся к вычислению компонент тензора σ_{ik} . Поступая аналогично предыдущему, получим, что разложение σ_{xx} , σ_{yy} начинается с членов $\sim 1/H^2$, а σ_{xz} , σ_{yz} — с членов $\sim 1/H$; σ_{zz} стремится к константе при стремлении поля к бесконечности. Таким образом, тензор электропроводностей в больших полях имеет вид $(n_1 \neq n_2)$

$$(\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{a_{xx}}{H^2} & \frac{ec(n_1 - n_2)}{H} & \frac{a_{xz}}{H} \\ -\frac{ec(n_1 - n_2)}{H} & \frac{a_{yy}}{H^2} & \frac{a_{yz}}{H} \\ \frac{a_{zx}}{H} & \frac{a_{zy}}{H} & a_{zz} \end{pmatrix},$$
(5,22)

причем компоненты матрицы a_{ik} стремятся к константам. В специально симметричных случаях отдельные компоненты матрицы a_{ik} могут обращаться в нуль. Например, в изотропном случае $a_{\alpha_z} = 0$, а $a_{zz} = \sigma$; σ — значение электропроводности в отсутствие магнитного поля.

Из выражения (5,22) видно, что в тех случаях, когда поверхность Ферми замкнута, все компоненты тензора σ_{ik} , кроме σ_{zz} , обращаются в нуль при магнитном поле, стремящемся к бесконечности; при этом характер стремления к нулю различных компонент различен.

Учет размытия фермиевской ступеньки может привести к изменению полученных здесь результатов, однако возникающие при этом поправки

в реальных полях пренебрежимо малы. Кроме того, значительно раньше (по полю) надо учитывать квантование орбит в магнитном поле (см. ³⁸), чем учитывать температурное размытие.

Приведем для сравнения выражение для тензора электропроводности в случае квадратичного изотропного закона дисперсии в т-приближении. (магнитное поле произвольно):

$$(\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{1 + \Omega^2 \tau^2} \pm \sigma \frac{\Omega \tau}{1 + \Omega^2 \tau^2} & 0\\ \mp \sigma \frac{\Omega \tau}{1 + \Omega^2 \tau^2} & \frac{\sigma}{1 + \Omega^2 \tau^2} & 0\\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$
 (5,23)

Здесь $\Omega = eH/m^*c$ — частота ларморовской прецессии, знак «+» соответствует электронной зоне, «--» — дырочной, $\sigma = ne^2\tau/|m^*|$. Если в электропроводности принимают участие электроны нескольких зон, то электропроводность — сумма аналогичных тензоров.

В некоторых случаях удобно иметь более общее выражение для тензора электропроводностей, справедливое во всем диапазоне изменения магнитного поля. Если ограничиться т-приближением ($\hat{W}_{\mathbf{p}} \{\psi_i\} = \psi_i / \tau$), из уравнения (5,7) с учетом условия (5,8) следует, что

$$\psi_{i} = \int_{0}^{\infty} v_{i} (t - t') e^{-\frac{t'}{\tau}} dt'.$$
 (5,24)

Заметим, что это решение справедливо и в случае открытых траекторий. Оно, например, использовано для вычисления зависимости поперечного сопротивления благородных металлов от магнитного поля ³⁹. В работе ³⁶ излагается, кроме того, метод решения уравнений (5,7), справедливый при произвольном интеграле столкновений и при любой величине магнитного поля, однако ограниченный случаем замкнутых траекторий. Решения получаются в виде рядов.

Подставляя выражение (5, 24) в формулу (5,16) для о_{ів}, получаем *)

$$\sigma_{ik} = -e^2 \int \varphi_{ik} \left(\varepsilon, \ p_z\right) \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \, d\Gamma, \qquad (5\ 25)$$

где

$$\varphi_{ik} = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{v_i(t) v_k(t-t')^l} e^{-\frac{t'}{\tau}} dt'.$$
 (5,26)

Черта означает усреднение по периоду в случае замкнутых траекторий (см. (5, 10)). В случае открытых траекторий среднее следует понимать в смысле предела при $T \to \infty$.

Выражения (5, 25) и (5, 26) удобны для исследования конкретных законов дисперсии.

При экспериментальном исследовании гальваномагнитных явлений обычно пропускают через кристалл заданный по величине и направлению ток, измеряют же компоненты напряженности электрического поля по трем некомпланарным направлениям (по возможности, по трем ортогональным направлениям; см., например, ⁴¹). Это означает, что объектом изучения является тензор удельного сопротивления в магнитном поле Q_{ik} (H), обратный тензору электропроводности ($Q_{ik} = \sigma_{ik}^{-1}$).

Используя полученные ранее выражения для асимптотики тензора электропроводности σ_{ih} (H), легко найти асимптотику тензора сопротивлений в больших полях.

^{*)} Близкая по форме запись решения кинетического уравнения содержится в работе Чомберса ⁴⁰.

Если число электронов не равно числу дырок *) $(n_1 \neq n_2)$, то согласно (5,22)

$$\varrho_{lk} (\mathbf{H}) = \begin{pmatrix}
b_{xx} & \frac{H}{(n_1 - n_2) ec} & b_{xz} \\
-\frac{H}{(n_1 - n_2) ec} & b_{yy} & b_{yz} \\
b_{zx} & b_{zy} & b_{zz}
\end{pmatrix},$$
(5,27)

причем компоненты матрицы b_{ik} стремятся к константам при $H \rightarrow \infty$. Их можно определить через асимптотические значения компонент матрицы a_{ik} ³⁶. Если измерительный ток ј перпендикулярен к магнитному полю, то вдоль направления тока можно направить ось х. Тогда сопротивление о (отношение напряженности электрического поля вдоль тока к плотности тока) есть ϱ_{xx} (в общем случае $\varrho = \varrho_{ik} j_i j_k / j^2$), а величина Q_{yx}/H совпадает с «константой» Холла $R = E_y/Hj$. Таким образом, в этом случае (замкнутые траектории, $n_1 \neq n_2$) сопротивление всегда стремится к насыщению вне зависимости от направления магнитного поля и измерительного тока. Асимптотическое значение сопротивления естественно зависит от направления магнитного поля и тока в меру анизотропии матрицы b_{ik} , что связано с анизотропией закона дисперсии и рассеяния. В приложении IV показано, что ϱ ($H \rightarrow \infty$) всегда больше o(H = 0), причем этот вывод основан только на том, что оператор столкновений не зависит от магнитного поля. Последнее обстоятельство не имеет места в квантовом случае ³⁸.

Асимптотическое значение «константы» Холла R_{∞} является важной характеристикой электронного энергетического спектра металлов. Если поверхность Ферми замкнута (или, в случае открытой поверхности Ферми, если при всех p_z имеются только замкнутые сечения),

$$R_{\infty} = \frac{1}{(n_1 - n_2) \, ec} \tag{5.28}$$

и не зависит от направления магнитного поля.

Исследования последних лет показали, что ряд металлов обладает замкнутой поверхностью Ферми с неравными числами «электронов» и «дырок» **) (In ⁴², Al ³², щелочные металлы K, Na ⁴³). Если поверхность Ферми замкнута, а число электронов равно числу дырок ($n_1 = n_2$), то благодаря тому, что $\sigma_{xy} \sim 1/H^2$, все поперечные (по отношению к магнитному полю) компоненты тензора ϱ_{ik} стремятся к бесконечности, причем

$$\varrho_{\alpha\beta} \sim H^2, \quad \varrho_{\alpha z} \sim H \quad (\alpha, \beta = x, y)$$
 (5,29)

и только продольная компонента ϱ_{zz} стремится к константе.

Отсюда видно, что в этом случае сопротивление при любом направлении магнитного поля стремится к бесконечности, если только ток имеет поперечную составляющую по отношению к магнитному полю.

^{*)} Напомним, что мы рассматриваем случай замкнутых траекторий.

^{**)} Исследования Al дают очень убедительное доказательство того, что суждение о характере носителей у металлов можно выносить только по измерению R_{∞} , а не по «константе» Холла; в малых полях «константа» Холла R при высоких температурах имеет электронный знак, а при низких (т. е. в больших полях) дырочный. Согласно модели Гаррисона основная полость поверхности Ферми носит дырочный характер. Вопрос о зонах с малым числом носителей в Al в настоящее время до конца не ясен. Возможно, что при определенных направлениях магнитного поля имеются открытые сечения, наличие которых приводит к особенностям в зависимости сопротивления от магнитного поля. Поверхность Ферми In и Al в последнее время была тщательно исследована в работах Гантмахера, Крылова ¹⁰³ и Вольского ¹⁰⁴. См. также ¹⁰⁵, где по эксперимантальным данным восстановлены параметра спектра Bi.
Поле Холла не является основным в асимптотике электрического иоля, перпендикулярного к току. В произвольном направлении имеется квадратичное по магнитному полю слагаемос, которое характеризует анизотропию сопротивления (отличие главных значений ϱ_{xx} и ϱ_{yy}).

«Константа» Холла в больших полях R_{∞} (предельное значение величины $[\varrho_{xy}(\mathbf{H}) - \varrho_{xy}(-\mathbf{H})]/2H$ при $H \to \infty$) зависит от направления магнитного поля и определяется не только энергетическим спектром, но и характером рассеяния электронов проводимости.

Отметим, что при $n_1 \neq n_2$ вектор Холла с большой точностью параллелен магнитному полю, а при $n_1 = n_2$ все компоненты вектора Холла одного порядка.

Квадратичное возрастание поперечного сопротивления при любом направлении магнитного поля четко установлено у ряда металлов (Bi. As, Sb⁴⁴). Этот результат прекрасно согласуется с нашим представлением о характере энергетического спектра этих металлов ^{16, 45}.

Если разность между числами электронов и дырок значительно меньше числа электронов ($n_1 \approx n_2$, $|n_1 - n_2| \ll n_1$), зависимость компонент тензора ϱ_{lh} от магнитного поля можно изучить несколько подробнее, чем это сделано выше. Согласно ⁴⁶ сопротивление и «константа» Холла имеют следующую зависимость от магнитного поля (при $H \gg H_0$, где H_0 — магнитное поле, при котором длина пробега равна радиусу орбиты электропов r = l):

$$\begin{aligned} \varrho &\approx \varrho' \frac{(H/H_0)^2}{1 + \left(\frac{\Delta n}{n} \frac{H}{H_0}\right)^2} ,\\ R &\approx \frac{1}{nec} \frac{a + (\Delta n/n) (H/H_0)^2}{1 + \left(\frac{\Delta n}{n} \frac{H}{H_0}\right)^2} . \end{aligned}$$
(5,30)

Параметры ϱ' , a, H_0 зависят от углов между направлением магнитного поля и кристаллографическими осями; при этом $a \approx 1$.

Формулы (5,30) находятся в хорошем согласии с экспериментальными результатами Н. Е. Алексеевского, Н. Б. Брандта и Т. И. Костиной ⁴⁷, которые производили измерения на Ві с малыми количествами примеси.

Используя примитивные модельные предположения об электронах проводимости, удается получить компактные формулы, описывающие зависимость сопротивления в широком интервале полей. Так, если считать, что имеются две зоны с квадратичными анизотропными зонами дисперсии, причем тензоры подвижностей пропорциональны $\binom{(2)}{ik} = ku_{ik}^{(1)}$, а число электронов равно числу дырок $(n_1 = n_2)$, элементарный расчет приводит к следующим соотношениям:

$$Q = \frac{\sigma_2 \cos^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha}{\sigma_1 \sigma_2} \left(1 + \frac{H^2}{H_0^2} \right), \quad R = -\frac{1}{nec} \left(\frac{1-k}{1+k} \right). \tag{5.31}$$

Здесь $H_0 = c/e \sqrt{u_1^{(1)} u_1^{(0)}}$, σ_1 , σ_2 — главные значения тензора проводимости $\sigma_{ik}^2 = ne^2 u_{ik} (1 + k)$; магнитное поле направлено вдоль одной из главных осей (третьей); ток периендикулярен к магнитному полю; α — угол между первой осью и током.

Заметим, что в этой простой модели получается единая квадратичная зависимость для сопротивления и отсутствие зависимости от поля у «константы» Холла. Это специфика двузонной модели с квадратичным законом дисперсии. Введение третьей зоны существенно меняет положение вещей. Можно показать ⁴⁸ (при тех же предположениях о законе дисперсии), что коэффициенты при H^2 в малых ($r \gg l$) и больших ($r \ll l$) полях различны, причем в согласии с экспериментом ⁴⁹ коэффициент при H^2 в малых полях всегда больше коэффициента в больших полях. Различное значение имеют также «константы» Холла в малых и больших полях.

Хотя введением нескольких зон удается сравнительно неплохо описать экспериментальные кривые, полученные с использованием широкого диапазона полей ⁵⁰, ясно, что формулы, вычисленные с помощью весьма частных модельных предположений, не могут служить для определения количественных параметров металлов.

Гальваномагнитные характористики (вернее, их асимптотические значения в больших полях) весьма чувствительны к характеру энергетического спектра и, как мы увидим ниже, являются прекрасным инструментом для определения топологии поверхности Ферми. Для металлов с замкнутыми поверхностями Ферми гальваномагнитные характеристики позволяют, во-первых, установить этот факт, а вовторых, определить разность чисел электронов и дырок $(n_1 - n_2)$.

Наиболее важные сведения о характере электронного спектра можно получить, исследуя металлы с открытыми поверхностями Ферми (см. § 6).

В заключение этого параграфа хотелось бы отметить любопытный нелинейный (в смысле отклонения от закона Ома) гальваномагнитный эффект, обнаруженный Есаки и заключающийся в том, что при определенном значении электрического поля сопротивление Ві резко возрастает (см.⁵¹, рис. 1). Это возрастание сопротивления, как показано автором, объясняется следующим образом. Как известно, в скрещенных электрическом и магнитном полях электроны дрейфуют со скоростью $v_{\rm дp} =$ = cE/H. Когда $v_{\rm дp}$ при возрастании электрического поля делается больше скорости звука s ($v_{\rm дp} > s$), электроны начинают излучать фононы («черенковское» излучение звуковых волн), что и приводит к возрастанию сопротивления *).

§ 6. ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ. БОЛЬШИЕ ПОЛЯ. ОТКРЫТЫЕ ТРАЕКТОРИИ

В предыдущем параграфе были подробно исследованы гальваномагнитные явления применительно к тем металлам, у которых поверхность Ферми — замкнутая поверхность. В этом параграфе мы рассмотрим слу-

> чай открытых поверхностей Ферми. Наиболее существенным отличием гальваномагнитных свойств металлов с открытыми поверхностями Ферми является их резкая анизотропия ⁵⁵. При одних направлениях магнитного поля поперечное сопротивление в больших полях ($r \ll l$) стремится к насыщению, при других — квадратично возрастает. Это свойство, как известно, используется для исследования топологии поверхности Ферми⁵⁴.

> Резкую анизотропию сопротивления можно продемонстрировать на простейшем примере открытой поверхности Ферми. Рассмотрим металл, у которого поверхность Ферми (и примыкающие к ней изоэнергетические поверхности) гофрированный цилиндр (рис. 7). Ось этого цилиндра выберем за ось x. Магнитное поле, как всегда, направлено вдоль оси z.

> Если магнитное поле не перпендикулярно к оси цилиндра, все сечения замкнуты. Этот случай мы рассматривали в § 5. Правда, особое рассмотрение требуется тогда, когда магнитное поле почти перпендикулярно к направлению открытости, а траектории электронов

хотя и замкнуты, но очень вытянуты, так что их длина значительно больше размеров ячейки обратной решетки. Эта ситуация будет рассмотрена ниже.

При решении кинетического уравнения в случае открытых поверхностей надо учесть ряд обстоятельств. Во-первых, характерным временем движения (для определения порядка величины $\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|$ в уравнении (5,7))

Рис. 7. Изоэнергетическая поверхность типа «гофриро-

ванный ци-

линдр».

^{*)} Эффекту Есаки в настоящее время посвящена большая литература; см., например, статью ⁵² и содержащуюся в ней библиографию.

следует считать то время, за которое импульс электрона изменится на величину порядка $|2\pi\hbar \mathbf{b}|$, где **b** — вектор обратной решетки в направлении открытости (в рассматриваемом случае вдоль оси x); магнитное поле будет считаться большим, если время релаксации значительно больше этого времени (заметим, что из уравнений движения (5,1) ясно, что это время обратно пропорционально магнитному полю и по порядку величины равно периоду обращения электрона T). Во-вторых, следует уточнить граничные условия. Как сказано в § 5, в случае открытых траекторий

граничным условием служит условие конечности функции ψ_i при больших значениях «времени» t (при $t \to \pm \infty$). Если обобщить определение среднего значения функции, положив

$$\overline{u} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} u(t) dt, \qquad (6,1)$$

то граничное условие для функции ψ_г формально запишется так же, как в случае замкнутых траекторий:

$$\hat{W}_{\mathbf{p}}\{\psi_i\} = \overline{v}_i. \tag{6.2}$$



В-третьих, среднее значение поперечных (по отношению к магнитному полю) компонент скорости не равно нулю. При нашем выборе системы координат

$$\overline{v_y} = -\frac{c}{eH} \frac{\overline{\partial p_x}}{\partial t} \neq 0, \tag{6.3}$$

a

$$\overline{v_x} = \frac{c}{eH} \frac{\overline{\partial p_y}}{\partial t} = 0.$$
 (6,4)

Уточним последнее утверждение: есть такие значения $p_z(|p_z| < p_1; puc. 8)$, для которых сечения—открытые и $\overline{v_y} \neq 0$.

Формальное решение (5,11) уравнения (5,7) справедливо и в рассматриваемом случае гофрированного цилиндра, а разложение ψ_i по степеням обратного поля имеет следующий вид (ср. (5,14)):

$$\psi_{x} = -\frac{c}{eH} \left(p_{y} - \overline{\widehat{W}_{p}}^{-1} \overline{\widehat{W}_{p}} p_{y} \right) + \dots, \psi_{z} = \overline{\widehat{W}}^{-1} \overline{v_{z}} + \dots, \\
\psi_{y} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\widehat{W}_{p}}^{-1} \overline{v_{y}} + \dots & (\mid p_{z} \mid < p_{1}), \\ \frac{c}{eH} \left(p_{x} - \overline{\widehat{W}_{p}}^{-1} \overline{\widehat{W}_{p}} p_{x} \right) + \dots & (\mid p_{z} \mid > p_{1}). \end{array} \right\}$$
(6.5)

Используя эти асимптотические значения ψ_i , можно вычислить асимптотические значения компонент тензора электропроводности

$$(\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{a'_{xx}}{H^2} & \frac{a'_{xy}}{H} & \frac{a'_{xz}}{H} \\ \frac{a'_{yx}}{H} & a'_{yy} & a'_{yz} \\ \frac{a'_{zx}}{H} & a'_{zy} & a'_{zz} \end{pmatrix}, \qquad (6,6)$$

причем разложение элементов матрицы a_{ih} по степеням обратного поля начинается с ненулевого члена. Обращая этот тензор, легко найдем асимптотические значения тензора сопротивления

$$(\mathbf{Q}_{ik}) = \begin{pmatrix} H^2 b'_{xx} & H b'_{xy} & H b'_{xz} \\ H b'_{yx} & b'_{yy} & b'_{yz} \\ H b'_{zx} & b'_{zy} & b'_{zz} \end{pmatrix};$$
(6,7)

элементы матрицы b'_{ik} определяются через элементы матрицы a_{ik}.

Из-за того, что $\overline{v}_y \neq 0$, a'_{xy} и b'_{xy} зависят не только от энергетического спектра, но и от вида интеграла столкновений (см. вывод формулы (5,21)). Проанализируем полученные результаты.

Одна из компонент поперечного сопротивления (ϱ_{xx}) квадратично возрастает с ростом магнитного поля, а другая (ϱ_{yy}) стремится к насыщению. Заметим, что возрастает с магнитным полем сопротивление в направлении открытости (вдоль оси x). Асимптотическое различие между ϱ_{xx} и ϱ_{yy} показывает, что имеется резкая зависимость сопротивления от направления тока **j** (даже при **j** \perp **H**). При произвольном направлении тока сопротивление $\varrho = \varrho_{ik} j_i j_k / j^2$ квадратично возрастает, но при токе, направленном вдоль оси y, стремится к насыщению.

Если у металла, поверхность Ферми которого — гофрированный цилиндр, исследовать зависимость сопротивления от направления большого магнитного поля ($H \gg H_0$ или $r \ll l$) при произвольном направлении тока, то должна наблюдаться следующая картина: при произвольном направлении магнитного поля сопротивление стремится к насыщению, при избранном (магнитное поле перпендикулярно к направлению открытости) — квадратично возрастает. Анализируя уравнение для функции ψ_l , можно показать ⁵⁵, что переход от одной зависимости к другой происходит в узком интервале углов $\Delta \theta$ — порядка $H_0/H \ll 1$. Это видно из того, что для вытянутых траекторий период обращения электрона обратно пропорционален углу между магнитным полем и плоскостью, перпендикулярной к направлению открытости.

Заметим, что, кроме описанной здесь резкой угловой зависимости, у сопротивления и других гальваномагнитных характеристик имеется плавная зависимость от направления магнитного поля. Ее можно выяснить только путем численного решения кинетического уравнения, и она не будет здесь обсуждаться.

В работе ⁵⁵ получена аналитическая зависимость сопротивления о от величины и направления магнитного поля, которая имеет следующий вид:

$$\varrho = \frac{\beta H^2 \cos^2 \alpha}{\vartheta^2 H^2 + \lambda^2 H_0^2} C(\eta) + A.$$
(6,8)

Здесь β , λ и A — плавные функции углов ($\lambda \sim 1$), $\eta = H/H_0 \vartheta$, а C (η) — плавная функция своего аргумента, причем C (0) = C (∞) = 1; α — угол между направлением тока и осью x. Напомним, что в этой формуле ϑ — угол между магнитным полем и плоскостью, перпендикулярной к направлению открытости ($\vartheta \ll 1$).

На рис. 9 схематически изображена зависимость сопротивления от направления магнитного поля (в), соответствующая формуле (6,8).

Практически всегда направление тока задано геометрией образца (его осью), а магнитное поле вращается в плоскости, перпендикулярной к току. Зная направление тока относительно главных осей кристалла, а также то направление магнитного поля, при котором сопротивление квадратично возрастает, можно определить плоскость, в которой лежит направление открытости. Поэтому для однозначного определения направления открытости необходимы эксперименты по крайней мере на двух

образцах с различными направлениями тока. Практически задача об определении направлений открытости — более сложная, чем это может показаться из этого описания, так как требуется не только определить направления открытости, но и выяснить тип поверхности Ферми.

Отметим еще следующее обстоятельство. Если поверхность Ферми почти замкнута, т. е. перемычки очень узки (рис. 10), что в нашем случае означает малость величины p_1 (v = $p_1/2\pi\hbar b \ll 1$, b — размер ячейки обратной решетки в плоскости, перпендикулярной к направлению открытости), то зависимость сопротивления от



Рис. 9.

Рис. 10.

большого магнитного поля ($H \gg H_0$) несколько усложняется. Легко показать, что сопротивление в направлении открытости зависит от большого магнитного поля следующим образом:

$$\varrho_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = b_{\mathbf{x}\mathbf{x}}'' \left(1 + \nu \frac{H^2}{H_0^2}\right), \tag{6.9}$$

т. е. вплоть до магнитных полей порядка $H_0/\sqrt{v}\gg H_0$ открытость поверхности Ферми ощущаться не будет.

Несколько слов о «константе» Холла. При произвольном направлении магнитного поля (не близком к плоскости у, z, перпендикулярной к направлению открытости) «константа» Холла изотропна и определяется объемом V', заключенным внутри той части поверхности Ферми, которая расположена в одной ячейке обратной решетки (мы для определенности предполагаем, что с ростом энергии гофрированный цилиндр увеличивается):

$$R_{\infty} = \frac{1}{n'ec} \quad , \qquad n' = \frac{2V'}{(2\pi\hbar)^3} \quad .$$

При направлении магнитного поля, близком к плоскости у, z, величина «константы» Холла может резко измениться. Она зависит от интеграла столкновений (это связано с тем, что $\frac{\overline{\partial p_x}}{\partial t} \neq 0$, в результате чего $\hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1}\hat{W}_{\mathbf{p}}p_{y}$ не выпадает из выражения для σ_{xy}). На рис. 11 изображена угловая зависимость сопротивления и «константы» Холла для металлов, у которых поверхность Ферми — гофрированный цилиндр.

. Описанная здесь зависимость сопротивления от направления магнитного поля имеет место также в том случае, когда поверхность Ферми распадается на «гофрированный цилиндр» и произвольное число замкнутых областей, если только не происходит компенсации объемов, т. е. если разложение σ_{xy} при произвольном направлении магнитного поля не начинается с члена порядка 1/Н³. В последнем случае сопротивление возрастает квадратично при произвольном направлении магнитного поля (как у металла с числом электронов, равным числу дырок, $n_1 = n_2$).

При рассмотрении гальваномагнитных свойств металлов, у которых поверхность Ферми — гофрированный цилиндр, мы убедились, что резкая зависимость от направления магнитного поля наблюдается в тех случаях, когда изменяется топология траектории электрона в магнитном поле. В рассмотренном случае особыми направлениями являются те, при



тые траектории ($\varepsilon = \varepsilon_F$, $p_z = \text{const}$). Различным типам поверхности Ферми ⁵⁵⁻⁵⁷.

которых магнитное поле перпендикулярно к оси цилиндра. На стереографической проекции *) это соответствует окружности радиуса единицы (см. рис. 12, на котором полярная ось совпадает с направлением открытости).

Рассмотрим теперь открытую поверхность типа «пространственная сетка». В этом случае открытые траектории встречаются весьма часто. На рис. 13 изображены стереографические проекции направлений магнитного поля (заштрихованные области и сплошные линии), при которых возникают откры-Разные рисунки соответствуют

Рассмотрение стереографических проекций (см. рис. 13) показывает, что имеются различные области направлений магнитного поля: а) в которых отсутствуют открытые траектории (незаштрихованные), б) в которых



Рис. 12.

имеются слои открытых траекторий с единым направлением открытости (заштрихованные) и в) в которых имеются слои открытых направлений с различным направлением открытости (дважды заштрихованные). Кроме

$$\rho = 2\theta/\pi, \ \chi = \phi,$$

где θ , ϕ — азимутальный и полярный углы соответственно.

^{*)} Стереографическая проекция — это изображение полусферы единичного радиуса на плоскости, на которой положение точки задается полярными координатами **ρ** и χ. Соответствие с точками на полусфере устанавливается следующими равенствами:

того, имеются по крайней мере четыре типа особых направлений магнитного поля:

1. Направления магнитного поля, при которых существует слой открытых траекторий, образуют одномерное множество. Это бывает, в частности, если имеется изолированное направление открытых траекторий. Примерами могут служить направления, перпендикулярные к оси для поверхности типа «гофрированный цилиндр», сплошные жирные



Рис. 13. Стереографические проекции направлений магнитного поля (заштрихованные области и сплошные линии), приводящих к открытым траекториям для различных видов поверхности Ферми типа «пространственная сетка».

линни на стереографических проекциях для случая поверхности типа «пространственная сетка».

2. Границы двумерных областей (телесных углов), в которых имеются открытые траектории (границы заштрихованных областей на рис. 13).

3. Изолированное направление внутри области открытых траекторий, в котором слой открытых траекторий вырождается в изолированные сечения (точки на рис. 13). Как правило, это направление совпадает с направлением оси 3, 4 или 6-го порядка.

4. Граница области тех направлений магнитного поля, при которых имеются слои открытых траекторий с различными направлениями открытости (границы дважды заштрихованных областей на рпс. 13).

При направлениях магнитного поля, не совпадающих с особыми, должна наблюдаться следующая ситуация:

а) в незаштрихованных областях (область замкнутых сечений) сопротивление стремится к постоянному значению (насыщение), а «константа» Холла определяется объемом, либо занятым электронами, либо свободным от «дырок» (см. § 5);

б) в однократно заштрихованных областях (есть слои открытых траекторий с о б щ и м направлением открытости) сопротивление возрастает пропорционально квадрату магнитного поля (за исключением того случая, когда электрический ток, перпендикулярный к магнитному полю, перпендикулярен к направлению открытости); «константа» Холла сложным образом зависит от интеграла столкновений (см. стр. 429); в) в дважды заштрихованных областях (имеются слои открытых траекторий с различными направлениями открытости) сопротивление стремится к постоянной величине (насыщение), «константа» Холла зависит от интеграла столкновений и очень мала (при *H* → ∞ она стремится к нулю).

Рассмотрим теперь зависимость сопротивления от величины и направления магнитного поля вблизи особых направлений.

1. Вблизи направлений, изображенных жирными линиями на рис. 13, ситуация вполне аналогична той, которая имеет место при поверхности Ферми типа «гофрированный цилиндр» вблизи плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра. В частности, справедлива формула (6,8). Угол ϑ



в данном случае измеряет «расстояние» до жирных линий на стереографических проекциях.

2. Рассматривая поведение сопротивления вблизи границ двумерных областей, в которых имеются открытые траектории, нужно учесть, что в незаштрихованных областях содержатся лишь замкнутые траектории, а в заштрихованных, наряду с ними, — открытые траектории. причем их количество (ширина слоя) обращается в нуль на границе. В связи с этим вне заштрихованной области стандартная зависимость сопротивления от магнитного

поля (насыщение) осуществляется вплоть до самой границы, а при подходе к границе со стороны заштрихованной области зависимость сопротивления от величины и направления магнитного поля имеет следующий вид ⁵⁶:

$$\boldsymbol{\varrho} = \vartheta \beta \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 \cos^2 \alpha + A \tag{6.10}$$

(обозначения те же, что и в формуле (6,8)). На рис. 14 изображена зависимость от направления магнитного поля вблизи рассматриваемых особых направлений.

3. Аналогичная ситуация имеет место и вблизи изолированных направлений, в которых слои открытых траекторий вырождаются в изолированные сечения (точки на рис. 13). В частности, сохраняет свою справедливость формула (6,10). На рис. 14 изображена зависимость от направления магнитного поля и в этом случае.

При вращении магнитного поля в плоскости в ряде случаев может получиться розетка сопротивления (зависимость сопротивления от направления при фиксированной величине магнитного поля), содержащая три типа особенностей.

Для рассмотренных здесь зависимостей характерно, что при избранном направлении тока (при $\alpha = \pi/2$) аномалия в зависимости сопротивления исчезает.

4. На границах дважды заштрихованных областей сопротивление переходит от насыщения (внутри области) к квадратичной зависимости (вне области). Аналитическое выражение для сопротивления вблизи границы имеет следующий вид:

$$\varrho = \frac{\varrho'}{\vartheta A + (H_0/H)^2} , \qquad (6,11)$$

где о' и A — плавные функции углов, причем A ~ 1.

Как мы видим, изучение открытой поверхности Ферми типа «пространственная сетка» приводит к самым разнообразным ситуациям и показывает, что сопоставление асимптотических зависимостей сопротивления от величины магнитного поля при различных его направлениях с теоретическими «картинками», т. е. со стереографическими проекциями типа тех, которые изображены на рис. 13, позволяет не только определить тип поверхности Ферми, но и достаточно подробно изучить ее форму.

Аналогичный анализ может быть проведен и для поверхностей других типов. Например, в работе ⁵⁸ выяснена зависимость сопротивления от величины и направления магнитного поля металлов, поверхность Ферми которых — «плоская сетка» (рис. 15).

Во всех случаях характерными свойствами металлов с открытой поверхностью Ферми являются, во-первых, резкая анизотропия поперечного



Рис. 15. Открытая поверхность Ферми олова 58.

(относительно магнитного поля) сопротивления, а во-вторых, существенная зависимость сопротивления от направления электрического тока (при $j \perp H$).

До сих пор мы рассматривали те случаи, когда в незаштрихованных областях, т. е. при тех направлениях магнитного поля, когда нет открытых сечений, сопротивление стремится к константе. Это означает, что отсутствует компенсация дырочных и электронных объемов. Если такая компенсация имеет место, то в незаштрихованных областях наблюдается квадратичный рост сопротивления (как и в заштрихованных областях). На границах этих областей сопротивление испытывает излом. Аналогичные изломы наблюдаются при всех особых направлениях. Подробно этот случай в связи с исследованиями гальваномагнитных свойств олова *) изучен в работе Н. Е. Алексеевского, Ю. П. Гайдукова, И. М. Лифшица и В. Г. Песчанского ⁵⁸. Характерные стереографические проекции типа «плоская сетка» изображены на рис. 17. Отметим еще, что, как и в случае замкнутых поверхностей, компенсация дырочного и электронного объемов — не случайное явление. Она должно иметь место всегда, когда число электронов на ячейку кристалла четно.

^{*)} Поверхность Ферми олова состоит из открытой поверхности типа «плоская сетка» (см. рис. 15) и ряда замкнутых полостей, форму которых невозможно исследовать с помощью описываемых здесь методов. Для исследования формы замкнутых полостей используются резонансные, магнитоакустические и др. методы.



* 1984 service 1



За последние годы проведена большая работа по сопоставлению экспериментальных результатов для зависимости сопротивления от величины магнитного поля с различными моделями поверхностей Ферми. На рис. 16 для примера изображены результаты экспериментов по анизотропии сопротивления.

Зависимость «константы» Холла от направления магнитного поля у металлов с открытыми поверхностями Ферми носит своеобразный характер (см. также рис. 11), что позволяет использовать измерения эффекта Холла для изучения структуры электронного энергетического спектра ⁵⁹.

В частности, с помощью измерения «константы» Холла можно выяснить, является ли насыщение сопротивления следствием замкнутости



Рис. 17. Спектрографические проекции особых направлений магнитного поля для изоэнергетических поверхностей типа «плоская сетка» (см. рис. 15).

всех сечений или, наоборот, следствием существования слоев открытых сечений с различными направлениями открытости. Во втором случае «константа» Холла быстро (как 1/H²) стремится к нулю ⁵⁸.

Как говорилось выше, асимптотическое значение «константы» Холла не зависит от характера столкновений для всех тех направлений магнитного поля, при которых отсутствуют открытые сечения (см. § 5), а $n_1 \neq n_2$. Аналогичная ситуация имеет место, если, кроме замкнутых сечений, имеется изолированное открытое сечение (третий случай особых направлений). При таких направлениях

$$R_{\infty} = \frac{i2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\Delta V \pm d_{\min}b_1b_2}, \qquad (6,12)$$

где $\Delta V = V_1 - V_2 = (2\pi\hbar)^3 (n_1 - n_2)/2$, а определение величин d_{\min} , b_1 и b_2 ясно из рис. 18. Знак определяется направлением движения электрона по открытой траектории. Отсюда видно, что измерение «константы» Холла в этих избранных направлениях позволяет определить не только минимальный диаметр трубки, содержащей направления открытости, но и направление движения электрона. Величину ΔV , если она не равна нулю, необходимо измерить при других направлениях магнитного поля.

Резкая зависимость сопротивления от направления магнитного поля в некоторых случаях позволяет объяснить линейное возрастание сопротивления поликристаллов с ростом магнитного поля (закон П. Л. Капицы). Действительно, если квадратичный рост ($\varrho \sim H^2$) наблюдается в узком интервале углов $\Delta \theta \sim H_0/H$ (см. формулу (6,8)), любое усреднение сопротивления по углам в интервале $\delta \theta \gg H_0/H$ (включающем $\Delta \theta$) приводит к линейному возрастанию сопротивления с ростом поля. При этом следует подчеркнуть, что характер усреднения ввиду малости ширины максимума не играет особой роли: в частности, усреднение проводимости и последующий переход к обратным величинам приводит к тому же результату — линейной зависимости сопротивления от магнитного поля ⁵⁵. Весьма возможно, что это не единственная причина линейного возраста-

NULLIN APR

ння сопротивления. Как показал Е. С. Боровик ⁵⁰, линейная зависимость часто наблюдается в переходной области (при $H \sim H_0$) от квадратичной зависимости в малых полях ($H \ll H_0$) к насыщению либо ко второй квадратичной зависимости в больших полях ($H \gg H_0$). Поэтому в некоторых случаях линейная зависимость может озна-

случаях линеиная зависимость может означать, что измеренные значения сопротивления нельзя рассматривать как асимптотические. Наконец, сравнительно недавно М. Я. Азбель ³⁵ и М. Я. Азбель и В. Г. Песчанский ³⁵а показали, что учет границы образца даже для образцов сравнительно большого размера, по-видимому, может привести к существенному усложнению зависимости ϱ (Н). В частности, при $r \ll l^2/d$, где d — порядка толщины проволоки, сопротивление линейно зависит от магнитного поля.

До сих пор для построения теории гальваномагнитных свойств мы использовали классические представления. Возможность пренебрежения квантованием

энергии обосновывалась малостью амплитуд осциллирующих с магнитным полем слагаемых. Имеется, однако, квантовый эффект, который может изменить плавны й ход компонент тензора сопротивле-



Рис. 19. Магнитный пробой между открытыми и замкнутыми орбитами ⁶³.

а) Орбита при вероятности пробоя, равной нулю; б) орбита при вероятности пробоя, равной единице; е) зависимость поперечного сопротивления от магнитного поля ($\omega \tau = \frac{eH\tau}{mc}$, $\omega_0 \tau$ характеризует величину вероятности пробоя). ния при изменении магнитного поля. Речь идет о магнитном пробое 60, в результате которого под электрон воздействием магнитного поля может переходить с одной классической орбиты на другую. Вероятность такого перехода *P*, как показал Блаунт⁶¹, сравнительно высока ($P = \exp(-H_{\rm B}/H)$, где $H_{\rm E} = K\Delta^2 m^* c/e\varepsilon_F, \Delta$ — энергетический барьер, отделяющий одну классическую орбиту от другой, К — константа порядка единицы. Поэтому в ряде случаев Р достигает единицы в полях, значительно меньших Н₀ (при которых l = r). Эти переходы особенно существенны, если в результате магнитного пробоя изменяется топология траекторий (траектории из открытых превращаются в замкнутые или наоборот). Если исходить из модели Гаррисона⁶² (т. е. из приближения почти-свободных

электронов), то в результате магнитного пробоя (P = 1) траектории электрона в магнитном поле для всех поливалентных металлов — окружности. Другими словами, в достаточно сильном магнитном поле (однако таком, что еще можно пренебрегать квантованием энергии) электроны ведут себя как электронный газ в свободном пространстве. Эти идеи легли в основу расчета поперечного сопротивления и эффекта Холла в ряде конкретных случаев ⁶³ (рис. 19).

Экспериментальные исследования, по-видимому, подтверждают существование магнитного пробоя у ряда металлов (Mg, Zn⁶⁴).

§ 7. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Магнитное поле изменяет не только сопротивление металла, но и его теплопроводность, коэффициенты Томсона, Пельтье и другие характеристики термоэлектрических явлений ⁶⁵. Это вполне естественно, так как за эти явления ответственны электроны, движение которых существенно изменяется в магнитном поле.

Зависимость теплопроводности и термоэлектрических коэффициентов от магнитного поля часто называют термомагнитными явлениями. Их, как и гальваномагнитные, можно разделить на поперечные и продольные, на четные и нечетные. Последние аналогичны холл-эффекту. Исходя из соображений симметрии, можно построить зависимость термомагнитных коэффициентов от слабого магнитного поля в виде разложения его по степеням. Число независимых компонент у возникающих при этом тензоров (коэффициентов пропорциональности) определяется классом симметрии кристалла. Традиционно (правда, в большинстве случаев на полупроводниках) термомагнитные исследования используются для выяснения механизмов рассеяния носителей заряда. По-видимому, еще нет работ, использующих обсуждаемые свойства металлов для определения параметров электронного энергетического спектра.

С другой стороны, как показывают теоретические работы ^{66, 67} (и как будет видно ниже), исследование термомагнитных свойств в больших полях позволяет определить своеобразную характеристику электронов, весьма полезную при восстановлении спектра.

Не повторяя утверждений, служащих для обоснования квазиклассического подхода (см. § 1 и 4), используем аппарат, разработанный для исследования гальваномагнитных явлений для определения зависимости термомагнитных коэффициентов (см. начало § 3) от величины и направления большого магнитного поля $(l \gg r)$.

Вся совокупность термомагнитных эффектов описывается зависимостью от магнитного поля коэффициентов a_{ik} и κ_{ik} в формуле (3,1). Последние формулами (3,16) связаны с коэффициентами σ_{ik} , b_{ik} , d_{ik} и c_{ik} , причем, согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов ⁶⁷,

$$\sigma_{ik} (\mathbf{H}) = \sigma_{ki} (-\mathbf{H}), \qquad d_{ik} (\mathbf{H}) = d_{ki} (-\mathbf{H}), - T b_{ik} (\mathbf{H}) = c_{ki} (-\mathbf{H}).$$
(7,1)

Тензоры d_{ik} и b_{ik} заданы формулами (3,13), в которые нужно подставить решение кинетического уравнения

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \hat{\boldsymbol{W}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \varphi_i = \boldsymbol{v}_i. \tag{7.2}$$

Уравнение (7,2) выводится аналогично уравнению (5,7) и отличается от него только оператором столкновений (см. формулы (3,6) и (3,7)). При его выводе не уточнялся вид функции распределения фононов или, другими словами, не учитывалось увлечение фононов электронами (см. ниже).

Так как явный вид оператора столкновений не влияет на асимптотическое (в больших магнитных полях) поведение решения, анализ, проведенный в § 5 и 6, применим и в рассматриваемом случае. При выяснении зависимости от большого магнитного поля компонент тензоров тепло-

the under an arrival

проводности \varkappa_{ik} и термоэлектрических коэффициентов a_{ik} можно, кроме того, воспользоваться формулами (3,22), учтя, конечно, что $\varkappa_{ik} \approx -d_{ik}$ (см. (3,24)).

Совершенно ясно, что за исключением, быть может, особых случаев (см. ниже) характер зависимости компонент тензоров b_{ik} , c_{ik} и d_{ik} совпадает с зависимостью от магнитного поля компонент электропроводности. Это позволяет сразу воспользоваться результатами § 5 и 6. Особым следует считать случай равенства чисел электронов и дырок. Как известно, своеобразие этого случая связано с тем, что благодаря компенсации объемов ($n_1 = n_2$) разложение компоненты σ_{xy} (ось z, как всегда, направлена по магнитному полю) начинается с квадратичного члена ($\sigma_{xy} \sim 1/H^2$). Это в свою очередь приводит к квадратичному возрастанию поперечного (относительно магнитного поля) сопротивления. Однако равенство чисел электронов и дырок ($n_1 = n_2$) не означает, что равны ($dV_1/d\varepsilon$) $_{\varepsilon=\varepsilon_F}$ и ($dV_2/d\varepsilon$) $_{\varepsilon=\varepsilon_F}$, где $V_{1(2)}(\varepsilon)$ — объем внутри (вне) электронной (дырочной) части поверхности ε (**p**) = ε . Следовательно, даже при $n_1 = n_2$ ($n_{1(2)} = 2V_{1(2)}(\varepsilon_F)/(2\pi\hbar)^3$ разложение b_{xy} и c_{xy} начинается с члена, пропорционального 1/H (см. формулы (3,22)).

Приведем некоторые основные результаты (подробнее см. в работах 66,67). Во-первых, при замкнутой поверхности Ферми и $n_1 \neq n_2$

$$\varkappa_{xy} = \frac{\pi^2}{3} T \frac{c}{eH} (n_1 - n_2). \tag{7,3}$$

Это означает, что измерение эффекта Ледюка — Риги (как и эффекта Холла) позволяет измерить разность между числами электронов и дырок (n₁ — n₂). Во-вторых, при этих же условиях асимптотический вид матрицы а_{ik} таков *):

$$(\alpha_{ih}) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{xx} & \frac{1}{H} \mathbf{v}_{xy} & \mathbf{v}_{xz} \\ \frac{1}{H} \mathbf{v}_{yx} & \mathbf{v}_{yy} & \mathbf{v}_{yz} \\ \frac{1}{H} \mathbf{v}_{zx} & \frac{1}{H} \mathbf{v}_{zy} & \mathbf{v}_{zz} \end{pmatrix}.$$
 (7,4)

Разложение всех компонент матрицы v_{ik} начинается с нулевых по обратному магнитному полю членов, причем все компоненты v_{ik} (кроме v_{xx} и v_{yy}) зависят от интеграла столкновений, а

$$\mathbf{v}_{xx} \approx \mathbf{v}_{yy} \approx \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{e} \left[\frac{d}{d\varepsilon} \ln \left(n_1 - n_2 \right) \right]_{\varepsilon = \varepsilon_F},\tag{7.5}$$

и, следовательно, изучение эффектов Нернста — Эттингаузена в сильном магнитном поле позволяет измерить своеобразную характеристику электронного энергетического спектра $\left(\frac{d}{d\epsilon}\ln{(n_1-n_2)_{\epsilon=\epsilon_F}}\right)$, которую нельзя определить из гальваномагнитных (или каких-либо иных) экспериментов. В случае квадратичного изотропного закона дисперсии ($\epsilon = p^2/2m$) при $n_2 = 0$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \ln (n_1 - n_2) \Big|_{\varepsilon = \varepsilon_F} = \frac{3}{2\varepsilon_F}.$$
(7,6)

Если число электронов (n_1) равно числу дырок (n_2) и поверхность Ферми замкнута, то все компоненты тензора теплопроводности (\varkappa_{ih}) зависят от характера рассеяния, причем естественно, что асимптотическая

^{*)} Наши обозначения несколько отличаются от обозначений в работе 67.

میں ہے ہوتے ہے۔

зависимость от магнитного поля совпадает с асимптотической зависимостью компонент тензора электропроводности. В частности, поперечные составляющие \varkappa_{xx} , \varkappa_{yy} резко уменьшаются (\varkappa_{xx} , $\varkappa_{yy} \sim 1/H^2$). Это, по-видимому, должно позволить выделить фононный (решеточный) вклад в теплоперенос в металлах. Асимптотика тензора α_{ik} имеет следующий вид:

$$(\boldsymbol{\alpha}_{ih}) = \begin{pmatrix} H\boldsymbol{v}_{xx} & H\boldsymbol{v}_{xy} & H\boldsymbol{v}_{xz} \\ H\boldsymbol{v}_{yx} & H\boldsymbol{v}_{yy} & H\boldsymbol{v}_{yz} \\ \boldsymbol{v}_{zx} & \boldsymbol{v}_{zy} & \boldsymbol{v}_{zz} \end{pmatrix}.$$
(7,7)

В данном случае все компоненты матрицы v_{ik} зависят от углов между вектором **H** и направлениями кристаллографических осей, а их конкретный вид определяется интегралом столкновений. Следует обратить внимание на то, что металлы с $n_1 = n_2$ должны отличаться сравнительно большой термо-э. д. с. в сильном магнитном поле.

Рассмотрение различных случаев открытых поверхностей Ферми показывает, что, как и в случае гальваномагнитных явлений, наиболее характерным отличием от случая замкнутых поверхностей является резкая анизотропия термомагнитных характеристик: при подходе к избранным (особым) направлениям резко меняется асимптотика компонент тензоров \varkappa_{ik} и α_{ik} , причем, как ясно из предыдущего, асимптотика тензора \varkappa_{ik} совершенно аналогична асимптотике тензора σ_{ik} (см. § 6).

Л. Э. Гуревич и Г. М. Недлин ⁶⁸ обратили внимание на то обстоятельство, что эффект увлечения фононов электронами в сильном магнитном поле может изменить асимптотику термомагнитных коэффициентов (по обратному магнитному полю). Дело в том, что роль увлечения сводится (как показано в ⁶⁸) к появлению дополнительной «силы» в правой части уравнения (7,2), причем среднее значение ни одной из компонент этой «силы» не равно нулю (напомним, что в ряде случаев $\bar{v}_x = \bar{v}_y = 0$). Благодаря этому разложение в с е х компонент функции φ_i начинается с не зависящих от магнитного поля членов. Мы не выписываем окончательных результатов работы ⁶⁸. Отметим только, что эффект увлечения наиболее существен при не слишком низких температурах (при $T \gg T_0$, где $T_0 = \theta (\theta/\varepsilon_F)^{1/2}$).

§ 8. НОРМАЛЬНЫЙ СКИН-ЭФФЕКТ

Поведение металла в переменных электромагнитных полях описывается уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$
(8,1)

которые нужно дополнить связью между плотностью тока **ј и электрическим полем Е** электромагнитной волны. Так как нас не будут интересовать нелинейные эффекты, можно перейти к компонентам Фурье:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_{\omega} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}_{\omega}. \tag{8.2}$$

В дальнейшем индекс ω мы будем опускать, имея, однако, в виду, что зависимость от времени всех величин экспоненциальная (E, H, $\mathbf{j} \sim e^{-i\omega t}$).

Для установления связи между полем Е и плотностью тока **ј** в общем случае необходимо выписать линеаризированное кинетическое уравнение

440

(см. § 1, 2) с не известным, но зависящим от координат согласно уравнению (8,2) электрическим полем E (r). Найденная из этого уравнения функция распределения подставляется в формулу (1,2) для плотности тока j, а затем плотность тока j — в систему (8,1), с помощью которой находится зависимость от координат электрического и магнитного полей (см. § 9). Однако если частота электромагнитного поля ω значительно меньше частоты столкновений $v_0 = 1/\tau$, а расстояние, на котором поле меняется, существенно (глубина скин-слоя δ) значительно больше длины свободного пробега l, для связи между плотностью тока и электрическим полем можно пользоваться статическим значением тензора электропроводностей или тензора сопротивлений (пормальный скин-эффект):

$$\mathbf{j}_i = \sigma_{ik} E_k, \quad E_i = \varrho_{ik} \mathbf{j}_k. \tag{8.3}$$

Чтобы иметь возможность учесть влияние постоянного магнитного поля, мы не будем предполагать заранее тензоры σ_{ik} и ϱ_{ik} симметричными (см. § 4).

Так как электромагнитное поле, как правило, затухает на длине волны, наиболее удобной характеристикой высокочастотных свойств металла *), несомненно, является поверхностный импеданс (поверхностное сопротивление) — двумерный тензор второго ранга, вводимый следующим соотношением ⁴:

$$E^{(0)}_{\alpha} = \zeta_{\alpha\beta} [\mathbf{Hn}]^{0}_{\beta} \qquad (\alpha, \ \beta = x, \ y). \tag{8.4}$$

Здесь индекс (0) означает, что значения компонент поля берутся на границе металла, **n** — единичный вектор нормали к поверхности. Оси координат выбраны так, что ось *z* параллельна вектору **n**.

ζ_{αβ}, как показано в⁶⁹, является тензором; к нему применимы соотношения Онсагера:

$$\zeta_{\alpha\beta}(\mathbf{H}) = \zeta_{\beta\alpha}(-\mathbf{H}). \tag{8.5}$$

Кроме того, можно показать, что для поверхностного сопротивления имеют место дисперсионные соотношения, аналогичные соотношениям Крамерса — Кронига ⁴. В частности, для изотропного случая

$$\zeta = \zeta' + i\zeta'', \quad \zeta''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\zeta'(x) dx}{x^2 - \omega^2}. \quad (8,6)$$

Использование поверхностного импеданса весьма облегчает решение электродинамических задач, внешних по отношению к металлу: отражение электромагнитной волны, расчет резонаторов и т. п. Это связано с тем, что для оптически плотной среды (а металл — несомненно оптически плотная среда) импеданс практически не зависит от формы поля, т. е. от угла падения волны, и от ее поляризации **). Это позволяет вычислить импеданс в простейшем случае нормального падения волны на металлическое полупространство, а равенство (8,4) использовать как эффективное граничное условие (приближение Фока — Леонтовича ⁷²). Мы в дальнейшем, не оговаривая того, будем всегда считать, что волна распространяется нормально к поверхности металла.

^{*)} В этом и последующих параграфах речь идет только о металлическом полупространстве (точнее, об образцах, размеры которых значительно больше длины волны и длины затухания).

волны и длины затухания). **) См. обзор В. Л. Гинзбурга и Г. П. Мотулевич ⁷⁰. Для случая аномального скин-эффекта (см. § 9) последнее утверждение строго доказано в работе ⁷¹, в которой вычислены поправки к поверхностному импедансу, обусловленные наклоном падающей волны.

Используя формулы (8,2) и (8,3), можно показать, что компоненты тензора ζ_{αβ} — корни следующей системы уравнений ⁴:

$$\zeta_{\alpha\gamma}\zeta_{\gamma\beta} = \eta_{\alpha\beta}, \quad \eta_{\alpha\beta} = -\frac{i\omega}{4\pi}\varrho_{\alpha\beta}. \tag{8,7}$$

Однако при расчетах удобнее пользоваться избранной системой координат. Так, если $\varrho_{\alpha\beta}$ — симметричный тензор (внешнее магнитное поле отсутствует), то $\zeta_{\alpha\beta}$ — также симметричный тензор, главные значения которого

$$\zeta_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega \varrho_{1,2}}{4\pi i}}, \qquad (8,8)$$

а $\varrho_{1,2}$ — главные значения тензора $\varrho_{\alpha\beta}$. Отметим, что поверхностный импеданс (даже его главные значения) зависит от направления нормали к поверхности металла, потому что от этого направления зависят компоненты $\varrho_{\alpha\beta}$. Для кубического кристалла тензор ϱ_{ik} вырождается в скаляр и, следовательно, эта зависимость отсутствует.

Система координат, в которой тензоры $\varrho_{\alpha\beta}$ и $\zeta_{\alpha\beta}$ диагонализуются, называются главными направлениями. Если $\varrho_{\alpha\beta}$ — симметричный тензор (H = 0), то главные направления перпендикулярны друг к другу.

Скиновые глубины для волн различной поляризации различны:

$$\delta_{1,2} = \sqrt{\frac{c^2 \varrho_{1,2}}{2\pi\omega}}.$$
 (8,9)

Распространение электромагнитных воли в металлах, помещенных в сильное магнитное поле ($r \ll l$), обладает рядом интересных особенностей *), обнаруженных в последние годы.

Для рассмотрения этих особенностей удобно уравнение Максвелла (8,2) записать в несколько иной форме ⁷⁴:

$$\frac{\partial E_{\pm}}{\partial x_3} = -\frac{i\omega}{c\beta_+} H_{\pm}, \qquad \frac{\partial H_{\pm}}{\partial x_3} = \frac{4\pi\beta_{\pm}}{c\varrho_{\pm}} E_{\pm}, \qquad (8,10)$$

где

$$E_{\pm} = E_{1} + \frac{1}{\beta_{\pm}} E_{2}, \quad H_{\pm} = H_{1} - \frac{1}{\beta_{\pm}} H_{2},$$

$$\varrho_{\pm} = \varrho_{1} + \frac{1}{\beta_{\pm}} \varrho_{21}, \quad \beta_{\pm} = \frac{\varrho_{1} - \varrho_{2}}{2\varrho_{12}} \pm \sqrt{-1 + \left(\frac{\varrho_{1} - \varrho_{2}}{2\varrho_{12}}\right)^{2}}.$$

$$\left. \right\}$$
(8,11)

Значение параметров ϱ_1 , ϱ_2 и ϱ_{12} ясно из следующего вида двумерного тензора сопротивлений:

$$\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varrho}_1 & \boldsymbol{\varrho}_{12} \\ -\boldsymbol{\varrho}_{12} & \boldsymbol{\varrho}_2 \end{pmatrix}. \tag{8,12}$$

Подобная форма тензора $\varrho_{\alpha\beta}$ означает, что путем диагонализации, симметричной части тензора $\varrho_{\alpha\beta}$, выбраны оси «1» и «2».

442

^{*)} Напомним, что мы рассматриваем квазистатический случай, т. е. не учитываем пространственной и временной дисперсии. При $H \neq 0$ к условиям $\omega \ll v_0$, $l \ll \sigma$ надо добавить условие $\omega \ll \omega_H = eH/m^*c$, которое, правда, всегда выполнено в сильном магнитном поле ($\omega_H \gg v$, если $l \gg r$).

Предполагая электромагнитную волну плоской (E, H $\sim e^{ikx_3}$), находим дисперсионное уравнение, связывающее волновой вектор k и часτοτy ω:

$$k^2 = \frac{4\pi i \omega}{c^2 \varrho_+}, \qquad (8,13)$$

из которого видно, что в данной среде могут распространяться д в е волны. В наиболее интересном случае сильной гиротропии | ϱ_{12} | >> $\gg |\varrho_1 + \varrho_2|$ «сопротивление» ϱ_{\pm} оказывается почти чисто мнимым $(\varrho_{\pm} \approx$ $\approx \mp i \varrho_{21}$) и, следовательно, одна из волн почти незатухающей (геликои-дальная или спиральная волна ⁷³). Отсутствие диссипации обусловлено тем, что колебания связаны только с холловским током. Большая гиротропия ($|\varrho_{12}| \gg \varrho_1 + \varrho_2$) имеет место, как это ясно из формулы (5,27), в тех случаях, когда волна распространяется в металле с неравными числами электронов и дырок $(n_1 \neq n_2)$ вдоль магнитного поля.

Если анизотропия превышает гиротропию, $|\varrho_1 - \varrho_2| > 2 |\varrho_{12}|$, то собственные волны оказываются линейно поляризованными (В + - действительные величины), причем главные направления не перпендикулярны друг к

другу. Угол ф между главными направлениями определяется следующей формулой:

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)^2}{4\varrho_{12}^2} - 1}.$$
 (8,14)

При $|\varrho_1 - \varrho_2| = 2 |\varrho_{12}|$ главные направления совпадают.

В сильном магнитном поле ($r \ll l$) преобладание анизотропии над гпротропией $(|\varrho_1 - \varrho_2) > 2 |\varrho_{12}|)$ должно наблюдаться у металлов с равными числами электронов и дырок $(n_1 = n_2)$, а наиболее отчетливо — у металлов с открытыми поверхностями Ферми, для которых при определенных направлениях магнитного поля компоненты Q₁ и Q₂ имеют различную асимптотику по магнитному полю (см. § 6, в частности формулу (6,7)).

В принятых обозначениях импеданс удобно определить следующим образом:

$$\zeta_{\pm} = \beta_{\pm} \left(\frac{E_{\pm}}{H_{\pm}} \right)_{x_{B}=0}.$$
 (8,15)

Это позволяет пользоваться обычными формулами, связывающими импеданс и комплексный коэффициент отражения:

$$R_{\pm} = -\frac{1+\zeta_{\pm}}{1-\zeta_{\pm}}, \quad \zeta_{\pm} = \sqrt[]{\frac{\omega \varrho_{\pm}}{4\pi i}}.$$
 (8,16)

В заключение этого параграфа обращаем внимание на эффект, специфический для анизотропных (или гиротропных) проводников, несколько изменяющий значение поверхностного импеданса и не связанный с частотной зависимостью тензора электропроводности. Речь идет об учете термоэлектрических сил при расчете поверхностного импеданса ⁷³. Если нормаль к поверхности образца не совпадает с одним из главных направлений тензора Q_{ik} («косой срез»), то вдоль оси z при падении электромагнитной волны появляется электрическое поле E_z (которое находится из условия $j_z = 0$). Оно приводит к возникновению градиента температуры, пропорционального напряженности поля в падающей волне. Самосогласованное решение задачи, включающей уравнения Максвелла и уравнение теплопроводности, приводит в случае одноосного кристалла *) к следующему результату. Если выбрать оси так, как показано на рис. 20

*) Главные значения тензора $\varrho_{ik}: \varrho_1 = \varrho_{\parallel}, \ \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_{\parallel}.$



Рис. 20.

(«1» — направление оси кристалла), то одно из главных значений импеданса не изменяется:

$$\zeta_{x} = \sqrt{\frac{\omega \varrho_{xx}}{4\pi \iota}}, \quad \varrho_{xx} = \varrho_{\perp}, \quad (8,17)$$

а второе существенно зависит от условия теплообмена. Если граница поддерживается при постоянной температуре, то

$$\zeta_{y} = \sqrt{\frac{\omega \varrho_{yy}}{4\pi i}} \sqrt{2} \frac{\sqrt{b} + \sqrt{1+a}}{(1+b+\sqrt{(1-b)^{2}-4ab})^{1/2} + (1+b-\sqrt{(1-b)^{2}-4ab})^{1/2}},$$
(8,18)

а если граница адиабатична (поток тепла через границу равен нулю), то

$$\zeta_{y} = \sqrt{\frac{\omega \varrho_{yy}}{4\pi i}} \times \\ \times \sqrt{\frac{1+a}{2}} \frac{(1+a+1)(1-b)^{2}-4ab)^{1/2}+(1+a-\sqrt{(1-b)^{2}-4ab})^{1/2}}{\sqrt{b}+\sqrt{1+a}}; \quad (8,19)$$

здесь $\varrho_{yy} = \varrho_{\perp} \cos^2 \varphi + \varrho_{\parallel} \sin^2 \varphi$, $a = T \alpha_{xy}^2 / \varrho_{yy} \varkappa_{zz}$, $b = c^2 C \varrho_{yy} / 4 \pi \varkappa_{zz}$ (С - теплоемкость единицы объема, остальные обозначения см. в § 3). Для хороших металлов, как правило, $a \ll 1$, $b \gg 1$, и роль термоэлектрических сил в скин-эффекте совершенно незначительна. Однако для металлов типа Ві (а также для полупроводников) рассмотренный эффект может оказаться очень значительным. Термоэлектрических и в скин-эффекте и в изотрошных истолист и нелистрически и констатти

Термоэлектрические силы в скин-эффекте могут проявиться и в изотропных проводниках (поликристаллах и кристаллах кубической симметрии), если их поместить в магнитное поле ⁷⁵.

§ 9. АНОМАЛЬНЫЙ СКИН-ЭФФЕКТ

В этой части обзора (как мы уже говорили в § 1) рассматриваются только квазистатические свойства нормальных металлов. При этом под квазистатическими свойствами понимаются такие, при которых характерные частоты ω значительно меньше частоты столкновений $v_0 = -1/\tau$ ($\omega \ll v$). Однако формулы, выведенные в предыдущем § 8, перестают быть справедливыми, как правило, при частотах значительно меньших частоты столкновения v. Это связано с тем, что с повышением частоты при низких температурах у достаточно чистых образцов глубина скин-слоя δ сравнивается с длиной свободного пробега l и может даже стать значительно меньше последней.

Отражение электромагнитных волн от металла в подобных условиях $(l \ge \delta)$ носит название аномального скин-эффекта, а в тех случаях, когда $l \gg \delta$ — предельно аномального скин-эффекта *). Легко проверить, что условие $l \gg \delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$ не противоречит условию $\omega \ll v$. Условие совместности этих неравенств можно записать как условие, наложенное на частоту столкновений:

$$v \ll \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \frac{v}{c} \,, \tag{9,1}$$

где $\omega_0 = 4\pi ne^2/m$, v — скорость электронов на границе Ферми, причем для оценок использовались простейшие предположения о законе дисперсии электронов проводимости (см. формулу (2,19)). Для хорошего металла условие (9,1) означает, что длина свободного пробега $l = v\tau =$

444

^{*)} Аномальный скин-эффект экспериментально обнаружил Лондон ⁷⁶. Первоначальный вариант теории этого явления содержится в работах Ройтера и Зондгаймера ⁷⁷, а также Пиппарда ⁷⁸.

= v/v должна быть значительно больше 10⁻⁵см, что легко осуществляется в области гелиевых температур у чистых образцов металлов *).

Задача данного параграфа — получение и обсуждение формул для поверхностного импеданса в случае предельного аномального скинэффекта ($l \gg \delta$). Постоянное магнитное поле предиолагается равным нулю. Распространение электромагнитных волн в металлах при $H \neq 0$ обладает рядом интереснейших особенностей и требует специального подробного обсуждения (см., например, работу ⁸⁰).

Формально роль неоднородности электрического поля учитывается тем, что в кинетическом уравнении оставляется слагаемое, описывающее изменение функции распределения с координатой $\mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}}$ (см. уравнения (2,1) и (1,16)). В связи с этим кинетическое уравнение превращается в интегро-

пифференциальное уравнение, для решения которого надо сформулировать граничные условия для функции распределения /1 электронов. Эти граничные условия должны отражать физическую картину столкновения электронов с поверхностью образца. В строгой постановке форусловий мулировка граничных сложная задача, по сути дела. выходящая за рамки полуфеноменологического описания, которым мы здесь пользуемся. Однако для целей настоящего параграфа эта формулитак не обязательна, как ровка интересующая нас величина (поверхностный импеданс) весьма мало чувствительна к характеру граничных



Рис. 21. Электрон, движущийся под углом к поверхности, только малую часть свободного пробега проводит в скин-слое.

условий. Такая нечувствительность поясняется следующим рассуждением: при $l \gg \delta$ главную роль играют электроны, движущиеся параллельно границе металла (рис. 21). Они взаимодействуют только с поперечными компонентами электрического поля, которые определяются электродинамическими граничными условиями (непрерывность тангенциальных составляющих напряженности электрического и магнитного полей). Нормальную составляющую электрического поля можно, рассчитывая поверхностный импеданс при $l \gg \delta$, опустить, а именно: она существенно зависит от граничных условий, наложенных на функцию распределения. Это качественное рассуждение мы подтвердим следующим образом. Вместо правильных (физических) граничных условий мы будем использовать «удобные» (т. е. позволяющие значительно упростить расчет) граничные условия двух видов, и покажем. что переход от одних граничных условий к другим несущественно изменяет величину поверхностного сопротивления. Строгая формулировка граничных задач для электронов с анизотропным законом дисперсии содержится в работах 35, 35а.

Итак, рассмотрим нормальное падение электромагнитной волны на металлическое полупространство (z > 0).

^{*)} Отметим, что, по сути дела, условие (9, 1) не ограничивает область применимости полученных ниже выражений; скорее, оно ограничивает использованный метод их вывода. Так как длина пробега и частота столкновений из окончательных формул вовсе выпадают, все формулы справедливы вилоть до частот порядка и больше частоты столкновений. Только при $\omega \gg v$ все рассмотрение оказывается несправедливым (см. ⁷⁷, а также ^{70,79}).

Уравнения Максвелла для поля в металле в этом случае имеют следующий вид:

$$\frac{i\omega}{c}H_{x} = -\frac{\partial E_{y}}{\partial z}, \quad \frac{4\pi}{c}j_{y} = \frac{\partial H_{x}}{\partial z}, \\
\frac{i\omega}{c}H_{y} = \frac{\partial E_{x}}{\partial z}, \quad \frac{4\pi}{c}j_{x} = -\frac{\partial H_{y}}{\partial z}, \\
H_{z} = 0, \quad j_{z} = 0.$$
(9.2)

Уравнение $j_z = 0$ служит для исключения продольного поля (E_z) из системы уравнений. Мы воспользуемся методом Фурье (разложением по плоским волнам) и выразим поля в металле (z > 0) через значения



поля на границе (z = 0). При этом удобно реальную границу заменить плоскостью, на которой компоненты поля имеют особенности, а поля считать продолженными в полупространство (z < 0). При этом можно рассмотреть два варианта:

 а) электрическое поле и плотность тока продолжены четным образом, а магнитное поле — нечетным;

б) магнитное поле продолжено четным образом, а электрическое поле и плотность тока — нечетным.

Связь этих вариантов с характером граничных условий будет рассмотрена ниже. На рис. 22 схематически изображена зависимость компонент электрического и магнитного полей от координаты вблизи границы z = 0 в случае четного продолжения электрического поля.

Умножая каждое из уравнений системы (9,2) на e^{ikz} и интегрируя по координате от $-\infty$ до $+\infty$, получим в случае варианта а):

$$\frac{i\omega}{c}H_{hx} = ikE_{hy}, \qquad \frac{4\pi}{c}j_{hy} = -ikH_{hx} - 2H_x(0),$$

$$\frac{i\omega}{c}H_{hy} = -ikE_{hx}, \qquad \frac{4\pi}{c}j_{hx} = ikH_{hy} + 2H_y(0),$$

$$H_{hz} = 0, \qquad j_{hz} = 0;$$
(9.3)

в случае варианта б):

$$\frac{i\omega}{c}H_{kx} = ikE_{hy} + 2E_{y}(0), \qquad \frac{4\pi}{c}j_{hy} = -ikH_{hx},
\frac{i\omega}{c}H_{hy} = -ikE_{hx} - 2E_{x}(0), \qquad \frac{4\pi}{c}j_{hx} = ikH_{hy},
H_{hz} = 0, \qquad j_{hz} = 0.$$
(9,4)

Здесь E_{hx} , E_{hy} и т. д. — трансформации Фурье соответствующих компонент поля:

$$E_{hx} = \int_{-\infty}^{\infty} E_x(z) e^{ihz} dz. \qquad (9,5)$$

446

tora magginados secutos se

Отсюда

$$E_{\mathbf{x}}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{h\mathbf{x}} e^{-ihz} dk.$$
(9,6)

До сих пор наши выкладки были абсолютно точны. Однако для того чтобы решить системы уравнений (9,3) и (9,4), надо знать связь между трансформациями Фурье плотности тока и электрического поля. Если для вычисления этой связи воспользоваться кинетическим уравнением с т о ч н ы м и граничными условиями, эта связь окажется интегральной. Наше упрощение (о котором говорилось выше) сводится к тому, что для вычисления интересующей нас связи мы пренебрежем наличием границы. Если оправдывать пренебрежение границей введением с и ец и а л ь н ы х граничных условий *), окажется, что вариантам а) и б) соответствуют р а з л и ч н ы е граничные условия. С другой стороны, полученные результаты, как мы увидим, мало чувствительны к характеру продолжения. Это и служит подтверждением нашего тезиса о безразличии к граничным условиям.

Определим теперь связь между электрическим полем и током. Кинетическое уравнение, согласно первому параграфу, записывается в рассматриваемом случае следующим образом:

$$v_z \frac{\partial f_1}{\partial z} + \hat{W}_{\mathbf{p}} \{ f_1 \} = - \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \, e \mathbf{v} \mathbf{E}, \qquad (9,7)$$

а плотность тока равна

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f_1 d\Gamma. \tag{9.8}$$

Главным членом в левой части уравнения является слагаемое, содержащее производную, а интегральный член (интеграл столкновений $\hat{W}_{\mathbf{p}}\{f_1\}$) малая добавка, чем можно было бы пренебречь, если бы при этом не возникала особенность при значениях импульса, для которых $v_z = 0$. Отсюда ясно, что главную роль играют скользящие электроны, движущиеся параллельно границам образца (у которых $v_z = 0$). Напомним, что нас интересует случай предельного аномального скин-эффекта, т. е. предельное значение импеданса, соответствующее бесконечно большой длине свободного пробега. Это позволяет пренебречь в правой части слагаемым, содержащим продольную составляющую поля Е. Формально это означает, что нас интересует только главная часть решения уравнения (9,7), связанная с особенностью при $v_z = 0$. Это же соображение позволяет существенно упростить оператор столкновений $\hat{W}_{\mathbf{p}}\{f_1\}$, опустив в нем интегральный член, так как интегрирование по импульсам, несомненно, сглаживает особенность, и следовательно, при vz, близких к нулю, интегральный член «ухода» заведомо значительно больше «прихода» (значительно легче уйти из узкой области состояний, чем в нее попасть!). Это позволяет без ограничения общности записать 81

$$\hat{W}_{\mathbf{p}}\{f_{\mathbf{i}}\} \cong \frac{1}{\tau_{\mathrm{eR}}} f_{\mathbf{i}}.$$
(9,9)

^{*)} Для осуществления этой программы нужно, следуя работе ⁸¹, перейти от функции распределения f_1 к функции $\Phi(z, \mathbf{v}) = f_1(z, \mathbf{v}) - f_1(z_1, -\mathbf{v})$, через которую можно выразить плотность тока, а уравнение для которой оказывается второго порядка и допускает четное и нечетное продолжения. Упрощающие граничные условия формулируются для функции Φ . Четному продолжению электрического поля и использованию связи между j_k и E_k , справедливой в безграничном пространстве, соответствует граничное условие $\frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0$, а печетному — $\Phi(0, \mathbf{v}) = 0$.

Индекс «ск» означает, что подобная запись справедлива только для рассмотрения тех эффектов, в которых главную роль играют скользящие электроны (электроны, у которых $v_z = 0$). Итак, уравнение (9,7) в интересующем нас приближении можно переписать следующим образом:

$$v_z \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{1}{\tau_{\rm cK}} f_1 = -\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} e v_\alpha E_\alpha \quad (\alpha = x, \ y). \tag{9.10}$$

Отсюда и из равенства (9,8) имеем

$$j_{h\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} (\omega, \mathbf{k}) E_{h\beta} \qquad (\alpha, \beta = x, y), \qquad (9,11)$$

а

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{\epsilon(\mathbf{p})=\epsilon_F} \frac{l_{cR}n_{\alpha}n_{\beta}\,dS}{1+(kl_{cR}n_z)^2} , \qquad (9,12)$$

где $l_{c\kappa} = \tau_{c\kappa} v$, $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$; при получении последней формулы мы воспользовались, во-первых, тем, что $-\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \simeq \delta$ ($\varepsilon - \varepsilon_F$), а во-вторых, наличием у поверхности Ферми центра инверсии.

Заметим, что в этом приближении принимается $j_z \equiv 0$, так как соответствующие составляющие тензора σ_{ik} (σ_{α_z} и σ_{zz}), значительно меньшие компонент $\sigma_{\alpha\beta}$, положены равными нулю.

Полученное выражение (9,12) допускает предельный переход к бесконечно большим длинам свободного пробега. Обозначим $\lim_{l_{ck}\to\infty} \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{(\infty)}$.

Нетрудно показать, что

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(\infty)} = \frac{3\pi}{4} \frac{B_{\alpha\beta}}{|\mathbf{k}|} , \qquad (9,13)$$

где

$$B_{\alpha\beta} = \frac{8e^2}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2\pi} \frac{n_{\alpha}n_{\beta}\,d\phi}{K(\phi)}, \qquad (9,14)$$

а $K(\varphi)$ — гауссова кривизна поверхности Ферми в точках, где $n_z = 0$. Для квадратичного закона дисперсии $K(\varphi) = 1/p_F^2$ и $B_{\alpha\beta} = \frac{\sigma}{l} \delta_{\alpha\beta}$ (см. формулу (2,18)).

Вернемся теперь к вычислению поверхностного импеданса, выбрав оси x и y вдоль главных направлений тензора $B_{\alpha\beta}$. Из уравнений (9,3), (9,4), (9,6), а также (9,11), (9,13) и (9,14) имеем, учтя определение импеданса (8,4),

вариант а):

$$\zeta_{x, y}^{(a)} = \frac{1}{\iota \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Re}{\Re^2 - \varepsilon_{x, y}(\Re)} , \qquad (9, 15)$$

вариант б):

$$\frac{1}{\underset{\mathbf{x}, y}{\boldsymbol{\xi}}} = \frac{1}{\iota \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}, y}(\mathfrak{R}) d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}, y}(\mathfrak{R})} , \qquad (9,16)$$

где ε_{α,β} — эффективная диэлектрическая проницаемость металла; главные значения тензора ε_{αβ} равны

$$\varepsilon_{x, y}(\mathfrak{N}) = \frac{4\pi\sigma_{x, y}(\mathfrak{N})}{\omega} \iota, \qquad (9, 17)$$

448

или в нашем случае (см. (9,13))

$$\varepsilon_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathfrak{N}) = \frac{3\pi^2 c}{\omega^2} \frac{B_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}}{|\mathfrak{N}|} i.$$
(9,18)

В отсутствие пространственной дисперсии, т. е. в тех случаях, когда диэлектрическая постоянная не зависит от показателя преломления,







 $\mathfrak{N}=ck/\omega$ (например, в условиях нормального скин-эффекта), $\zeta^{(a)}_{x,u}=$ $= \zeta_{x,y}^{(6)} = 1/\sqrt{\epsilon_{x,y}}$ (ср. с формулой (8,8)). В интересующем нас случае *)

$$\zeta_{x,y}^{(a)} = (1 - i\sqrt{3}) \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(\frac{\omega^2}{3\pi^2 c B_{x,y}}\right)^{1/3}, \qquad (9,19)$$

$$\zeta_{\mathbf{x}, y}^{(6)} = (1 - i\sqrt{3}) \frac{9}{8\sqrt{3}} \left(\frac{\omega^2}{3\pi^2 c B_{\mathbf{x}, y}}\right)^{1/3}.$$
(9,20)

Сравнивая формулы (9,19) и (9,20), мы видим, что полученные выражения отличаются действительным множителем порядка еди-

ницы ($\zeta^{(a)}/\zeta^{(6)} = 16/27$). Этот результат подтверждает наши утверждения относительно слабой зависимости поверхностного импеданса в условиях предельно аномального скин-эффекта от условий на границе. В работе 83 это утверждение строго доказано, т. е. показано, что изменение граничных условий изменяет в импедансе только действительный множитель порядка единицы.

Как видно из формул (9,19), (9,20) и (9,14), анизотропия поверхностного импеданса, т. е. зависимость $\zeta_{\alpha\beta}$ от направления нормали к поверхности металла относительно кристаллографических осей, тесно



Рис. 25. Поверхность Ферми меди.

связана с анизотропией закона дисперсии. Напомним, что интегрирование в формуле (9,14) ведется по линии на поверхности Ферми, где $v_z = 0$

^{*)} Поверхностный импеданс в условиях предельно аномального скин-эффекта с учетом произвольного закона дисперсии был вычислен в работах. Пиппарда 82, М. Каганова и М. Азбеля 83.

(рис. 23). При изменении направления нормали передвигается эта линия, меняется значение интеграла. По зависимости импеданса от направления нормали можно «прощупать» форму поверхности Ферми. Таким образом была определена форма поверхности Ферми меди (Пиппард⁸⁴). На рис. 24 изображена зависимость импеданса меди от направления нормали, а на рис. 25— поверхность Ферми меди. Эксперименты по эффекту де-Гааза ван-Альфена ⁸⁵ и по поглощению ультразвука в магнитном поле ⁸⁶ хорошо согласуются с результатами Пиппарда.

Если считать закон дисперсии изотропным (калий, натрий и др.), формулам (9,17) и (9,18) можно придать следующий вид:

$$\zeta^{(a)} = (1 - i\sqrt{3}) \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(\frac{\omega^2 l}{3\pi^2 c\sigma}\right)^{1/3}, \qquad (9, 19')$$

$$\zeta^{(5)} = (1 - i\sqrt{3}) \frac{9}{8\sqrt{3}} \left(\frac{\omega^2 l}{3\pi^2 c\sigma}\right)^{1/3}, \qquad (9, 20')$$

что позволяет их использовать для определения длины свободного пробега электронов ⁸⁷.

§ 10. ПОГЛОЩЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКА МЕТАЛЛАМИ

В последние годы исследование поглощения звука металлами служит одним из наиболее популярных методов изучения электронного энергетического спектра. Это вызвано тем, что при низких температурах электроны принимают существенное участие в поглощении. Последнее хорошо демонстрируется зависимостью коэффициента поглощения звука от температуры вблизи точки сверхпроводящего перехода: резкое уменьшение коэффициента поглощения при температурах ниже критической лучшее доказательство роли электронов (как известно, при сверхпроводящем переходе ни решетка, ни ее колебания не испытывают практически никаких изменений).

Второе обстоятельство, привлекающее внимание к взаимодействию звука с электронами, связано с тем, что в настоящее время сравнительно легко удается получить образцы металлов, в которых длина свободного пробега электронов значительно больше длины волны звука ($l \gg s/\omega$, s — скорость звука, ω — его частота). При $kl \gg 1$ ($k = \omega/s$) активно взаимодействуют со звуковой волной не все электроны с энергией порядка фермиевской, а только те, которые движутся вместе со звуковой волной, т. е. те, для которых $v_n = s$ (где v_n — проекция скорости электрона на волновой вектор звуковой волны k). Так как скорость электрона примерно в тысячу раз больше скорости звука, можно считать, что активно взаимодействуют со звуком только те электроны, для которых $v_n = 0$. Эта ситуация похожа на ту, которая характерна для аномального скинэффекта (см. § 9). Роль скользящих электронов играют электроны, движущиеся в фазовых плоскостях. В формулу для коэффициента поглощения естественно входит интеграл по пояску $v_n = 0$ на поверхности Ферми (см. ниже, формула (10,8)). Однако использовать непосредственно этот результат для исследования электронного энергетического спектра трудно, так как ответ не выражается только через характеристики, связанные с законом дисперсии. Точнее, коэффициент поглощения зависит еще ∂ε от тензора λ_{ik} (**p**), равного и играющего роль «фононного $\overline{\partial u_{ik}}$ ε=ε_F, $u_{ik} = 0$

заряда», т. е. описывающего взаимодействие электронов и фононов *).

^{*)} Эта трудность отсутствует в теории аномального скин-эффектэ

ł

Наиболее интересные экспериментальные результаты по исследованию электронного энергетического спектра получены путем измерения поглощения звука в сильном магнитном поле $(l \gg r)$ — конечно, при $kl \gg 1$. Как было показано экспериментально Бёммелем⁹⁴ и теоретически Пиппардом⁹⁵, при $l \gg r$ и $kl \gg 1$ наблюдаются осцилляции коэффициента поглощения, период которых определяется только экстремальными диаметрами поверхности Ферми. Наблюдение пиппардовских осцилляций один из основных источников информации о форме поверхности Ферми ряда металлов⁹⁶.

В этом параграфе мы остановимся только на рассмотрении теории поглощения звука металлами в отсутствие магнитного поля. Этому вопросу в настоящее время посвящена относительно большая литература ^{97,101}, причем заметное место занимают работы по выводу основных уравнений, обобщающих уравнения Максвелла и уравнения динамической теории упругости, позволяющие вычислить не только коэффициент поглощения, но и дисперсию скорости звука. Мы же ограничимся только вычислением коэффициента поглощения в двух предельных случаях: в случае низких частот ($kl \ll 1$) и в случае высоких частот ($kl \gg 1$). Можно показать ⁹⁸, что характер поглощения полностью определяется соотношением между длиной пробега и длиной волны звука и практически не зависит от соотношения между частотой звука и частотой столкновений.

В первом случае $(kl \ll 1)$ мы применим макроскопический подход, а кинетическое рассмотрение позволяет установить величину и температурную зависимость входящих в ответ коэффициентов (вязкости, теплопроводности и пр.). Многообразие параметров, описывающих равновесное состояние реального металла, приводит к сложной частотно-температурной зависимости коэффициента поглощения. При этом, если эти параметры независимы и для каждого из них можно ввести некоторое время релаксации τ_j *), коэффициент поглощения Γ (ω) можно записать следующим образом ⁹⁹:

$$|\Gamma(\omega) = \sum_{j} A_{j} \frac{\omega^{2} \tau_{j}}{1 + \omega^{2} \tau_{j}^{2}}, \qquad (10,1)$$

где A_j — коэффициенты, характеризующие, насколько звуковая волна отклоняет тот или иной внутренний параметр (например, температуру) от его равновесного значения. Изучение частотной зависимости коэффициента поглощения Г (ω) позволяет в ряде случаев определить времена релаксации τ_j . Благодаря использованию широкого диапазона частот этот метод (носящий название релаксационного резонанса) позволяет «нащупать» самые различные, в том числе и слабые, взаимодействия, приводящие к диссипации.

Часто зависимость коэффициента поглощения даже при $kl \ll 1$ весьма сложна и не описывается формулой (10,1), однако ее можно выразить в макроскопических терминах (см., например, ¹⁰⁰).

Для вычисления коэффициента поглощения высокочастотного звука $(kl \ge 1)$ необходим кинетический подход.

Принято считать, что прохождение звуковой волны через металл приводит к тому, что энергия электрона є приобретает добавку, пропорциональную тензору деформации и равную

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda_{ik} \left(\mathbf{p} \right) u_{ik} \left(\mathbf{r}, t \right), \tag{10.2}$$

451

^{*)} В простейших случаях τ_j можно выразить через макроскопические коэффициенты. Например, если поглощение звука обусловлено теплопроводностью, то $\tau_j = \varkappa/C_V s^2$, где \varkappa — теплопроводность, C_V — теплоемкость единицы объема.

где λ_{ih} (**p**) = $\left[\frac{\partial e(\mathbf{p})}{\partial u_{ih}}\right]_{u_{ih}\equiv 0}$ — тензор второго ранга, характеризующий взаимодействие электронов с акустическими фононами. Имеется строгий вывод выражения (10,2). Следует отметить, что приведенная формула отличается от точной неучетом слагаемого, связанного с эффектом Стюарта—Толмена¹⁴. Как показывают оценки ⁹⁸, опущенный член в $v_F/s \approx \approx 10^3$ раз меньше приведенного. Зависимость энергии электрона от времени приводит к тому, что система электронов выводится из состояния равновесия. Диссипативные процессы (столкновения электронов с примесями, друг с другом, с фононами) — причина затухания звука, а коэффициент поглощения определяется диссипативной функцией единицы объема ($T\dot{S}$):

$$\Gamma = \frac{T\dot{S}}{E_{\rm aB}}; \qquad (10,3)$$

здесь E_{3B} — энергия звуковой волны, отнесенная к единице объема.

Увеличение энтропии \tilde{S} вычисляется с помощью формул статистической механики, для чего необходимо знать неравновесную функцию распределения электронов (при низких температурах, когда возможно выполнение приведенного выше условия $kl \gg 1$, роль фононов в поглощении звука незначительна). Функцию распределения можно определить из кинетического уравнения Больцмана.

В данном случае, как показано в работе ⁹⁸, линеаризованное кинетическое уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{cr} = -\frac{\partial f_F}{\partial \varepsilon} e \mathbf{v} \mathbf{E} \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \,\tilde{\lambda}_{i_{uulk}},\tag{10.4}$$

где $\tilde{\lambda}_{ik} = \lambda_{ik} - \bar{\lambda}_{ik}$, а черта означает усреднения по всем электронным состояниям, причем в качестве «веса» служит производная от функции Ферми:

$$\overline{\varphi} = \left(\int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} d\Gamma\right)^{-1} \int \varphi \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} d\Gamma.$$
(10,5)

Поперечную часть электрического поля Е нужно найти из уравнений Максвелла, а продольную часть можно включить в перенормировку химического потенциала; она, по сути дела, не входит в электроакустические эффекты в рассматриваемых условиях. Отметим, что при рассматриваемых частотах, естественно, нельзя говорить о колебаниях температуры с подобной частотой $(l \gg \lambda = \frac{s}{\omega}!)$.

Так как частота звука, как правило, значительно меньше частоты релаксации v электронов ($v = 1/\tau$), первое слагаемое в левой части уравнения (10,4) можно опустить. Второе слагаемое следует записать в виде i (kv) f_i , учитывая, что правая часть уравнения пропорциональна $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$. Как мы уже говорили, при $kl \gg 1$ главную роль играют электроны, движущиеся перпендикулярно к волновому вектору. Это (как и в случае аномального скин-эффекта; § 9) позволяет опустить интегральный (приходный) член в интеграле столкновений, сохранив только слагаемое, связанное с уходом электронов из состояний с $v_n = 0$.

Таким образом, кинетическое уравнение (10,4) можно переписать следующим образом:

$$\left(i\mathbf{k}\mathbf{v}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{CR}}}\right)f_{1}=-\frac{\partial n_{F}}{\partial\varepsilon}(e\mathbf{v}\mathbf{E}_{\perp}+\widetilde{\lambda}_{\iota k}\dot{u}_{\iota k}).$$
 (10,6)

Если вместо f₁ ввести новую функцию X равенством

$$f_1 = -\frac{\partial f_F}{\partial \varepsilon} \chi,$$

то можно показать, что при T -> 0

$$T\dot{S} = \frac{v\left(\varepsilon_{F}\right)}{\tau_{CR}} \overline{|\chi|^{2}}, \quad v\left(\varepsilon_{F}\right) = -\int \frac{\partial n_{F}}{\partial \varepsilon} d\Gamma, \qquad (10,7)$$

причем диссипативная функция $T\dot{S}$ распадается на сумму двух слагаемых: первое обусловлено только членом $\tilde{\lambda}_{ih}\dot{u}_{ih}$ в правой части кинетического уравнения (деформационное взаимодействие), а второе — джоулевыми потерями (т. е. обусловлено членом, включающим электрическое поле). При $k^2c^2/4\pi\sigma$ (**k**) $\omega \gg 1$ главную роль играет деформационное взаимодействие, а в обратном предельном случае — джоулевы потери ¹⁰¹.

При $k^2c^2/4\pi\sigma(\mathbf{k}) \omega \gg 1$ для коэффициента поглощения $\Gamma(\omega)$ можно получить следующее выражение ⁹⁸:

$$\Gamma(\omega) \simeq \frac{\pi\omega}{(2\pi\hbar)^3 \, \mathcal{S}\varrho} \int_0^{2\pi} \frac{\widetilde{\lambda}_{ik} \widetilde{\lambda}_{lm} d\varphi}{v^2 K(\varphi)} \, \Phi_{ihlm}; \qquad (10.8)$$

здесь K — гауссова кривизна поверхности Ферми, а интегрирование ведется вдоль линии, где $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$ ($v_n = 0$), что, как мы уже говорили, связано с преимущественной ролью электронов, движущихся в плоскостях равной фазы звуковой волны. Компоненты тензора четвертого ранга Φ_{iklm} порядка единицы и зависят от поляризации \mathbf{q} и направления \mathbf{n} звука ($\Phi_{iklm} = n_i q_k n_l q_m$).

При $k^2 c^2/4\pi\sigma(\mathbf{k})\omega \ll 1$, но $kl \gg 1$, коэффициент поглощения также линейно зависит от частоты, однако с другим коэффициентом ¹⁰¹.

При $k^2 c^2 \approx 4\pi\sigma(\mathbf{k})\omega$ ($kl \gg 1$) должно наблюдаться резкое возрастание коэффициента поглощения, аналогичное кинематическому резонансу. Природа этого увеличения — совпадение длины электромагнитной и звуковой волн ¹⁰¹. В работе В. М. Контаровича ¹⁰¹ показано также, что в этой же области частот должна наблюдаться существенная дисперсия скорости звука.

Как ясно из предыдущего, отличительными особенностями коэффициента поглощения звука при $kl \gg 1$ являются линейная зависимость от частоты и независимость от температуры. При низких частотах $\Gamma \sim \omega^2 \tau$ и растет с понижением температуры вместе с временем релаксации τ .

Так как компоненты тензора λ_{ih} — порядка энергии Ферми, а $K \approx \frac{1}{p_F^2}$, для оценок можно пользоваться следующим выражением для Γ (ω):

$$\Gamma(\omega) \sim \frac{N \varepsilon_F \omega}{v_F \varrho s} \,. \tag{10.9}$$

Линейный закон в зависимости коэффициента от частоты неоднократно наблюдался в экспериментах на различных металлах. Он служит надежным критерием того, что выполняется условие $kl \gg 1$.

В работе ⁹⁸ показано, что справедливость формул (10,8) и (10,9) не ограничивается условием $\omega \tau \ll 1$, при котором формально они были введены. Линейное возрастание $\Gamma(\omega)$ имеет место и при ультравысоких частотах ($\omega \tau \gg 1$).

5 УФН, т. 87, вып. 3

приложения

І. ИЗМЕНЕНИЕ КВАЗИИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОНА ПРИ РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОНА НА СИЛОВОМ ЦЕНТРЕ ⁸⁹

В ряде физических задач ⁹⁰ возникает вопрос об изменении квазиимпульса электрона в единичном акте рассеяния на силовом центре. При квантовомеханическом рассмотрении речь может идти либо о вычислении вероятности перехода из состояния с квазиимпульсом **p** в состояние с квазиимпульсом **p**' (такие вероятности (обозначим их $W_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}}$) обычно используются при исследовании кинетических свойств проводников), либо о вычислении вероятности того, что электрон из состояния **p** перешел**[**в^{*} состояние



Рис. 26. Рассеяние электрона с квадратичным изотропным законом дисперсии от отталкивающего потенциала.

со — кинстическая энергия электрона на бесконечности; х' — точка остановки в х-пространстве; ей соответствует точка p' в импульсном пространстве. Электрон перешел на противоположную сторону изоэнергетической поверхности.

р', причем переход сопровождался «перебросом» на величину $2\pi\hbar b$, где **b** — некоторый вектор обратной решетки. Вероятность W_p^p , пропорциональна квадрату матричного элемента $\langle \mathbf{p} | V | \mathbf{p}' \rangle$,

$$\langle \mathbf{p} | V | \mathbf{p}' \rangle \sim \int \psi_{\mathbf{p}}^* V(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{p}'} dv,$$
 (I,1)

а $\psi_{\mathbf{p}}$ — блоховская волна ($\psi_{\mathbf{p}} = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$), $u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ — периодическая функция, $u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$, а — произвольный период кристаллической решетки, $V(\mathbf{r})$ — потенциал взаимодействия электрона с примесным центром.

Вероятность второго типа (обозначим ее $W^{\mathbf{p}}_{\mathbf{p}',\mathbf{b}}$), как показано в ⁸⁹, равна

$$W_{\mathbf{p}', \mathbf{b}}^{\mathbf{p}} = \frac{2\pi}{\hbar} \,\delta\left(\varepsilon_{i} - \varepsilon_{f}\right) |\langle \mathbf{p} | V | \mathbf{p}', \mathbf{b}\rangle|^{2}, \tag{I.2}$$

где

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{V} | \mathbf{p}', \mathbf{b} \rangle = \int \mathbf{V}(\mathbf{q}) e^{\frac{i\Delta\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\rho}}{\hbar}} dv_{\boldsymbol{\rho}} \sum_{\mathbf{b}'} (A^{\mathbf{p}}_{\mathbf{b}'})^* A^{\mathbf{p}'}_{\mathbf{b}'+\mathbf{b}}, \qquad (I,3)$$
$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}' + 2\pi\hbar\mathbf{b},$$

 A_b^p — фурье-компонента функции u_p (r). Величина $W_{p',b}^p$ характеризует процесс передачи импульса от электрона примесному центру.

При классическом (точнее, при квазиклассическом) подходе можно рассмотреть движение электрона в поле примеси, исходя из его закона дисперсии, и точно указать, в какое конечное состояние перейдет электрон в результате рассеяния. Конечно, в общем виде (при произвольном законе дисперсии и произвольной зависимости потенциала взаимодействия от расстояния) этот вопрос можно решить только путем численного решения уравнений движения $\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}$, $\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{p}}$. Однако некоторые

качественные соображения о характере движения электрона в поле примеси можно высказать, рассматривая лобовое столкновение электрона с примесью. Можно, например, показать, что электрон в процессе рассеяния может перейти с одной полости





Обозначения ясны из рисунка. Электрон возвратился в ту же точку р-пространства.

изоэнергетической поверхности на другую. Если электрон обладает законом дисперсии є = p²/2m (электрон в свободном пространстве), то в результате лобового столкновения может произойти одно из двух: если у него есть точка поворота в координатном пространстве, он перейдет в противоположную точку на изоэнергетической сфере

(рис. 26); если точки поворота нет, электрон возвратится в ту же точку на изоэнергетической сфере, с которой начался процесс рассеяния (рис. 27).

Для электрона, закон дисперсии которого - периодическая функция, ситуация усложняется, так как электрон может отражаться не только от точки, в которой энергия имеет минимум, а скорость обращается в нуль, но и от точки, в которой энергия имеет максимум, так как в этой точке скорость также обращается в нуль.

На рис. 28-30 изображено несколько случаев движения электрона в поле примеси. Для наглядности взят весьма простой закон дисперсии. Анализируя движение в импульсном пространстве, надо иметь в виду, что в тех случаях, когда есть точка остановки (рис. 29 и 30), на электрон все время действует сила одного знака (точка остановки в пространстве импульсов отсутствует), а в тех случаях, когда точки A



Гис. 20. Схема изознерненических поверхносней. В точке A и эквивалентных (A', A'' и т. д.) энергия мини-мальна, в точке B (B', B'' и т. д.) энергия максималь-на. Лобовым столкновением соответствует только движе-ние по линиям AA' (и им энвивалентным) и по линиям B'B' (и им эквивалентным), так как только на этих ли-ниях скорость направлена вдоль оси x. Точки C и D (и эквивалентные C', D', ...) — седловые точки. При движении вдоль линии AA' в точке C энергия максималь-на, при движении вдоль B'B' в точке C энергия мини-мальна.

остановки нет, сила меняет знак, следовательно, р обращается в нуль, т. е. имеется

точка остановки в *р*-пространстве. Как видно из рис. 29, весьма часты случаи ухода частицы в процессе рассеяния в соседнюю ячейку обратной решетки.

В случае рассеяния на малые углы (большие прицельные параметры) нетрудно найти аналитическое выражение для изменения импульса в процессе рассеяния. Если сила, действующая на электрон, является центральной, то изменение

квазнимпульса можно записать следующим образом:

$$\mathbf{p}' - \mathbf{p} = \mathbf{n}\delta_{\parallel} + \mathbf{m}\delta_{\parallel}, \qquad (\mathbf{I}, 4)$$





Рис. 29. Рассеяние электрона с законом дисперсии є (p) = є, изображенном на рис. 28 в поле отталкивающего потенциала.

Если энергия электрона вдали от примеси близка к минимальной ($\varepsilon = \varepsilon_1$), то электрон остается внутри одной ячейки обратной решетки; если энергия близка к максимальной ($\varepsilon = \varepsilon_2$), то электрон переходит в соседнюю ячейку обратной решетки; если энергия такова, что нет точки остановки ($\varepsilon = \varepsilon_2$), то электрон, естественно, всетда возвращается в ту точку *p*-пространства, откуда начался процесс (см. рис. 27).



Рис. 30. Рассеяние электрона с законом дисперсии ε (р) = ε (см. рис. 28) в поле притягивающей примеси (рассеяние от верха закона дисперсии). Если энергия—вблизи минимума ($\varepsilon = \varepsilon_1$), то электрон уходит в другую ячейку; если энергия—вблизи максимума ($\varepsilon = \varepsilon_2$), электрон отсается в своей ячейке. При достаточно малых энергиях (например, $\varepsilon = \varepsilon_3$) у электрона нет точки остановки в x-пространстве (см. рис. 27).

где δ_{\parallel} и δ_{\perp} — изменение импульса вдоль направления скорости $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$ и в перпендикулярном направлении $\mathbf{m} = \mathbf{v}/v$. Так как столкновение упругое, из закона сохранения энергии имеем

$$\varepsilon (\mathbf{p} + \mathbf{n} \delta_{\parallel} + \mathbf{m} \delta_{\parallel}) = \varepsilon (\mathbf{p}). \tag{I.5}$$

Разлагая в ряд по о и о с точностью до членов второго порядка, получаем

$$0 = \mathbf{v} \left(\mathbf{n} \delta_{\parallel} + \mathbf{m} \delta_{\perp} \right) + \frac{1}{2} \left(M^{-1} \right)_{ik} \left(n_i \delta_{\parallel} + m_i \delta_{\perp} \right) \left(n_k \delta_{\parallel} + m_k \delta_{\perp} \right), \tag{I,6}$$

где $(M^{-1})_{ik} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p_i \partial p_k}$ — тензор обратных эффективных масс (см. ¹, приложение I). Скалярное произведение векторов v и m равно нулю, vn = v, члены, содержащие δ^2_{\parallel} и $\delta_{\parallel}\delta_{\perp}$, можно опустить, так как они малы по сравнению с личейным но δ_{\perp} и по

He only cruth, tak kak ohn mani no chabhehnio c линеиным no of
$$4\pi e^{-1}$$

$$\mathbf{v}\delta_{\parallel} = -\frac{1}{2} \, (M^{-1})_{ik} \, m_i m_k \delta_{\perp}^2. \tag{I,7}$$

При рассмотрении потока электронов чаще всего нужно среднее изменение импульса. Усредняя выражение (I, 7) по азимутальному углу и замечая, что $\overline{m_i m_k} = -\frac{1}{2} \delta_{ik}$ (i, k = z, y, ось x вдоль траектории электрона), получаем

$$\delta_{\parallel} = -\frac{1}{4\nu} \left(\frac{1}{M_{zz}} + \frac{1}{M_{yy}} \right) \delta_{\perp}^2(\varrho). \tag{1.8}$$

Заметим, что $\delta_{\parallel} v$ есть изменение среднего импульса единичного потока электронов с прицельным параметром о в единицу времени.

Величину б_ можно определить непосредственно из уравнений движения:

$$\delta_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\rho} dt = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\rho} dx, \qquad (I,9)$$

или, с той же точностью,

ном; поэтому

$$\delta_{\perp} = -\frac{\varrho}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{r}, \quad r = \sqrt{\varrho^2 + x^2}. \tag{I,10}$$

II. МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ МЕТАЛЛА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Как показано в части II обзора ¹, только осцилляции магнитной восприимчивости (эффект де-Гааза — ван-Альфена) можно выразить в терминах закона дисперсии. Парамагнитная и диамагнитная восприимчивости металла зависят не только от состояний электронов с энергией, существенно отличающейся от энергии Ферми, но и от корреляционной функции. Кроме того, нельзя экспериментально отличить вклад электронов проводимости от вклада ионного остова металла.

Азбель и Скроцкая ⁹¹ обратили внимание на то, что измерение магнитного момента металла в предельно больших полях ($\mu H \gg \epsilon_F$, T; для металлов типа Ві это условие выполняется при вполне реальных полях $H \gg 10^4$ э) может дать сведения о структуре основного состояния электронов в сильном поле. Как показано в работе ⁹¹, магнитный момент металла M в сильном поле выражается простой формулой:

$$\mathbf{M} = -N \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{H}} + NT \frac{\partial \ln \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{H}}, \qquad (II,1)$$

где N — плотность электронов, $\varepsilon_0(\mathbf{H})$ и v_0 (\mathbf{H}) — энергия и плотность состояний наинизшего уровня энергии электронов проводимости (наинизшего по всем квантовым числам). Таким образом, измерение магнитного момента и его температурного хода $\partial \varepsilon_0 \qquad \partial$,

дает принципиальную возможность определить $\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{H}}$ и $\frac{\partial}{\partial \mathbf{H}}$ ln v_0 .

Интересно отметить, что зависимость магнитного момента от большого магнитного поля для свободного электронного газа ⁹² существенно отличается от зависимости для электронов в металле. Это связано, как показано в ⁹¹, с различием эффективной и обычной масс.

III. СВОЙСТВА ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ОПЕРАТОРА СТОЛКНОВЕНИЙ \hat{W}_n

Рассмотрим сначала взаимодействие электронов с примесями. Гамильтониан взаимодействия в представлении вторичного квантования записывается следующим образом:

$$H_{\rm int}^{a,\,\rm np} = \sum_{\bf pp'} B_{\bf p'}^{\bf p} a_{\bf p}^{+} a_{\bf p'} + \kappa. \ c., \qquad (III,1)$$

где $a_{\mathbf{p}}^{+}(a_{\mathbf{p}})$ — оператор рождения (уничтожения) электрона с импульсом **р**, а $B_{\mathbf{p}'}^{\mathbf{p}}$ — матричный элемент перехода электрона из состояния **р** в состояние **р**'. Наличие комплексно сопряженных членов (к. с.) обеспечивает эрмитовость оператора взаимодействия $(B_{\mathbf{p}'}^{\mathbf{p}} = (B_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}'})^*).$ Составляя по стандартным правилам интеграл столкновений, имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\rm cr}^{\mathfrak{d}, \ {\rm up}} = \frac{2\pi}{\hbar} \int |B_{\mathbf{p}'}^{\mathbf{p}}|^2 \{f'(1-f) - f(1-f')\} \,\delta\left(\varepsilon - \varepsilon'\right) d\Gamma'. \tag{III,2}$$

Здесь $f(\mathbf{p}) \equiv f, f(\mathbf{p}') \equiv f', \varepsilon(\mathbf{p}) \equiv \varepsilon, \varepsilon(\mathbf{p}') \equiv \varepsilon', а \delta-функция обеспечивает закон сохранения энергии (столкновение предполагается упругим). Вводя вместо <math>f$ новую функцию ф равенством

$$f = n_F - \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \varphi, \qquad (III,3)$$

получим

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\rm CT}^{\mathfrak{d}, \ \rm np} = \int P_{\rm pp'}(\varphi' - \varphi) \, d\Gamma', \qquad (111,4)$$

где

$$P_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = -\frac{2\pi}{\hbar} |B_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}'}|^2 \,\delta\left(\varepsilon - \varepsilon'\right) \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \,. \tag{III,5}$$

Отсюда согласно определению (1,13) действие оператора $\hat{W}_{\mathbf{p}}$ определяется так:

$$\hat{W}_{\mathbf{p}} \varphi = -\frac{2\pi}{\hbar} \int |B_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}'}|^2 \, \mathbf{k}(\mathbf{\epsilon} - \mathbf{\epsilon}') \, (\varphi' - \varphi) \, d\Gamma'.$$

Заметим, что при анизотропном законе дисперсии оператор $\hat{W}_{\mathbf{p}}$ не сводится к оператору умножения, т. е. т-приближение не оправдывается даже в этом простейшем случае упругих столкновений. Построим теперь скалярное произведение типа (1,20):

$$\langle \chi, \hat{W}_{\mathbf{p}} \varphi \rangle = -\frac{2\pi}{\hbar} \int \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \chi |B_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}'}|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon)'(\varphi' - \varphi) d\Gamma' d\Gamma.$$

Меняя в интеграле $\mathbf{p} \leftarrow \rightarrow \mathbf{p}'$ и пользуясь эрмитовостью матрицы $B_{\mathbf{p}'}^{\mathbf{p}}$ (см. выше), легко показать, что

$$\langle \chi, \hat{W}_{\mathbf{p}} \varphi \rangle = -\frac{2\pi}{\hbar} \int \int \frac{1}{2} \left(\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial n'_F}{\partial \varepsilon'} \right) \langle \chi' - \chi \rangle |B_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}'}|^2 \,\delta\left(\varepsilon - \varepsilon'\right) \left(\varphi' - \varphi\right) d\Gamma' d\Gamma.$$
(III,6)

Отсюда немедленно следуют свойства (1, 23) и (1, 24). Рассмотрим тецерь столкновения с фононами. Гамильтониан электрон-фононного взаимодействия удобно записать в следующей форме:

$$H_{int}^{a, \phi} = \sum_{pp'q} \{ A_{p'}^{pq} a_{p}^{+} a_{p'} b_{q}^{+} + A_{pq}^{p'} a_{p'}^{+} a_{p} b_{q} \},$$
(III,7)

где $A_{...}^{...}$ — матричные элементы перехода, обладающие следующей симметрией: $A_{\mathbf{p}}^{\mathbf{pq}} = (A_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{p}'})^*$, обеспечивающей эрмитовость гамильтониана взаимодействия $H_{\mathrm{int}}^{\mathbf{s}, \phi}$; оператор $b_{\mathbf{q}}^{\mathbf{q}}(b_{\mathbf{q}})$ — оператор рождения (уничтожения) фонона с волновым вектором **q**; индекс, указывающий номер зоны (как электронной, так и фононной), мы опускаем.

В формуле (III, 7) суммирование идет по тем импульсам, которые удовлетворяют условию сохранения

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}' = 2\pi\hbar \mathbf{b}, \tag{III,8}$$

где b — произвольный вектор обратной решетки.

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{cr}^{\mathfrak{d}, \Phi} = \int \int \left(L_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{p}'} + L_{\mathbf{p'q}}^{\mathbf{p}}\right) \left(\varphi' - \varphi\right) d\Gamma_{\mathfrak{d}}' d\Gamma_{\Phi}; \tag{III,9}$$

здесь

$$L_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{p}'} = \frac{2\pi}{\hbar T} \sum_{\mathbf{b}} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{q} - 2\pi\hbar \mathbf{b}) \delta(\varepsilon' - \varepsilon - \hbar\omega_{\mathbf{q}}) |A_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{p}'}|^2 n_F (1 - n'_F) N_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}}). \quad (III,10)$$

Для простоты мы предиоложили, что фононный газ находится в равновесии *), и воспользовались свойством симметрии матрицы $A_{\mathbf{p}'}^{\mathbf{pq}}$. Симметрия и положительность ядра интеграла столкновений $\int (L_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{p'}} + L_{\mathbf{p'q}}^{\mathbf{p}}) d\Gamma_{\Phi}$ обеспечивают выполнение свойств (1,23) и (1,24). Отметим, что при записи действия оператора $\hat{W}_{\mathbf{p}}$ его надо разделить на $\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon}$, а при построении скалярных произведений типа (1,20) умножить на эту же функцию.

Нетрудно доказать также аналогичные соотношения в случае электрон-электронных столкновений.

Если использовать явный вид электрон-фононного интеграла столкновений (III,9), можно показать, что предельные температурные законы для сопротивления (выражение (2,28)) имеют место при произвольном законе дисперсии электронов, причем при их выводе используются только весьма общие свойства оператора столкновений.

При высоких температурах линейный закон обеспечивается тем, что при $T \gg \theta$ электронов с фононами квазиупруги и можно, во-первых, пренебречь эпергией фонона в δ-функциях, описывающих закон сохранения энергии, а во-вторых, разложить функцию Бозе $\left(\exp \frac{\hbar\omega}{T} - 1\right)^{-1} \approx \frac{T}{\hbar\omega}$. Другими словами, линейный закон в сопротивлении определяется только тем обстоятельством, что число фононов при $T \gg \theta$ пропорционально температуре.

При низких температурах дело обстоит несколько сложнее. Из структуры интеграла столкновений видно, что вместо декартовых компонент импульса (p_x, p_y, p_z) аргументами функции φ удобно выбрать энергию $\varepsilon = \varepsilon$ (**p**), точнее, величицу $(\varepsilon - \zeta)/T$, и вектор, характеризующий положение электрона на изоэнергетической поверхности, **p**_e. Так как при низких температурах импульс фонона значительно меньше импульса электрона, изменение функции φ в смысле ее зависимости от **p**_e должно рассматриваться как медленное. Это позволяет перейти по этой переменной от интегрального оператора к дифференциальному (в духе уравнения Фоккера — Планка). Величина же $x = (\varepsilon - \zeta)/T$ при каждом столкновении меняется существенно, так как $\hbar \omega \approx T$. Поэтому в смысле действия на φ как на функцию x оператор столкновений остается интегральным и после упрощений, связанных с тем, что $T \ll \theta \ll \varepsilon_F$ (однако $T \gg \theta^2/\varepsilon_F$). В результате довольно громоздких преобразований кинетическое уравнение для функции $\varphi = \varphi_{\mathbf{p}_e}(x)$ (см. уравнение (III,3)) принимает вид

$$T^{-1}e \operatorname{Evn}_{F}'(x) = \left(\frac{T}{\theta}\right)^{3} \int_{-\infty}^{\infty} dx K_{xx'}^{\mathbf{p}_{\mathfrak{g}}} \left[\varphi_{\mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}}(x) - \varphi_{\mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}}(x')\right] + \left(\frac{T}{\theta}\right)^{5} \hat{L} \left\{\varphi_{\mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}}(x)\right\}; \quad (\mathrm{III}, 11)$$

здесь

$$K_{xx'}^{\mathbf{p}_{\mathbf{e}}} = \alpha \frac{(x-x')^2 n_F(x) n_F(x')}{|e^{-x}-e^{-x'}|},$$

 $\alpha = \alpha$ (\mathbf{p}_{ε}) — величина порядка θ/h , зависящая от \mathbf{p}_{ε} , как и интегро-дифференциальный оператор \hat{L} (интегральный по x и дифференциальный второго порядка по \mathbf{p}_{ε}). При получении уравнения (III,11) мы воспользовались тем, что $A_{\mathbf{p}}^{\mathbf{pq}}/\sqrt{\hbar\omega_{\mathbf{q}}}$ при $\mathbf{q} \rightarrow 0$ стремится к пределу, не зависящему от модуля волнового вектора фонона. Первый член справа, пропорциональный (T/θ)³, значительно больше второго, однако пренебречь вторым слагаемым нельзя: оно обеспечивает существование

459

^{*)} Можно показать, что учет увлечения фононов и межфононных столкновений не меняет свойств оператора $\hat{W}_{\mathbf{p}}$ (см., например, ¹⁷).

решения. Действительно, без второго слагаемого уравнение не имеет решения, так как интеграл от левой части по x от — ∞ до ∞ отличен от нуля, а от первого слагаемого — равен нулю.

Решение уравнения (III,11) ищем методом последовательных приближений: выбираем φ в виде функции только от \mathbf{p}_{e} ($\varphi = \varphi_{\mathbf{p}_{e}}$), чтобы обратить в нуль первое слагаемое в левой части уравнения (III,11). Функцию $\varphi_{\mathbf{p}_{e}}$ находим из уравнения, которое получается из уравнений (III,11) интегрированием по x. Ясно, что $\varphi_{\mathbf{p}_{e}} \sim 1/T^{6}$. Это и приводит к приведенной в выражении (2,28) зависимости сопротивления от температуры ($\varrho_{2, \phi} \sim T^{5}$ при $T \ll \theta$).

IV. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЗАВИСИМОСТИ ТЕНЗОРА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ОТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Для дальнейшего изложения выражение для тензора электропроводности σ_{ik} удобно записать следующим образом:

$$\sigma_{ik} = e^2 \langle v_i \psi_k \rangle \equiv -e^2 \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} v_i \psi_k \ d\Gamma, \qquad (IV,1)$$

причем функция ψ_k должна быть найдена из кинетического уравнения (5,7):

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + \hat{W}_{\mathbf{p}} \{\psi_k\} = v_k, \tag{5.7}$$

а оператор $\hat{W}_{\mathbf{p}}$ (и ему обратный $\hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1}$) удовлетворяет условиям (1,23), (1,24). Оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ меняет знак при изменении знака магнитного поля; кроме того, легко показать, что оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ — антиэрмитовый оператор, т.е.

$$\left\langle \varphi, \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \chi \right\rangle.$$
 (IV,2)

Представим функцию ψ_k в виде суммы четной и нечетной функций (по магнитному полю):

$$\psi_{k} = \psi_{k}^{s} + \psi_{k}^{a}, \quad \psi_{k}^{s} (\mathbf{H}) = \psi_{k}^{s} (-\mathbf{H}), \quad \psi_{k}^{a} (\mathbf{H}) = -\psi_{k}^{a} (-\mathbf{H});$$

тогда

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \psi_k^a}{\partial t} + \hat{W}_{\mathbf{p}} \, \psi_k^s = v_k, \\ &\frac{\partial \psi_k^s}{\partial t} + \hat{W}_{\mathbf{p}} \, \psi_k^a = 0. \end{aligned} \tag{1V.3}$$

Из последних уравнений легко получить уравнения для каждой из функций:

$$\hat{W}_{\mathbf{p}} \psi_{k}^{s} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \frac{\partial \psi_{k}^{s}}{\partial t} \right) = v_{k},$$

$$\hat{W}_{\mathbf{p}} \psi_{k}^{a} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \frac{\partial \psi_{k}^{a}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_{k}).$$

$$(IV,4)$$

Функции ψ_k^s и ψ_k^a можно использовать для вычисления симметричной и антисимметричной частей тензора электропроводности:

$$s_{ik} = e^2 \langle v_i \psi_k^s \rangle, \quad a_{ik} = e^2 \langle v_i \psi_k^a \rangle, \quad \sigma_{ik} = s_{ik} + a_{ik}. \tag{IV,5}$$

Покажем, что свойства (1,23), (1,24) оператора столкновений обеспечивают выполнение онсагеровских соотношений для тензора *σ_{ih}*.
Если использовать формулы (IV,1), (IV,5), а также уравнения (IV,4), можно показать, что

$$e^{2} s_{ik} = \langle \psi_{i}^{s} \hat{W}_{p} \psi_{k}^{s} \rangle + \left\langle \frac{\partial \psi_{k}^{s}}{\partial t} \hat{W}_{p}^{-1} \frac{\partial \psi_{i}^{s}}{\partial t} \right\rangle = \\ = \langle v_{i} \hat{W}_{p}^{-1} v_{k} \rangle - \left\langle \frac{\partial \psi_{i}^{s}}{\partial t} \hat{W}_{p}^{-1} \frac{\partial \psi_{k}^{s}}{\partial t} \right\rangle - \\ - \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{W}_{p}^{-1} \frac{\partial \psi_{k}}{\partial t} \hat{W}_{p}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \hat{W}_{p}^{-1} \frac{\partial \psi_{i}}{\partial t} \right\rangle ,$$

$$e^{2} a_{ik} = \left\langle \psi_{i}^{a} \frac{\partial \psi_{k}^{a}}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \hat{W}_{p}^{-1} \frac{\partial \psi_{k}^{a}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \hat{W}_{p}^{-1} \frac{\partial \psi_{i}^{a}}{\partial t} \right\rangle - \\ - \left\langle \hat{W}_{p}^{-1} v_{i} \frac{\partial}{\partial t} \hat{W}_{p}^{-1} v_{k} \right\rangle .$$

$$(IV,6)$$

Из этой записи видны:

а) симметрия тензора sik и антисимметрия тензора aik, т. е. справедливость соотношений Онсагера;

б) положительность главных значений тензора sik и, наконец,

в) уменьшение диагональных элементов тензора электропроводности с полем, т. е.

Последнее утверждение очевидно из первого равенства (IV,6), так как

 $e^{2} \langle v_{i} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_{k} \rangle \equiv \sigma_{ik} (0).$ Для вычисления тензоров R_{ik} и λ_{iklm} можно использовать приближенные значения функций $\psi_k^{\mathfrak{e}}$ и ψ_k^a :

$$\begin{split} \psi_{k}^{s} &\approx \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_{k} + \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_{k}, \\ \psi_{k}^{a} &\approx - \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_{k}. \end{split}$$
(IV,7)

Если вспомнить, что $\hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1}v_i = l_i$ (см. (2,8)), то из (IV,5) и (IV,7) легко получим

$$a_{ik} \cong e^2 \left\langle \frac{\partial l_i}{\partial t} l_k \right\rangle, \quad s_{ik} = \sigma_{ik} (0) - e^2 \left\langle \frac{\partial l_i}{\partial t} W_{\mathbf{p}}^{-1} \frac{\partial l_k}{\partial t} \right\rangle.$$
 (IV.8)

Если, с другой стороны, записать

$$a_i = \alpha_{ih} H_h, \qquad s_{ih} = \sigma_{ih} (0) + \mu_{ihlm} H_l H_m, \qquad (IV,9)$$

то путем простых, но громоздких преобразований можно получить

$$a_{ih} = \frac{e}{2c} \left\{ \left(\left\langle v_r \frac{\partial l_r}{\partial p_q} l_q \right\rangle - \left\langle v_r \frac{\partial l_q}{\partial p_q} l_r \right\rangle \right) \delta_{ih} + \left\langle v_i \frac{\partial l_r}{\partial p_r} l_h \right\rangle + \left\langle v_r l_r \frac{\partial l_k}{\partial p_i} \right\rangle - \left\langle v_i \frac{\partial l_h}{\partial p_r} l_r \right\rangle - \left\langle v_r \frac{\partial l_r}{\partial p_i} l_h \right\rangle \right\}, \quad (IV,10)$$

$$\mu_{iknr} = -\frac{e^2}{c^2} \{ \langle u_{mil} \, a_{mkl} \rangle \, \delta_{nr} + \langle u_{ril} \, a_{lkn} \rangle + \langle u_{mir} \, a_{nkm} \rangle \}, \qquad (IV,11)$$

где

$$u_{mil} = l_m \frac{\partial l_i}{\partial p_l}, \qquad a_{mkl} \doteq v_m \frac{\partial l_k}{\partial p_l} - v_l \frac{\partial l_k}{\partial p_m}.$$

В случае кубической симметрии кристалла симметричный тензор второго ранга а_{ік} вырождается в скаляр ($a_{ik} = \alpha \delta_{ik}$), причем

$$\alpha = \frac{e}{6c} \left\{ \left\langle l_i v_k \frac{\partial l_i}{\partial p_k} \right\rangle - \left\langle l_i v_i \frac{|\partial l_k|}{\partial p_k} \right\rangle \right\} . \tag{IV,12}$$

Как видно из формулы (IV,11), тензор µ_{iklm} имеет весьма сложную структуру. Для кубического кристалла число независимых компонент его равно шести.

Знание тензоров $\hat{\alpha}$ и $\hat{\mu}$ позволяет определить компоненты тензоров \hat{R} и $\hat{\lambda}$, воспользовавшись приближенными формулами обращения:

$$\left. \left. \begin{array}{l} \varrho_{ik}^{a} \left(\mathbf{H} \right) = -\varrho_{il} \, \alpha_{lm} \, \varrho_{mk}, \\ \varrho_{ik}^{s} \left(\mathbf{H} \right) = \varrho_{ik} + \varrho_{il} \, \alpha_{lm} \, \varrho_{mn} \, \alpha_{np} \, \varrho_{pk} - \varrho_{il} \, \dot{s_{lm}} \, \varrho_{mk}, \end{array} \right\} \tag{IV,13}$$

где $\hat{s}' = \hat{s} - \hat{\sigma}$ (0). Отсюда

$$R_{pn} = \frac{1}{2} (\varrho_{ik}^2 - \varrho_{ii}^2) a_{pn} + (\varrho_{ii} \varrho_{pk} - \varrho_{pi} \varrho_{ik}) a_{kn}.$$
(IV,14)

Для кубического кристалла

$$R = -\varrho^2 \alpha. \tag{IV,15}$$

(В формулах (IV,13) — (IV,15) значения сопротивления берутся при H=0.)

Мы не будем выписывать громоздких формул для компонент тензора λ_{iklm} . Покажем только, что из условий (1,23) и (1,24) следует положительность диагональных элементов тензора $\Delta \varrho_{ik}^s = \varrho_{ik}^s - \varrho_{ik}$. Согласно формулам (IV,13), (IV,5) и (IV,8) имеем

$$\frac{\Delta \varrho_{11}^{a}}{\varrho_{11}^{2}} = \left\langle \frac{\partial l_{1}}{\partial t} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \frac{\partial l_{1}}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial l_{1}}{\partial t} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \xi_{2} \right\rangle^{2} - \left\langle \frac{\partial l_{1}}{\partial t} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \xi_{3} \right\rangle^{2}, \qquad (IV, 16)$$

где

$$\xi_{2,3} = \frac{v_{2,3}}{\langle v_{2,3} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_{2,3} \rangle^{1/2}}$$

— орты в пространстве с нормой $\langle \phi \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \phi \rangle$, ϕ — произвольная функция, а ортогональность ξ_2 и ξ_3 обеспечивается тем, что оси 1, 2, 3 мы выбираем вдоль главных направлений тензора σ_{ik} (а значит, и ϱ_{ik}). Легко проверить, что в интересующем нас приближении главные направления тензоров Q_{ib}^s и ϱ_{ib} совпадают.

приближении главные направления тензоров ϱ_{ik}^{s} и ϱ_{ik} совпадают. Ясно, что правая часть равенства (IV,16) больше нуля или равна нулю, так как квадрат «вектора» $\frac{\partial l_1}{\partial t}$ больше или равен сумме квадратов проекций на два орта (из бесконечного числа). Равенство осуществляется только в тех случаях, когда «вектор» $\partial l_1/\partial t$ лежит в «плоскости» ξ_2 , ξ_3 .

V. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА ϱ_{ik}^s И ВЕКТОРА b В БОЛЬШИХ ПОЛЯХ ($l \gg r$)

Согласно приложению II,

$$\sigma_{ik} \left(\mathbf{H} \right) = s_{ik} + a_{ik}, \tag{V.1}$$

причем

$$s_{ik} = e^2 \langle v_i \psi_k^s \rangle, \qquad a_{ik} = e^2 \langle v_i \psi_k^a \rangle, \qquad (V,2)$$

а
$$\psi_i^{s(a)}$$
 подчиняются уравнениям (IV,4). Обращая тензор σ_{ik} , легко получить

$$\varrho_{ik} = \varrho_{ik}^s + \varrho_{ik}^a, \qquad \varrho_{ik} = \sigma_{ik}^{-1}$$

где

$$\varrho_{ik}^{s} = \frac{|s|s_{ik}^{-1} + a_{i}a_{k}}{|s| + (\hat{asa})}, \quad b_{i} = \frac{(\hat{s}a)_{i}}{|s| + (\hat{asa})}. \quad (V,3)$$

Здесь a_i — вектор, дуальный тензору a_{ik} , а b_i — тензору ϱ_{ik}^a .

Вычислим теперь функции ψ_i^s и ψ_i^a в виде рядов по степеням обратного поля. Для этого удобно уравнения (IV.4) переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \frac{\partial \psi_i^s}{\partial t} = \gamma^2 \left(\hat{W}_{\mathbf{p}} \psi_i^s - v_i \right), \qquad (V,4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \frac{\partial \psi_i^a}{\partial t} = \gamma^2 \hat{W}_{\mathbf{p}} \psi_i^a + \gamma \frac{\partial}{\partial t} (W_{\mathbf{p}}^{-1} v_i), \qquad (V,5)$$

искать решение в виде рядов по степеням γ , а в ответе положить $\gamma = 1$. Усредняя уравнения (V,4) и (V,5) по периоду обращения электрона, находим условия, играющие роль граничных (см. (5,9) и (5,10)):

$$\overline{W_{\mathbf{p}}}\psi_{i}^{s}=\overline{v}_{i}, \qquad (V,6)$$

$$\overline{W_{\mathbf{p}}\psi_{i}^{a}}=0. \tag{V,7}$$

Однако, так как уравнения (V,4) и (V,5) содержат вторые производные по t, нам понадобятся еще условия для однозначного определения решения (см. ниже). Итак,

$$\psi_i^{\mathbf{s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{2n} \varphi_n^i, \ \psi_i^{\alpha} = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{2n} \chi_n^i.$$
(V,8)

Подставляя формулы (V,8) в уравнения (V,4), (V,5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\gamma^2,$ получим

Черта ординат означает усреднение по периоду (см. формулу (5,10)). Рассмотрим сначала систему (V,9).

Вместо функции φ_0^i удобно ввести другую функцию, $\varphi^i = \varphi_0^i - \hat{W}_p^{-i} v_i$. Тогда система (V,9) принимает вид

Из (V,11) ясно, что

$$\varphi_n^i = \hat{q} \varphi_{n-1}^i, \qquad (V, 12)$$

где оператор q̂ задан следующим равенством:

$$\hat{q}\chi = \int_{-\infty}^{t} \hat{W}_{\mathbf{p}} \left\{ \int_{-\infty}^{t'} \hat{W}_{\mathbf{p}}\chi \, dt'' - \overline{\hat{W}_{\mathbf{p}}} \int_{-\infty}^{t'} \hat{W}_{\mathbf{p}}\chi \, dt'' \right\} dt' - \\ - \overline{\hat{W}_{\mathbf{p}}}^{-1} \overline{\hat{W}_{\mathbf{p}}} \int_{-\infty}^{t} \hat{W}_{\mathbf{p}} \left\{ \int_{-\infty}^{t'} \hat{W}_{\mathbf{p}}\chi \, dt'' - \overline{\hat{W}_{\mathbf{p}}}^{-1} \hat{W}_{\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{t'} \hat{W}_{\mathbf{p}}\chi \, dt'' \right\} dt';$$

следовательно,

$$\varphi_n^i = \hat{q}^n \varphi^i. \tag{V.13}$$

Вычислим теперь функцию фⁱ. Из первого уравнения системы (V,11) имеем

$$\varphi^{i} = \overline{\hat{W}_{p}}^{-1} \overline{v}_{i} - \hat{W}_{p}^{-1} v_{i}. \qquad (V, 14)$$

Воспользуемся теперь формулой (V,8), положив ү=1:

$$\psi_{i}^{s} = \hat{W}_{p}^{-1}v_{i} + \varphi_{i} + \hat{q}\varphi^{i} + q^{2}\varphi^{i} + \ldots \equiv \hat{W}_{p}^{-1}v_{i} + \frac{1}{1-\hat{q}} \,\overline{(\hat{W}_{p}^{-1}\bar{v}_{i} - W_{p}^{-1}v_{i})}. \quad (V, 15)$$

Формула (V,15) соответствует разложению ψ_i по степеням квадрата обратного поля. Из (V,15) и (V,2) следует

$$s_{ik} = e^{2} \langle v_i W_{\mathbf{p}}^{-1} v_k \rangle + e^{2} \langle v_i \frac{1}{1 - \hat{q}} (\widehat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \overline{v}_k - \widehat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_k) \rangle.$$
 (V,16)

Из системы (V,10) совершенно аналогично получим

$$\psi_i^a = \chi_0^i + \hat{g}\chi_0^i + \hat{g}^2\chi_0^i + \ldots \equiv \frac{1}{1 - \hat{q}} \chi_0^i, \qquad (V, 17)$$

гдө

$$\chi_{0}^{i} = \int_{-\infty}^{t} (v_{i} - \hat{W}_{p} \overline{\hat{W}_{p}^{-1}} \overline{v_{i}}) dt' - \overline{\hat{W}_{p}^{-1}} \widehat{\hat{W}_{p}} \int_{-\infty}^{t} (v_{i} - \hat{W}_{p} \overline{\hat{W}_{p}^{-1}} \overline{v_{i}}) dt'.$$
(V,18)

Отсюда

$$a_{ik} = e^2 \left\langle v_i \frac{1}{1-\hat{q}} \chi_0^k \right\rangle. \tag{V.19}$$

В т-приближении $\left(\hat{W}_{\mathbf{p}} \equiv \frac{1}{\tau} \right)$ можно получить еще более компактные формулы

(аналогичные формуле (5,26) или (48) из ³⁶):

$$\psi_{i}^{s} = \int_{0}^{\infty} v_{i}^{s}(t, t') e^{-\frac{t'}{\tau}} dt', \qquad (V,20)$$

$$\psi_{i}^{a} = -\int_{0}^{\infty} v_{i}^{a} (t, t') e^{-\frac{t'}{\tau}} dt', \qquad (V,21)$$

где

$$v_i^{s, a}(t, t') = \frac{1}{2} [v_i(t+t') \pm v_i(t-t')].$$
(V,22)

Отсюда

$$s_{ik} = e^2 \langle \varphi_{ik}^s \rangle, \quad a_{ik} = -e^2 \langle \varphi_{ik}^a \rangle,$$
 (V,23)

a

$$\varphi_{ik}^{s,a} = \int_{0}^{\infty} \overline{v_{i}(t)v_{k}^{s,a}(t,t')e}^{-\frac{t'}{\tau}} dt'.$$
 (V,24)

Отметим еще, что формулы (V,16) и (V,19) можно использовать для вычисления тен-зоров s_{ik} и a_{ik} в малых полях. Для этого их удобнее записать следующим образом:

$$s_{ik} = \langle v_i \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_k \rangle + \left\langle v_i \frac{1}{1 - \hat{1}} \frac{1}{q} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_k \right\rangle, \qquad (V, 25)$$

$$a_{ih} = -\left\langle v_i \; \frac{1}{1 - \hat{\frac{1}{q}}} \; \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \; \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_h \right\rangle, \tag{V,26}$$

где $\frac{1}{q} = \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \frac{\partial}{\partial t}$; слагаемые, не зависящие от t и стоящие справа от опера-

q от от 1/q, опущены. Первые члены разложения, получаемые по формулам (V,25) и (V,26), совпадают с формулами (IV,8). Выпишем теперь асимптотические значения различных компонент тензоров s_{ik} и a_{ik} . Заметим, что система координат, которой мы пользуемся, естественным образом «привязана» только к магнитному полю. Это означает, что мы можем по своему желанию выбрать оси x и y в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю (H || Oz). Выберем их так, чтобы тензор *) $s_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = x, y$) не имел недиагональных компонент тогла компонент; тогда

$$s_{xx} = \left(\frac{c}{eH}\right)^{2} \langle p_{y}\hat{W}_{p} (p_{y} - \widehat{W}_{p}^{-1} \widehat{W}_{p} p_{y}) \rangle + \dots,$$

$$s_{yy} = \left(\frac{c}{eH}\right)^{2} \langle p_{x}\hat{W}_{p} (p_{x} - \widehat{W}_{p}^{-1} \widehat{W}_{p} p_{x}) \rangle + \dots,$$

$$s_{zz} = \langle v_{z}\widehat{W}_{p}\overline{v}_{z} \rangle + \langle v_{z}\hat{q} (\widehat{W}_{p}^{-1}\overline{v}_{z} - \widehat{W}_{p}^{-1}v_{z}) \rangle + \dots,$$

$$s_{\alpha z} = s_{z\alpha} = -\langle v_{z}\hat{q}\widehat{W}_{p}^{-1}v_{\alpha} \rangle + \dots,$$

$$\left\{ (V, 27) \right\}$$

т. е. тензор sik имеет следующую структуру:

$$s_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_{xx}}{H^2} & 0 & \frac{\gamma_{xz}}{H^2} \\ 0 & \frac{\gamma_{yy}}{H^2} & \frac{\gamma_{yz}}{H^2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{H^2} & \frac{\gamma_{yz}}{H^2} & \gamma_{zz} \end{pmatrix}.$$
 (V,28)

Компоненты матрицы γ_{ik} стремятся к константам при $H \rightarrow \infty$.

^{*)} Используя свойство (1,23) оператора $\hat{W}_{\mathbf{p}}$, можно показать, что $s_{ik} = s_{ki}$ (см. приложение IV).

Для первых членов разложения антисимметричного тензора аів легко получить следующие формулы:

$$a_{z} = a_{xy} = -a_{yx} = \frac{c}{eH} \langle p_{y}v_{x} \rangle + \dots,$$

$$a_{y} = a_{zx} = -a_{xz} = -\frac{c}{eH} \langle p_{y}u_{z} \rangle + \dots,$$

$$a_{x} = -a_{zy} = a_{yz} = -\frac{c}{eH} \langle p_{x}u_{z} \rangle + \dots,$$
(V,29)

где

$$u_z = v_z - \hat{W}_p \overline{\hat{W}_p}^{-1} \overline{v}_z.$$

Так как величина
 $\langle p_y v_x \rangle$ для замкнутых изоэнергетических поверхностей равна
 $e^2~(n_1-n_2)~$ (см. формулы (5,17) — (5,21)), то

$$a_z = a_{xy} = \frac{ec}{H} (n_1 - n_2).$$
 (V,30)

Используя полученные здесь значения компонент тензоров s_{ik} и a_{ik}, находим асимптотические значения величин |s | и (asa):

$$|s| = \frac{\gamma_{xx}\gamma_{yy}\gamma_{zz}}{H^4} + \dots$$

$$(\hat{asa}) = \gamma_{zz}a_{xy}^2 + \dots$$

Точками обозначены слагаемые, содержащие более высокие степени обратного магнитного поля. Исходя из последних формул, видим, что знаменатели в формулах (V,3) при $n_1 \neq n_2$ — порядка $\gamma_{zz}a_{xy}^2$, а при $n_1 = n_2$ содержат все компоненты матриц а_{ik} и s_{ik}.

Вычисляя различные компоненты тензора ϱ_{ik}^s и вектора b_i , убеждаемся, что матрица ϱ_{ik}^s имеет следующую структуру: при $n_1 \neq n_2$ все компоненты ϱ_{ik}^s стремятся к насыщению *), а $b_z = H/(n_1 - n_2) ec$, b_x и b_y пропорциональны 1/H, т. е. при $H \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Это значит, что вектор Холла b в больших полях с большой точностью параллелен магнитному полю (при любой симметрии кристалла).

При $n_1 = n_2$ все компоненты тензора ϱ_{ik} , кроме ϱ_{zz}^s , квадратично возрастают в большом поле, ϱ_{zz}^s стремится к насыщению (однако $\varrho_{zz}^s \neq s_{zz}^{-1}$); все компоненты вектора Холла b линейно возрастают с ростом магнитного поля (вектор Холла не параллелен магнитному полю).

В заключение докажем следующую теорему: если магнитное поле перпендикулярно к одному из главных направлений кристалла, то при $n_1 \neq n_2$ поперечное сопротивление ϱ_{xx} в больших магнитных полях ($H \to \infty$) больше или равно сопротивлению в отсутствие поля **) $\varrho_{xx}(0) = 1/\sigma_{xx}(0)$. Ось x совпадает с одним из главных направлений тензора $\sigma_{ik}(0)$.

Используя асимптотическое поведение компонент тензора σ_{ik} (см. формулу (V,28), имеем

$$\varrho_{xx}(\infty) \approx \frac{\sigma_{yy}\sigma_{zz} + (\sigma_{yz})^2}{(\sigma_{yx})^2 \sigma_{zz}} \geqslant \frac{\sigma_{yy}}{(\sigma_{yx})^2};$$

отсюда

$$\frac{\varrho_{xx}(\infty)}{\varrho_{xx}(0)} \ge \frac{\sigma_{yy}(\infty) \sigma_{xx}(0)}{\sigma_{yx}^2(\infty)}$$

^{*)} $\varrho^s_{zz} = s^{-1}_{zz}$, остальные компоненты сравнительно сложно выражаются через компоненты тензора s_{ik} и вектора а. **) При $n_1 = n_2$ это утверждение очевидно, так как $\varrho_{xx} \sim H^2$ ($\varrho_{xx} \to \infty$ при

 $H \rightarrow \infty$).

Пользуясь обозначениями, принятыми в настоящем обзоре, последнее неравенство можно записать следующим образом:

$$\frac{\varrho_{xx}(\infty)}{\varrho_{xx}(0)} \geq \frac{\langle v_y \psi_y \rangle \langle v_x \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_x \rangle}{\langle v_x \psi_y \rangle^2} .$$

Заменяя v_u из уравнения (5,7), получим

$$\frac{\varrho_{xx}(\infty)}{\varrho_{xx}(0)} \ge \frac{\langle \psi_y \hat{W}_{\mathbf{p}} \psi_y \rangle \langle v_x \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_x \rangle}{\langle \psi_y v_x \rangle^2} = \frac{\langle \psi_y \hat{W}_{\mathbf{p}} \psi_y \rangle \langle \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_x \hat{W}_{\mathbf{p}} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_x \rangle}{\langle \psi_y \hat{W}_{\mathbf{p}} \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_x \rangle^2} \cdot$$

При последнем преобразовании использовано свойство (1,23) оператора \hat{W}_{p} . Полученное соотношение и доказывает наше утверждение, так как числитель дроби есть произведение «квадратов» векторов ψ_{ij} и $W^{-1}_{p}v_x$, а знаменатель — «квадрат» скалярного произведения этих же векторов (подробнее см. в работе ⁸⁸).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН 78, 411 (1962).
 М. Я. Азбель, И. М. Лифшиц, Progr. Low Temperatures (Amsterdam) 3, 288 (1961).
 И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН 69, 419 (1959).
- 4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред. М.. Гостехиздат, 1957.
- Александров, Кандидатская диссертация (Харьков, ФТИНТ 5. Б. Н. АН УССР, 1964).

- АН УССР, 1964). 6. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, М., Гостехиздат, 1951. 7. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 30, 1058 (1956); 32, 59 (1957). 8. В. П. Силин, ЖЭТФ 33, 495 (1957). 9. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 35, 97 (1958). 10. А. В. Мигдал, ЖЭТФ 34, 1438 (1958). 11. R. Reich, Q. Kinh, Compt. rend. 256, 156 (1963). 12. И.М. Лифшиц, Л. Н. Розенцвейг, ЖЭТФ 16, 967 (1946); И.М. Лиф-шиц, Г. П. Пархомовский, Уч. зап. ХГУ 27, 28 (1948). 13. М. И. Карацор, Б.С. Маргитики стриктира (спристира).
- 13. М. И. Каганов, в сб. «Магнитная структура ферромагнетиков», Изд-во АН СССР, 1960, стр. 79.
- 14. Дж. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма, М.—Л., ОГИЗ, 1948. 15. В. Л. Гинзбург, в сб. «Памяти А. А. Андронова», М., Изд-во АН СССР, 1955, стр. 622.

- 1955, стр. 622.
 16. А. А. Абрикосов, ЖӘТФ 44, 2039 (1963).
 17. Дж. Займан, Электроны и фононы, М., ИЛ, 1962.
 18. Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, М., ИЛ, 1956.
 19. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ЖӘТФ 7, 379 (1937).
 20. В. Л. Гинзбург, В. П. Силин, ЖӘТФ 29, 64 (1955).
 21. В. W. Roberts, Phys. Rev. Letts. 6, 453 (1961); J. F. Cochran, M., Saqub, Phys. Letts. 5, 307 (1963).
 22. И. Я. Померанчук, ЖӘТФ 35, 992 (1958).
 23. Р. Н. Гуржи, ЖӘТФ 47, 1415 (1964).
 24. А. D. Brailsford, А. W. Overhauser, Phys. Rev. Letts. 3, 331 (1959); J. Phys. Chem. Solids 15, 140 (1959); J. Phys. Chem. Solids 21, 127 (1961).
 25. М. И. Каганов, И. М. Лифшиц, Л. В. Танатаров, ЖӘТФ 31, 232 (1956).

- 232 (1956).
- 232 (1956).
 26. Е.С. Боровик, ДАН СССР 91, 771 (1953); В.Л. Гинзбург, В.П. Шабанский, ДАН СССР 100, 445 (1955); М.И. Каганов, В.Г. Песчанский, ЖЭТФ 33, 1231 (1957).
 27. С. Х. Гроот, П. Мазур, Термодинамика неравновесных процессов, М., Изд-во «Мир», 1964.
 28. М. Н. Соћеп, L. М. Falicov, Phys. Rev. Letts. 7, 231 (1961).
 29. М. Кöler, Ann. d. Phys. 32, 211 (1938).
 30. В. Lüti, Helv. Phys. Acta 31, 713 (1958).
 31. М.С. Јопеѕ, Е. Н. Sondheimer, Phys. Letts. 11, 112 (1964).
 32. Е. С. Боровик, В. Г. Волоцкая, Н. Я. Фогель, ЖЭТФ 45, 46 (1963).

- (1963).
- 33. R. J. Balcombe, Proc. Roy. Soc. 275, 113 (1963).

- 34. Н. С. Акулов, Ферромагнетизм, М.— Л., ОНТИ, 1939; С. В. Вонсовский, Я. С. Шур, Ферромагнетизм, М. – Л., ОГИЗ, 1948. 35. М. Я. Азбель, ЖЭТФ 44, 983 (1963).

- 35а. М. Я. Азбель, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 49, 572(1965)
 36. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ 31, 63 (1956).
 37. Ф. Г. Басс, М. И. Каганов, ЖЭТФ 32, 1233 (1957).
 38. И. М. Лифшиц, ЖЭТФ 32, 1509 (1957); И. М. Лифшиц, А. М. Косевич, ЖЭТФ 33, 88 (1957); Е. W. Adams, Т. D. Holstein, J. Phys. Chem. Solids 10, 254 (1959).
- 39. R. Coleman, A. Y. Funes, Y. S. Plaskett, Phys. Rev. 133, 521 (1964). 40. W. G. Chambers, Proc. Phys. Soc. 81, 877 (1963). 41. Е. С. Боровик, ЖЭТФ 30, 262 (1956).

- 42. В. Г. Волоцкая, ЖЭТФ 45, 49 (1963).
- 42. D. 1. BOLOGKAR, MOTO 43, 49 (1903).
 43. C. C. Grimers, A. F. Kip, Phys. Rev. 132, 1991 (1963); A. C. Thorsen, T. G. Berlincourt, Phys. Rev. Letts. 6, 617 (1961); W. G. Chambers, B. K. Jones, Proc. Roy. Soc. A270, 417 (1962); K. Okamura, J. M. Tem-peton, Phil. Mag. 7, 1239; D. Shoenberg, P. J. Stiles, Proc. Roy. Soc. A281, 62 (1964).
 43. C. G. B. T. Wahler, Phys. Rev. Lett. 64, 4000 (1973); C. N. T.
- 44. P. B. Alers, R. T. Webber, Phys. Rev. 91, 1060 (1953); G. N. Rao, N. H. Lebouni, C. G. Grenier, J. M. Reynolds, Phys. Rev. 133, 141 (1964).

- 45. А. А. Абрикосов, Л. А. Фальковский, ЖЭТФ 43, 108 (1962). 46. М. И. Каганов, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 35, 1052 (1958). 47. Н. Е. Алексеевский, Н. Б. Брандт, Т. И. Костина, Д. ДАН CCCP 105, 46 (1955).
- СССГ 103, 40 (1955).
 48. Ф. Г. Басс, М. И. Каганов, В. В. Слезов, ФММ 5, 407 (1957).
 49. Е. С. Боровик, ЖЭТФ 23, 91 (1952).
 50. Е. С. Боровик, Диссертация (ФТИ АН УССР, Харьков, 1954).
 51. Езакі, Phys. Rev. Letts. 8, 4 (1962).
 52. С. Г. Калашников, ФТТ 6, 2435 (1964).
 53. Е. Fawcelt, Advances Phys. 13, 139 (1964).
 54. The Fermi Surface (W A Harrison M B Webb Editors) I. Wiley.

- 54. The Fermi Surface (W. A. Harrison, M. B. Webb, Editors), I. Wiley, N. Y., 1960.
- 55. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 35, 1251 (1958). 56. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 38, 188 (1960). 57. В. Г. Песчанский, Диссертация (Харьков, 1959).

- 58. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 39, 1201 (1960).
 59. В. Н. Качинский, ДАН СССР 135, 818 (1960); ЖЭТФ 41, 665 (1961); ЖЭТФ
- 43, 1158 (1962). 60. M. H. Cohen, L. M. Falicov, Phys. Rev. Letts. 7, 231 (1961).

- 61. E. J. Blaunt, Phys. Rev. 126, 1636 (1962). 62. W. A. Harrison, Phys. Rev. 118, 1182 (1960).

- 63. L. M. Falicov, Paul R. Sievert, Phys. Rev. Letts. 12, 558 (1964).
 64. R. M. Sitark, T. G. Eck, W. L. Gordon, Phys. Rev. A133, 441 (1964); R. M. Sitark, Phys. Rev. A135, 1698 (1964).
 65. W. S. Boyle, F. S. L. IIsu, J. E. Kunzler, Phys. Rev. Letts. 4, 278 (1960); J. Le Page, M. Garber, F. J. Blatt, Phys. Letts. 11, 102 (1964).
 66. М. Н. Азбель, М. Н. Каганов, П. М. Лифшиц, ЖЭТФ 32, 1188 (1957)
- (1957).
- 67. Ю. А. Бычков, Л. Э. Гурсвич, Г. М. Недлин, ЖЭТФ 37, 534 (1959).
- 68. Л. Э. Гуревич, Г. М. Недлии, ЖЭТФ 37, 765 (1959).
- 69. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 29, 748 (1955). 70. В. Л. Гинзбург, Г. П. Мотулевич, УФН 55, 469 (1955). 71. Э. А. Канер, М. И. Каганов, ЖЭТФ 31, 459 (1959).
- 72. М. А. Леонтович, в сб. «Исследования по распространению радиоволн», М., Изд-во АН СССР, 1948.
- М. Издео АН СССР, 1948.
 73. R. Bowers, C. Legendij, F. Rose, Phys. Rev. Letts. 7, 339 (1961); A. Liebshaber, R. Veilex, Phys. Rev. 127, 774 (1962).
 74. Ф. Г. Басс, А. Я. Бланк, М. И. Каганов, ЖЭТФ 45, 1081 (1963).
 75. М. И. Каганов, В. М. Цукерник, ЖЭТФ 35, 474 (1958).
 76. H. London, Proc. Roy. Soc. A176, 522 (1940).
 77. С. Б. Вацерск. Н. Sondheimer. Proc. Roy. Soc. A195, 336 (1949).

- И. И. В. И. В. И. С. И.У. SUC. АНО, 522 (1940).
 G. E. H. Reuter, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc. A195, 336 (1949).
 R. A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc. A191, 385 (1947).
 М. И. Каганов, В. В. Слезов, ЖЭТФ 32, 1496 (1957); Р. Н. Гур-жи, М. Я. Азбель, Хао Бай-линь, ФТТ 5, 759 (1963).
 Э. А. Канер, Диссертация (Москва, 1964).

- 81. М. Я. Азбель, Э. А. Канер, ЖЭТФ **32**, 896 (1957). 82. А. В. Ріррагd, Ргос. Roy. Soc. **A224**, 273 (1954). 83. М. И. Каганов, М. Я. Азбель, ДАН СССР **102**, 49 (1955). 84. А. В. Ріррагd, Phil. Trans. Roy. Soc. **A250**, 325 (1957). 85. D. Shoenberg, Phil. Mag. **5**, 105 (1960); А. S. Joseph, Phys. Rev. **A134**, 979 (1964).
- 86. H. V. Bohm, V. J. Easterling, Phys. Rev. 128, 1021 (1962).

- 80. п. ч. Бонш, ч. з. Базгеттид, гнуз. кеv. 128, 1021 (1962).
 87. R. G. Chambers, Proc. Roy. Soc. A215, 481 (1952).
 88. М. И. Каганов, В. Г. Песчанский (в печати).
 89. М. И. Каганов, И. М. Лифшиц, В. Б. Фикс, ФТТ 6, 2723 (1964).
 90. В. Б. Фикс, ФТТ 1, 16 (1959); ФТТ 1, 1321 (1959); Г. Е. Пикус, В. Б. Фикс, ФТТ 1, 1062 (1959).

1

- В. Б. Фикс, ФГТ 1, 1062 (1959).
 91. М. Я. Азбель, Е. Г. Скроцкая, ЖЭТФ 47, 1958 (1964).
 92. Ю. Б. Румер, ЖЭТФ 18, 1081 (1948).
 93. Е. С. Боровик, ЖЭТФ 27, 355 (1954).
 94. Н. Е. Воттеl, Phys. Rev. 100, 758 (1955).
 95. А. В. Ріррагd, Phil. Mag. 2, 1147 (1957).
 96. А. А. Галкин, А. П. Королюк, ЖЭТФ 37, 310 (1959); V. J. Easterling, H. V. Воhm, Phys. Rev. 125, 812 (1962); К. Fossheim, Т. Olsen, Physica. Status Solidi 6, 867 (1964); П. А. Безуглый, А. А. Галкин, С. Б. Жердесо. ЖЭТФ 47, 4825 (1964)
- кин, С. Е. Жеваго, ЖЭТФ 47, 825 (1964). 97. В. П. Силин, ЖЭТФ 38, 977 (1960); К. В. Власов, Б. Н. Филип-пов, ЖЭТФ 44, 922 (1963); В. Г. Скобов, Э. А. Канер, ЖЭТФ 46, 273 (1964).
- 98. А. И. А́хиезер, М. И. Каганов, Г. Л. Любарский, ЖЭТФ 32, 837 (1957).

- 99. А. И. Ахиезер, ЖЭТФ 8, 1330 (1938).
 100. М. И. Каганов, В. Г. Песчанский, ФТТ 5, 3215 (1963).
 101. В. М. Контарович, ЖЭТФ 45, 1638 (1963).
 102. J. Condo, Progr. Theor. Phys. 32, 37 (1964); См., кроме того: А. А. Абриковов, ЖЭТФ 48, 990 (1965); ЖЭТФ, Письма 1 (1), 53 (1965); S. H. Liu, Phys. Rev. A137, 1209 (1965).
- 103. В. Ф Гантмахер, И. П. Крылов, ЖЭТФ 47, 2111 (1964).
- 104. Е. П. Вольский, ЖЭТФ 46, 123 (1964).
- 105. Л. А. Фальковский, Г. С. Разина, ЖЭТФ 49, 7 (1965).

469