

534.222.2+536.46

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГОРЕНИЯ И ДЕТОНАЦИИ ГАЗОВ

К. И. Щелкин

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| § 1. Нормальное горение газов . . . . .                                     | 273 |
| § 2. Неустойчивость нормального горения . . . . .                           | 275 |
| § 3. Детонация . . . . .  | 281 |
| § 4. Неустойчивость плоской газовой детонации к искривлениям фронта горения | 287 |
| § 5. Одномерная неустойчивость детонации . . . . .                          | 290 |
| § 6. Пульсирующая детонация . . . . .                                       | 293 |
| § 7. Пределы детонации . . . . .  | 298 |
| Цитированная литература . . . . .   | 301 |

## § 1. НОРМАЛЬНОЕ ГОРЕНЬЕ ГАЗОВ

Нормальным или фундаментальным горением называют, следуя В. А. Михельсону<sup>1, 2</sup>, плоское пламя, распространяющееся в спокойном газе или ламинарном потоке при помощи теплопроводности, нагревающей несгоревший газ, и диффузии, поставляющей в него химически активные частицы из горящего слоя. Скорость распространения нормального горения в заранее приготовленной однородной горючей смеси (этую скорость называют также нормальной скоростью пламени) определяется как величиной коэффициентов температуропроводности и диффузии, так и скоростью химической реакции при температуре, близкой к температуре горения.

Время химической реакции  $\tau$  из анализа размерности равно времени  $t$ , необходимому для одного столкновения между молекулами, умноженному на среднее число соударений, приходящееся на один акт химической реакции:

$$\tau = tn.$$

Число  $n$ , как это очевидно, обратно пропорционально вероятности химической реакции. Принимая время между соударениями равным отношению длины свободного пробега  $l$  к средней скорости молекул  $c$  (эта величина близка к скорости звука), находим время химической реакции

$$\tau \approx \frac{l}{c} n. \quad (1)$$

Ширина зоны химической реакции по порядку величины равна произведению времени химической реакции на скорость пламени:

$$\lambda = \tau u_n = l \frac{u_n}{c} n. \quad (2)$$

Вместе с тем, ширина зоны химической реакции составляет, тоже из анализа размерности, некую долю общей ширины прогретой области перед

фронтом пламени, распространяющимся со скоростью  $u_n$ :

$$\lambda \sim \beta \frac{\kappa}{u_n}. \quad (3)$$

Здесь  $\kappa/u_n$  — ширина прогретой области ( $\kappa$  — коэффициент температуропроводности), а  $\beta < 1$ .

Сопоставляя (2) и (3) и вспоминая, что коэффициент температуропроводности равен

$$\kappa = \frac{1}{3} l c,$$

получаем для нормальной скорости пламени соотношение

$$u_n = c \sqrt{\frac{\beta}{3n}} = \frac{c}{\sqrt{n}} \varphi, \quad (4)$$

где  $\varphi$  — величина, меньшая единицы.

Нормальная скорость пламени, как это видно из (4), пропорциональна скорости звука, но значительно меньше ее, поскольку число столкновений  $n$ , необходимое для одного акта химической реакции, обычно составляет величину порядка  $10^4 - 10^5$ .

При помощи (4) и (2) находят ширину зоны химической реакции — ширину фронта пламени:

$$\lambda = l \sqrt{n} \varphi. \quad (5)$$

Она пропорциональна длине свободного пробега, но во много раз больше ее.

Полная теория распространения нормального горения, теперь уже общепринятая, принадлежит Я. Б. Зельдовичу и Д. А. Франк-

Каменецкому<sup>3</sup>. Она здесь не излагается, так как для последующего достаточно приведенных выше общефизических сведений о нормальном пламени.

Нормальная скорость пламени является одной из главных физико-химических констант летучего топлива. Она возрастает с увеличением начальной температуры смеси и слабо изменяется с изменением ее начального давления. Нормальная скорость достигает максимального значения в смеси с некоторым недостатком воздуха (кислорода) по сравнению со смесью, в которой его ровно столько, сколько надо для полного сгорания. Для воздушных смесей углеводородов максимальная нормальная скорость составляет  $0,3 - 0,4 \text{ м/сек}$ . Максимальная нормальная скорость в водородо-воздушной смеси равна  $2,67 \text{ м/сек}$ . Это вообще максимальная скорость, зарегистрированная в воздушных смесях горючих газов.

Кислородные смеси горючих газов и паров, для которых число столкновений, необходимое для одного акта химической реакции, значительно меньше, чем для воздушных, имеют более высокие (но все же далекие от скорости звука) нормальные скорости. Так, максимальная нормальная скорость в бутано-кислородной смеси равна  $4,8 \text{ м/сек}$ , в водородо-кислородной смеси она около  $10 \text{ м/сек}$ .

Ширина зоны химической реакции в нормальном пламени в воздушных смесях порядка нескольких десятых долей  $\text{мм}$ , в кислородных она еще меньше.

Вообразим фронт нормального горения покоящимся (рис. 1). Несгоревший газ втекает в зону горения со скоростью  $u_n$ , продукты сгорания,

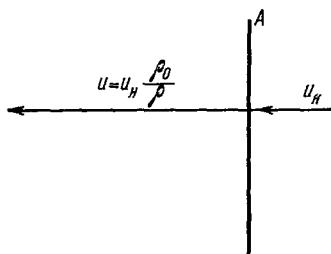


Рис. 1. Схема нормального пламени.

согласно закону сохранения массы, истекают из нее со скоростью

$$u = u_n \frac{q_0}{q}, \quad (6)$$

где  $q_0$  и  $q$  — плотности несгоревшего газа и продуктов сгорания соответственно.

На фронте горения вследствие законов сохранения массы, импульса и энергии возникает перепад давления, величина которого для случая  $u_n \ll c_0$  определяется выражением<sup>10</sup>

$$p - p_0 = - p_0 q \left( \frac{u_n}{c_0} \right)^2 = - p_0 q M^2. \quad (7)$$

Здесь  $c_0$  — скорость звука в несгоревшей смеси,  $q$  — отношение теплового эффекта реакции сгорания к начальной внутренней энергии газа

$$q = \gamma (\gamma - 1) \frac{Q}{c_0^2}$$

$\gamma$  — отношение теплоемкостей;  $M$  — в формуле (7) — число Маха нормального пламени, т. е. отношение нормальной скорости к скорости звука в несгоревшей газовой смеси.

Перепад давления на фронте нормального пламени оказывается очень малым. Так, например, для воздушной смеси пентана ( $C_5H_{12}$ )

$$u_n = 0,35 \text{ м/сек}, \quad c_0 = 340 \text{ м/сек}, \\ M = 10^{-3}, \quad q = 7,$$

и разность давления по обе стороны зоны нормального пламени равна

$$p - p_0 = - p_0 q M^2 = - p_0 \cdot 7 \cdot 10^{-6} \approx - 10^{-5} p_0.$$

При атмосферном давлении перепад на фронте пламени в этом случае составит около 0,1 мм водяного столба. В кислородных смесях он приблизительно на один-два порядка выше, но и там остается очень малым.

## § 2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НОРМАЛЬНОГО ГОРЕНИЯ

Задача об устойчивости нормального горения по отношению к бесконечно малым возмущениям, имеющая принципиальное значение для теории горения, поставлена и решена Л. Д. Ландау еще в 1944 г.<sup>11</sup>. Воспользовавшись незначительностью перепада давления на фронте нормального пламени, Л. Д. Ландау применяет к задаче точные уравнения теории возмущений. Не воспроизводя вычислений, обнаруживших в сущности неустойчивость нормального горения, покажем физическую причину этого явления.

Наложим на плоский фронт нормального горения (рис. 2) возмущение — изогнем фронт так, как это показано волнистой линией, — и

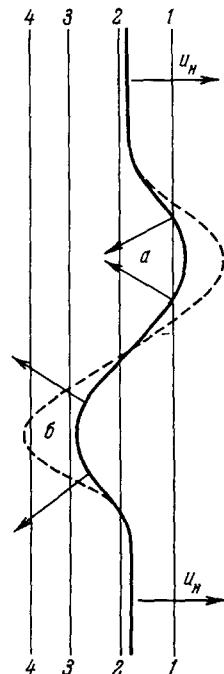


Рис. 2. Начальное возмущение нормального фронта пламени (сплошная линия) увеличивается (пунктирная линия), поскольку в продуктах горения для сечений 1—1 и 2—2 в области  $a$   $p_1 > p_2$ , а для сечений 3—3 и 4—4 в области  $b$   $p_3 < p_4$ .

проследим за его судьбой. При пересечении газом участка фронта пламени, расположенного под углом к набегающему потоку, тангенциальная составляющая скорости газа остается неизменной, нормальная составляющая возрастет пропорционально отношению плотностей  $Q_0/Q$ . Поток газа, пересекая поверхность горения под углом, преломляется так, как это показано на рис. 3. В результате, за волнистым фронтом пламени возникает течение, линии тока которого схематически показаны на рис. 2. За выпуклыми участками фронта пламени (в зонах *a*) линии тока сходятся, за вогнутыми (в зонах *b*) — расходятся. В плоскости 4—4, расположенной за фронтом горения, давление всюду одинаково, но сохраняется некое неоднородное распределение скоростей: за выпуклыми участками фронта скорость продуктов горения несколько выше, чем за вогнутыми.

Газ за выпуклыми участками (в зонах *a*) находится в условиях, подобных существующим в сходящемся сопле (конфузоре), за вогнутыми участками (зоны *b*) — в условиях, имеющих место в расходящемся сопле (диффузоре). Поэтому в зонах *a* давление несколько увеличивается, а в зонах *b* — понижается по сравнению с давлением в плоскости 4—4 и несгоревшем газе. В результате начальное возмущение, представленное волнистой линией, возрастает, фронт пламени изгибаются еще больше, как это показано пунктирной линией.

На рис. 2 фронт пламени не имеет ширины. В действительности, рассматривая длину волны возмущения, надо учитывать конечные размеры зоны горения (рис. 4). Длина волны возмущения, а следовательно, и линейный размер поверхности фронта горения, если следовать описанному выше качественному механизму неустойчивости, должен превышать ширину зоны горения, точнее — ширину зоны прогрева. В тот момент, когда размер пламени  $R$  превысит ширину этой зоны, т. е. в тот момент, когда возникнет собственно фронт пламени, начальные возмущения, учитывая абсолютный характер неустойчивости, начнут возрастать.

Условие возникновения неустойчивости поэтому можно записать в виде

$$R > \frac{\kappa}{u_H}$$

или

$$Re_H = \frac{R u_H}{\kappa} > 1. \quad (8)$$

Когда безразмерный критерий (8), напоминающий по виду критерий Рейнольдса, превышает величину порядка единицы, плоская зона нормального горения перестает существовать, пламя автотурбулируется, возникает турбулентное горение, подчиняющееся иным законам, нежели законы нормального сгорания.

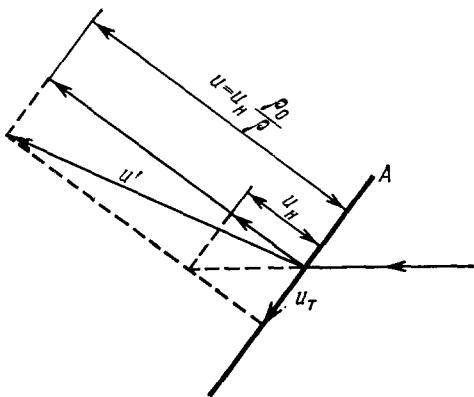


Рис. 3. Преломление потока газа фронтом пламени.

Впервые неустойчивость нормального пламени наблюдали на опыте Я. Б. Зельдович и А. И. Розловский<sup>12</sup>. Они воспламеняли в центре стальной бомбы диаметром 150 мм, снабженной окном для фотографирования пламени, смесь из 56,6% водорода, 41,1% кислорода и 2,0% сероуглерода. В то время как при начальном атмосферном давлении пламя доходило до стенок бомбы, не меняя характера распространения, при увеличенном давлении его скорость на некотором расстоянии от стенок скачком возрастала и горение переходило в детонацию. Переход происходил при значении величины  $Re_n$  (8), равном  $(2 \div 5) \cdot 10^5$ . Зельдович и Розловский полагают, что переход горения в детонацию обязан возникновению неустойчивости нормального горения. Неожиданно большое значение критерия ( $10^5$  вместо 1) указывает на более высокую устойчивость нормального горения по сравнению с предсказываемой теоретически. Пламя оказывается устойчивым по отношению к возмущениям, по длине превышающим на 4–5 порядков ширину зоны горения, оно теряет устойчивость лишь по отношению к сравнительно длинноволновым возмущениям. Неустойчивость оказалась не абсолютной.

В описанных опытах не было исключено действие на фронт пламени стенок камеры. Слабые возмущения (в том числе и слабые ударные волны), отражаясь от стенок камеры и встречаясь с пламенем, могут с ним взаимодействовать. Заранее нельзя сказать, стабилизируют они горение или увеличивают его неустойчивость.

Влияние стенок камеры практически полностью было устранено в опытах Х. А. Ракиновой, Я. К. Трошина и автора этой статьи, проведенных с ацетилено-кислородными смесями, заключенными в мыльный пузырь и поджигаемыми в центре раскаленной спиралью<sup>13</sup>. Фотографии сферического пламени через узкую щель в экране, отделяющем мыльный пузырь от фоторегистратора, указывают на постепенное увеличение скорости распространения пламени, начиная с момента, когда критерий (8) достигает величины  $(3 \div 6) \cdot 10^4$ . В работе<sup>13</sup> были зарегистрированы искривления фронта пламени, указывающие на его автотурбулизацию и появляющиеся после увеличения  $Re_n$  (8) до того же значения  $(3 \div 6) \cdot 10^4$ .

В дальнейшем возникновение и рост неустойчивости изучался тёплеровским методом<sup>14</sup>. При критериях (8), превышающих  $10^4$  для ацетилено-кислородных смесей и  $0,7 \cdot 10^4$  для смесей саратовского газа с кислородом, на фронте пламени появляются увеличивающиеся по высоте возмущения — волнистые неоднородности.

На рис. 5 показано прогрессивное ускорение сферического пламени в ацетилено-кислородной смеси, указывающее на его неустойчивость. На рис. 6 виден переход медленного горения в сферическую детонацию в тонком резиновом шаре, обвязанный неустойчивости нормального горения.

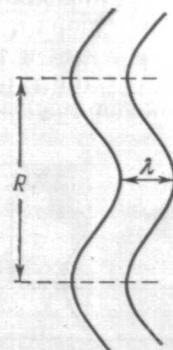


Рис. 4.  $R$  — длина волны возмущения,  $\lambda$  — ширина фронта пламени.

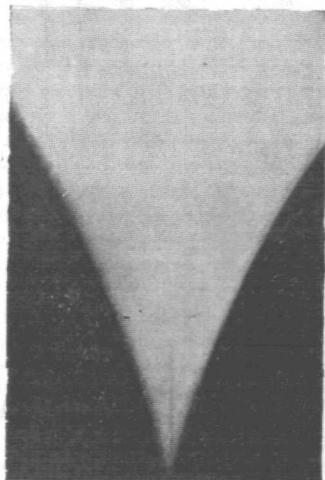


Рис. 5. Фотография ускорения пламени в смеси 33%  $C_2H_2 + 67\% O_2$  в мыльном пузыре.

Автотурбулизация нормального горения наблюдалась и в работе группы авторов, руководимой Ю. Х. Шауловым<sup>15</sup>. Результаты этой работы совпадают с описанными выше.

Устойчивость нормального пламени по отношению к сравнительно коротковолновым возмущениям, обнаруженная на опыте и противоречащая теории, требует рассмотрения стабилизирующих эффектов, не учитываемых в теории Ландау.

Одним из стабилизирующих факторов (на это указали в первой экспериментальной работе Зельдович и Розловский<sup>12</sup>) может оказаться

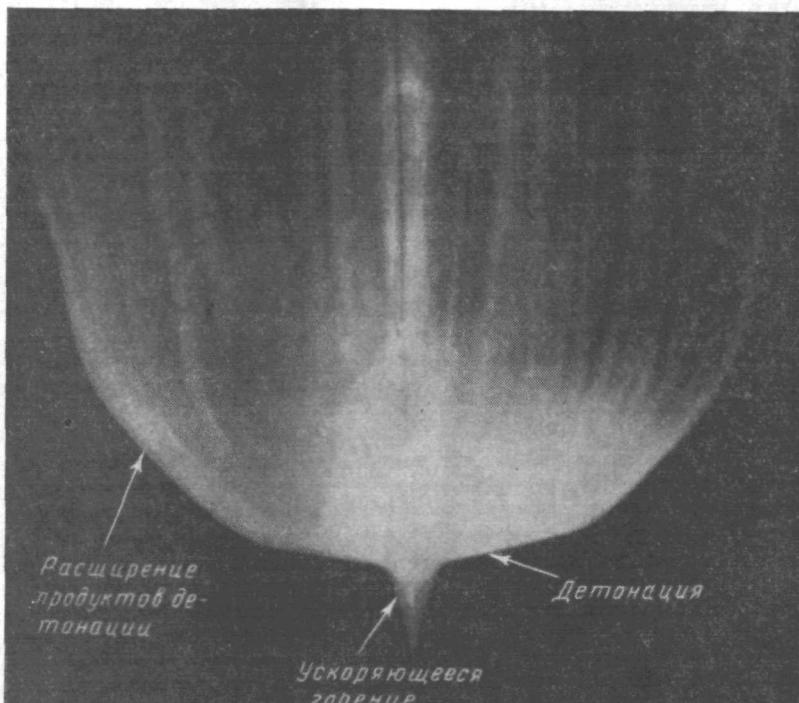


Рис. 6. Переход медленного сферического пламени в сферическую детонацию в смеси 22%  $C_2H_2$  + 78%  $O_2$ , заключенной в тонкий резиновый шар.

влияние кривизны на тепловой поток, повышающее скорость нормального горения у вогнутой поверхности и понижающее у выпуклой. Так, вершина бунзеновского пламени всегда закруглена потому, что скорость вогнутого пламени больше скорости плоского. Возмущения на плоском пламени по этой причине выравниваются: пламя у отстающих (вогнутых) участков распространяется быстрее, у выпуклых — медленнее, чем плоское. Влияние кривизны на скорость пламени может стабилизировать горение по отношению к возмущениям примерно на порядок более длинным, чем ширина зоны прогрева. Это повышает критерий (8) приблизительно до 10. Однако повышение на порядок не устраивает трудности. Расхождение между экспериментальным и теоретическим значением критерия (8) остается большим примерно в три порядка.

Влияние вязкости на течение газа тоже, вероятно, стабилизирует горение, причем сильнее при коротковолновых возмущениях, чем при длинноволновых. Однако расхождение между экспериментом и теорией

на несколько порядков трудно приписать столь слабому стабилизирующему эффекту.

В работе Ландау принятые следующие условия на границе, разделяющей горевший и негоревший газ:

$$v_{1x} - \frac{\partial \xi}{\partial t} = v_{2x} - \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0.$$

Здесь  $v_{1x}$  — возмущение скорости негоревшего газа вдоль оси  $x$ , перпендикулярной к невозмущенному фронту,  $v_{2x}$  — возмущение скорости продуктов сгорания вдоль той же оси,  $\xi$  — смещение фронта горения.

Эти условия соответствуют постоянной скорости распространения пламени вдоль оси  $x$ . При таком условии пламя сдвигается (смещается) из положения равновесия в соответствии с изменением скорости течения газа, т. е. с ее возмущением.

При увеличении скорости пламя смещается в сторону горевшего газа, при уменьшении ее — в сторону негоревшего. Причем каждая точка фронта смещается независимо от соседней.

В действительности же фронт пламени не представляет собою независимого воспламенения частиц газа, пламя распространяется во всех направлениях (по негоревшему газу) с постоянной нормальной скоростью. Строго говоря, поэтому на границе необходимо задать постоянную скорость пламени в направлении, нормальному фронту.

Нормальное распространение обладает стабилизирующим действием. Горение быстрее «поедает» газ перед вогнутыми участками зоны горения, нежели перед выпуклыми. Рассмотрим искривление фронта пламени  $\Pi$ , не поддерживаемое (не восстановливаемое) внешней причиной (рис. 7). Применяя к горению принцип Гюйгенса, легко убедиться, что заданное возмущение самопроизвольно уменьшается. Особенно быстро уменьшается амплитуда возмущения в момент появления особенности  $O$  на поверхности фронта. С течением времени скорость уменьшения амплитуды падает и асимптотически приближается к нулю. Между прочим, очень медленное выравнивание возмущения на последней стадии приводит к интересному явлению. На сферическом пламени можно часто наблюдать структуру, напоминающую поверхность волейбольного мяча. Возмущения на поверхности пламени, когда оно устойчиво, быстро уменьшаются на начальной стадии выравнивания и очень медленно на последней. Поэтому следы возмущений очень долго сохраняются на поверхности пламени, придавая ему вид, представленный на рис. 8.

Приведенные выше качественные рассуждения о стабилизирующем действии распространения горения требуют для убедительности количественных оценок. Строгое решение задачи поэтому представляет значительный интерес.

Недавно было высказано предположение (см. <sup>10</sup>, стр. 187) о существовании еще одного стабилизирующего эффекта. В сферическом пламени, пока оно мало по размерам, возмущения могут усредняться по поверхности фронта и стабилизировать горение. Время распространения

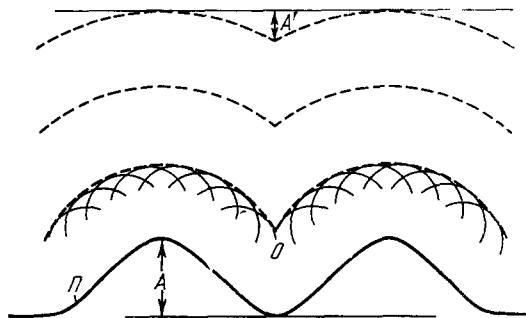


Рис. 7. Уменьшение амплитуды начального искривления пламени от  $A$  до  $A'$  благодаря выравнивающему действию распространения горения.

возмущений по продуктам сгорания от одного участка сферы до другого (противоположного) порядка  $R/c_g$ , где  $c_g$  — скорость звука в продуктах горения. Время, характерное для горения (время, за которое пламя распространяется на расстояние, равное толщине зоны пламени), порядка  $\lambda/u_h$ . Отсюда условие отсутствия выравнивания возмущений по сгоревшему газу можно записать в виде

$$\frac{R}{c_g} > \frac{\lambda}{u_h}, \text{ или } Ru_h > \lambda c_g.$$

Деля обе части на температуропроводность, получаем критерий отсутствия выравнивания возмущений

$$\frac{Ru_h}{\kappa} > \frac{\lambda c_g}{\kappa}, \text{ или } Re_h > \frac{c_g}{u_h}. \quad (9)$$

Подставляя цифры, находим отношение  $c_g/u_h$  для кислородных смесей равным  $10^2-10^3$ , для воздушных  $10^3-10^4$ . Цифры почти точно совпадают с экспериментальным значением критерия (8). Более точного совпадения ожидать и нельзя, коль скоро оба критерия (8) и (9) справедливы лишь с точностью до порядка величины.

Не исключено, что выравнивание возмущений по продуктам сгорания окажется наиболее сильным стабилизирующим фактором, поглощающим все остальные стабилизирующие эффекты: действие распространения горения, влияние вязкости и др. Тогда для проверки теории, для выяснения истинного значения критерия (8) необходимы опыты, в которых было бы исключено выравнивание.

Следует упомянуть две работы<sup>16</sup> и<sup>17</sup>, в которых были получены устойчивые режимы горения. Однако их результаты трудно сравнивать с приведенными выше экспериментами, поскольку теоретическая задача решалась в предположении о режиме индукции. Устойчивость была получена за счет более сложной формы условий на поверхности горения.

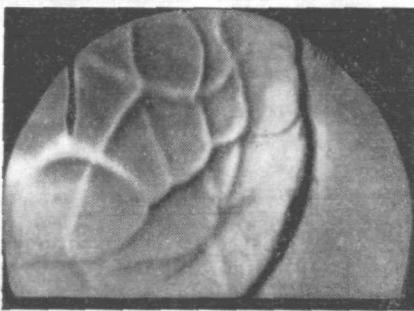
Рис. 8. Шаровое неускоряющееся пламя с медленно затухающими возмущениями на его поверхности в смеси из 10% саратовского газа и 90% воздуха.

Светлое пятно на конце темной стрелки — центр шара.

В исследованиях не обнаружен наблюдающийся на опыте переход от устойчивого горения при коротковолновых возмущениях к неустойчивому при длинноволновых.

Одним из факторов, стабилизирующих горение, как отмечалось выше, служит зависимость скорости распространения пламени от кривизны фронта. Тепловой поток в несторевший газ увеличивается вблизи вогнутых участков фронта и уменьшается около выпуклых. Поэтому скорость пламени возрастает около вогнутостей и уменьшается вблизи выпуклостей на фронте пламени, это и стабилизирует пламя, когда длина волны возмущения равна или приблизительно на порядок превышает ширину зоны горения.

Однако все сказанное выше, как это впервые заметил Я. Б. Зельдович<sup>6</sup>, справедливо лишь тогда, когда коэффициент диффузии горючего материала и окислителя примерно равен коэффициенту температуропроводности смеси. Положение существенно изменяется, если коэффициент диффузии той компоненты, которая определяет процесс (которой



мало), превышает коэффициент температуропроводности смеси. В этом случае у предела распространения возникает так называемое диффузионное горение: фронт пламени покоятся (или почти покоятся), горючая компонента притекает к нему из несгоревшего газа благодаря диффузии. При этом скорость пламени вблизи выпуклостей фронта увеличивается по сравнению со скоростью в плоском фронте, а вблизи вогнутостей уменьшается. Влияние искривления фронта на скорость пламени меняет знак по сравнению со случаем, когда коэффициенты диффузии и температуропроводности равны или близки друг к другу. Дело в том, что при диффузионном горении приток горючей компоненты (которой нехватает) больше у выпуклых участков фронта (диффузия к фронту идет из большего объема) и меньше у вогнутых, по сравнению со случаем плоского пламени. Поэтому в тех местах, где образовались случайные выпуклости, пламя распространяется быстрее, оно вытягивается вперед. Горение продвигается по несгоревшей смеси в виде отдельных колпачков или шариков. Неустойчивость такого рода в чистом виде впервые наблюдал В. И. Кокочашвили в смеси водорода с бромом (35—40%  $H_2$  + 65—70% Br) при давлении 200  $mm$  рт. ст. в случае распространения пламени сверху вниз<sup>6</sup>.

Сплошной фронт горения при такого рода неустойчивости не обра-зуется, потому что газ между шариками (колпачками) сильно обед-няется водородом. Предел распространения пламени оказывается шире предела распространения сплошным фронтом. Пламя благодаря концен-трации горения в отдельных зонах (диффузия собирает горючий мате-риал из окружающего пространства) распространяется при составах, находящихся за пределами распространения сплошным фронтом.

Вследствие неустойчивости нижний предел распространения пла-мени в смесях, содержащих водород, ниже, когда пламя движется снизу вверх, по сравнению со случаем распространения сверху вниз. Колпачки или шарики увлекаются вверх конвекцией. При движении сверху вниз конвекции нет, возможности распространения от этого уменьшаются. Диффузионное горение и связанная с ним неустойчивость наблюдается не только в смесях, содержащих водород. В смесях, содержащих боль-шое количество тяжелого флегматизатора, молекулярный вес которого значительно больше молекулярного веса кислорода и горючих веществ (четыреххлористый углерод  $CCl_4$  в смеси окиси углерода с кислородом или метана с кислородом), коэффициент диффузии горючей компоненты (или окислителя) значительно выше температуропроводности смеси. В таких смесях тоже наблюдается диффузионное горение и связанная с ним неустойчивость плоского пламени.

Очень тонкие явления у пределов распространения пламени в флег-матизированных смесях и в смесях, содержащих водород, открытые и исследованные В. И. Кокочашвили и Я. Б. Зельдовичем<sup>6</sup>, могут ока-заться существенными для техники взрывобезопасности.

### § 3. ДЕТОНАЦИЯ

Детонацией называют горение, распространяющееся в широких трубах с постоянной сверхзвуковой скоростью, вполне определенной для каждой горючей смеси. Например, скорость детонации в смеси водорода с кислородом (везде стехиометрический состав) равна 2800  $m/сек$ , метана с кислородом — 2320  $m/сек$ , пентана ( $C_5H_{12}$ ) с воздухом — 1710  $m/сек$ . Детонационное горение всегда сопровождается сильным увеличением давления и значительным повышением плотности продуктов сгорания по сравнению с плотностью исходной горючей смеси. Про-

дукты горения в детонационной волне движутся в ту же сторону, куда распространяется детонация. В противоположность детонации, медленное горение, например нормальное горение, о котором говорилось выше, сопровождается понижением давления и плотности в зоне сгорания, продукты горения движутся в нем в сторону, противоположную движению фронта пламени.

Газотермодинамическая теория детонации развита еще в конце прошлого и начале этого века. В плоском случае из законов сохранения массы, импульса и энергии (и уравнения состояния) для газа, пересекающего фронт горения (четыре уравнения для пяти неизвестных —

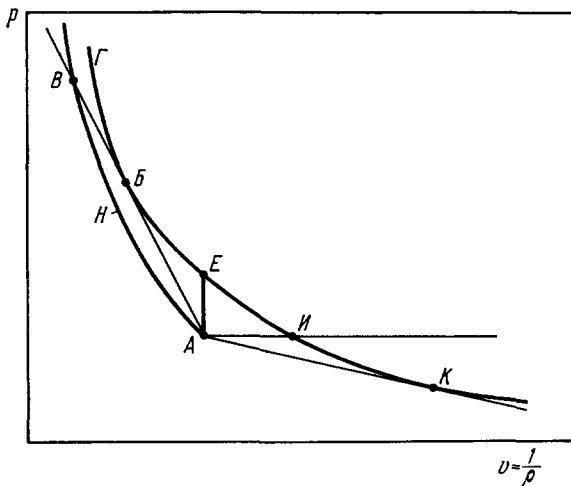


Рис. 9. Кривая Гюгонио.  
H — для ударных волн, Г — для волны горения.

скорость волны  $D$ , скорость продуктов горения  $w$ , давление  $p$ , плотность  $q$  и температура в волне), получают выражения для скорости волны и скорости продуктов горения в лабораторной системе координат

$$D = \sqrt{\frac{(p - p_0) q}{(q - q_0) q_0}}, \quad (10)$$

$$W = \sqrt{\frac{(p - p_0) (q - q_0)}{q q_0}}. \quad (11)$$

Исключая скорости (волны и продуктов горения) и температуру находят связь между давлением и плотностью продуктов горения — уравнение Гюгонио

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\kappa - \frac{q_0}{q} + \frac{2\gamma Q}{c_0^2}}{\kappa \frac{q_0}{q} - 1}. \quad (12)$$

Здесь, как и в (10) и (11),  $p_0$  и  $q_0$  — давление и плотность начального газа,  $\kappa = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ .

На рис. 9 приведен график уравнения Гюгонио. Детонации отвечает верхняя ветвь кривой ( $p > p_0$ ). Законы сохранения допускают для каждой смеси (заданы  $p_0$ ,  $q_0$  и  $Q$ ) бесконечное количество скоростей детонации, соответствующих любому давлению на верхней ветви (выше точки  $E$ ) кривой Гюгонио. Детонации, давление которых лежит выше точки  $B$ ,

называют сильными, ниже — слабыми. Точка  $B$  описывает детонацию Чепмена — Жуге (Ч.— Ж.). Она и только она, как это впервые показали Д. Чепмен (1899) и Э. Жуге (1904), соответствует наблюдаемой на опыте самопроизвольно распространяющейся детонации, имеющей вполне определенную для каждой смеси скорость. Правило отбора единственного значения детонации совпадает с правилом определения точки касания  $B$  прямой  $AB$  (ее называют прямой Михельсона) с кривой Гюгонио. В точке касания  $B$  скорость детонации относительно продуктов горения точно равна скорости звука в них. Поэтому детонация Ч.— Ж. распространяется не затухая, с постоянной скоростью. Волны разрежения, как и слабые волны сжатия, появляющиеся за фронтом горения и движущиеся всегда со скоростью звука, не настигают фронт и он распространяется сколь угодно долго, не ослабевая и не усиливаясь.

Сильная детонация самопроизвольно не распространяется с постоянной скоростью, она ослабляется разрежениями, скорость которых (скорость звука) всегда больше скорости фронта относительно продуктов горения. Сильная детонация распространяется не затухая, если, например, за ее фронтом со скоростью продуктов сгорания движется поршень. Волны разрежения за фронтом детонации в этом случае не возникают.

Слабая детонация — все точки на участке  $B$  —  $E$  — возможна, если существует внешний источник воспламенения, поджигающий газ со скоростью больше скорости детонации Ч.— Ж. Предельно быструю слабую детонацию (скорость распространения равна бесконечности, на рис. 9 такой детонации соответствует точка  $E$ ) можно осуществить в смеси, способной воспламеняться под действием освещения, если одновременно засветить всю трубу сильным источником. Воспламенение при постоянном объеме и есть предельно быстрая слабая детонация.

Участок кривой Гюгонио  $E$  —  $I$  не имеет физического смысла, ему отвечают мнимые скорости распространения горения.

Нижняя ветвь кривой Гюгонио (все точки ниже  $I$ ) относятся к дефлаграции — распространению горения с постоянной скоростью, меньшей скорости звука. В дефлаграции горение сопровождается расширением продуктов сгорания, которые, как и в каждой волне расширения, движутся в сторону, противоположную движению фронта. В детонации горение сопровождается сжатием газа и продукты горения движутся по направлению распространения волны сгорания.

Скорость дефлаграции, как и продуктов сгорания, вычисляется по тем же формулам, что и для детонации. Однако для дефлаграции не существует правила отбора, выделяющего какую-либо точку на кривой Гюгонио, например точку касания  $K$  — дефлаграцию Ч.— Ж. Термодинамически возможны любые скорости дефлаграции, но только на участке слабых дефлаграций  $I$  —  $K$  их величина определяется физико-химическими свойствами смеси. Сильные дефлаграции (участок ниже точки  $K$ ) неосуществимы по термодинамическим соображениям, хотя они и допускаются законами сохранения.

Примером слабой дефлаграции служит нормальная скорость пламени, наиболее медленная из всех реально осуществляющихся дефлаграций. Состояние продуктов сгорания в ней лежит чрезвычайно близко к точке  $I$  — сгоранию при постоянном давлении.

До сих пор речь шла о газотермодинамическом описании детонации. Физико-химической стороной явления впервые занялся Я. Б. Зельдович<sup>32, 8, 6</sup>. Он обратил внимание на то, что газ в детонационной волне воспламеняется не мгновенно. После его сжатия требуется некоторое время на развитие химической реакции. Следовательно, перед фронтом горения в детонационной волне должна всегда двигаться, с той же скоростью,

ударная волна. Стало быть, детонация представляет собою комплекс из ударной волны и зоны горения.

Скорость волны пропорциональна (это видно из формулы (10)) корню квадратному из тангенса угла наклона прямой  $AB$  к оси абсцисс рис. 10.

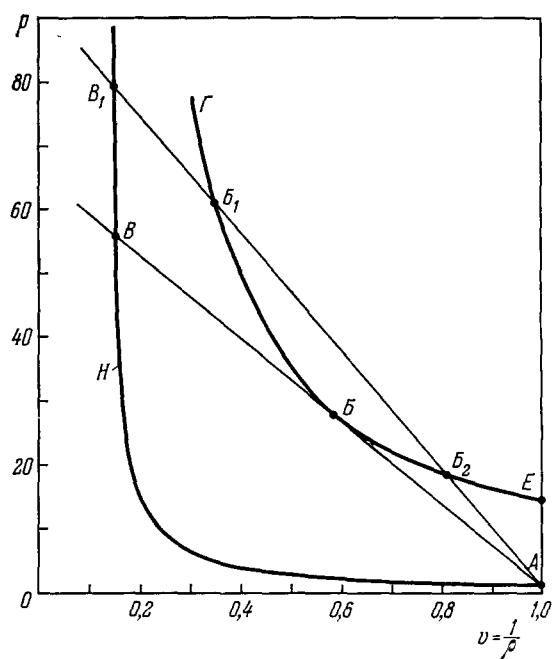


Рис. 10. Детонационная часть кривой Гюгонио.

индукции реакции воспламенения. Форма кривой на участке  $H - B$ , на котором давление падает от  $B$  до  $B_1$ , зависит от протекания химической реакции. Обычно скорость реакции зависит от температуры экспоненциально с большим значением экспоненты. Поэтому распределение давления в комплексе ударная волна — дефлаграция часто изображают, полагая, что до истечения периода индукции давление не меняется вовсе, после его окончания смесь сгорает мгновенно (рис. 12).

Детонацию, изображенную на рис. 11 и 12, обычно называют детонацией Зельдовича — Неймана. Дж. Нейман (США)<sup>19</sup> предложил ее двумя годами позже Зельдовича. Еще через год подобную схему опубликовал В. Дёринг<sup>40</sup>.

Работы Неймана и Дёринга долго были неизвестны в СССР, как и работы Я. Б. Зельдовича за рубежом. Почти 20 лет модель Зельдовича — Неймана считалась для детонации основной, хотя и не единственной. Еще в 1926 г. Кэмпбелл и Д. Вудхед<sup>20</sup> в Англии открыли так называемую спиновую детонацию — детонационный спин. Они показа-

Из условия равенства скоростей ударной волны и зоны горения следует, что состояние ударно-сжатого, но еще не прореагировавшего газа и состояние продуктов горения должны лежать на одной прямой. Давление в ударной волне, таким образом, определяется точкой  $B$ , продуктов горения — точкой  $B_1$ . Интересно, что точка  $B$  описывает детонацию, если за исходное состояние взята точка  $A$ , и дефлаграцию, когда за исходный принят сжатый газ —  $B$ . Комплекс, составляющий детонацию, таким образом, состоит из ударной волны и движущейся по ней дефлаграции Чепмена — Жуге.

Распределение давления в комплексе по длине (глубине) схематически показано на рис. 11. Длина «площадки» определяется периодом

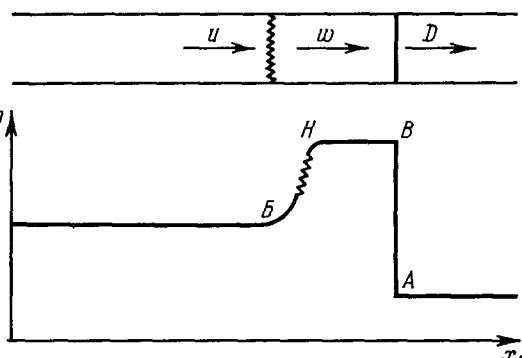


Рис. 11. Схематическое распределение давления в детонации, рассматриваемой как комплекс из ударной волны и зоны воспламенения.

ли, что в гладкой трубе при составах смеси с большим избытком или недостатком горючей компоненты зона горения явно не плоская. Горение в виде ядра распространяется вперед со скоростью детонации и одновременно вращается вокруг оси трубы. От ядра пламя, уже на некотором удалении от фронта, распространяется на все сечение трубы. Фотография спиновой детонации на движущуюся пленку приведена на рис. 13. Для сравнения на рис. 14 показана «нормальная» (не спиновая) детонация. Скорость спиновой детонации вдоль оси трубы (скорость движения процесса в целом), несмотря на явно трехмерную структуру ее фронта, точно совпадает со скоростью детонации в той же смеси, вычисленной по классической одномерной теории.

Спиновая детонация, не укладывающаяся в модель Зельдовича — Неймана, много лет рассматривалась как исключительное явление,

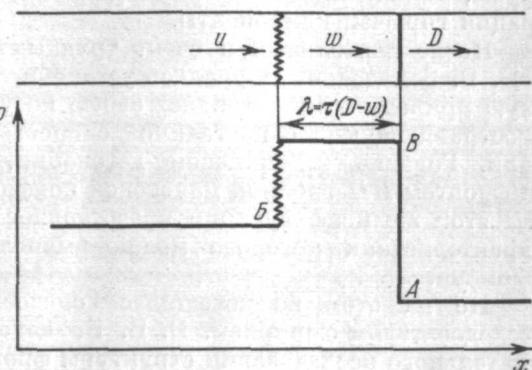


Рис. 12. Предельно упрощенная схема детонации.

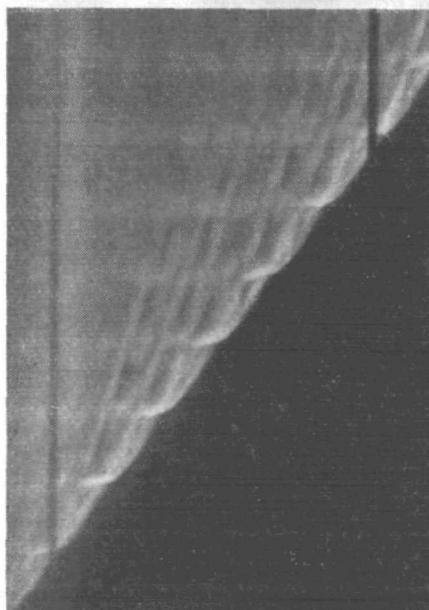


Рис. 13. Фотография спиновой детонации в смеси 20%  $H_2$  + 80% воздуха на движущейся пленке. Детонация распространяется слева направо, пленка — сверху вниз.

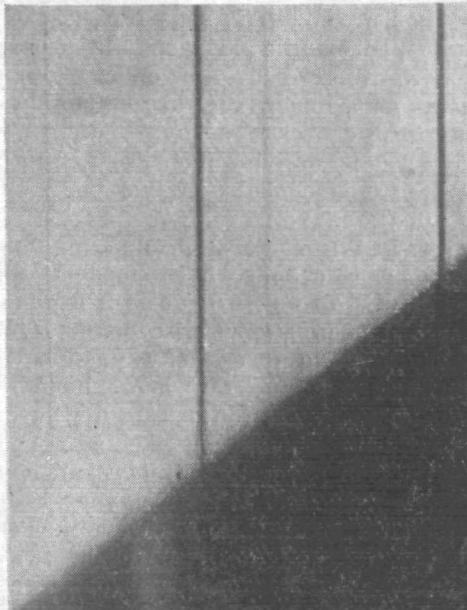


Рис. 14. Фотография «нормальной» детонации в смеси  $2H_2 + O_2$  на движущейся пленке. Детонация идет слева направо, пленка — сверху вниз.

характерное лишь для некоторых газовых смесей, например, для окиси углерода с кислородом. Затем Х. А. Ракипова, Я. К. Трошин и автор этой статьи показали (ссылки см. в <sup>10</sup>), что детонационный спин

возникает всегда и во всех смесях вблизи пределов распространения детонации, каким бы способом они ни достигались: уменьшением диаметра трубы, понижением начального давления смеси или изменением концентрации горючей компоненты.

После длительных и очень трудных поисков автору этой статьи<sup>21</sup> и Я. Б. Зельдовичу<sup>22</sup> удалось установить, что спин имеет газодинамическую природу и представляет собою косую пересжатую детонацию, распространяющуюся с постоянной скоростью вдоль стенок трубы по спирали. Горение в спиновой детонации, как выяснилось, начинается за фронтом  $H\Psi$  тройной маховской конфигурации (см. рис. 24, *a*). Волна  $HB$  этой же конфигурации представляет собою прямой ударный фронт, характеристики которого можно вычислить по теории Зельдовича — Неймана.

Но на этом не истощилась способность детонации преподносить исследователям сюрпризы. Б. В. Войцеховский с сотрудниками<sup>23</sup>, после тщательного исследования структуры фронта спиновой детонации и измерения давления в различных ее зонах, обнаружили (по крайней мере при некоторых условиях) структуру спина значительно более сложную, чем считалось ранее. В частности, они зарегистрировали значительно более высокие давления, чем рассчитанные по старой схеме (см. рис. 24, *a*). Они зарегистрировали угол наклона зоны горения в ядре спина к сечению трубы, равный  $75^\circ$ . Здесь тоже возникло противоречие с теорией, поскольку согласно теории этот угол не может быть больше  $45^\circ$ . Б. В. Войцеховский высказал предположение о воспламенении газа в спине за попечерной волной  $HK$ , а не  $H\Psi$ , как считалось по теории. Но газодинамические расчеты не подтвердили это предположение. Затем для получения соответствия расчетов с опытом в лаборатории Войцеховского была построена новая структура спина. Грубо говоря, ядро спина по этой гипотезе состоит из двух тройных конфигураций. Кроме конфигурации, представленной на рис. 24, *a*, при спине по сжатому газу 2 распространяется еще одна такая же конфигурация и горение происходит в двух косых волнах: в «старой» волне  $H\Psi$  и в «поперечной» волне, идущей по газу 2 (на рис. 24, *a* она не показана). Более значительная по массе часть газа сгорает в «поперечной» волне второй конфигурации. Вместе с тем можно найти доводы и в пользу первой гипотезы Б. В. Войцеховского о воспламенении в волне  $HK$  (см. рис. 24, *a*). Если газ находится очень близко к пределу распространения детонации и время воспламенения в волне  $H\Psi$  достаточно велико, а сама волна  $H\Psi$  устойчива к искривлениям (об этом типе устойчивости будет сказано ниже), то не исключено воспламенение в пограничном слое за волной  $HK$  после двукратного торможения газа: первый раз за волной  $HB$ , второй — за фронтом  $HK$ . В этом случае температура в пограничном слое за волной  $HK$  значительно выше, чем за фронтом  $H\Psi$ , даже после торможения газа в пограничном слое за этим фронтом. Такая схема представляется более логичной. Сразу же находится естественное место явлению, открытому Войцеховским и его сотрудниками по лаборатории. Следует подчеркнуть, что расчет тройной конфигурации с торможением в пограничном слое не тривиален. Высказанное выше соображение основано скорее на цифровых оценках, но не на строгом внутренне замкнутом расчете. Обычный тривиальный газодинамический расчет воспламенения за поперечной волной  $HK$  приводит к противоречию с законами сохранения, поэтому и была разработана более сложная газодинамическая схема спина, содержащая некоторые противоречия. Если бы высказанные только что соображения в пользу первоначальной гипотезы Войцеховского, дополненной учетом торможения газа в пограничном слое, оправ-

дались, то открытая в его лаборатории структура спина заняла бы естественное место среди других, довольно разнообразных структур детонации. Противоречия, на которых здесь неуместно останавливаться, разрешились бы весьма удачно. Однако возвратимся к прямой теме этой статьи — к неустойчивости горения и детонации.

Еще первые исследователи спиновой детонации заметили, что по мере удаления по составу смеси от пределов распространения детонации число ядер спина увеличивается, спин становится многоголовым. Затем детонация переходит в «нормальную» плоскую. В 1957—1959 гг. <sup>24-25</sup> Ю. Н. Денисов и Я. К. Трошин предприняли исследование многоголовой и «нормальной» детонации средствами, позволяющими обнаружить неоднородности во фронте детонации, значительно меньшие по размерам, чем это могли сделать раньше. Выяснилось, что не только спиновая (одно- и многоголовая), но и «нормальная» детонация в действительности имеет трехмерную структуру. В связи с первыми опытами Денисова и Трошина автор этих строк предпринял исследование устойчивости плоской детонации в модели Зельдовича — Неймана. Детонация, как показал физический анализ, оказалась неустойчивой <sup>26</sup>.

#### § 4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ГАЗОВОЙ ДЕТОНАЦИИ К ИСКРИВЛЕНИЯМ ФРОНТА ГОРЕНИЯ

Неустойчивости в детонации принципиально отличаются от неустойчивостей при нормальном горении. Неустойчивость при нормальном горении может возникнуть вследствие искривления потока газа при пересечении зоны горения либо вследствие различия в коэффициентах диффузии и температуропроводности. Неустойчивости же в детонации связаны с экспоненциальной зависимостью времени химической реакции от температуры. Небольшое увеличение (уменьшение) температуры несгоревшего газа в детонации приводит к резкому сокращению (увеличению) времени от начала сжатия в волне до момента воспламенения газа в ней. С этим явлением связана как неустойчивость детонации к искривлениям фронта воспламенения, рассматриваемая в этом разделе, так и неустойчивость к одномерным возмущениям, которой посвящен следующий раздел.

Комплекс, составляющий детонацию, изображен в разрезе на рис. 15. Здесь фронт ударного сжатия —  $BB$ , зона воспламенения —  $БКЛКБ$ , она искажена возмущением  $КЛК$ , которое на рис. 15, для наглядности, сильно преувеличено. В действительности, разумеется, начальное возмущение плоского фронта должно быть бесконечно малым. Искривление  $КЛК$  может появиться, например, вследствие небольшой неоднородности состава смеси, приводящей к уменьшению периода индукции воспламенения в зоне  $L$  и увеличению его в районе  $K$ . Выше линии  $БКЛКБ$  газ сжат до давления  $p_B$ , ниже — до  $p_B$  (см. рис. 12). В плоской волне перепад давления от  $p_B$  до  $p_B$ , каким он показан на рис. 12, сохраняется сколь угодно долго: он удовлетворяет законам сохранения и условию равенства скоростей движения фронта ударной волны и зоны горения. Но в неплоской волне разрыв давления неустойчив в поперечном направлении, вправо и влево на рис. 15. Он не уравновешен и распадается, как это показано на разрезах, помещенных снизу от линии  $БКЛКБ$ . Давление в области  $K$  при этом падает, в  $L$  — растет. Это очень существенная деталь, поэтому повторим сказанное еще раз иными словами. Перепад давления от  $p_B$  до  $p_B$  вдоль оси  $x$  устойчив. Однако возмущение  $КЛК$  создает неустойчивые разрывы (скачки) давления, перпендикулярные к направлению движения фронта детонации. Ничто не мешает этим скачкам распадаться. Более того, они обязаны распадаться, как распадается

произвольный разрыв (перепад) давления, вызванный в газе любым способом.

Итак, в зонах  $L$  давление продуктов реакции повышается, детонация в районе  $L$  оказывается пересжатой, условие Жуге здесь нарушается. Вперед, от зоны  $L$  к ударному фронту  $BB$ , идет волна сжатия, период индукции в этой области уменьшается, газ воспламеняется быстрее и точка  $L$  приближается к фронту  $BB$ . В зонах  $KK$  давление вследствие расширения падает, газ охлаждается, период индукции увеличивается, точки  $KK$  отходят еще дальше от ударного фронта  $BB$ . В итоге, возмущение  $KK$ , возникнув, усиливается. В этом и заключается неустойчивость плоского комплекса, состоящего из ударной волны и следующей за нею плоской зоны воспламенения.

Коль скоро в газе, сжатом ударной волной, скорость звука всегда больше скорости фронта относительно сжатого газа, возмущения зоны горения вызывают возмущения ударного фронта  $BB$ . Ударный фронт (это нетрудно видеть) неустойчив, когда возмущения зоны горения по размеру порядка или больше ширины зоны воспламенения ( $\lambda$  на рис. 12). Возмущения, менее протяженные, чем ширина зоны, усредняются (давление в них выравнивается) до их прихода к ударному фронту.

Описанный качественный механизм неустойчивости позволяет найти количественный критерий ее возникновения. В него войдет энергия

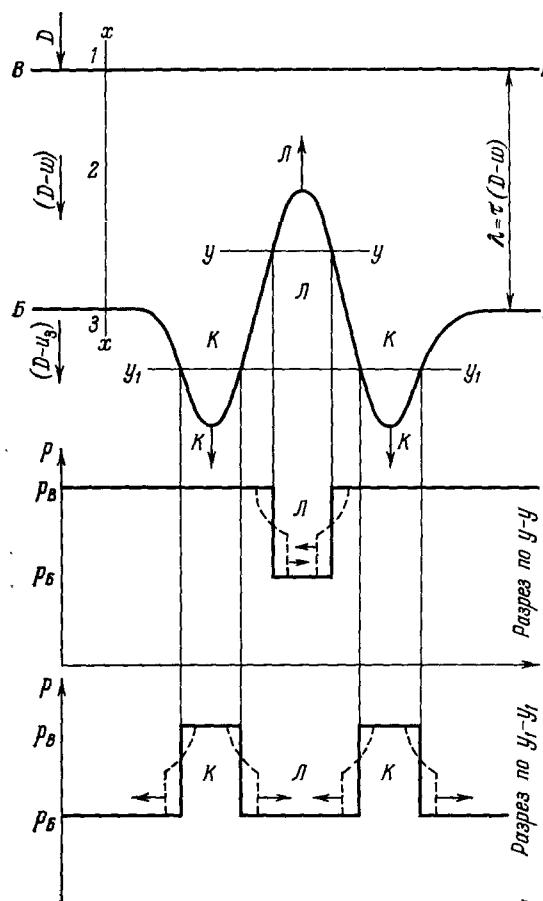


Рис. 15. Схема малого возмущения зоны воспламенения в детонации; КЛК (на рисунке сильно преувеличено).

Снизу, на разрезах, виден распад возмущения в направлении, поперечном к движению детонации.

активации реакции воспламенения  $E$ . Ясно, что чем сильнее зависит период индукции воспламенения от температуры (чем выше энергия активации), тем неустойчивее детонация. Изменение давления в зонах расширения и сжатия ( $K$  и  $L$ ), приводящее соответственно к охлаждению и нагреванию несгоревшего газа, тем больше воздействуют на время химической реакции (на положение точек  $K$  и  $L$ , рис. 15), чем сильнее скорость реакции зависит от температуры.

Для вывода критерия необходимо учесть еще одно обстоятельство. Давление в зоне  $K$ , по размеру равной  $\lambda$ , выравнивается (зона разгружается) за время порядка  $\lambda/2c_2$  (здесь  $c_2$  — скорость звука в ударно сжатом газе, области  $K$ ). Время пребывания ударно сжатого газа в зоне  $K$

размером  $\lambda$  — порядка

$$\frac{\lambda}{D-W}.$$

Но в ударной волне всегда  $c_r > D - W$ , тем более в ней справедливо неравенство  $2c_2 > D - W$ , поэтому

$$\frac{\lambda}{2c_2} < \frac{\lambda}{D-W}.$$

Время выравнивания давления в поперечном направлении всегда меньше времени пребывания возмущения во фронте детонации (меньше времени жизни возмущения). Поэтому период индукции всегда «успевает» принять значение, соответствующее давлению, пониженному или повышенному вследствие распада поперечного разрыва. Вернее, период индукции успевает принять значение, соответствующее той температуре, которая установится после сжатия газа в области  $L$  и его расширения в области  $K$ . Поэтому можно не рассматривать изменение возмущения во времени, достаточно учитывать лишь изменение скорости химической реакции в зависимости от изменения температуры, вызываемого сжатием или расширением газа в начальном возмущении.

В результате можно сформулировать следующий количественный критерий потери устойчивости: если адиабатическое расширение газа из зоны  $K$  в область  $L$ , понизив температуру газа, увеличит задержку воспламенения на величину порядка самой задержки или больше ее, то произвольное начальное возмущение (искривление) фронта пламени будет возрастать, плоская детонация потеряет устойчивость. Пренебрегая зависимостью времени реакции от давления (плотности), получаем критерий неустойчивости плоской детонации

$$\frac{d\tau}{dT} \Big|_{T_B} (T - T_B) \geq \tau, \quad (13)$$

где  $\tau$  — время химической реакции,  $T$  — температура несгоревшего газа в зоне возмущения после расширения.

Время химической реакции — величина, обратная ее скорости, — пропорционально

$$\tau \sim \exp\left(\frac{E}{RT}\right). \quad (14)$$

Из (13) и (14) получается критерий

$$\frac{E}{RT_B} \left(1 - \frac{T}{T_B}\right) \geq 1. \quad (15)$$

Вблизи точки  $K$  газ, давление которого до возмущения было равно  $p_B$ , расширится адиабатически до давления  $p_B$ . Поэтому (15) можно переписать как

$$\frac{E}{RT_B} \left[1 - \left(\frac{p_B}{p_B}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \geq 1. \quad (16)$$

Оценки критерия (16) для различных смесей, правда не очень точные, поскольку энергия активации  $E$  при высоких температурах известна неточно, указывают на неустойчивость плоской детонации практически во всех газовых смесях, в которых она наблюдается.

Физический анализ, воспроизведенный выше, дал повод к нескольким более обстоятельным математическим исследованиям неустойчивости плоской детонации (Р. М. Зайдель<sup>27</sup>, Дж. Эрпенбек<sup>28</sup> и Пухначев<sup>29</sup>). Критерий неустойчивости (17) (см. ниже), полученный Р. М. Зайделем,

отличается от (16). Тем не менее в его работе, как и в других математических исследованиях, обнаружена неустойчивость плоской детонации: в главном результаты совпали с результатами физического анализа.

Зайдель и Пухначев, между прочим, приходят к выводу об устойчивости детонации по отношению к возмущениям, длина волн которых мала по сравнению с шириной зоны химической реакции. Такого рода устойчивая детонация может, как они предполагают, осуществиться в узких трубках, диаметр которых заметно меньше ширины зоны реакции. Происхождение устойчивости ясно из предыдущего. Возмущения на фронте пламени в узких трубках не передаются ударному фронту: давление в волнах, идущих от них, усредняется по сечению трубы, прежде чем достигает ударного фронта.

### § 5. ОДНОМЕРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДЕТОНАЦИИ!

Детонация в узких трубках, устойчивая по отношению к искривлению зоны горения, оказывается, как это качественно показали Р. М. Зайдель и Я. Б. Зельдович <sup>30</sup>, неустойчивой по отношению к одномерным возмущениям.

Детонация в модели Зельдовича — Неймана, как это ясно, представляет собою дефлаграцию Жуге, распространяющуюся по ударноожатому газу — ударной волне (рис. 16, а). В установившемся режиме сжатый газ воспламеняется через время  $\tau$

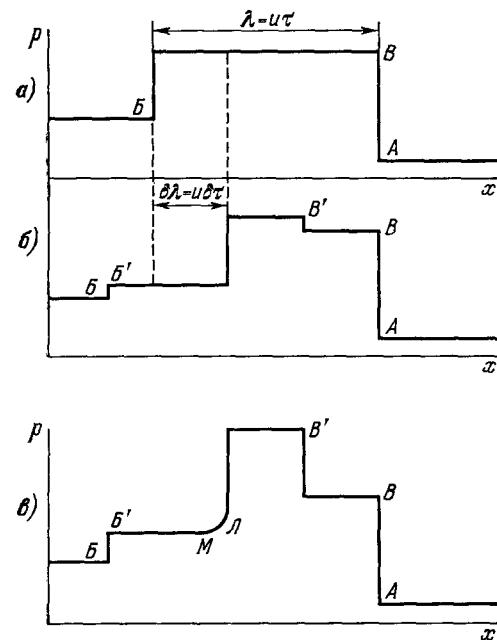


Рис. 16. Возникновение двух ударных волн  $B'$  и  $B'$  при сокращении периода задержки воспламенения во фронте детонации на  $\delta\tau$ .

смартиваемом случае появится волна разрежения  $LM$  (рис. 16, в). Но пока возмущение мало, волной  $LM$  можно пренебречь.

Комплекс из зоны горения и распространяющейся перед ним ударной волны называют двойным нестационарным разрывом. Скорость волны, скорость и состояние газа во всех зонах двойного нестационарного разрыва можно легко вычислить <sup>10</sup>.

газ воспламеняется через время  $\tau$  после поступления в ударный фронт. Этому времени соответствует скорость распространения горения, равная скорости течения несгоревшего газа и противоположная ей по знаку: фронт горения  $B$  остается неподвижным по отношению к фронту ударного сжатия  $AB$ . Пусть теперь по какой-либо случайной причине время химической реакции сократится на некоторую малую величину. Фронт пламени при этом сместится в сторону ударного фронта, появится составляющая скорости пламени, направленная к передней границе ударной волны. Условия на границе «несгоревший газ — продукты сгорания» перестанут удовлетворять условию Жуге. Новый разрыв распадется на две ударные волны, одна ( $B'$ ) пойдет по ударноожатому газу, другая ( $B'$ ) — по продуктам горения (рис. 16, б). Если прирост скорости относительно большой, то между ударными волнами в рас-

Ударная волна  $B'$ , появившаяся в результате сокращения времени химической реакции, дополнительно нагревает газ, время химической реакции от этого сокращается еще больше, по газу  $B'$  идет новая ударная волна, которая еще сильнее сокращает время химической реакции, и т. д. Возмущение (ускорение горения), возникнув, будет прогрессивно возрастать. Когда возмущение достигнет исходного ударного фронта  $AB$ , назад по сжатому газу пойдет волна разрежения, давление на фронте резко упадет и детонация вследствие очень сильной зависимости времени реакции от температуры (давления ударносжатого газа) может затухнуть.

В цитированной работе <sup>30</sup> получен критерий неустойчивости детонации к одномерным возмущениям, совпадающий с условием потери устойчивости плоской детонации по отношению к искривлениям фронта горения, выведенным Р. И. Зайделем <sup>27</sup>:

$$\frac{E}{RT_B} > \frac{(x+3)(x+1+\sqrt{x+1})}{2(x+2)}. \quad (17)$$

Здесь  $T$  — температура сжатого, но несгоревшего газа (в зоне  $B$  рис. 16, *a*),  $x = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ ,  $\gamma$  — отношение теплоемкостей.

Критерий (17) обладает тем недостатком, что он не зависит ни от отношения скоростей звука в сгоревшем и несгоревшем газе, ни от теплового эффекта горения, от которых, при прочих равных условиях, зависит интенсивность ударной волны, идущей по несгоревшему газу.

В работе <sup>31</sup> на основе качественной схемы, описанной в <sup>30</sup>, задача об одномерной неустойчивости получила иное количественное решение, воспроизведенное ниже.

В детонации Чепмена — Жуге зона воспламенения покоятся по отношению к ударному фронту. Поэтому скорость распространения пламени равна и противоположна по знаку скорости течения несгоревшего газа:

$$u = -u_r.$$

Расстояние от ударного фронта до зоны воспламенения

$$\lambda = ut,$$

где  $\tau$  — задержка воспламенения.

В невозмущенной волне за произвольный промежуток времени  $t$  сгорает объем газа, отнесенный к единице поверхности фронта, равный

$$V = ut.$$

Если время задержки воспламенения по случайной причине за промежуток времени  $t$  сократится на  $\delta\tau$ , фронт пламени приблизится к ударному фронту на расстояние

$$\Delta\lambda = u\delta\tau$$

и объем газа, сгоревший за тот же промежуток времени, станет равным

$$V' = ut + u\delta\tau.$$

Отношение объемов газа, сгоревших за одно и то же время, равно отношению скоростей распространения пламени:

$$\frac{V'}{V} = \frac{u'}{u} = 1 + \frac{\delta\tau}{t};$$

Поскольку промежуток времени  $t$  произвольный, будем считать его равным  $\tau$ . Тогда, учитывая знаки, можно записать

$$\Delta u = \frac{u' - u}{u} = -\frac{\delta\tau}{\tau}. \quad (18)$$

Применяя соотношение (18), надо иметь в виду, что  $\Delta u$  — средний по интервалу времени  $\tau$  безразмерный прирост скорости пламени. Если в следующем интервале времени, равном  $\tau$ , период индукции сократится еще на  $\delta\tau$ , то фронт пламени придвигнется к ударному фронту еще на  $u'\delta\tau$ . Иначе говоря, чтобы сохранилась новая скорость пламени  $u'$ , период задержки воспламенения должен непрерывно сокращаться. Если же он, сократившись один раз на величину  $\delta\tau$ , останется равным  $\tau - \delta\tau$ , зона горения установится на новом расстоянии  $\lambda - u'\delta\tau$  от ударного фронта. Пламя относительно ударного фронта снова будет покойиться.

Безразмерный перепад давления в ударной волне, идущей по несгоревшему газу и обязанный малому приросту скорости пламени, определяется согласно <sup>10</sup> (стр. 221) выражением

$$\Delta p = \frac{p' - p}{p} = \frac{c}{c + c_r} q M \Delta u. \quad (19)$$

Здесь  $p'$  — давление в ударной волне,  $p$  — давление в газе, по которому идет ударная волна,  $c$  и  $c_r$  — скорость звука в несгоревшем и горевшем газе соответственно,  $q$  — отношение теплового эффекта горения к внутренней энергии несгоревшего газа,  $M$  — отношение скорости пламени к скорости звука в несгоревшем газе.

Дальнейшая судьба начального возмущения (по времени  $\delta\tau$  и длине  $u'\delta\tau$ ) зависит от того, каким окажется обратное влияние ударной волны (19) на период задержки воспламенения и соответственно на скорость пламени, определенную выражением (18). Если ударная волна за время не больше  $\tau$  сократит период задержки на величину, превышающую  $\delta\tau$ , начальное возмущение возрастет. Если же ударная волна сократит задержку воспламенения меньше, чем на  $\delta\tau$ , начальное возмущение уменьшится. Стало быть, для выяснения условия роста начального возмущения надо найти зависимость изменения периода задержки воспламенения (относительного изменения скорости пламени) от относительного перепада давления в ударной волне.

Время химической реакции зависит от температуры как

$$\tau \approx A \exp \left( \frac{E}{RT} \right). \quad (20)$$

Поэтому

$$\tau + \delta\tau = A \exp \left\{ \frac{T}{R(T + \delta T)} \right\},$$

или

$$\frac{\delta\tau}{\tau} = -\frac{E\delta T}{RT^2}. \quad (21)$$

Полагая сжатие в ударной волне адиабатическим, получим

$$-\frac{\delta\tau}{\tau} = \Delta u = \frac{E}{RT} \left[ 1 - \left( \frac{p'}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]. \quad (22)$$

Разлагая (22) в ряд и ограничиваясь линейным членом, находим

$$\Delta u = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{E}{RT} \frac{\delta p}{p} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{E}{RT} \Delta p. \quad (23)$$

Воспользовавшись условием неустойчивости <sup>10</sup>, стр. 229, формула (31.2))

$$\frac{d\Delta p}{d\Delta u} \Big|_{(19)} > \frac{d\Delta p}{d\Delta u} \Big|_{(23)},$$

приходим к критерию возникновения одномерной неустойчивости детонации в виде

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{E}{RT_B} \frac{1}{1 + \frac{c_{\pi}}{c}} qM > 1. \quad (24)$$

Критерий (24) практически всегда превышает единицу. Плоская волна поэтому неустойчива и по отношению к одномерным возмущениям. Если ее и удастся наблюдать, то лишь в специальных случаях, когда энергия активации при высоких температурах окажется настолько малой, что критерии (16) и (24) станут меньшими единицы (неравенства (16) и (24) не будут выполнены). Пока нельзя сказать, реальны ли такие случаи.

В однородных газовых смесях детонация поэтому распространяется не как плоская волна, она становится или пульсирующей, или спиновой. В связи с этим теряет силу старый подход к теории пределов детонации<sup>32</sup>, в котором рассматривается затухание плоской детонации. Пределы распространения детонации теперь, как это будет видно ниже, определяются условиями возможности распространения детонационного спина.

### § 6. ПУЛЬСИРУЮЩАЯ ДЕТОНАЦИЯ

Неоднородности во фронте детонации, ранее считавшемся плоским, впервые обнаруженные Ю. Н. Денисовым и Я. К. Трошиным<sup>24, 25</sup> так называемым следовым методом, а также Б. В. Войцеховским, Б. Е. Котовым, В. В. Митрофановым и И. Е. Топчяном<sup>23</sup> фотографическим способом, подробно исследовались в советских и зарубежных лабораториях<sup>33, 34, 35, 36, 10, 23</sup>. Из зарубежных исследований особенно интересна работа Д. Уайта<sup>39</sup>, изучавшего структуру детонации в смеси  $2\text{H}_2 + \text{O}_2 + 2\text{CO}$  интерференционным методом. Уайт неизменно обнаруживал сильную турбулентность позади зоны реакции. Это служит еще одним убедительным и независимым доказательством трехмерной структуры фронта детонации. Пульсирующую детонацию, как была названа детонация с многочисленными неоднородностями во фронте, теперь можно выделить в самостоятельный вид горения: это потерявшая устойчивость плоская волна в модели Зельдovicha — Неймана. Спиновая детонация оказалась предельным случаем пульсирующей, она возникает когда на сечении трубы размещается лишь одна неоднородность.

Структура неоднородностей при пульсирующей детонации, как показывают эксперименты и сопоставленные с ними газодинамические расчеты, выглядит следующим образом<sup>10</sup>. От пересжатых участков ( $L$ , рис. 15) к ударному фронту приходят волны сжатия и вызывают на его поверхности возмущения двух типов: излом — пересечение двух ударных волн (рис. 17, *a*) и пересечение ударной волны с косой детонационной (рис. 17, *b*). Справа на рис. 17 показаны упрощенные схемы соответствующих изломов, это — известные

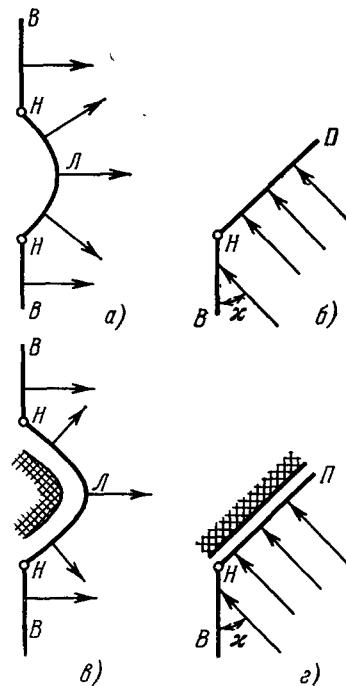


Рис. 17. Схема изломов ударного фронта детонации: *a* — *b* без горения непосредственно за изломом; *b* — *c* с горением.

маховские тройные конфигурации, поддающиеся точному газодинамическому расчету<sup>10</sup>. Линией *НП* отмечены «ножки» или «маховские диски» тройных конфигураций. Угол  $\alpha$  существенно различен для конфигураций обоих типов.

В случае пересечения ударной волны с детонационной (рис. 17) он заметно меньше, чем при пересечении двух ударных волн. По отпечаткам на боковой стенке трубы (рис. 20) можно проследить за движением точки *Н* рис. 17 и измерить угол  $\alpha$ . Измерения и сопоставления их с расчетом конфигураций обоих типов показывают, что в большинстве случаев при пульсирующей детонации возникают возмущения типа 17, *a*. Их на фронте много. Они, сталкиваясь, создают зоны повышенного давления и температуры, в которых воспламеняется газ (размытые зоны в месте пересечения линий на рис. 20).

Встречаясь с пластинкой, перпендикулярной движению фронта (рис. 18), конфигурации оставляют на ней отпечатки, один из которых

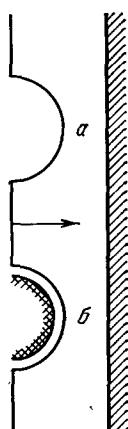


Рис. 18. Схема столкновения фронта детонации с твердой стенкой.

с наиболее крупными неоднородностями показан на рис. 19. Очень любопытно, что средний размер ячейки, подобной изображенному на рис. 19, пропорционален времени химической реакции в модели Зельдовича — Неймана. Модель оставляет о себе своеобразное напоминание. И это не случайно.

Несмотря на неустойчивость, на этой модели основывается существование пульсирующей детонации. Неустойчивость не разрушает детонацию с ударной волной впереди зоны горения, она только придает волне более сложную трехмерную структуру.

На рис. 21 приведено еще два отпечатка пульсирующей детонации на пластинке, расположенной перпендикулярно движению фронта волны. Эти фотографии, как и рис. 19 и 20, сделаны Я. К. Трошиным и Ю. Н. Денисовым с помощью простой, но вместе с тем тонкой методики. Для получения четких отпечатков пластиинки покрывались, по специальной технологии, тонким слоем сажи.

Средний размер неоднородностей уменьшается с повышением начального давления смеси. Методика позволяла регистрировать неоднородности по размеру до 0,1 мм. Уменьшение размера связано с некоторым возрастанием скорости детонации при повышении давления, приводящем к повышению температуры ударноожжатого газа и сокращению времени химической реакции.

На рис. 22 показано изменение скорости детонации и температуры ударноожжатого газа в смеси  $2\text{H}_2 + \text{O}_2$  в зависимости от начального давления.

Зависимость среднего размера неоднородности  $\Delta y$  от времени химической реакции выражается соотношением, справедливым, вероятно, с точностью до постоянного коэффициента порядка единицы<sup>34</sup>:

$$\Delta y \approx \frac{(\gamma-1) \cdot 2\tau D}{(\gamma+1) \left( 1 - \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \right)} = \beta \tau D. \quad (25)$$

Пользуясь формулой (25), можно экспериментально определять время химической реакции в модели Зельдовича — Неймана. Таким способом в<sup>36</sup> измерялся температурный коэффициент (видимая энергия активации) реакции воспламенения бензола с кислородом.

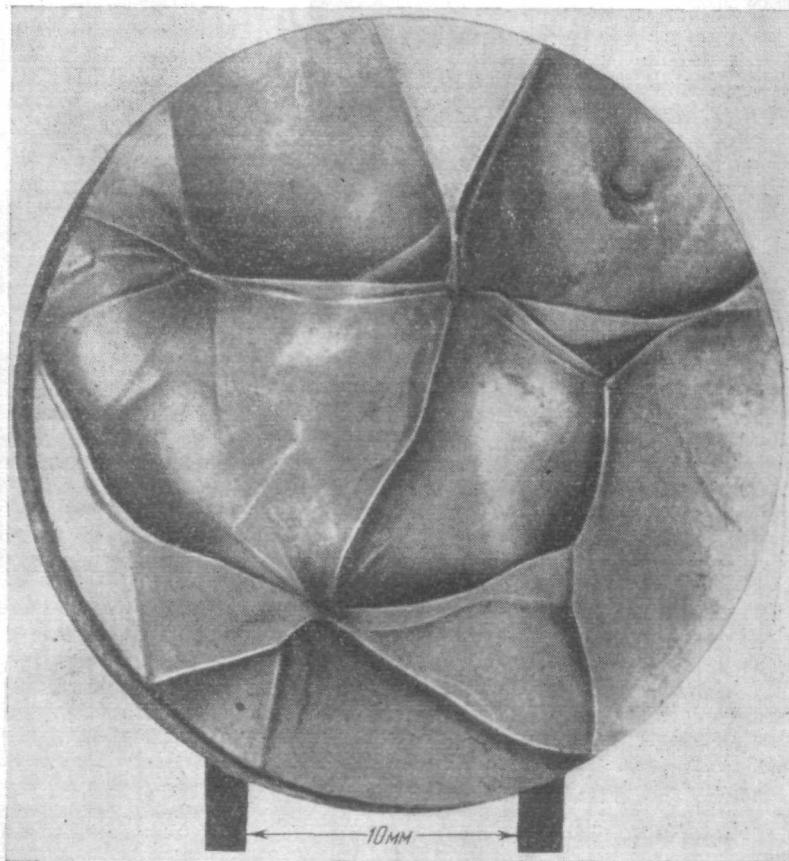


Рис. 19. След столкновения пульсирующей детонации с торцом трубы.

Линии отмечают места встречи тройных ударных конфигураций.

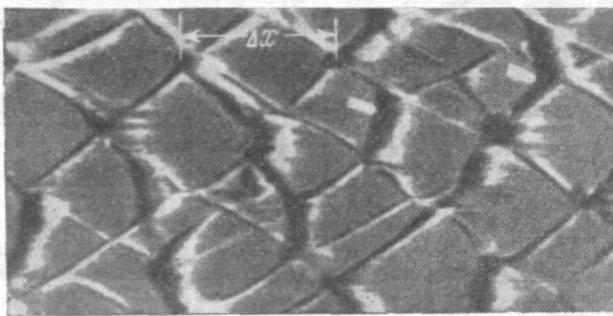


Рис. 20. Отпечатки, оставленные пульсирующей детонацией на боковой поверхности трубы.

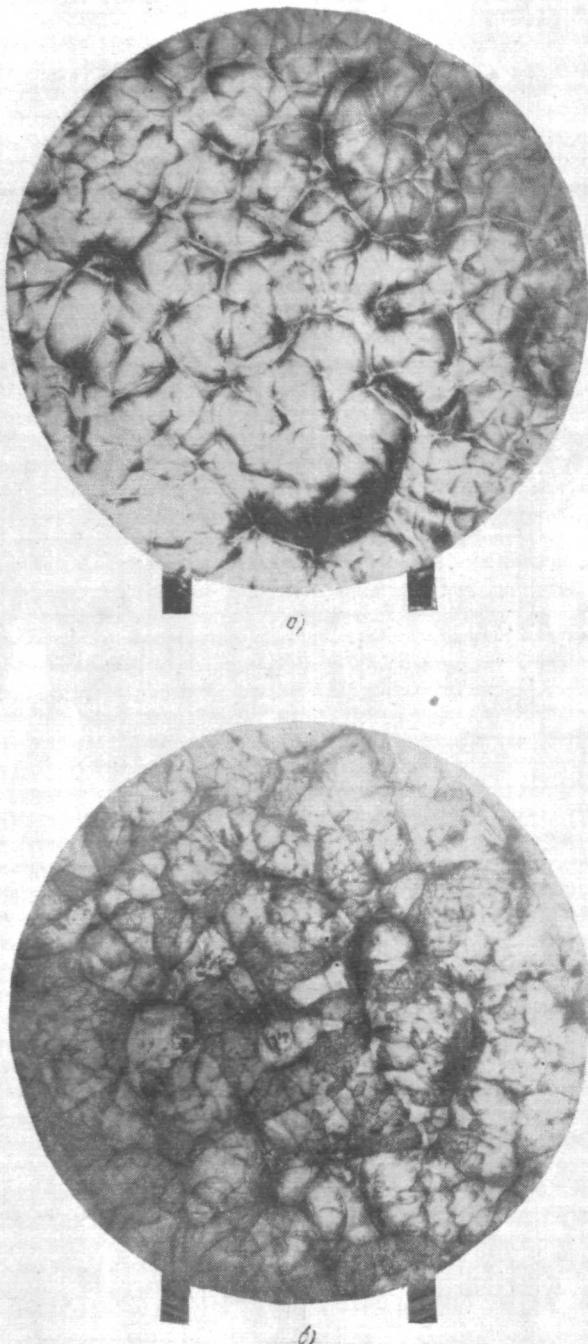


Рис. 21. Отпечатки пульсирующей детонации, падающей на закопченную пластинку.

а) Смесь  $2\text{H}_2 + \text{O}_2$ , начальное давление 300 мм рт. ст.; б) смесь  $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2$ , давление 800 мм рт. ст. В пределах некоторых крупномасштабных неоднородностей видны мелкомасштабные неоднородности — тонкая структура.

Энергия активации в области температур, видной на рис. 23, оказалась равной 37 ккал/моль.

Рис. 21, б обнаруживает более сложную, чем рис. 21, а, структуру неоднородностей. Некоторые из крупных ячеек заполнены на порядок более мелкими неоднородностями. Можно думать, что в некоторых случаях на фронте детонации появляются неоднородности, по структуре подобные неоднородностям типа рис. 18, б: возникает пересечение ударной волны с косой пересжатой детонацией. Пересжатая детонация, существующая в пределах одной крупномасштабной ячейки, может оказаться неустойчивой, несмотря на то, что левая часть критерия (16) всегда для пересжатой детонации меньше, чем для детонации Жуге.

В модели Зельдовича — Неймана пересжатая детонация для исходного состояния  $A$  соответствует (тождественна) слабой дефлаграции для исходного состояния  $B_1$  (рис. 10). Поэтому для оценки пределов

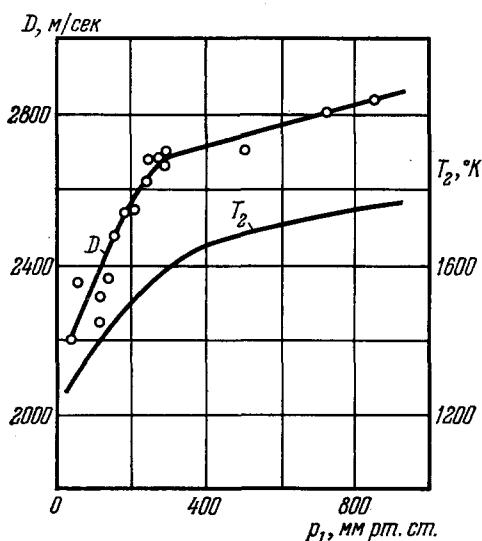


Рис. 22. Зависимость скорости детонации и температуры  $T$  за ударным фронтом от начального давления смеси  $2\text{H}_2 + \text{O}_2$  (диаметр трубы 16 м.м.).

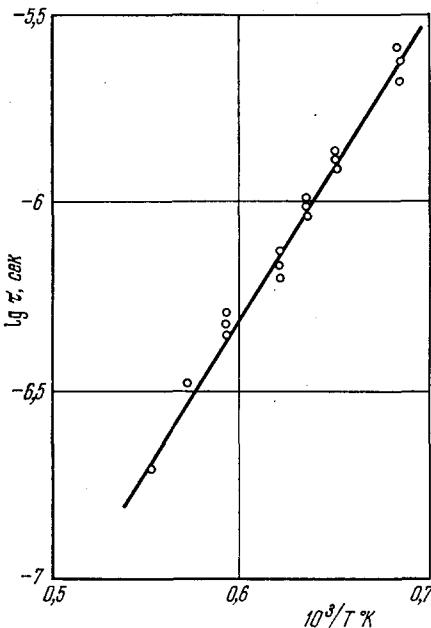


Рис. 23. Температурная зависимость запаздывания воспламенения бензолово-кислородной смеси в детонационной волне. Видимая энергия активации в этих условиях равна 37 ккал/моль.

неустойчивости пересжатой детонации можно пользоваться приближенным критерием, полученным для слабой дефлаграции <sup>10</sup>:

$$(\gamma - 1)^2 \frac{E}{R_T} \frac{Q}{c^2} M^2 > 1. \quad (26)$$

Здесь  $M$  — отношение скорости «распространения» горения по отношению к ударному фронту к скорости звука в сжатом газе. Остальные величины читателю уже знакомы.

Вследствие более высокой температуры в ударном фронте пересжатой детонации по сравнению с детонацией Жуге, размер ячеек при потере устойчивости оказывается значительно меньшим, чем в детонации Жуге. Так возникает тонкая структура.

А. Н. Дремин, Г. А. Агадуров и О. К. Розанов <sup>37, 38</sup> обнаружили неоднородную структуру фронта детонации в нитрометане (жидкость) разбавленном ацетоном. В твердых взрывчатых веществах пульсирующую детонацию зарегистрировать не удалось. Неоднородности в структуре взрывчатых веществ практически всегда больше неоднородностей, связанных с неустойчивостью.

### § 7. ПРЕДЕЛЫ ДЕТОНАЦИИ

Неустойчивость, как это ни парадоксально, расширяет возможности распространения детонации. В косых волнах (в маховской «ножке» НП, рис. 17) температура значительно выше температуры в прямой ударной волне ВН. В месте столкновения двух косых ударных волн (двух маховских дисков) температура еще выше. Так неустойчивость, порождая возмущения ударного фронта, создает на относительно небольшой площади фронта очаги особенно высокой температуры. В них благодаря экспоненциальной зависимости времени реакции от температуры смесь воспламеняется значительно быстрее, чем в плоской волне. От горячих точек горение потом распространяется на все сечение трубы. Не будь горячих точек, воспламенение у пределов детонации происходило бы очень далеко за ударным фронтом, потеря на теплоотдачу и трение приводили бы к затуханию детонации значительно раньше (например, при более высоком давлении или при более калорийном и быстрогорящем составе), чем при наличии неоднородностей.

В табл. I и II, составленных по данным <sup>10</sup> (§ 4), приведены расчетные давление и температура (безразмерные, отнесенные к исходному газу).

Таблица I

Расчетные давление, плотность и температура в разных зонах тройной маховской конфигурации в случае детонации смеси  
 $2\text{H}_2 + \text{O}_2$ ,  $D = 2800 \text{ м/сек}$ ,  
 $p_1 = 760 \text{ мм рт. ст.}$ ,  $\gamma = 1,4$

| Параметры | Зоны по рис. 21, а |       |      |      |
|-----------|--------------------|-------|------|------|
|           | 1                  | 2     | 3    | 4    |
| $p/p_1$   | 1                  | 34,4  | 48,7 | 48,7 |
| $q/q_1$   | 1                  | 5,113 | 5,36 | 6,57 |
| $T/T_1$   | 1                  | 6,7   | 9,1  | 4,7  |

Таблица II

Расчетные давление, плотность и температура в тройной маховской конфигурации с косой детонационной волной в случае спиральной детонации в смеси  
 $2\text{H}_2 + \text{O}_2$ ,  $D = 2200 \text{ м/сек}$ ,  
 $p_1 = 45 \text{ мм рт. ст.}$

| Параметры | Зоны по рис. 21, б |      |      |      |      |
|-----------|--------------------|------|------|------|------|
|           | 1                  | 2    | 3    | 4    | 5    |
| $p/p_1$   | 1                  | 20,2 | 37,8 | 34,3 | 34,3 |
| $q/q_1$   | 1                  | 4,7  | 5,2  | 3,2  | 6,6  |
| $T/T_1$   | 1                  | 4,5  | 7,3  | 10,6 | 5,2  |

в различных зонах тройной маховской конфигурации (рис. 24, а и б). В зонах 2 и 3 в каждой из конфигураций газ сжат, но не воспламенен. Зона 4 заполнена продуктами сгорания. Температура несгоревшего газа всегда выше в зоне 3; естественно, что в этой зоне и происходит воспламенение газа. Однако если и в зоне 3 смесь воспламеняется вяло (время воспламенения меньше времени до столкновения конфигураций), две ударные конфигурации сталкиваются. Отражение двух волн НП друг от друга (рис. 25) оказывается нерегулярным (маховским). Расчетная температура в разных зонах новой конфигурации, образовавшейся в результате столкновения, приведена в табл. III. За исходные взяты две маховские конфигурации, одна из которых представлена в табл. I.

В зоне столкновения 8 и в соседнем районе 7 достигается еще более высокая температура, нежели в косой ударной волне 3. Зоны столкновения служат хорошим источником зажигания.

Ввиду очень сильной зависимости времени химической реакции от температуры, условие существования тройных конфигураций, обеспечивающих быстрое воспламенение газа, совпадает с условием возможности

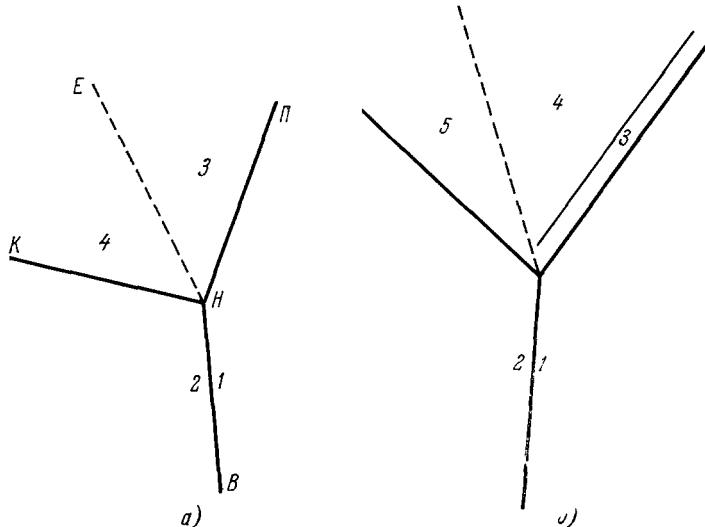


Рис. 24. Тройная маховская конфигурация (излом) в случае:  
а) пересечения двух ударных волн  $BH$  и  $H\Pi$ , б) пересечения  
ударной волны с детонацией.

распространения детонации<sup>10, 34</sup>. Такой подход к определению границ существования детонации в корне отличается от существовавшего ранее<sup>32</sup>.

Таблица III

Давление, плотность и температура  
в конфигурации рис. 25,  
образовавшейся в результате  
столкновения двух конфигураций  
типа рис. 24, а

| Параметры     | Зоны по рис. 25 |      |      |      |      |
|---------------|-----------------|------|------|------|------|
|               | 1               | 3    | 6    | 7    | 8    |
| $p/p_1$       | 1               | 48,7 | 54,8 | 54,8 | 59   |
| $\rho/\rho_1$ | 1               | 5,4  | 5,8  | 5,4  | 5,5  |
| $T/T_1$       | 1               | 9,1  | 9,42 | 10,1 | 10,8 |

Число возмущений на поверхности фронта детонации в трубе диаметром  $d$  с учетом формулы (25) оказывается порядка

$$\left(\frac{d}{\Delta y}\right)^2 = \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{d}{\tau D}\right)^2.$$

Отсюда условие существования одного возмущения (спин) запишется

в виде

$$\frac{1}{\beta^2} \left( \frac{d}{\tau D} \right)^2 = 1, \quad (27)$$

а условие затухания детонации —

$$\frac{1}{\beta^2} \left( \frac{d}{\tau D} \right)^2 < 1. \quad (28)$$

Время химической реакции очень быстро увеличивается при понижении скорости детонации. По мере сильного обогащения или обеднения

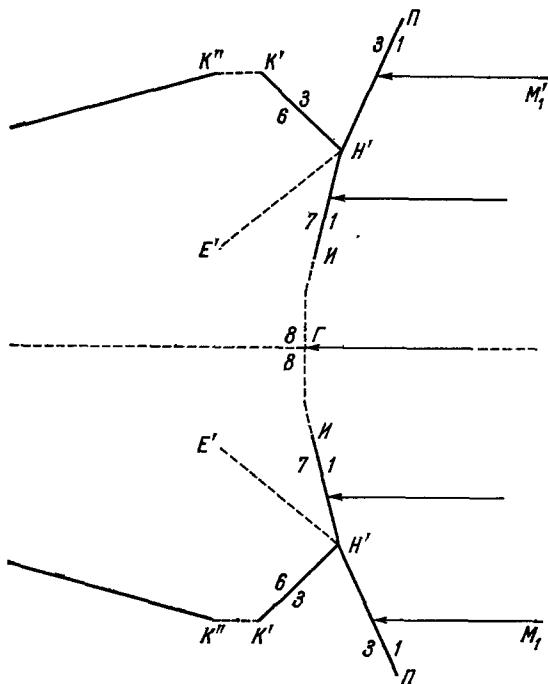


Рис. 25. Результат столкновения двух ударных конфигураций — двух волн типа  $HII$  (рис. 24, а).

смеси горючей компонентой — приближение к пределу распространения детонации — скорость волны уменьшается, произведение  $\tau D$  растет, левая часть критерия (28) быстро уменьшается. Уменьшается значение левой части (28) и по мере приближения к пределу за счет понижения давления смеси или уменьшения диаметра трубы. В этом случае в критерий в  $\beta$  скрытом виде входят потери на трение и теплоотдачу. Они уменьшают скорость волны и тем самым резко увеличивают время химической реакции.

Вычисление критерия (28) и по кинетическим, и по термохимическим данным пока очень ненадежно: нет точных данных о кинетике химической реакции в условиях детонации, неизвестна теоретическая зависимость скорости детонации от начального давления смеси и диаметра трубы. Пределы детонации лучше определять, если это будет нужно, экспериментально. Соотношения (27) и (28), как видно из сказанного выше, имеют лишь физически иллюстрированный характер.

В заключение возвратимся к неустойчивости детонации. Неустойчивость, как это было видно, связана с сильной (экспоненциальной) зависимостью от температуры скорости химической реакции воспламенения

газа, сжатого и нагретого ударной волной, предшествующей зоне воспламенения. Ударная волна, как необходимое условие распространения сильной детонации и детонации Чепмена — Жуге, была введена Я. Б. Зельдовичем при построении модели детонационной волны, получившей название детонации Зельдовича — Неймана. Неустойчивость, приводящая к появлению пульсирующей (и в пределе — спиновой) детонации, исключает распространение плоской ударной волны перед фронтом горения. Но ударная волна перед зоной горения — теперь это достаточно сложные трехмерные ударные конфигурации, пересекающиеся и сталкивающиеся, — все же осталась необходимым условием распространения детонации (сильной и Чепмена — Жуге). В науке часто плодотворные идеи в том или ином виде сохраняются и в новых условиях. Так произошло и здесь. Идея об ударной волне, воспламеняющей газ, осталась, хотя и претерпела значительные изменения. Сама неустойчивость детонации теперь рассматривается как следствие воспламенения газа в ударной волне. Не будь ударной волны, не было бы и неустойчивости!

Остается сказать несколько слов о слабой детонации. Распространение ее возможно только при существовании внешнего источника воспламенения. Воспламенение в ударной волне перед зоной горения, как и появление самой ударной волны, делает невозможным распространение слабой детонации. В слабой детонации, следовательно, нет основной причины, определяющей неустойчивость. Нет самовоспламенения газа с резкой зависимостью времени воспламенения от температуры. Слабая детонация поэтому всегда устойчива, по крайней мере к тем возмущениям, к которым неустойчивы детонация Чепмена — Жуге и сильная детонация в рассмотренных выше случаях.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Михельсон, Уч. зап. Имп. Моск. ун-та, Отдел физ.-матем., вып. 10, 1 (1898).
2. В. А. Михельсон, Собр. соч., т. 1, М., Изд-во «Новый агроном», 1930.
3. Я. Б. Зельдович и Д. А. Франк-Каменецкий, ЖФХ 12, 100 (1938).
4. Я. Б. Зельдович и Д. А. Франк-Каменецкий, АН СССР 19, 693 (1938).
5. Я. Б. Зельдович и В. В. Воловодский, Тепловой взрыв и распространение пламени в газах, М., Изд. Моск. мех. ин-та, 1947.
6. Я. Б. Зельдович, Теория горения и детонации газов, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1944.
7. Я. Б. Зельдович и Н. И. Семенов, ЖЭТФ 10, 1116 (1940).
8. Н. Н. Семенов, УФН 24, 433 (1940).
9. Н. Н. Семенов, УФН 23, 251 (1940).
10. К. И. Щелкин, Я. К. Трошин, Газодинамика горения, М., Изд-во АН СССР, 1963, стр. 112.
11. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1954, стр. 581.
12. Я. Б. Зельдович и А. И. Розловский, ДАН СССР 57, 365 (1947).
13. Х. А. Ракипова, Я. К. Трошин и К. И. Щелкин, ЖТФ 17, 1397 (1947).
14. Я. К. Трошин и К. И. Щелкин, Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 160 (1955).
15. К. А. Кацкарлы, И. Г. Керимов, Я. Н. Насиров, А. И. Розловский, Ю. Х. Шаулов, ДАН Аз. ССР, № 12, 819 (1955).
16. Р. М. Зайдель, ПМТФ, № 2 (1962).
17. С. К. Асланов, ПМТФ, № 4 (1963).
18. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 10, 542 (1940); ЖЭТФ 12, 389 (1942).
19. J. Neumann, Office of Scientific Research and Development, № 549 (1942).
20. C. Samirveil, D. Woodhead, J. Chem. Soc. 129, 3010, (1926).
21. К. И. Щелкин, ДАН СССР 47, 501 (1945).
22. Я. Б. Зельдович, ДАН СССР 52, 147 (1945).

23. Б. В. Войцеховский, В. В. Митрофанов, М. Е. Топчиян, Структура фронта детонации в газах, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1963.
24. Ю. Н. Денисов и Я. К. Трошин, ДАН СССР 125, 110 (1959).
25. Ю. Н. Денисов и Я. К. Трошин, ЖТФ 30, 450 (1960).
26. К. И. Щелкин, ЖЭТФ 36, 600 (1959).
27. Р. М. Зайдель, ДАН СССР 136, 1142 (1960).
28. J. J. Еграпбеск, Phys. Fluids, № 5, 604 (1962); J. J. Еграпбеск, Ninth. (International) Symposium on Combustion, Academic Press, 1963, № 4.
29. В. В. Пухачев, ДАН СССР 149 (4) (1963); ПМТФ, № 6 (1963).
30. Р. М. Зайдель и Я. Б. Зельдович, ПМТФ, № 6 (1964).
31. К. И. Щелкин, ДАН СССР 160, 1144 (1965).
32. Я. Б. Зельдович и А. С. Компанеец, Теория детонации, М., Гос-техиздат, 1955.
33. R. E. Duff, Phys. Fluids, 1427 (1961).
34. Б. П. Волин, Г. И. Филатов, Я. К. Трошин, К. И. Щелкин, ПМТФ, № 2 (1960).
35. Ю. Н. Денисов и Я. К. Трошин, ПМТФ, № 1 (1960).
36. А. Н. Сербинов, Я. К. Трошин, К. И. Щелкин, ДАН СССР 145, 1314 (1962).
37. А. Н. Дремин, Г. А. Агадуров, О. К. Розанов, ДАН СССР 133, 1372 (1960).
38. А. Н. Дремин, О. К. Розанов, ДАН СССР 139, 137 (1960).
39. D. R. White, Phys. Fluids 4, 465 (1961).
40. W. Döring, Ann. d. Phys., 5 Folge, 43, 421 (1943).