1964 г. Сентябрь *Т. LXXXIV, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12

УНИТАРНАЯ СИММЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Я. А. Смородинский

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Современный физик, исследуя явления в мире элементарных частиц, считает свою работу завершенной, если он может сформулировать закономерности экспериментального материала в краткой форме законов сохранения. Доквантовая физика знала лишь несколько фундаментальных законов сохранения классической механики; в физике квантовой, и особенно в физике элементарных частиц, накопилась уже большая серия таких законов.

Может быть, обилие законов сохранения связано с тем, что мы еще не знаем более глубокого механизма, который регулирует многообразие процессов, происходящих с частицами. В будущем, вероятно, окажется, что многие законы сохранения связаны общей причиной и являются следствием некоторой общей симметрии пространства и времени. Однако сейчас они выступают как независимые и их изучение является основным направлением современных исследований.

Законы сохранения в физике элементарных частиц и связанная с ней симметрия характерны тем, что они во многих случаях оказываются не точными, а лишь приближенными. В связи с этим в физике появилась новая возможность изучения явлений, обусловленная тем, что нарушение симметрии оказывается во многих случаях относительно малым по своей величине и достаточно простым по своим свойствам.

Примером такой симметрии является изотопическая симметрия; нарушающие ее электромагнитные и слабые взаимодействия хорошо изучены. Не будет большим преувеличением сказать, что наиболее интересные результаты достигались в физике именно тогда, когда выяснялись законы нарушения симметрии. Эту линию можно проследить даже в астрономических наблюдениях. Галилей считал, что планеты совершают свой путь по естественным круговым орбитам. Нарушение аксиальной симметрии путей планет, открытое Кеплером, привело к созданию классической механики. Триумфом общей теории относительности было открытие движения перигелия Меркурия, знаменующее собой еще одно нарушение симметрии — замкнутости орбит классической механики.

В квантовой физике вопрос о новых законах сохранения возникает тогда, когда пытаются понять строение связанных состояний системы. Открытие уровней атома водорода привело к модели Бора. Систематика уровней оказалась связанной с новыми свойствами симметрии, которые только много лет спустя были сформулированы Фоком в форме симметрии вращения в четырехмерном мире *). Возможность чисто группового описания атома водорода представляет собой очень важное явление в атомной физике, которое незаслуженно обходят в большинстве курсов квантовой механики.

Симметрия относительно перестановок и связанный с ними принцип Паули дают возможность понять структуру уровней атомов с многими электронами.

В ядерной физике изучение уровней атомных ядер привело к открытию зарядовой инвариантности и связанного с ней изотопического пространства. Изотопический спин частиц и ядер является сейчас не менее привычной характеристикой, чем обычный спин или заряд ядра. Открытый Вигнером в 1937 г. закон сохранения изотопического спина обнаружил свою полную силу в физике элементарных частиц.

До тех пор пока были известны только две тяжелые частицы, протон и нейтрон, вопрос о новых квантовых числах не возникал; когда же были открыты гипероны, возник вопрос о том, в чем состоит причина их большой стабильности, так как время жизни 10^{-10} *сек* по ядерным масштабам — очень большое время. Первым шагом построения теории, как и в истории теории атома, было введение «главного квантового числа» для системы уровней барионов (так можно назвать семейство нуклонов и гиперонов). Таким главным квантовым числом оказалась открытая Гелл-Манном и Нишиджимой «странность» S (или гиперзаряд Y, равный сумме S и барионного числа B).

Сейчас мы не имеем ни малейшего представления о том, с какими свойствами сильно взаимодействующих частиц связано это квантовое число. Мы не знаем, является ли оно независимым от обычных свойств, которые описываются квантовой механикой и теорией относительности, и его происхождение может быть выявлено более глубокой теорией; но, может быть, и это кажется более естественным, странность есть просто компактное описание взаимодействия частиц и того не очень понятого фона, который принято называть «физическим вакуумом». Но, как бы то ни было, открытие странности, несомненно, является одним из самых существенных этапов развития физики элементарных частиц.

Для того чтобы включить «странность» в аппарат теории, необходимо было расширить схему изотопического спина. Первая попытка такого рода была сделана Сакатой [A1, A2], рассмотревшим схему U (3) унитарного вектора (протон — нейтрон — Λ-гиперон), а также Марковым [A4] и Окунем [A3]. Однако выделение из всех гиперонов в основной вектор только трех оказалось недостаточно радикальным, и реальный успех теории принесла схема SU (3), предложенная Гелл-Манном и Нейманом. Эта схема, которая была принята сначала очень сдержанно, оказалась сейчас наиболее эффективной. Триумфом ее было открытие предсказанного ею Ω-мезона [G1].

Схема Гелл-Манна [C2, 3] и Неймана [C1] была названа первым автором «восьмеричным путем» — «eightfold way» **). Интересно отметить, что группа SU (3) определяет симметрию уровней трехмерного гармонического осциллятора.

---

*) Тот факт, что уровни атома водорода отражают симметрию не в физическом трехмерном пространстве, очень поучителен, так как он делает менее неожиданным появление в свое время изотопического и унитарного пространств.

**) Название группы связано с легендой о Будде и о восьми путях к уничтожению страдания: правильные взгляды, правильные намерения, правильные слова, правильные действия, правильная жизнь, правильные усилия, правильное мышление и правильная концентрация.

Несмотря на то, что разности масс гиперонов, равные нулю в $SU(3)$, велики, выяснилось, что весьма простые предположения о симметрии взаимодействия, нарушающего симметрию $SU(3)$, позволяют описать фактическое расщепление масс. Более того, расщепление изотопических мультиплетов также уложилось в простую схему. Успех теории все время нарастает. Полученные данные позволяют ожидать значительного продвижения в теории слабых взаимодействий и в изучении реакций между элементарными частицами.

Уже сейчас большое количество частиц и резонансов, два года назад казавшихся бессистемными, уложились в стройную схему трех октетов и одного декаплета (не считая антибарионов, образующих еще один октет и один декаплет), так что «пасьянс» из элементарных частиц имеет сейчас все основания «выйти».

Успех сравнительно простого описания порождает надежду, что описание взаимодействия частицы с вакуумом не является безнадежной задачей, а может быть реализовано в сравнительно простой форме; начало такого описания дает описание расщепления масс в терминах мультипольного взаимодействия с эффективным полем.

Как бы то ни было, теория унитарной симметрии становится сейчас необходимым аппаратом, который должен быть широко известен. С точки зрения унитарной модели, однако, остается непонятным, почему в природе нет частиц, отвечающих представлению минимальной размерности — трехкомпонентному спинору, который в теории Сакаты был фундаментальным. Положение здесь такое же, какое было бы в квантовой механике, если бы не существовало частиц со спином $^1/_2$. Попытка введения таких частиц была сделана Гелл-Манном (кварки — quarks [E1]), однако такие частицы не были обнаружены на опыте [E2].

Теория, включающая ненаблюдаемые «прачастицы», развивалась Швингером [F2]. Пока, однако, еще рано говорить о каком-либо удовлетворительном решении этого фундаментального для теории вопроса.

Настоящая статья должна представлять собой элементарное введение в теорию унитарной симметрии. В ней изложена тензорная алгебра, связанная с группой SU (3).

Изложение ведется так, чтобы подчеркнуть аналогию с обычной тензорной алгеброй, связанной с группой вращения или, что то же, с унитарной группой на плоскости — группой $SU(2)$. Поэтому изложение начинается кратким обзором свойств $SU(2)$. В следующих, § 3 и 4 рассказывается о тензорах SU (3).

Теория унитарной симметрии элементарных частиц начинается с § 5, где описаны свойства мультиплетов. В этом параграфе описаны два класса мультиплетов: 1) фермионные мультиплеты, описываемые комплексными матрицами — их известно четыре: октет, декаплет и их антимультиплеты, 2) бозонные мультиплеты, описываемые эрмитовскими матрицами — их известно 2; к ним надо добавить еще и унитарный скаляр ω-мезон.

Формулы для расщепления масс выведены в § 6 и 7. Правила интервалов удивительно напоминают формулы элементарного эффекта Зеемана. Аналогия с атомной спектроскопией настолько очевидна, что возникает желание описать расщепление с помощью введения некоторого квазимагнитного поля, которое эффективно описывает взаимодействие мультиплета с вакуумом. Такое поле может быть трактовано как поле мезонов [F3, F4].

Фактически все сказанное о формулах расщепления масс можно ограничить выводом формул (7,16), которые и содержат в себе практически все результаты.

Эти результаты сводятся к трем формулам интервалов для октета барионов (6,7), (7,7), (7,8), по одной для мезонов (6,19), (6,28) и одной для декаплета (7,14).

Кроме правил интервалов, существует еще большое количество других результатов, связанных с магнитными моментами, форм-факторами, реакциями.

Особенно интересна развивающаяся теория слабых взаимодействий. Эти темы требуют отдельной статьи.

Последнее замечание относится к литературе. Так как количество статей, опубликованных по унитарной симметрии, очень велико, была сделана попытка отобрать сравнительно немного статей, в которых содержится бóльшая часть идей и результатов, опубликованных к 1 июня 1964 г. В этих статьях читатель найдет и дальнейшие литературные указания.

§ 2. ИЗОТОПИЧЕСКИЙ СПИН

Зарядовая инвариантность ядерных сил приводит к тому, что состояние систем нуклонов и других фундаментальных частиц удобно классифицировать с помощью изотопического спина. Если пренебречь электромагнитным полем и слабым взаимодействием, то свойства системы определяются только величиной изотопического спина T и не зависят от его проекции T_3.

Электромагнитное поле и слабое взаимодействие приводят к «расщеплению» уровней, так что свойства системы зависят и от проекции изотопического спина T_3.

Волновая функция протона и нейтрона описывается двухкомпонентной функцией-спинором *)

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \Psi_{-1/2} \\ \Psi_{1/2} \end{pmatrix}. \tag{2,1}$$

Проекции изотопического спина $T_3 = +\frac{1}{2}$ соответствует заряженное состояние p (протон), проекции $T_3 = -\frac{1}{2}$ — нейтральное состояние n (нейтрон):

$$\Psi = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}. \tag{2,2}$$

Сопряженную функцию мы будем обозначать строкой

$$\overline{\Psi} \equiv (\overline{\Psi}_{-1/2},\ \overline{\Psi}_{+1/2}) \tag{2,3}$$

или

$$\overline{\Psi} = (\overline{n},\ \overline{p}). \tag{2,4}$$

Функцию (2,1) можно подвергнуть линейному преобразованию с помощью матрицы U:

$$\Psi' = U\Psi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{-1/2} \\ \Psi_{+1/2} \end{pmatrix}. \tag{2,5}$$

Если существует изотопическая инвариантность, то компоненты новой

*) Каждая из компонент в свою очередь зависит еще и от координат и спинов, которые мы здесь не будем вводить явно.

функции Ψ' можно с таким же успехом считать за функции, описывающие два зарядовых состояния, как и компоненты исходной функции Ψ. Однако для этого новые функции должны быть ортогональны и нормированы. Это требование будет выполнено, если матрица U унитарна, т. е. если обратная матрица равна эрмитовски сопряженной:

$$U^{-1}=U^{+}, \quad UU^{+}=1. \tag{2,6}$$

Эти соотношения будут выполнены, если матрица U имеет вид

$$U=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^{*} & \alpha^{*} \end{pmatrix}, \tag{2,7}$$

причем

$$|\alpha|^2+|\beta|^2=1. \tag{2,8}$$

Условие (2,8) одновременно означает, что детерминант матрицы равен 1.

Матрица остается унитарной, если ее умножить на exp $(i\varphi)$; детерминат останется равным единице, если $\varphi=0$ или η.

Если Ψ преобразуется матрицей U, то $\overline{\Psi}$ преобразуется матрицей U^{+}, причем умножение на матрицу происходит слева:

$$\Psi'=U\Psi, \tag{2,9}$$

$$\overline{\Psi}'=\overline{\Psi}U^{+}. \tag{2,10}$$

Если выписывать индексы явно, то для спиноров, преобразующихся по закону (2,9), индекс ставят вверху и спиноры называют **контравариантными**:

$$\Psi'^{\alpha}=U^{\alpha}_{\beta}\Psi^{\beta} \tag{2,11}$$

(по одинаковым значкам суммировать!).

Спиноры, преобразующиеся по закону (2,10), отмечают индексами снизу и называют **ковариантными**:

$$\overline{\Psi}'_{\beta}=(U^{+})^{\alpha}_{\beta}\,\overline{\Psi}_{\alpha}. \tag{2,12}$$

Поскольку индексы выписаны явно, порядок множителей в правой части формулы несуществен.

Из написанных формул следует, что преобразование (2,9) и (2,10) не изменяет скалярного произведения:

$$(\overline{\Psi}',\ \Psi')=(\overline{\Psi}U^{+},\ U\Psi)=\overline{\Psi}\Psi. \tag{2,13}$$

Формула (2,13) служит определением унитарного преобразования.

Введем антисимметричную матрицу

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2,14}$$

и ей обратную

$$\varepsilon^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2,15}$$

Тогда каждому контравариантному спинору можно сопоставить ковариантный, опустив индекс:

$$\Psi_{\alpha}=\varepsilon_{\alpha\beta}\Psi^{\beta}. \tag{2,16}$$

Наоборот, можно, подняв индекс, превратить ковариантный спинор в контравариантный:

$$\Psi^{\alpha}=\varepsilon^{\alpha\beta}\Psi_{\beta}. \tag{2,17}$$

Отсюда следует, что различие между контравариантными и ковариантными компонентами чисто формальное и

$$\Psi_1=-\Psi^2, \tag{2,18}$$

$$\Psi_2=\quad\Psi^1. \tag{2,19}$$

Матрица $\varepsilon^{\alpha\beta}$ не меняется при унитарных преобразованиях:

$$\varepsilon=U\varepsilon U^{-1}. \tag{2,20}$$

Это равенство легко проверить; оно есть просто следствие равенства единице определителя U.

Таким образом, если

$$\Psi^{\alpha}=\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}, \tag{2,21}$$

то

$$\Psi_{\alpha}=\begin{pmatrix} -p \\ n \end{pmatrix}. \tag{2,22}$$

Заметим, кроме того, что

$$\Psi^{\alpha}\Psi_{\alpha}=0 \tag{2,23}$$

и что матрица $\varepsilon^{\alpha\beta}$ играет роль метрического тензора.

Так же, как и в обычной тензорной алгебре, вводятся тензоры, зависящие от нескольких индексов. Смешанный тензор второго ранга

$$A^a_b=\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix} \tag{2,24}$$

преобразуется как произведение двух спиноров, одного контравариантного и одного ковариантного. След этого тензора

$$\operatorname{Sp} A=A^1_1+A^2_2, \tag{2,25}$$

очевидно, не меняется при преобразованиях и является скаляром.

Тензор

$$A^a_b=\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & -A^1_1 \end{pmatrix} \tag{2,26}$$

уже неприводим. Этот тензор эквивалентен вектору в трехмерном пространстве. Связь между компонентами 3-вектора и тензора (2,26) реализуется с помощью матриц Паули. Умножая скалярно 3-вектор $\mathbf{A}$ на вектор Паули $\boldsymbol{\sigma}$ $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, получим

$$A^a_b=\begin{pmatrix} A_3 & A_1-iA_2 \\ A_1+iA_2 & -A_3 \end{pmatrix}. \tag{2,27}$$

Мы не будем доказывать, что унитарные преобразования тензора A^a_b эквивалентны вращению вектора $\mathbf{A}$ в трехмерном пространстве.

Дальнейшие сведения о тензорах более высокого ранга нам здесь не нужны.

Учтем теперь электромагнитное поле. В этом случае в изотопическом пространстве ось 3 оказывается выделенной, так как проекция на эту ось определяет заряд состояния. В этом случае взаимодействие уже не будет изотопически инвариантным. Матрицы преобразования становятся диагональными и могут быть записаны в виде

$$U=\begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i\varphi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\frac{i\varphi}{2} \end{pmatrix}.$$

Они описывают вращение в плоскости вокруг оси z. Мы получаем однопараметрическую подгруппу двухмерных вращений R (2). В соответствующей этой группе тензорной алгебре исчезает разница между верхним и нижним индексами и единственным преобразованием остается умножение на фазовый множитель. Может быть, имеет смысл напомнить, что все сказанное о свойствах матриц можно проиллюстрировать на модели частиц со спином, когда сферическая симметрия нарушается магнитным полем, направленным по оси z.

Важным случаем спин-тензора является оператор (вектор) изотопического спина T. В согласии с (2,27) напишем

$$T=\begin{pmatrix} T_3 & T_- \\ T_+ & -T_3 \end{pmatrix}. \qquad (2,28)$$

Элементами этой матрицы являются компоненты изотопического спина, которые сами по себе тоже являются матрицами. Вид этих матриц (число строк и столбцов) зависит от представления группы, т. е. от величины спина частицы, на волновую функцию которой действуют эти матрицы.

Для нуклона $T=\frac{1}{2}$ компоненты T суть матрицы

$$T_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_+=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_-=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью этих матриц можно, например, записать ток, входящий в слабое взаимодействие (векторный и псевдовекторный). Так, векторный ток, отвечающий β-распаду нейтрона, представляет собой J_+-компоненту изотопического тока

$$J_{\alpha+}=\langle p\,|\,\gamma_\alpha(1+\lambda\gamma_5)\,T_+\,|\,n\rangle.$$

Здесь записано, что матричный элемент берется между начальным состоянием n и конечным p от оператора слабого взаимодействия $\gamma_\alpha(1+\lambda\gamma_5)$ ($\lambda\approx 1{,}25$, γ_α и γ_5 — матрицы Дирака), действующего на обычные спиновые индексы, и от изотопического оператора T_+, превращающего нейтрон в протон.

Компонента тока J_-, связанная с оператором T_-, описывает позитронный распад, а нейтральная компонента J_3 входит, согласно теории универсального взаимодействия, в электродинамический ток. Таким образом, например, векторный ток можно записать в матричной форме

$$V=\begin{pmatrix} V_3 & V_- \\ V_+ & -V_3 \end{pmatrix}.$$

При этом у всех элементов подразумевается невыписанный индекс компоненты в обычном 4-пространстве Минковского. Возвращаясь к формуле (2,28), заметим, что $\mathrm{Sp}\,T=0$, а определитель этой матрицы

$$\mathrm{Det}\,D=\frac{1}{2}(T_+T_-+T_-T_+)+T_z=T^2$$

(при вычислении определителя он был симметризован по элементам T_- и T_+, так как эти матрицы не коммутируют). Последняя формула показывает, что определитель дает матрицу инварианта преобразования — квадрата изотопического спина. Ясно, что эта формула не зависит от представления, т. е. верна для любой величины спина.

Для полноты опишем кратко еще и расширение группы. Если отказаться от условия унитарности, сохранив только условие унимодулярности $\mathrm{Det}U = 1$, то матрицы описывают преобразование Лоренца $L_6(4)$ *). Так как в этом случае $U^+ \neq U^{-1}$, то вместо двух типов спиноров в тензорной алгебре группы Лоренца существуют четыре типа спиноров, преобразуемых матрицами U, U^{-1}, U^+ и U^{+-1}. Для описания этих типов вводится еще значок с точкой, так что преобразования записываются так:

$$\left.\begin{aligned} \Psi'^{\alpha} &= U^{\alpha}_{\beta}\Psi^{\beta}, \\ \Psi'_{\alpha} &= (U^{-1})^{\beta}_{\alpha}\,\Psi_{\beta}, \\ \Psi^{\dot\alpha\prime} &= (U^{+})^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\,\Psi^{\dot\beta}, \\ \Psi'_{\dot\alpha} &= (U^{+-1})^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\,\Psi_{\dot\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (2,29)$$

Однако в тензорной алгебре L (4) существует операция поднимания и опускания значков, так же как и в алгебре SU (2). Поэтому в лоренцевой группе представление характеризуется двумя числами — числом пунктирных и числом непунктирных значков. Тензор в этой алгебре записывается с помощью четырех матриц Паули σ_0, σ_1, σ_2, σ_3, где σ_0 — единичная матрица. Тензор

$$A^{\dot\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} t-z, & x-iy \\ x+iy & t+z \end{pmatrix}$$

отвечает 4-вектору; его преобразования эквивалентны преобразованиям Лоренца. Так как суммировать по пунктирному и непунктирному значкам нельзя (т. е. при таком суммировании не возникает инварианта), след тензора (2,30) нельзя сделать равным нулю во всех системах координат.

Для перехода от группы Лоренца L_6 (4) к группе трехмерных вращений R (3) достаточно не различать значки с точкой и без точки. Тогда из тензора выделяется скаляр — его след. Оставляя в матрицах представлений только диагональные компоненты, мы переходим к группе R (2). Таким образом, редукция группы

$$L\,(4) \supset R\,(3) \supset R\,(2)$$

сопровождается соответственным упрощением тензорной алгебры.

В заключение покажем, как сопоставляются компоненты тензора значениям проекции изотопического спина.

Тензор с p верхними значками отвечает изотопическому спину $\frac{p}{2} = T$, так как тензор имеет $p+1$ компоненту. Если все индексы равны 1, то условимся приписывать такой компоненте тензора значение $T_3 = -T = -\frac{p}{2}$. Тогда, если у компоненты тензора p (1) индексов равны 1, а $p(2) = p - p(1)$ индексов равны 2, то для такой компоненты

$$T_3 = -T + p\,(2) = -\frac{p\,(1)+p\,(2)}{2} + p\,(2) = \frac{p\,(2)-p\,(1)}{2}\,. \qquad (2,30)$$

*) Преобразование 4-мерного пространства, зависящее от шести параметров.

Аналогично получаем для тензора с $q(1)$ нижними значками, равными 1, и $q(2)$ нижними значками, равными 2,

$$T_3 = -\frac{q(2)-q(1)}{2}. \tag{2,31}$$

Для смешанного тензора с p верхними и q нижними индексами и со следом, равным нулю, получаем (ср. с (4,14))

$$T_3 = \frac{1}{2}(m_2 - m_1) \equiv m_1 - \frac{m}{2}, \tag{2,32}$$

где

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= p(2) - q(2), \\ m_1 &= p(1) - q(1), \\ m &= m_1 + m_2. \end{aligned}\right\} \tag{2,33}$$

Можно сказать, что число $\frac{1}{2}(p+q) = T$ характеризует представление, а число $m_2 - m_1$ характеризует подгруппу вращений вокруг оси 3, т. е. значение проекции T на эту ось.

§ 3. УНИТАРНАЯ ГРУППА

Алгебра унитарной группы комплексных матриц третьего порядка строится тем же путем, что и $SU(2)$. Будем обозначать матрицы третьего порядка также через U или U_b^a (a, $b = 1, 2, 3$), если надо указать явно компоненты. Матрицы U выбираются так, чтобы

$$UU^+ = 1, \tag{3,1}$$

$$\operatorname{Det} U = 1. \tag{3,2}$$

Спинор в этом пространстве имеет три комплексные компоненты:

$$\Psi^\alpha = \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ \Psi^3 \end{pmatrix}. \tag{3,3}$$

Этот контравариантный спинор, спинор с верхним индексом, преобразуется с помощью матрицы U. Существует еще и ковариантный спинор, спинор с нижними индексами

$$\Phi = (\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3). \tag{3,4}$$

Спинор Φ преобразуется с помощью матрицы U^+. Очевидно, что спинор, сопряженный с (3,3), преобразуется как Φ.

Скалярное произведение, которое сохраняется при унитарных преобразованиях, определяется так:

$$(\Phi,\ \Psi) = \Phi_\alpha \Psi^\alpha. \tag{3,5}$$

В $SU(3)$ операция опускания индекса выглядит иначе, чем в $SU(2)$. Введем два антисимметричных тензора, которые имеют в трехмерном пространстве три индекса:

$$\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{abc} = \begin{cases} 1 & \text{(четные перестановки } a,\ b,\ c\text{)}, \\ -1 & \text{(нечетные} \quad » \quad » \text{)}, \\ 0 & \text{(два индекса равны)}. \end{cases} \tag{3,6}$$

Так как Det $U = 1$, величина компонент этого тензора остается неизменной при преобразованиях группы.

Действие тензора ε_{abc} можно продемонстрировать на примере тензора второго ранга в $SU(3)$.

Тензоры второго ранга могут быть разных типов.

1) Ψ^a_b — тензор с одним верхним и с одним нижним значком. След такого тензора является скаляром группы, а потому неприводимый тензор (аналогичный тензору квадрупольного момента в электростатике) должен иметь след, равный нулю:

$$\mathrm{Sp}\,\Psi = \Psi^\alpha_\alpha = 0. \tag{3,7}$$

2) Ψ^{ab} — тензор с двумя верхними значками. Разобьем этот тензор на два тензора: симметричный (по a и b) и антисимметричный:

$$\Psi^{ab} = \Psi^{[ab]} + \Psi^{\{ab\}}, \tag{3,8}$$

$$\Psi^{[ab]} = \frac{1}{2}(\Psi^{ab} - \Psi^{ba}), \tag{3,9}$$

$$\Psi^{\{a,\, b\}} = \frac{1}{2}(\Psi^{ab} + \Psi^{ba}). \tag{3,10}$$

Такое разбиение тензора ковариантно относительно унитарных преобразований. Теперь мы можем использовать тензор ε_{abc}. Умножив его на тензор (3,10), мы получим спинор с одним нижним значком

$$\Psi_a = \varepsilon_{abc}\Psi^{[bc]}. \tag{3,11}$$

Таким образом, антисимметричный тензор второго ранга эквивалентен в этой алгебре спинору. Наоборот, симметричный тензор (3,9) упростить нельзя. Произведение его на ε дает нуль. Поэтому мы можем обозначать через Ψ^{ab} симметричный тензор; антисимметричными тензорами мы вовсе пользоваться не будем.

3) Аналогичные рассуждения можно повторить для тензоров с двумя нижними значками Ψ_{ab}, используя для этого случая тензор ε^{abc}. В результате и этот тензор мы можем считать симметричным.

Все сказанное можно повторить для любой пары верхних или пары нижних значков. Поэтому общий случай неприводимого тензора характеризуется двумя числами — числом нижних и числом верхних значков. При этом все следы (суммы по любой паре значков одного нижнего и одного верхнего) должны обращаться в нуль. Неприводимые тензоры (и соответствующие им представления) обозначают символом $D(p,\ q)$, где p — число верхних индексов, а q — число нижних индексов. Таким образом, мы приходим к следующей классификации тензоров в $SU(3)$:

$D(0,\ 0)$ — скаляр (одна компонента),
$D(1,\ 0)$ — контравариантный спинор (три компоненты),
$D(0,\ 1)$ — ковариантный спинор (три компоненты),
$D(1,\ 1)$ — смешанный тензор Ψ^a_b (восемь компонент),
$D(2,\ 0)$ — контравариантный тензор Ψ^{ab} (шесть компонент),
$D(0,\ 2)$ — ковариантный тензор Ψ_{ab} (шесть компонент) и т. д.

Приведем несколько формул для подсчета числа компонент. Симметричный тензор с k индексами (только верхними или только нижними) имеет число компонент, равное

$$N(k,\ 0) = N(0,\ k) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \tag{3,12}$$

Тензор с одинаковым числом нижних и верхних индексов имеет число компонент, равное

$$N(k,\ k)=(k+1)^3. \tag{3,13}$$

Первая формула есть просто число способов, которым можно составить k из трех целых чисел (число единиц, двоек и троек в индексах). Вторая получается из известной формулы для суммы кубов чисел натурального ряда

$$\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2=\sum_{s=1}^{k+1}s^3.$$

Заметим, что слева стоит квадрат правой части (3,12), т. е. полное число компонент тензора, у которого число верхних и нижних индексов одинаково, а следы отличны от нуля. Поэтому можно интерпретировать последнюю формулу как формулу разложения такого тензора на неприводимые с меньшим числом индексов (доказательство легко провести по индукции).

Для случая тензора с p верхними и q нижними значками число компонент равно

$$N(p,\ q)=\frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2). \tag{3,14}$$

Формула получается сразу, если заметить, что до обращения следов в нуль число компонент определяется по формуле (3,12) и равно $\frac{1}{4}(p+1)(q+1)\times\times(p+2)(q+2)$. Условие обращения следа в нуль эквивалентно равенству нулю тензора $D(p-1,\ q-1)$ с числом компонент $\frac{1}{4}pq(p+1)(q+1)$. Разность этих двух чисел и дает формулу (3,14).

Теперь мы можем сформулировать правило сложения векторов. В группе вращения это правило сводилось к тому, что из двух тензоров с $2j_1+1$ и $2j_2+1$ компонентами возникают тензоры с числом компонент $2J+1$, где J пробегает все целые значения (или полуцелые) от $|j_1-j_2|$ до j_1+j_2. В $SU(3)$ в общем случае правило выглядит сложнее и проще всего действовать прямым путем.

Так, из двух спиноров Ψ^a и Ψ_b можно составить скаляр Ψ и тензор Ψ_b^a с 8 компонентами. Символически мы будем это записывать так:

$$D(1,\ 0)\times D(0,\ 1)=D(0,\ 0)+D(1,\ 1) \tag{3,15}$$

или просто по числу компонент

$$3\times3=1+8. \tag{3,16}$$

Рассмотрим произведение двух тензоров $\Psi_b^a\Phi_d^c$. Для того чтобы найти неприводимые части, поступим так. Возьмем двойную сумму, получив скаляр

$$X=\Psi_b^a\Phi_a^b \quad \text{(одна компонента)}. \tag{3,17}$$

Просуммировав только один раз двумя способами и обратив след в нуль, получим два тензора:

$$X_d^a=\Psi_b^a\Phi_d^b,\quad X_b^c=\Psi_b^a\Phi_a^c \quad \text{(по восемь компонент)}. \tag{3,18}$$

Если с помощью тензора ε поднять нижние значки, а затем симметризовать по всем верхним значкам, мы придем к тензору третьего ранга с верхними значками

$$X^{abc}. \tag{3,19}$$

Аналогично построим тензор с тремя значками внизу

$$X_{abc}. \tag{3,20}$$

Остается еще тензор четвертого ранга с двумя значками вверху и двумя значками внизу и со следами, равными нулю. Этот тензор имеет $(2+1)^3=27$ компонент

$$X^{ab}_{cd} = \Psi^{\{a}_{\{c}\Phi^{b\}}_{d\}}. \tag{3,21}$$

Формальная запись этого результата такова:

$$D(1,\ 1)\times D(1,\ 1)=D(0,\ 0)+D(1,\ 1)+D(1,\ 1)+ \\ +D(3,\ 0)+D(0,\ 3)+D(2,\ 2) \tag{3,22}$$

или

$$8\times 8=1+8+8+10+\overline{10}+27. \tag{3,23}$$

В обозначениях отмечен тот факт, что оба октета (тензоры второго ранга) эквивалентны, т. е. преобразуются одним и тем же образом, а декаплеты (тензоры третьего ранга) преобразуются сопряженными матрицами.

Приведем еще формулу для произведения двух декаплетов: по формуле (3,13) можем сразу написать ($k=2$)

$$10\times\overline{10}=1+8+27+64 \tag{3,24}$$

или

$$D(3,\ 0)+D(0,\ 3)=D(0,\ 0)+D(1,\ 1)+D(2,\ 2)+D(3,\ 3). \tag{3,25}$$

Приведем без вывода еще несколько формул:

$$3\times\bar{3}=1+8,$$
$$D(1,\ 0)\times D(0,\ 1)=D(0,\ 0)+D(1,\ 1),$$
$$3\times 3=\bar{3}\times 6,$$
$$D(1,\ 0)\times D(1,\ 0)=D(0,\ 1)+D(2,\ 0),$$
$$\bar{3}\times\bar{3}=3+\bar{6},$$
$$D(0,\ 1)\times D(0,\ 1)=D(1,\ 0)+D(0,\ 2),$$
$$6\times 3=8+10,$$
$$D(2,\ 0)\times D(1,\ 0)=D(1,\ 1)+D(3,\ 0),$$
$$\bar{6}\times 3=\bar{3}+15,$$
$$D(0,\ 2)\times D(1,\ 0)=D(0,\ 1)+D(1,\ 2),$$
$$6\times\bar{3}=3+\overline{15},$$
$$D(2,\ 0)\times D(0,\ 1)=D(1,\ 0)+D(2,\ 1),$$
$$\bar{6}\times 6=1+8+27,$$
$$D(0,\ 2)\times D(2,\ 0)=D(0,\ 0)+D(1,\ 1)+D(2,\ 2),$$
$$6\times 6=6+\overline{15}+15',$$
$$D(2,\ 0)\times D(2,\ 0)=D(0,\ 2)+D(2,\ 1)+D(4,\ 0),$$
$$\bar{6}\times\bar{6}=6+15+\overline{15}',$$
$$D(0,\ 2)\times D(0,\ 2)=D(2,\ 0)+D(1,\ 2)+D(0,\ 4) \text{ и т. д.}$$

Мы видим, что только простейшие представления можно описывать одним числом. Два тензора $D\ (2,\ 1)$ и $D\ (4,\ 0)$ оба имеют по 15 компонент, и, чтобы различить их, мы писали 15 и 15′.

Более длинным является вычисление коэффициентов в формулах сложения (коэффициентов Клебша — Гордана). Так как они нам не понадобятся, мы о них здесь говорить не будем (они даны в [B2]).

§ 4. УНИТАРНЫЙ СПИН

Подобно тому как в $SU\ (2)$ представление характеризовалось величиной изотопического спина, так и в алгебре $SU\ (3)$ можно ввести аналогичную характеристику — унитарный спин, который мы будем обозначать через U. Компоненты изотопического спина, которые записывались в виде матрицы 2×2:

$$T = \begin{pmatrix} T_3 & T_- \\ T_+ & -T_3 \end{pmatrix}, \tag{4,1}$$

представляют собой генераторы группы вращений. Это значит, что матрица поворота на угол $\delta\varphi$ вокруг оси 3 имеет вид

$$M = 1 + \frac{i}{2}\,\delta\varphi T_3. \tag{4,2}$$

Для поворотов вокруг осей 2 и 1 справедливы аналогичные формулы, в которые будут входить соответственно матрицы

$$T_1 = T_+ + T_-, \quad T_2 = \frac{1}{i}\,(T_+ - T_-). \tag{4,3}$$

Унитарный спин вводится матрицей 3×3:

$$U = \left(\begin{array}{cc:c} Q & T_- & L_- \\ T_+ & Y-Q & K_- \\ \hdashline L_+ & K_+ & -Y \end{array}\right). \tag{4,4}$$

Четыре элемента, стоящие в левом верхнем углу, образуют матрицу типа матрицы (4,1), в которой, однако, след не равен нулю (т. е. эта матрица приводима в $SU\ (2)$). Эту матрицу можно записать в виде суммы матриц, одна из которых имеет след, равный нулю:

$$\begin{pmatrix} Q & T_- \\ T_+ & Y-Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q - \frac{1}{2}Y & T_- \\ T_+ & \frac{1}{2}Y - Q \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}. \tag{4,5}$$

Сравнивая с (4,1), мы видим, что

$$Q - \frac{1}{2}Y = T_3 \tag{4,6}$$

или

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y. \tag{4,7}$$

Если под собственным значением Q понимать заряд, то Y есть матрица, отвечающая гиперзаряду $S + B$ (S — странность, B — барионное число). Остальные элементы (элементы L_+, L_-, K_+, K_-) представляют собой матрицы, имеющие ту же форму, что и матрицы изотопического спина T_1, T_2 и T_3, только определяемые в подпространствах (2,3) и (1,3). Так как группа $SU\ (3)$ состоит из преобразований, сохраняющих квадратичную форму $|X|^2 + |Y|^2 + |Z|^2$, в каждом из двухмерных подпространств существует подгруппа, содержащая сумму двух квадратов модулей, т. е. подгруппа, эквивалентная SU (2). Из структуры матрицы (4,4) видно, что можно разным образом выбирать системы коммутирующих матриц. Выбирая в качестве подгруппы матрицы (4,5), мы получим систему матриц Y, T^2 и T_3. Если в качестве подгрупп выбрать матрицу 2×2, стоящую в нижнем правом углу (4,4), то получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} Y-Q & K_- \\ K_+ & -Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y-\frac{1}{2}Q & K_- \\ K_+ & -Y+\frac{1}{2}Q \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}. \quad (4,8)$$

В этом случае коммутирующими матрицами будут матрицы Q, K^2 и K_3, где

$$K_3 = Y - \frac{1}{2}Q. \quad (4,9)$$

При таком выборе коммутирующих операторов одним из квантовых чисел будет определяться заряд частицы. Такое представление удобно при рассмотрении задач слабого и электромагнитного взаимодействий.

Вернемся к выбору системы коммутирующих матриц Y, T^2, T_3. Рассмотрим произвольный тензор с p верхними и q нижними индексами. Обозначим его, как и связанное с ним представление, через D (p, q). Каждый из $p+q$ индексов может принимать значение 1, 2, 3. Введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{array}{llllll} p(1)\text{ — число} & \text{верхних} & \text{индексов,} & \text{равных} & 1, \\ p(2)\quad » & » & » & » & 2, \\ p(3)\quad » & » & » & » & 3, \\ q(1)\text{ — число} & \text{нижних} & \text{индексов,} & \text{равных} & 1, \\ q(2)\quad » & » & » & » & 2, \\ q(3)\quad » & » & » & » & 3. \end{array}\right\} \quad (4,10)$$

Связь собственных значений Y, T^2 и T_3 с компонентами тензора D (p, q) устанавливается, если мы зададим Y для компонент какого-нибудь одного тензора. Именно в этом пункте и происходит выбор представления для описания реальных частиц. В модели Гелл-Манна и Неймана в основу принимается октет D (1, 1).

Зададим гиперзаряды для компонент этого октета:

$$\left.\begin{array}{ll} \Psi^a_b\,(a,\ b=1,\ 2,\ 3): & Y=0, \\ \Psi^3_b\,(b=1,\ 2,\ 3): & Y=1, \\ \Psi^a_3\,(a=1,\ 2): & Y=-1, \\ \Psi^3_3: & Y_a=0. \end{array}\right\} \quad (4,11)$$

Напомним, что компоненты Ψ^a_b являются смесью изотопического вектора и изотопического скаляра $(a,\ b=1,\ 2)$:

$$\left.\begin{array}{ll} \Psi^a_b - \frac{1}{2}\delta^a_b\,\mathrm{Sp}\,\Psi, & T\text{ — вектор}, \\ \mathrm{Sp}\,\Psi, & T\text{ — скаляр}, \\ \Psi^a_3,\ \Psi^3_b, & T\text{ — спинор}, \\ T^3_3, & T\text{ — скаляр}. \end{array}\right\} \quad (4,12)$$

Будем составлять из октетов тензоры высших порядков. При перемножении октетов мы будем получать тензоры, у которых числа верхних и нижних индексов одинаковы, но следы не равны нулю. Обозначим такой тензор через D' (k, k), отмечая штрихом тот факт, что $\mathrm{Sp}\,D' \neq 0$. Гиперзаряд, отвечающий компоненте тензора, будет определяться числом индексов, равных 3, т. е. числами p (3) и q (3). Так как согласно (4,11) каждый верхний индекс вносит вклад в Y, равный 1, а каждый нижний индекс вносит вклад, равный —1, для компонент тензора D' (k, k) гиперзаряд равен p (3) — q (3). Отсюда видно, что в компонентах этого тензора Y изменяется в пределах $-k \leqslant Y \leqslant k$.

Теперь выделим из тензора неприводимые составляющие. Для этого прежде всего симметризуем тензор по p верхним и отдельно по q нижним значкам. Получим неприводимый тензор D (k, k), для которого Y меняется в тех же пределах $-k \leqslant Y \leqslant k$.

Если p или $q \geqslant 2$, то с помощью ε_{abc} можно опустить у $D'(k, k)$ два индекса, превратив два верхних индекса в один нижний. Точно так же с помощью тензора ε^{abc} можно поднять два нижних индекса, превратив их в один верхний. Таким образом мы можем превратить тензор D' (k, k) в тензор D' ($k-2$, $k+1$) или в тензор D' ($k+1$, $k-2$). После этого надо симметризовать полученные тензоры до тензоров D ($k-2$, $k+1$) или D ($k+1$, $k-2$) соответственно.

Тензоры ε антисимметричны, поэтому если у тензора D (p, q) все p индексов равны 3, то умножение его на ε_{abc} дает нуль. Точно так же, если у тензора D (p, q) все нижние индексы равны 3, то умножение его на ε^{abc} также дает нуль. Отсюда можно заключить, что тензор D ($k-2$, $k+1$) имеет на одно значение Y меньше, чем исходный тензор D (k, k): он не имеет компонент с $Y=k$. Таким образом, тензор D ($k-2$, $k+1$) имеет компоненты с Y в пределах $-k \leqslant Y \leqslant k-1$. Также можно прийти к заключению, что тензор D' ($k+1$, $k-2$) имеет компоненты с Y в пределах $-k+1 \leqslant Y \leqslant k$. Если мы опустим $2s$ верхних индексов, превратив их в s нижних, то, рассуждая аналогично, найдем, что у нового тензора D ($k-2s$, $k+s$) гиперзаряд изменяется в пределах $-k \leqslant Y \leqslant k-s$. Точно так же для тензора D ($k+s$, $k-2s$): $-k+s \leqslant Y \leqslant k$.

Отсюда для произвольного тензора D (p, q) находим, полагая $k = \frac{p+2q}{3}$ и $s = -\frac{p-q}{3}$ ($p=k-2s$, $q=k+s$), что гиперзаряд изменяется в пределах

$$-\frac{p+2q}{3} \leqslant Y \leqslant \frac{2p+q}{3}. \tag{4,13}$$

Гиперзаряд компоненты тензора D (p, q) определяется числом индексов, равным 3. Положим

$$Y=p(3)-q(3)+a, \tag{4,14}$$

где a — постоянная. Эту постоянную найдем, заметив, что при $p(3)=p$ и $q(3)$, равном нулю, Y равен своему максимальному значению $\frac{1}{3}(2p+q)$. Отсюда $a=-\frac{1}{3}(p-q)$.

Обозначая $p(3)-q(3)=m_3$, $p-q=m$, получаем

$$Y=m_3-\frac{1}{3}m. \tag{4,14'}$$

Аналогично можно получить формулу и для заряда:

$$Q=-m_1+\frac{1}{3}m, \tag{4,15}$$

где $m_1=p(1)-q(1)$. Ее вид определяется симметрией определителя (4,4) относительно замены ($Y \rightleftarrows -Q$ и $1 \rightleftarrows 2$). Если добавить еще, что $Y-Q= -m_2+\frac{1}{3}m$, то можно заметить, что три числа m_1, m_2, m_3 играют роль «магнитных» квантовых чисел. Для того чтобы сделать сумму собственных значений трех операторов, стоящих на диагонали (4,4), равной нулю, вводится член $\frac{1}{3}m=\frac{1}{3}(m_1+m_2+m_3)$. Это и есть алгебраическая причина появления коэффициента $\frac{1}{3}$ в формулах (ср. (2,31)).

Из формулы (4,13) можно получить выражение для «ширины» унитарного мультиплета:

$$Y_{\max}-Y_{\min}=p+q. \tag{4,16}$$

По аналогии с изотопическим спином, половину полного числа индексов можно назвать величиной унитарного спина U,

$$U=\frac{p+q}{2}, \tag{4,17}$$

так что число разных значений Y равно $2U+1$. Для «центра тяжести» мультиплета получаем

$$Y_{\max}+Y_{\min}=\frac{p-q}{3}. \tag{4,18}$$

Формулы (4,14)—(4,17) полностью описывают гиперзарядовую структуру мультиплета.

Эти формулы дают для Y целые значения, но только для таких тензоров, для которых разность $|p-q|=3n$, где n — целое положительное число. В принятой нами схеме построения тензоров из тензора $D(k, k)$ возникают тензоры $D(k+s, k-2s)$ и $D(k-2s, k+s)$, которые удовлетворяют этому условию. Тензоры с $|p-q|\neq 3n$ не могут быть получены таким путем. Это напоминает положение в группе вращений, где с помощью векторов можно построить тензоры лишь с целыми значениями изотопического спина; спиноры с полуцелым изотопическим спином должны быть введены независимо. В группе $SU(3)$ также возникают спиноры с нецелыми значениями гиперзаряда, кратными 1/3. Сохраняя полученные правила и для тензоров с $|p-q|\neq 3n$, мы получим, например, что для спинора с одним верхним значком $D(1, 0)$ сопоставление Y с компонентами выглядит так:

$$\begin{aligned} &\Psi^1:\quad p=0, && && Y=-\tfrac{1}{3},\\ &\Psi^2:\quad p=0, && \tfrac{1}{3}(p-q)=\tfrac{1}{3}, && Y=-\tfrac{1}{3},\\ &\Psi^3:\quad p=1, && && Y=\tfrac{2}{3}. \end{aligned} \tag{4,19}$$

Аналогично тензор Ψ_a имеет компоненты с $Y=\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$. Таким образом, в $SU(3)$ появляются дробные значения гиперзаряда. Попытки обнаружить частицы, отвечающие таким представлениям (кварки, по терминологии Гелл-Манна), потерпели пока неудачу (см. Введение).

Теперь мы можем продолжить классификацию компонент тензора и перейти к значениям изотопического спина и его проекций. Если в тензоре $D(p, q)$ мы положим некоторое число индексов равными 3, то остальные индексы, принимая значения 1 и 2, образуют тензор в изотопическом пространстве с $p(1)+p(2)=p(1, 2)$ верхними индексами и $q(1)+q(2)=q(1, 2)$ нижними индексами. Разложение такого тензора $SU(2)$ на неприводимые тензоры происходит по обычной схеме суммирования — по одному нижнему и одному верхнему индексу по значениям 1, 2. Так как тензор с $p(1, 2)$ индексами, принимающими значения 1, 2, имеет

$p(1, 2)+1$ компоненту, изотопический спин такого тензора равен

$$T_p=\frac{1}{2}p(1, 2). \tag{4,20}$$

Аналогично для тензора с $q(1, 2)$ нижними индексами

$$T_q=\frac{1}{2}q(1, 2). \tag{4,21}$$

Тензор с $p(1, 2)$ верхними и $q(1, 2)$ нижними индексами разлагается на неприводимые тензоры, спины которых равны

$$T_p+T_q,\quad T_p+T_q-1, \ldots, \quad |T_p-T_q|. \tag{4,22}$$

Наконец, величину компоненты изотопического спина определяем по формуле (2,32):

$$T_3=\frac{1}{2}(m_2-m_1)=\frac{1}{2}[p(2)-q(2)-p(1)+q(1)], \tag{4,23}$$

что согласуется с определением $T_3=Q-\frac{1}{2}Y$ и формулами (4,14) и (4,15).

Таким образом, мы приходим к следующей классификации компонент унитарных тензоров. Компоненты неприводимого унитарного тензора характеризуются пятью квантовыми числами:

1) числом верхних значков p,
2) числом нижних значков q,
3) изотопическим спином T,
4) гиперзарядом Y (формула (4,14)),
5) проекцией изотопического спина T_3 (формула (4,23)).

Вместо p и q можно ввести:

1′) унитарный спин $U=\frac{1}{2}(p+q)$ (формула (4,17)),

2′) «центр тяжести» мультиплета $C=\frac{1}{3}(p-q)$ (формула (4,18)).

Вместо C, Y и T_3 можно вводить квантовые числа

$$m_s=p(s)-q(s), \quad s=1, 2, 3. \tag{4,24}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} C&=\frac{1}{3}(m_1+m_2+m_3),\\ T_3&=\frac{1}{2}(m_2-m_1),\\ Y&=\frac{1}{3}[2m_3-m_1-m_2]. \end{aligned}\right\} \tag{4,25}$$

Числа m_1, m_2, m_3 вместе с U и T представляют собой другой набор из пяти квантовых чисел, описывающих унитарный мультиплет.

Отметим еще полезную формулу для тензоров, у которых есть значки только одного сорта,— тензоров типа $D(p, 0)$ и $D(0, q)$. Гиперзаряд компоненты тензора $D(p, 0)$ равен согласно (4,14) $Y=p(3)-\frac{p}{3}$. Изотопический спин компонент с заданным Y равен, очевидно, $\frac{1}{2}[p-p(3)]$, так как $p-p(3)$ есть число индексов, равных 1 или 2. Отсюда мы видим, что для тензоров типа $D(p, 0)$ существует соотношение

$$Y+2T=\frac{2}{3}p \tag{4,26}$$

и аналогично для тензоров $D(0, q)$

$$-Y+2T=\frac{2}{3}q. \tag{4,27}$$

Таким образом, у таких тензоров T определяется заданием Y. Рассмотрим теперь несколько мультиплетов.

Таблица I

Мультиплеты $SU(3)$

I. Октет $D(1,1)$, $U=1$

	Y	T
Ψ^a_b $(a, b = 1\ 2)$	0	1 и 0
Ψ^3_b $(b = 1,2)$	1	1/2
Ψ^a_3 $(a = 1,2)$	—1	1/2

II. Декаплет ковариантный $D(0, 3)$, $U = \frac{3}{2}$

	Y	T
Ψ_{abc} $(a, b, c = 1, 2, 3)$	1	3/2
Ψ_{ab3} $(a, b = 1, 2, 3)$	0	1
Ψ_{a33} $(a = 1, 2, 3)$	—1	1/2
Ψ_{333}	—2	0

$\Psi^3_3 = -\Psi'_1 - \Psi^2_2$ и не включен поэтому в таблицу.

III. Декаплет контравариантный $D(3, 0)$, $U = \frac{3}{2}$

	Y	T
Ψ^{abc} $(a, b, c = 1, 2, 3)$	—1	3/2
Ψ^{ab3} $(a, b = 1, 2, 3)$	0	1
Ψ^{a33} $(a = 1, 2, 3)$	1	1/2
Ψ^{333}	2	0

IV. 27-плет $D(2, 2)$, $U = 2$

	Y	T
Ψ^{33}_{cd} $(c, d = 1, 2, 3)$	2	1
Ψ^{3b}_{cd} $(b, cd = 1, 2, 3)$	1	3/2 и 1/2
Ψ^{ab}_{cd} $(a, b, c, d = 1, 2, 3)$	0	2,1 и 0
Ψ^{ab}_{3d} $(a, b, d = 1, 2, 3)$	—1	3/2 и 1/2
Ψ^{ab}_{33} $(a, b = 1, 2, 3)$	—2	1

§ 5. МЕЗОНЫ И БАРИОНЫ

Сопоставим теперь унитарным тензорам реальные частицы. **Октет барионов** состоит из нуклона и гиперонов Λ, Σ и Ξ. В согласии с правилами предыдущего параграфа, его можно записать в виде матрицы (верхний индекс—строка, нижний — столбец):

$$(B^a_b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^- & \Xi^- \\ \Sigma^+ & -\frac{1}{2}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Xi^0 \\ -p & n & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda \end{pmatrix}. \qquad (5,1)$$

Коэффициенты в матрице выбраны так, чтобы в выражении

$$\mathrm{Sp}\bar{B}B = \bar{p}p + \bar{n}n + \bar{\Sigma}^+\Sigma^+ + \bar{\Sigma}^0\Sigma^0 + \bar{\Sigma}^-\Sigma^- + \bar{\Xi}^0\Xi^0 + \bar{\Xi}^-\Xi^- \qquad (5,2)$$

все коэффициенты были бы равны 1 и чтобы $\mathrm{Sp}\ \Psi = 0$.

В матрице (5,1) протон входит со знаком минус. Это согласуется с определением **ковариантных** компонент спинора формулой (2,22). В литературе используется определение октета, отличающееся от (5,1) перестановкой строк и столбцов со знаком минус у Ξ^0.

Мезоны (и резонансы) образуют два известных октета. Октет псевдоскалярных мезонов состоит из π-, η- и K-мезонов. Матрица этих мезонов составляется аналогично матрице (5,1) и имеет вид

$$(P_b^a)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^- & K^- \\ \pi^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \overline{K}^0 \\ -K^+ & K^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta \end{pmatrix}. \quad (5,3)$$

Октет векторных мезонов ϱ, K^* (резонанс $K\pi$) и φ образует матрицу

$$(V_b^a)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\varrho^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\varphi & \varrho^- & K^{*-} \\ \varrho^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\varrho^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\varphi & \overline{K}^{*0} \\ -K^{*+} & K^{*0} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi \end{pmatrix}.$$

Мезонные октеты отличаются от барионного октета тем, что частицы в них входят одновременно со своими античастицами. Эти октеты описываются эрмитовыми матрицами

$$P^+=P, \quad V^+=V. \quad (5,4)$$

Кроме октета (5,1), известен еще барионный декаплет, возглавляемый знаменитым Ω^--гипероном. Этот декаплет описывается тензором с тремя нижними значками Ψ_{abc}, который состоит из 10 разных компонент. Эти компоненты можно свести в таблицу. После номера компоненты (нижние индексы!) мы отмечаем число одинаковых компонент тензора Ψ_{abc}, полученных перестановкой индексов. Это число определяет коэффициенты в последнем столбце.

Таблица II

Компоненты барионного декаплета

№№ п.п.	Компонента	Y	T	T_3	Резонанс	№№ п.п.	Компонента	Y	T	T_3	Резонанс
1	333 (1)	—2	0	0	Ω^-	6	322 (3)			1	$\frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*+}$
2	331 (3)	—1	1/2	—1/2	$\frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{*-}$	7	111 (1)	1	3/2	—3/2	Δ^-
3	332 (3)			1/2	$\frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{*0}$	8	112 (3)			—1/2	$\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^0$
4	311 (3)	0	1	—1	$\frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*-}$	9	122 (3)			1/2	$\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^+$
5	312 (6)			0	$\frac{1}{\sqrt{6}}\Sigma^{*0}$	10	222 (1)			3/2	Δ^{++}

Нормировки выбраны так, чтобы в квадратичное выражение $\overline{\Psi}\Psi$ все частицы входили с одинаковым коэффициентом, равным единице.

§ 6. РАСЩЕПЛЕНИЕ МАСС МУЛЬТИПЛЕТОВ

Мультиплеты частиц полностью вырождены, т. е. все их компоненты имели бы строго одинаковые массы, если бы частицы ни с кем не взаимодействовали. Наличие сильного взаимодействия с виртуальными частицами (будем говорить для краткости—с «вакуумом») приводит к расщеплению мультиплетов. Это расщепление можно описать способом, весьма близким к тому, которым в квантовой механике описывают зеемановское расщепление атомных уровней.

Будем считать, что взаимодействие мультиплета с вакуумом описывается некоторым эффективным постоянным полем, которое по своим свойствам есть вещественный тензор D (1,1) *). Обозначим поле через $H \equiv H_b^a$ (см. стр. 30). Для более точного описания расщепления можно ввести «поля» и более высокого ранга, H_{cd}^{ab}, H_{def}^{abc} и т. д.; однако, как будет рассказано ниже, сравнение с опытом показывает, что соответствующие члены взаимодействия оказываются малыми. В свободный (невозмущенный) лагранжиан системы входит масса частицы в комбинации

$$\left.\begin{aligned} &m\,\mathrm{Sp}\,\overline{\Psi}\Psi \text{ для барионов,}\\ &m^2\,\mathrm{Sp}\,\overline{\Psi}\Psi \text{ для мезонов.}\end{aligned}\right\} \tag{6,1}$$

Возмущение (взаимодействие с «полем») будет добавлять слагаемое к массе для барионов и к квадрату массы для мезонов **). Чтобы вычислить эту добавку, найдем аналог мультиполей системы. Из функции Ψ и ее сопряженной $\overline{\Psi}$ можно составить ***)

$$\left.\begin{aligned} &\text{0-поль: } \mathrm{Sp}\,\overline{\Psi}\Psi,\\ &\text{8-поли: } \overline{\Psi}_c^a\Psi_b^c \pm \overline{\Psi}_b^c\Psi_c^a.\end{aligned}\right\} \tag{6,2}$$

Остальные компоненты образуют 27-поль.

Среднее значение 0-поля (скаляра) определяет невозмущенную массу, 8-поль приведет к возмущению, пропорциональному H_b^a, 27-поль—к возмущению, пропорциональному H_{cd}^{ab}.

Если Ψ — эрмитово (бозоны), то оба 8-поля равны, так как для эрмитовых матриц $\overline{\Psi}\Psi = \Psi\overline{\Psi}$; поэтому из компонент барионного октета можно составить два 8-поля, а из компонент мезонного октета только один 8-поль.

Аналогично из компонент декаплета можно составить:

$$\left.\begin{aligned} &\text{0-поль: } (\overline{\Psi}, \Psi),\\ &\text{8-поль: } \overline{\Psi}^{abc}\Psi_{abf},\\ &\text{27-поль: } \overline{\Psi}^{abc}\Psi_{aef},\\ &\text{64-поль: } \overline{\Psi}^{abc}\Psi_{def}\end{aligned}\right\} \tag{6,3}$$

(все следы обращены в нуль). При выводе формул согласно сказанному выше мы будем учитывать только взаимодействие с 8-полем.

---

*) Если рассматривать в этой схеме реакции и распады, то необходимо будет учитывать зависимость компонент тензора от энергии.

**) Так как расщепление у барионов сравнительно мало́, можно считать, что и для них получаются соотношения для к в а д р а т о в масс.

***) Для краткости мультиполь с k компонентами мы называем k-полем.

Начнем с барионного октета. Взаимодействие с полем H описывается двумя членами вида (C_1 и C_2 — постоянные)

$$C_1 \operatorname{Sp} H\overline{\Psi}\Psi \text{ и } C_2 \operatorname{Sp} H\Psi\overline{\Psi}. \tag{6,4}$$

Выберем теперь H. Естественно в первом приближении пренебречь разностью масс внутри изотопического мультиплета, считая, что T продолжает оставаться хорошим квантовым числом. В конце статьи мы рассмотрим также и расщепление изотопического мультиплета.

Выберем H так, чтобы отличной от нуля была бы компонента H_3^3. Тогда взаимодействие с полем (6,4) переписывается в виде

$$\Delta M = a\Psi_r^3\overline{\Psi}_3^r + b\overline{\Psi}_3^r\Psi_r^3. \tag{6,5}$$

Постоянные a и b определяют силу взаимодействия поля с обоими 8-полями. Если теперь обратиться к (5,1), то для масс барионов получим следующие значения (где m_0 — масса невозмущенного октета):

$$\left.\begin{aligned} m(\Xi) &= m_0 + a, \\ m(N) &= m_0 + b, \\ m(\Sigma) &= m_0, \\ m(\Lambda) &= m_0 + \frac{2}{3}(a+b). \end{aligned}\right\} \tag{6,6}$$

Отсюда следует формула Гелл-Манна — Окубо

$$\frac{1}{2}[m(\Xi) + m(N)] = \frac{1}{4}[m(\Sigma) + 3m(\Lambda)]. \tag{6,7}$$

Если принять массу Σ за начало отсчета *), то из известных масс барионов можно составить табл. III (для Ξ и N берем полусумму масс обеих компонент).

Таблица III

Интервалы в барионном октете

	$m - m(\Sigma^0)$, *Мэв*
Ξ	125
N	—253
Σ^0	0
Λ	—77
$\frac{\Xi+N}{2}$	—64
$\frac{3}{4}\Lambda$	—58

Формулам (6,6) можно придать другой вид. Из формулы (4,5) можно получить, что после понижения симметрии до $SU(2)$ инвариантами группы остаются след матрицы 2×2 и ее определитель. Определитель равен

$$QY - Q^2 + \frac{1}{2}(T_+T_- + T_-T_+).$$

Но из формулы (4,6) следует, что

$$Q^2 - QY = T_3^2 - \frac{1}{4}Y^2.$$

Отсюда следует, что квантовыми числами, характеризующими расщепленный мультиплет, будут

$$Y \text{ и } T(T+1) - \frac{1}{4}Y^2. \tag{6,8}$$

Поэтому масса бариона с точностью до членов первого порядка равна

$$M = M_0 + M_1 Y + M_2\left[T(T+1) - \frac{1}{4}Y^2\right], \tag{6,9}$$

где M_0, M_1 и M_3 — новые постоянные. В таком виде формулу можно применять к любому барионному мультиплету. Связь между a, b и M_0, M_1 и M_2 устанавливается легко.

*) Если обозначить символом бариона разность массы бариона и массы Σ^0, то формула (6,7) примет вид $\Xi + N = \frac{3}{2}\Lambda$.

Возникает естественный вопрос о законности использования формул теории возмущений первого порядка. Ясно, что мерой малости возмущения здесь не может служить отношение расщепления масс к массе невозмущенного мультиплета, надо искать другое объяснение; строго говоря, такового сейчас не существует.

Можно представить себе, что в барионном мультиплете нет вовсе примеси более высокой мультипольности, подобно тому как у дейтрона нет электрических моментов выше квадрупольного. Это означает, что не существует другого барионного мультиплета с близкой массой, который мог бы внести возмущение более низкой симметрии. Во всяком случае, резкое выделение взаимодействия низшей мультипольности является важным фактором, обусловливающим успех всей схемы нарушения унитарной симметрии.

Если же учесть в массовой формуле поле H^{ab}_{cd} (компонента H^{33}_{33}), то к (6,5) добавится слагаемое *)

$$c\overline{\Psi}^3_3\Psi^3_3, \qquad (6,10)$$

которое сдвинет массу Λ в формулах (6,6) на величину $2c/3$. Ясно, что эта постоянная будет определять отклонение от формулы (6,7), так что

$$c = -\frac{3}{2}[2m(\Xi) + 2m(N) - m(\Sigma) - 3m(\Lambda)]. \qquad (6,11)$$

Отсюда следует, что $c \approx 36$ *Мэв*, что и определяет величину связи 27-поля с H^{33}_{33}.

Перейдем теперь к декаплету. В этом случае поправка к массе определится следующим образом:

$$\Delta M = d\overline{\Psi}^{ab3}\Psi_{ab3}. \qquad (6,12)$$

С помощью табл. II получим следующие значения масс:

$$\left.\begin{aligned} m(\Omega) &= m_0 + d, \\ m(\Xi^*) &= m_0 + \frac{2}{3}d, \\ m(\Sigma^*) &= m_0 + \frac{1}{3}d, \\ m(\Delta) &= m_0. \end{aligned}\right\} \qquad (6,13)$$

Таким образом, в декаплете уровни расположены эквидистантно, с расстоянием $\frac{1}{3}d$. Из опыта это расстояние равно 145 *Мэв*, так что

$$d = 435 \text{ Мэв}. \qquad (6,14)$$

Эквидистантность можно получить из формулы (6,9), если учесть, что для декаплета по формуле (4,20)

$$T = \frac{1}{2}Y + 1, \qquad (6,15)$$

откуда

$$M = (M_0 + 2M_2) + \left(M_1 + \frac{3}{2}M_2\right)Y, \qquad (6,16)$$

где, вообще говоря, постоянные не равны постоянным октета.

*) 27-поль имеет компоненты: $\Psi^{ab}_{cd} = \overline{\Psi}^{\{a}_{\{c}\Psi^{b\}}_{d\}} - \frac{1}{3}\overline{\Psi}^{\varepsilon}_{c}\Psi^{b}_{\varepsilon}\delta^{a}_{d} - \frac{1}{3}\overline{\Psi}^{a}_{\varepsilon}\Psi^{\varepsilon}_{a}\delta^{b}_{c} + \overline{\Psi}^{\varepsilon}_{x}\Psi^{\varkappa}_{\varepsilon}\delta^{a}_{d}\delta^{b}_{c}$. Умножение 27-поля на H^{33}_{33} приведет к смещению остальных масс. Однако это смещение сведется к переобозначению постоянных, так что можно явно рассматривать лишь первый член в написанной формуле.

Для мезонных октетов формула получается из формул для октета барионного, если положить в ней $a=b=e$ (или в формуле (6,9) положить $M_1=0$) и считать, что эти формулы написаны не для масс, а для их квадратов. Для октета псевдоскалярных мезонов получим, по аналогии с (6,6):

$$\Delta m^2 = e\,\mathrm{Sp}\,(H\bar{P}P), \tag{6,17}$$

$$\left.\begin{aligned} m^2(K) &= m_0^2 + e,\\ m^2(\pi) &= m_0^2,\\ m^2(\eta) &= m_0^2 + \frac{4}{3}e. \end{aligned}\right\} \tag{6,18}$$

m_0 в этой формуле, конечно, не равно постоянной m_0 в формуле для барионов.

Из (6,18) получаем соотношение, подобное (6,7):

$$m^2(K) = \frac{1}{4}[m^2(\pi) + 3m^2(\eta)]. \tag{6,19}$$

Квадраты масс псевдоскалярных мезонов собраны в табл. IV.

Таблица IV

Квадраты масс псевдоскалярных мезонов (интервалы)

	(Масса)^2 — —$m^2(\pi)$, $(\Gamma\text{эв})^2$
η	0,28
K	0,22
π	0

Таблица V

Квадраты масс векторных мезонов (интервалы)

	(Масса)^2 — —$m^2(\rho)$, $(\Gamma\text{эв})^2$
φ	0,46
K^*	0,21
ω	0,03
ϱ	0

Соотношение для разностей квадратов масс

$$m^2(K) = \frac{3}{4}m^2(\eta) \tag{6,20}$$

выполняется достаточно хорошо.

Для октета векторных мезонов согласие оказывается значительно хуже. Это, по-видимому, можно объяснить тем, что внутри октета лежит еще один векторный мезон ω ($Y = T = 0$). Этот мезон, естественно, должен возмущать октет (табл. V).

Описание возмущения, которое вносит ω-мезон в векторный октет, выходит, вообще говоря, как за рамки группы SU (3), так и за схему нарушения симметрии, описанную выше. То, что в природе обнаружены два мезона (ω-мезон и φ-мезон) с близкими массами и с одинаковыми квантовыми числами, указывает, по-видимому, на существование более высокой симметрии, нарушение которой демонстрируется расщеплением ω- и φ-мезона, подобно тому как нарушение симметрии SU (3) приводит к расщеплению масс φ- и ϱ^0-мезонов. Однако простое расширение группы, например до SU (4), приводит к увеличению числа компонент мультиплета, так что решение этой загадки должно быть более хитрым *). Следует отметить и вторую загадку, которую преподносят нам мезонные октеты. Из приведенных данных видно, что в двух октетах равны первые расстояния:

$$m^2(K) - m^2(\pi) = m^2(K^*) - m^2(\varrho). \tag{6,21}$$

Ясно, что такое соотношение не может следовать из симметрии $SU(3)$. Здесь речь идет о том, что связь разных мезонных октетов с полем H одинакова (универсальное взаимодействие). Если такое совпадение не случайно, то его объяснение тоже должно быть связано с нарушением более высокой симметрии. Можно еще указать, что если заменить квадраты масс φ и ω их полусуммой, полученная схема практически совпадает со схемой псевдоскалярного октета. Обратимся к возможности описания расщепления, указанной Швингером **).

Предположим, действительно, что девятый мезон входит в октет, который в этом случае имеет след, отличный от нуля. Такой октет описывается матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\varrho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega & \varrho^- & K^{-*} \\ \varrho^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\varrho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega & \overline{K}^0 \\ -K^+ & K^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega \end{pmatrix}. \tag{6,22}$$

В качестве взаимодействия, нарушающего симметрию, возьмем два слагаемых: одно обычного типа, $\mathrm{Sp}\, H\overline{V}V$, а другое — простейшее, которое расщепляет массу ω и φ. Это второе слагаемое мы запишем просто в виде $h\bar{\omega}\omega$. Взаимодействие, которое мы рассматриваем, теперь будет перемешивать φ- и ω-мезоны, так как оно содержит квадрат элемента, стоящего в нижнем правом углу (6,22). Итак, рассмотрим взаимодействие

$$\Delta M = g\overline{V}{}^3_\alpha V^\alpha_3 + h\bar{\omega}\omega. \tag{6,23}$$

Взаимодействие (6,23) приводит к следующим массам мезонов (m_0^2 — новая постоянная, не связанная с постоянной в (6,18)):

$$\left.\begin{aligned} m^2(K) &= m_0^2 + g, \\ m^2(\varrho) &= m_0^2, \\ m^2(\varphi) &= m_0^2 + \frac{4}{3}g, \\ m^2(\omega) &= m_0^2 + \frac{2}{3}g + h, \\ m^2(\bar{\omega}\varphi) &= \frac{2\sqrt{2}}{3}g; \end{aligned}\right\} \tag{6,24}$$

$m^2(\bar{\omega}\varphi)$ обозначает матричный элемент, перепутывающий исходные φ и ω. Как и в теории зееман-эффекта, реальные уровни, массы реальных φ и ω,

*) Как пример похожей ситуации, можно указать на расширение группы вращений до группы Лоренца. Как известно, при таком расширении происходит перемешивание состояний с заданным спином с состояниями с меньшими спинами.

**) Смешивание ω и φ рассматривалось в работе Сакурай [F4].

описываются корнями уравнения собственных значений:

$$\left.\begin{aligned} \left(m_0^2+\frac{4}{3}g\right)m^2(\varphi)+\frac{2\sqrt{2}}{3}gm^2(\omega)=\lambda m^2(\varphi),\\ \frac{2\sqrt{2}}{3}gm^2(\varphi)+\left(m_0^2+\frac{2}{3}g+h\right)m^2(\omega)=\lambda m^2(\omega). \end{aligned}\right\} \qquad (6{,}25)$$

Определитель этого уравнения имеет вид

$$\begin{vmatrix} m_0^2+\frac{4}{3}g & \frac{2\sqrt{2}}{3}g \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}g & m_0^2+\frac{2}{3}g+h \end{vmatrix}. \qquad (6{,}26)$$

Как известно, сумма корней уравнения собственных значений равна следу (6,26):

$$m^2(\varphi)+m^2(\omega)=2m_0^2+2g+h.$$

Сравнивая с (6,24), получим

$$h=m^2(\varphi)+m^2(\omega)-2m^2(K^*).$$

Произведение корней уравнения (6,25) равно величине определителя (6,26). Вместо формулы для масс мы получим формулу для интервалов (выбирая за начало отсчета массу ϱ). Это значит, что мы положим постоянную m_0^2 в формуле (6,24) равной нулю. Обозначая теперь квадраты масс в такой шкале символами самих частиц, найдем, что определитель (6,26) равен $\frac{4}{3}hg$. Так как g — это масса K^*, а h определено выше, то

$$\omega\varphi=\frac{4}{3}K^*(\omega+\varphi-2K^*) \qquad (6{,}27)$$

или, в квадратах масс,

$$[m^2(\omega)-m^2(\varrho)][m^2(\varphi)-m^2(\varrho)]=$$
$$=\frac{4}{3}[m^2(K^*)-m^2(\varrho)][m^2(\varphi)+m^2(\omega)-2m^2(K^*)]. \qquad (6{,}28)$$

В пределах ошибок эксперимента это соотношение удовлетворяется экспериментальными значениями масс. Ясно, что описанная процедура основана на малопонятных предположениях. Формально мы должны были рассмотреть взаимодействие общего типа $h'(\bar{\omega}\varphi+\bar{\varphi}\omega)$, вводя две новые постоянные, h и h'. Сравнение с опытом в этом случае привело бы к некоторому соотношению между h и h', однако никакого соотношения между массами, очевидно, не возникло. Решение Швингера отвечает выбору $h'=\frac{2\sqrt{2}}{3}g$. Имеет ли такой выбор какой-либо глубокий смысл, покажет дальнейшее развитие теории.

§ 7. РАСЩЕПЛЕНИЕ ИЗОТОПИЧЕСКИХ МУЛЬТИПЛЕТОВ

Схема описания расщепления унитарных мультиплетов может быть расширена так, чтобы включить в себя и описание расщеплений зарядовых мультиплетов, которые по условию задачи оставались вырожденными в полях H_3^3 и H_{33}^{33}.

Наиболее простой путь обобщения использует симметрию унитарного мультиплета относительно замены заряда на гиперзаряд. Выпишем еще раз матрицу барионного октета

$$\left(\begin{array}{c|cc} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & \Sigma^- & \Xi \\ \hline \Sigma^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda_0 & \Xi^0 \\ -p & n & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda \end{array}\right). \qquad (7,1)$$

Рассмотрим подгруппу, отвечающую матрице, очерченной в правом нижнем углу. Ее структура, очевидно, аналогична структуре матрицы изотопического спина; ее квантовое число называют K-спином. Компоненты K-мультиплета определяются тем же путем, что и для T-мультиплета (изотопического мультиплета). След матрицы после умножения на $\sqrt{6}/2$ дает состояние с $K=0$ (сравните, как получается Λ из матрицы T мультиплета)

$$\Phi_0=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\Sigma^0+\Lambda^0). \qquad (7,2)$$

Вычитая из диагональных элементов очерченной матрицы 2×2 половину ее следа, получим функцию с $K=1$:

$$\Phi_1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}}\Sigma^0+\sqrt{\frac{3}{8}}\Lambda, & \Xi^0 \\ n & \frac{1}{2\sqrt{2}}\Sigma^0-\sqrt{\frac{3}{8}}\Lambda \end{pmatrix}. \qquad (7,3)$$

Элементы матрицы (7,3) составлены из трех компонент Φ_1: n, $+\frac{1}{2}(-\Sigma^0+\sqrt{3}\Lambda)$, Σ^0, подобно тому как изотопическая матрица Σ составляется из компонент Σ^+, Σ^0, Σ^-.

Наконец, две функции имеют K-спин, равный 1/2:

$$\Phi^{(1)}_{1/2}=(\Sigma^-,\ \Xi^-), \qquad \Phi^{(2)}_{1/2}=(\Sigma^+,-p). \qquad (7,4)$$

Компоненты каждой из этих функций имеют одинаковый заряд, подобно тому как компоненты изотопических мультиплетов имеют одинаковый гиперзаряд.

Возмущения, сохраняющие заряд, вводятся компонентами поля H^1_1 и H^{11}_{11}. Здесь у нас нет оснований пренебречь полем H^{11}_{11}, так как один из процессов, приводящих к расщеплению изотопических мультиплетов, есть излучение или поглощение фотона; матричный элемент такого процесса преобразуется как квадрат H^1_1 или, что то же самое, как H^{11}_{11}.

Компоненты возмущающегося поля имеют те же квантовые числа, что и соответствующие компоненты барионного или мезонного мультиплета (два типа полей!), так как классификация, очевидно, не связана с конкретным выбором частиц. Поле H^{11}_{11} преобразуется как соответствующая компонента 27-плета. В теории слабых взаимодействий будут играть роль компоненты H^1_3 и H^3_1, имеющие заряд и странность (они преобразуются как K^+ и K^-). Так же можно рассматривать и поля, преобразующиеся как декаплет. Единственная компонента декаплета, которая не меняет ни заряда, ни гиперзаряда, — это компонента, преобразующаяся как Σ^{*0}. Мы рассмотрим ее отдельно.

Таким образом, примем для добавки к массе выражение вида

$$\Delta M = \alpha \overline{\Psi}{}^1_\alpha \Psi^\alpha_1 + \beta \overline{\Psi}{}^\alpha_1 \Psi^1_\alpha - 2\gamma \overline{\Psi}{}^1_1 \Psi^1_1. \tag{7,5}$$

Вместе со старым расщеплением получаем:

$$\left.\begin{aligned}
m(\Xi^-) &= m_0 + a + \alpha,\\
m(\Xi^0) &= m_0 + a,\\
m(\Sigma^-) &= m_0 + \alpha,\\
m(\Sigma^0) &= m_0 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \gamma,\\
m(\Sigma^+) &= m_0 + \beta,\\
m(\Lambda) &= m_0 + \frac{2}{3}(a + b) + \frac{1}{6}(\alpha + \beta) - \frac{1}{3}\gamma,\\
m(n) &= m_0 + b,\\
m(p) &= m_0 + b + \beta,\\
m(\Lambda\Sigma) &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha + \beta) - \frac{2}{\sqrt{3}}\gamma.
\end{aligned}\right\} \tag{7,6}$$

Коэффициент γ оценивается из соотношения

$$\gamma = m(\Sigma^0) - \frac{1}{2}[m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]. \tag{7,7}$$

Из экспериментальных значений масс следует, что $\gamma = -0{,}95 \pm 0{,}20$. Мы положим $\gamma = 0$. После этого из (7,6) возникает еще одно соотношение, связывающее три разности масс:

$$[m(\Xi^-) - m(\Xi^0)] - [m(p) - m(n)] = m(\Sigma^-) - m(\Sigma^+), \tag{7,8}$$

которое сравнительно хорошо согласуется с опытом:

$$\left.\begin{aligned}
m(\Xi^-) - m(\Xi^0) &= 6{,}5 \pm 1{,}0,\\
m(p) - m(n) &= -1{,}3,\\
m(\Sigma^-) - m(\Sigma^+) &= 7{,}7 \pm 0{,}3.
\end{aligned}\right\} \tag{7,9}$$

Вернемся теперь к возмущению типа декаплета. Если по-прежнему требовать, чтобы гиперзаряд в системе не изменялся, то единственный член с $Q = Y = 0$ декаплета — это H^{123}, преобразующийся как Σ^{0*}. Вклад в массу от декаплета имеет вид

$$(\Delta M)_g = \varepsilon_{abc} H^{ade} \overline{\Psi}{}^b_d \Psi^c_e + \varepsilon^{ade} H_{abc} \overline{\Psi}{}^b_d \Psi^c_e.$$

Оставляя только члены, пропорциональные H^{123} и H_{123}, и отбрасывая те, роль которых сводится к изменению постоянных в (7,5), получим

$$(\Delta M)_d = \delta_1 (\overline{\Psi}{}^1_1 \Psi^2_2 - \overline{\Psi}{}^1_2 \Psi^2_1) + \delta_2 (\overline{\Psi}{}^2_2 \Psi^1_1 - \overline{\Psi}{}^2_1 \Psi^1_2). \tag{7,10}$$

Отсюда возникает добавка к массе Σ^0, равная $-\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) = \frac{1}{2} - \delta$, к массе Λ, равная $\frac{1}{6}\delta$, к массе Σ^+, равная $-\delta_1$, и к массе Σ^-, равная $-\delta_2$. Не входя в противоречие с экспериментальными данными, можно положить $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Рассмотрим теперь смешивание Λ и Σ. Из-за электромагнитного взаимодействия Λ и Σ, которые были собственными состояниями изотопического спина, перемешиваются, оставаясь собственными значениями, проекции изотопического спина $T_3 = 0$. (Явление, аналогичное перемешиванию спинового синглета и спинового триплета в магнитном поле.) Полагая в (7,6) $\gamma = 0$, получим

$$m(\Lambda\Sigma) = \frac{1}{\sqrt{3}}[m(\Xi^-) - m(\Xi^0) - m(n) + m(p)]. \qquad (7,11)$$

Из экспериментальных значений масс найдем

$$m(\Lambda\Sigma) = 1,5 \pm 0,4 \text{ Мэв}. \qquad (7,11')$$

Отсюда для физических (смешанных) состояний получим (Далиц [D7])

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{\text{физ}} &= \Lambda\cos\alpha + \Sigma^0 \sin\alpha, \\ \Sigma_{\text{физ}} &= -\Lambda\sin\alpha + \Sigma^0\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (7,12)$$

где

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{m(\Lambda\Sigma)}{m(\Sigma) - m(\Lambda)} = -0,019 \pm 0,006. \qquad (7,13)$$

Угол α характеризует степень перемешивания состояний с $T = 0$ и $T = 1$. Так как нейтральные компоненты этих состояний обладают разной четностью относительно зарядовой симметрии (замена $p \rightleftarrows n$ и $\pi^+ \rightleftarrows \pi^-$), то (7,13) характеризует степень отклонения от зарядовой симметрии Λ-гиперона. Примером реакций, которые могут быть использованы для экспериментального измерения угла α, могут служить реакции $\pi^+ + d \to \Lambda + p + K^+$ и $\pi^- + d \to \Lambda + n + K^0$.

Аналогично барионному октету можно рассмотреть барионный декаплет. Если и здесь ограничиться низшим мультипольным взаимодействием, то по аналогии с расщеплением унитарным мы получим, что уровни расщепляются эквидистантно, так что

$$\begin{aligned} &m(\Delta^{++}) - m(\Delta^+) = m(\Delta^+) - m(\Delta^0) = m(\Delta^0) - m(\Delta^-) = \\ &\quad = m(\Sigma^{*+}) - m(\Sigma^{*0}) = m(\Sigma^{*0}) - m(\Sigma^{*-}) = m(\Xi^{*0}) - m(\Xi^{*-}). \qquad (7,14) \end{aligned}$$

Отклонение от линейной зависимости будет указывать на примесь взаимодействия с более высокой мультипольностью.

В случае мезонных октетов соотношение (7,10) обращается в тождество. В псевдоскалярном октете, однако, возникает вопрос о природе разности масс π^0 и $\pi^\pm$, которая должна быть равна нулю в 8-польном приближении. Ее следует отнести за счет электромагнитного взаимодействия типа H^{11}_{11}.

Формулы (7,16) можно написать в более простом виде, в котором масса Σ^0 остается несмещенной.

Поле H^a_b должно иметь квантовые числа $Q = Y = 0$; его можно записать в форме диагональной матрицы с элементами на диагонали $A, -A, +B, -B$, где A и B — произвольные вещественные числа.

Вычтем из такой матрицы единичную матрицу, умноженную на $1/2\,B$. Такая операция сводится просто к смещению начала отсчета масс, так как она не вызывает расщепления. Мы увидим, что таким образом мы закрепляем массу Σ^0 как начало отсчета.

Обозначая $A - 1/2\,B = \varkappa$ и $3/2\,B = -\lambda$, получим, что поле можно записать в форме матрицы

$$H^a_b = \begin{pmatrix} \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & -\varkappa & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \qquad (7,15)$$

Произведения компонент поля на величину мультиполя в формуле (6,4) мы обозначим через

$$\alpha = \varkappa C_1, \quad \beta = \varkappa C_2, \quad a = \lambda C_1 \quad b = \lambda C_2.$$

Тогда с помощью матрицы (7,15) (сохраняя условие $\gamma = 0$) мы получим новый набор формул для масс барионов:

$$\left.\begin{aligned} m(\Xi^-) &= m_0 + a + \alpha, \\ m(\Xi^0) &= m_0 + a - \alpha, \\ m(\Sigma^-) &= m_0 + \alpha - \beta, \\ m(\Sigma^0) &= m_0, \\ m(\Sigma^+) &= m_0 - \alpha + \beta, \\ m(\Lambda) &= m_0 + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b, \\ m(n) &= m_0 + b + \beta, \\ m(p) &= m_0 + b - \beta. \end{aligned}\right\} \qquad (7,16)$$

Формулы для расщепления масс, полученные до сих пор (их было три, так как массы 8 барионов описывались 5 параметрами), не зависели от модели. Если, однако, относиться к полю серьезно, то из приведенных соотношений следует, что $\alpha/\beta = a/b$ или (ср. Кольман и Глэшоу [D1])

$$\frac{m(\Xi^0) - m(\Xi^-)}{m(n) - m(p)} = \frac{m(\Xi^0) + m(\Xi^-) - 2m(\Sigma^0)}{m(n) + m(p) - 2m(\Sigma^0)} . \qquad (7,17)$$

Это соотношение выполняется плохо. Левая его часть равна —5, правая —0,5. Это значит, что в изотопическую разность масс велик вклад чисто электромагнитных поправок. Плохо выполняется и другое соотношение. Величина

$$\frac{m(\Xi^-) - m(\Xi^0) + m(p) - m(n)}{\frac{1}{2}[m(\Xi^-) + m(\Xi^0) + m(p) + m(n)] - 2\Sigma^0} = 2\frac{\alpha+\beta}{a-b} \qquad (7,18)$$

характеризует отношение компонент полей $\varkappa$ и λ. Из известных значений масс барионов находим для него величину 0,038.

Такую же величину можно вычислить из квадратов масс псевдоскалярных мезонов. Найдем

$$\frac{m^2(K^+) - m^2(K^0)}{\frac{1}{2}[m^2(K^+) + m^2(K^0)] - m^2(\pi^2)} = -0{,}017. \qquad (7,19)$$

Смысл формул (7,18) и (7,19) можно понять, если заметить, что, отсчитывая массы от середины мультиплета, т. е. от масс Σ^0 и π^0 соответственно. можно переписать обе формулы так:

$$\frac{\Delta m(\Xi) + \Delta m(N)}{2m_{\text{ср}}(\Xi, N)} = 2\frac{\Delta m(K)}{m_{\text{ср}}(K)} , \qquad (7,20)$$

где Δm — разности масс (не квадратов!) соответствующих дублетов. а $m_{\text{ср}}$ — их среднее расстояние от Σ^0 и π^0. Из (7,20) видно, что речь идет об универсальности изотопического расщепления, которое имеет меньшую точность, чем универсальность расщепления унитарного.

§ 8. «ГОЛОВАСТИКИ» И «БЕСЫ»

«Там на неведомых дорожках
Следы невиданных зверей...»
А. Пушкин

В нашу задачу не входило изложение всех идей и результатов унитарной теории, и мы оставили в стороне такое, например, важное, но еще не оформившееся направление, как теорию слабых взаимодействий; тем не менее имеет смысл отметить некоторые новые, пока еще спекулятивные идеи, так как они указывают на то, что фауна унитарного мира может быть весьма необычна. Расщепление масс показало, что взаимодействие частиц с вакуумом можно с успехом описывать некоторым полем H_b^a, нейтральные компоненты которого, H_3^3 и H_1^1, ответственны за унитарное и изотопическое расщепления соответственно. Возникает понятное желание придать этому полю смысл реального физического поля, сопоставив квадратам такого унитарного поля новый унитарный мезонный мультиплет. Такой мезонный октет был рассмотрен в работе Глэшоу и Кольмана [F3].

Идея головастика была высказана в работах Швингера (Annals of Phys. 2, 407 (1957)) и Салама и Уорда (Phys. Rev. Letts. 5, 390 (1960) и Revs. Mod. Phys. 33, 428 (1961)). Мезонный октет был введен Сакурай [F4].

Представим себе, что поле H_b^a есть поле скалярных мезонов. Если написать матрицу этого поля по аналогии с матрицей псевдоскалярных мезонов, то диагональными компонентами окажутся две нейтральные частицы, которые мы, чтобы подчеркнуть тождественность унитарных свойств, обозначим через π'^0 и η' (остальные компоненты октета $\pi'^\pm$, $K'^\pm$, K'^0, $\bar{K}'^0$ связаны с изменением заряда или гиперзаряда и не вносят вклада в расщепление, так же как и подобные компоненты поля H_b^a).

Так как квантовые числа π'^0 и η' те же, что и у вакуума, они могут аннигилировать бесследно, если только их массы равны нулю, превращаясь, например, в ненаблюдаемое связанное состояние протон — антипротон с полной массой, равной нулю!

Это значит, что формально существует процесс излучения нейтрального мезона, имеющего в виртуальном состоянии энергию, равную нулю, превращающегося в некоторое ненаблюдаемое состояние; так как на диаграмме такой процесс изображается линией с «кляксой» на конце, то такой мезон называют «головастиком» *).

Такая схема, очевидно, формально совпадает со схемой поля H_b^a. Если к сказанному добавить предположение о том, что взаимодействие головастика со всеми мультиполями описывается универсальной постоянной, мы получаем модель, в которой правила интервалов, связывающие р а з н ы е мультиплеты, получают естественную интерпретацию.

Скалярный мезон, из которого строится головастик в свободном состоянии, может иметь массу и не равную нулю. В этом случае авторы модели указывают на возможное отождествление его с резонансами $K' \to \varkappa$ (730 *Мэв*), $\pi' \to \zeta$ (570 *Мэв*) и η' с массой $\sim$770 *Мэв*, близкой к ϱ^0; у таких трех компонент квадраты масс хорошо удовлетворяют правилу интервалов:

$$m^2(K') - m^2(\pi') = 0{,}22, \qquad m^2(\eta') - m^2(\pi') = 0{,}28. \tag{8,1}$$

*) Читатель, конечно, заметил, что головастик принадлежит к семейству «шпурионов», вводимых разными авторами для описания процессов нарушения симметрии. Диаграмма головастика, очевидно, может существовать и для обычных π^0- и η-мезонов, но если их взаимодействие унитарно инвариантно, такие головастики не приведут к расщеплению.

Однако само существование резонансов и их квантовые числа установлены плохо, и к такому сопоставлению нельзя еще относиться серьезно *).

Можно попытаться описать «головастики» и иначе, используя идею Гелл-Манна об унитарных спинорах «кварках», которые по-русски, по-видимому, надо называть «бесами».

Поле H^a_b можно представить, как произведение двух унитарных спиноров $\overline{\psi}_b$ и φ^a:

$$H^a_b = \overline{\psi}_b \varphi^a. \tag{8,2}$$

Унитарный спинор φ^a имеет компоненты с зарядами $-e/3$, $-e/3$ и $2e/3$, унитарный спинор $\overline{\psi}_b$ имеет компоненты с зарядами $e/3$, $e/3$, $-2e/3$. Такие же дробные значения имеет и гиперзаряд спиноров.

Появление дробного заряда связано с тем, что в группе SU (3) матрицы заряда Q и гиперзаряда Y диагональны и имеют след, равный нулю. Если мы нормируем собственные значения Q и Y так, чтобы для компонент октета они принимали бы значения 0 и ± 1, и так как эти значения равны сумме зарядов компонент спиноров $\overline{\psi}_b$, φ^a, все эти требования удовлетворяются, если заряды кратны $^1/_3$. В этом случае $^1/_3 + {}^1/_3 - {}^2/_3 = 0$ и из зарядов $\overline{\psi}_b$ и φ^a можно составить только заряды 0 и ± 1. Как и раньше, только нейтральные компоненты произведения $\overline{\psi}_b$, φ^a участвуют во взаимодействии.

Если принять (8,2), то действие поля H^a_b можно описать, как излучение и поглощение «беса» в одной и той же точке диаграммы (или излучение пары $\overline{\psi}_b$ и φ^a с последующей аннигиляцией). Такая петля приводит к расщеплению масс и тождественна головастику. Если, однако, $\overline{\varphi}_b$ и φ^a могут рождаться в свободном состоянии, мы приходим к схеме Гелл-Манна, не подтвержденной, однако, опытом.

Поиски частиц, ответственных за нарушение унитарной симметрии, напоминает охоту за нейтрино, оставившего свой след в форме несохранения энергии. Чем кончится новая охота — покажет будущее.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Формулы для масс частиц, или, как их можно назвать, следуя спектроскопической терминологии, правила интервалов, отнюдь не исчерпывают применение схемы унитарной симметрии и ее нарушение. Однако эти формулы имеют особое значение.

Унитарная схема впервые позволила рассматривать массы частиц с единой, пусть еще очень несовершенной точки зрения. До сих пор различие в массах частиц рассматривалось лишь как досадное нарушение симметрии и казалось, что только в области больших энергий, в которой это различие может стать несущественным, можно пытаться строить теоретические схемы.

В схеме SU (3) неожиданно обнаружилось, что нарушение симметрии обладает простыми свойствами и описывается очень естественно в схеме унитарных мультиплетов. Возникает вопрос, нельзя ли по характеру нарушения симметрии изучать свойства взаимодействия мультиплетов с вакуумом? Такой вопрос становится естественным, если вспомнить,

*) Глэшоу и Кольман ссылаются на следующие эксперименты: G. Alexander et al., Phys. Rev. Letts. 8, 447 (1962); D. H. Miller et al., Phys. Letts. 5, 279 (1963); S. G. Wojcicki et al., Phys. Letts. 5, 283 (1963); ζ: D. B. Lichtenberg, Stanford Linear Accel. Rep. No. 13 (1963) (не опубликовано), стр. 53, η': H. Hapopian, W. Selore, Phys. Rev. Letts. 10. 553 (1963); Z. Gioragossian, Phys. Rev. Letts. 11, 85 (1963).

что нарушение изотопической симметрии вызывается электромагнитным полем (взаимодействие частицы с электромагнитным полем вакуума); изучая отклонения от изотопической симметрии в разных реакциях, можно было бы в принципе получить довольно много сведений об этом взаимодействии (хотя расщепление в этом случае мало́). Этого, конечно, не надо делать, так как у нас есть более совершенные методы изучения электромагнитного поля. Иначе обстоит дело в случае взаимодействия поля H_3^3, нарушающего симметрию $SU(3)$.

Это взаимодействие, которое, к счастью, сравнительно велико, не сводится ни к какому известному полю. Поэтому изучение распадов и реакций с точки зрения группы $SU(3)$ служит хорошим источником информации о взаимодействии частиц с вакуумом.

Простота возникающей схемы позволяет ожидать именно в этом направлении существенного продвижения в понимании законов сильного взаимодействия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ОКТЕТ КАК 8-ВЕКТОР

В алгебре $SU(2)$ компоненты тензора второго ранга образуют трехмерный вектор. Связь между обоими представлениями осуществляется матрицами Паули — формула (2,22). Таким же образом компонентом унитарного октета можно сопоставить 8-вектор. В обозначениях Гелл-Манна[G2,3] октет A_b^a записывается в виде

$$A_b^a=\begin{pmatrix} A_3+\frac{1}{\sqrt{3}}A_8, & A_1-iA_2, & A_4-iA_5 \\ A_1+iA_2, & -A_3-\frac{1}{\sqrt{3}}A_8, & A_6-iA_7 \\ A_4+iA_5, & A_6+iA_7, & -\frac{2}{\sqrt{3}}A_8 \end{pmatrix}.$$

В такой форме можно записать, очевидно, любой октет. Заметим, что компоненты унитарного спина (4,4) принято обозначать через F_α ($\alpha=1, 2, \ldots, 8$).

Соотношения между A_b^a и A_α записываются проще всего, если ввести семь матриц λ_α, играющих здесь роль, аналогичную роли матриц Паули. Матрицы λ_α имеют вид

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

Пары матриц (λ_1, λ_2), (λ_4, λ_5) и (λ_6, λ_7) суть матрицы Паули σ_1 и σ_2 в трех двухмерных подпространствах. Матриц типа σ_3 здесь две, так как существует дополнительное условие $\mathrm{Sp}\,\lambda_\alpha=0$.

Матрицы λ_α удовлетворяют следующим условиям:

$$\mathrm{Sp}\,\lambda_\alpha\lambda_\beta=2\delta_{\alpha\beta},$$

$$[\lambda_\alpha, \lambda_\beta]\equiv\lambda_\alpha\lambda_\beta-\lambda_\beta\lambda_\alpha=2if_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma,$$

$$\{\lambda_\alpha, \lambda_\beta\}\equiv\lambda_\alpha\lambda_\beta+\lambda_\beta\lambda_\alpha=2d_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma+\frac{4}{3}\delta_{\alpha\beta}.$$

Значение «структурных» величин — антисимметричной $f_{\alpha\beta\gamma}$ и симметричной $d_{\alpha\beta\gamma}$ — задаются формулами

$$f_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{4i}\operatorname{Sp}[\lambda_\alpha\lambda_\beta]\lambda_\gamma:\; f_{123}=1,$$

$$f_{147}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=f_{516}=f_{367}=\frac{1}{2},$$

$$f_{458}=f_{678}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$d_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{4i}\operatorname{Sp}\{\lambda_\alpha,\lambda_\beta\}\lambda_\gamma:\; d_{118}=d_{228}=d_{338}=-d_{888}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$d_{146}=d_{157}=-d_{247}=d_{256}=d_{344}=$$

$$=d_{355}=-d_{366}=-d_{377}=\frac{1}{2},$$

$$d_{448}=d_{558}=d_{668}=d_{778}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Остальные отличные от нуля компоненты получаются перестановкой индексов с учетом знака в случае антисимметричной $f_{\alpha\beta\gamma}$.

Очевидно, что

$$A^a_b=\sum_{\alpha=1}^{7}A_\alpha(\lambda_\alpha)^a_b,$$

$$2A_\alpha=\operatorname{Sp}A\lambda_\alpha\equiv A^a_b(\lambda_\alpha)^b_a.$$

Коэффициенты f и d позволяют записывать произведение октетов. Формула умножения октетов

$$(X^{\pm})^a_b=\frac{1}{2}(A^a_cB^c_b\pm A^c_bB^a_c)$$

переписывается так:

$$(X^{\pm})_\alpha=i\begin{pmatrix}d_{\alpha\beta\gamma}\\ f_{\alpha\beta\gamma}\end{pmatrix}A_\alpha B_\beta.$$

Симметричное произведение называют иногда D-произведением, а антисимметричное F-произведением.

2. $\mathscr{C}$-ЧЕТНОСТЬ

Рассмотрим два преобразования октета: 1) R-преобразование — перестановка строк и столбцов октета, 2) зарядовое сопряжение C. Нетрудно видеть, что произведение обоих преобразований

$$\mathscr{C}=RC$$

оставляет все элементы мезонных (эрмитовских) октетов на своих местах и может их всех умножить на $+1$ либо на -1 (так как $\mathscr{C}^2=1$). Таким образом, появляется новое квантовое число: $\mathscr{C}$-четность, характеризующее эрмитовские октеты.

Очевидно, что $\mathscr{C}$-четность определяется зарядовой четностью частиц, стоящих на диагонали и остающихся при R-преобразовании на месте. Поэтому октет псевдоскалярных мезонов имеет $\mathscr{C}=+1$, а октет векторных мезонов $\mathscr{C}=-1$.

Из определения компонент 8-вектора ясно, что зарядовая четность компонент A_1, A_3, A_4, A_6, A_8 одинакова и противоположна зарядовой четности компонент A_2, A_5, A_7.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

А. СТАРАЯ ТЕОРИЯ $U(3)$

1. S. Sakata, Progr. Theor. Phys. **16**, 686 (1962).
2. M. Ikeda, S. Ogawa and Y. Ohnuki, Progr. Theor. Phys. **22**, 715 (1959).
3. L. Okun, Ann. Rev. Nucl. Sci. **9**, 61 (1959).
4. М. А. Марков, Гипероны и K-мезоны, М.— Л., Физматгиз, 1958.

B. ОБЗОРЫ SU (3)

1. A. E. Edmonds, Proc. Roy. Soc. **A268**, 567 (1962).
2. R. E. Behrends, J. Dreitlein, C. Fronsdal and B. W. Lee, Revs. Mod. Phys. **34**, 1 (1962).
3. J. J. Swart, Revs. Mod. Phys. **35**, 916 (1963).
4. Y. Ne'eman, Rept. to the Intern. Conf. on Nuclear Structure, Standford, June 1963 (в печати).
5. G. F. Chew. M. Gell-Mann and A. H. Rosenfeld, Sci. Amer. **210**, 74 (1964) (см. перевод: УФН **83** (4), 695 (1964)).
6. В. И. Огиевецкий, Лекции в зимней школе, Дубна, 1964.
7. Я. А. Смородинский, Об алгебре унитарной группы Гелл-Манна, Дубна, 1961 (препринт Д-738).
8. В. М. Шехтер, в сб. «Вопросы физики элементарных частиц», т. 3, Ереван, 1963, стр. 103.
9. B. L. Purcey, Proc. Roy. Soc. **A275**, 284 (1963).

C. ОСНОВНЫЕ РАБОТЫ

1. Y. Ne'eman, Nucl. Phys. **26**, 222 (1961) (см. перевод в сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля», М., Изд-во «Мир», 1964 («Эчкп»)).
2. M. Gell-Mann, California Inst. of Technology Synchrotron Laboratory Report CTSL-20 (препринт), 1961 (см. перевод в сб. «Эчкп»).
3. M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125**, 1067 (1962).
4. S. Okubo, Progr. Theor. Phys. **27**, 949 (1962).

D. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

1. S. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. Letts. **6**, 423 (1961).
2. N. Cabibbo and R. Gatto, Nuovo cimento **21**, 872 (1961).
3. C. A. Levinson, H. J. Lipkin and S. Meshkov, Nuovo cimento **23**, 236 (1962).
4. C. A. Levinson, H. J. Lipkin and S. Meshkov, Phys. Letts. (1964) (в печати).
5. S. P. Rosen, Phys. Rev. Letts. **11**, 100 (1963).
6. A. J. Macfarlane and E. C. G. Sudarshan, Nuovo cimento **31**, 1176 (1964).
7. R. Dalitz, Phys. Rev. Letts. (1964) (в печати).

E. СЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

1. M. Gell-Mann and M. Levy, Nuovo cimento **16**, 705 (1958).
2. N. Cabibbo, Phys. Rev. Letts. **10**, 531 (1963).
3. N. Cabibbo, Phys. Rev. Letts. **12**, 62 (1964).
4. S. P. Rosen, Phys. Rev. Letts. **12**, 408 (1964).
5. M. Gell-Mann, Phys. Letts. **8**, 214 (1964).
6. M. Gell-Mann, Phys. Rev. Letts. **12**, 154 (1964).
7. G. Zweig (в печати).
8. R. Oehme, Phys. Rev. Letts. **12**, 550 (1964).
9. M. M. Block, Phys. Rev. Letts. **12**, 262 (1964).
10. M. Gell-Mann, Группа симметрии векторного и аксиально векторного токов (препринт), Physics (в печати).

F. НОВЫЕ ИДЕИ

1. M. Gell-Mann, Phys. Letts. **8**, 214 (1964).
2. J. Schwinger, Phys. Rev. Letts. **12**, 916 (1964); Phys. Rev. (в печати).
3. S. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. **134**, B671 (1964).
4. J. J. Sakurai, Phys. Rev. **125**, 434 (1963).
5. A. Salam and J. C. Ward, A. Gauge Theory of Elementary Interactions (препринт).

G. ДВА ЭКСПЕРИМЕНТА

1) Открытие Ω^-

1. V. E. Barnes et al. (33 автора!), Phys. Rev. Letts. **12**, 204 (1964).

2) Отсутствие «кварков»

2. L. P. Leipuner, W. T. Chu, R. C. Larsen, R. K. Adair, Phys. Rev. Letts. **12**, 423 (1964).