1964 г. Август | Т. LXXXIII, вып. 4
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

621 316.729

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ НА ТОЧНОСТЬ РАБОТЫ УСТРОЙСТВ СИНХРОНИЗАЦИИ

В. И. Тихонов

ВВЕДЕНИЕ

Сущность явления синхронизации состоит в следующем. Пусть на автоколебательную систему непосредственно или через специальное устройство воздействует внешнее периодическое колебание (в простейшем случае гармоническое). Тогда под влиянием вынуждающей силы частота автоколебаний в определенном интервале расстроек, называемом полосой синхронизации, совпадает с частотой внешнего колебания. Полоса синхронизации в основном определяется параметрами системы и зависит также от амплитуды внешнего колебания. Вне полосы синхронизации частоты внешнего и собственных колебаний не совпадают.

Явление синхронизации нашло широкое применение в радиофизике и технике и поэтому до настоящего времени является предметом многочисленных исследований. Приведем несколько примеров, показывающих практическое использование явления синхронизации.

В измерительных задачах физики часто применяются фазовые методы, при которых оценка той или иной физической величины производится на основе измерения разности фаз двух колебаний. Таким путем, в частности, была точно измерена скорость распространения электромагнитной энергии. Этот же принцип используется в радиодальномерах [1], содержащих когерентный синхронный гетеродин.

Исследования ядерных реакций, проводимые на циклотронах, предполагают высокую стабильность параметров отклоненного пучка ускоренных ионов и частоты ускоряющего напряжения. Расстройка резонансной системы приводит к значительному снижению напряжения на дуантах. Для устранения этого необходимо автоматически подстраивать либо задающий генератор под собственную частоту дуантного контура, либо дуантный контур под частоту генератора. В качестве системы регулирования часто используют фазовую автоподстройку частоты [2].

При запусках искусственных спутников Земли и ракет чрезвычайно важным является знание параметров их орбит. Измерение параметров движения может производиться различными методами (интерференционный, допплеровский и т. д.), но для всех них характерно использование либо высокостабильного, либо синхронного генератора. Одними из основных элементов подобных устройств являются системы фазовой автоматической подстройки частоты [3].

Для решения ряда радиофизических задач требуются высокостабильные сверхвысокочастотные колебания. Существующие клистронные и магнетронные генераторы, как правило, не обладают такой стабильностью. Для повышения стабильности частоты таких генераторов их синхронизируют маломощными колебаниями от высокостабильных эталонных генераторов (например, кварцевых или квантовых).

В телевидении устройства синхронизации нашли широкое применение для синхронизации строчной и кадровой разверток. В системах цветного телевидения синхронизация необходима для восстановления в приемниках поднесущих частот [4,5].

Широкое распространение за последнее время получили системы связи, использующие синхронное детектирование. Применение синхронных детекторов в системах амплитудной, частотной и фазовой телеграфии позволяет реализовать помехоустойчивость, близкую к потенциальной [6]. Перспективные системы радиосвязи с однополосной модуляцией и двухполосной с подавленной несущей предполагают наличие устройств синхронизации на приемной стороне [7,8].

Из других применений устройств синхронизации можно указать системы службы времени, синхронное радиовещание, когерентную радиолокацию, некоторые виды фазовой радионавигации и др.

Явление синхронизации автоколебательных систем принадлежит к числу наиболее сложных задач нелинейной теории колебаний вследствие многообразия и тонкости эффектов, наблюдаемых при синхронизации даже гармоническим внешним колебанием, а также вследствие принципиально нелинейного характера происходящих явлений.

Основы теории синхронизации были заложены в начале тридцатых годов работами Ван дер Поля [9], А. А. Андронова и А. А. Витта [10,11]. В последующие годы крупный вклад в решение этого круга вопросов внесли советские ученые Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, Н. Н. Боголюбов, С. М. Рытов, В. В. Мигулин, Ю. Б. Кобзарев, С. И. Евтянов, Р. В. Хохлов и другие. Полный обзор этих исследований приведен в [12].

В последние годы стал проявляться повышенный интерес к изучению влияния флуктуационных воздействий на процессы синхронизации. Эта проблема включает в себя анализ влияния флуктуаций на работу автономного генератора. Результат такого анализа позволяет выяснить статистический характер самих автоколебаний.

Источниками флуктуаций являются элементы схемы автогенератора (дробовой и фликкер-шум электронных приборов, тепловые флуктуации сопротивлений потерь) и внешние случайные воздействия (изменения температуры, давления, влажности и т. д.).

Качественно влияние флуктуаций проявляется в том, что автоколебания оказываются, например, не строго гармоническими, а модулированными по амплитуде и частоте случайным образом. Энергетический спектр такого стохастического колебания оказывается сплошным.

Основополагающей для данного круга задач является работа А. А. Андронова, Л. С. Понтрягина и А. А. Витта [13], в которой в общей форме решен вопрос о поведении динамических систем при наличии случайных воздействий. Принятое в этой работе допущение, что протекающий в системе процесс является марковским, позволило применить для решения задачи статистический аппарат уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова.

Непосредственным продолжением работы [13] является серия теоретических [14,15] и экспериментальных [16] работ И. Л. Берштейна по исследованию флуктуаций амплитуды и фазы автоколебаний лампового генератора. Здесь не ставится цель дать полный обзор всех работ по рассматриваемому вопросу. Укажем лишь некоторые из них. В 1955 г. была опубликована работа С. М. Рытова [17], в которой развита общая теория флуктуаций амплитуды и фазы в слабонелинейных автоколебательных системах, допускающих при нахождении периодического стационарного режима применение метода малого параметра. Предполагая флуктуации дельта-коррелированными и имеющими второй порядок малости, в общем виде найдены выражения для корреляционных функций флуктуаций амплитуды и фазы как в автономных, так и в неавтономных автоколебательных системах.

В 1958 г. была опубликована фундаментальная работа Р. Л. Стратоновича [18]. В этой работе на базе уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова проведено исследование стационарных флуктуаций фазы и амплитуды лампового генератора, синхронизируемого гармоническим сигналом на основной частоте, в предположении, что время корреляции воздействующих флуктуаций значительно меньше времени установления фазы и амплитуды автоколебаний. Кроме того, величина синхронизирующей силы и интенсивность флуктуационного воздействия считались достаточно малыми, что позволило решить укороченные уравнения для фазы и амплитуды по отдельности.

В отличие от предыдущих работ, в работе [18] не накладывалось ограничение на малость фазовых флуктуаций и дана ясная математическая картина для случая фазовых флуктуаций, соизмеримых с периодом колебаний. Были найдены стационарные законы распределения флуктуаций фазы и амплитуды автоколебаний, а также вычислено смещение средней частоты колебаний генератора вследствие «перескоков» фазы на целое число периодов, вызванных воздействием флуктуационных помех. Работа [18] получила существенное развитие и экспериментальную проверку в исследованиях И. Г. Акопяна [12,19] и в ряде других работ [20-22].

Основная цель статьи состоит в том, чтобы обобщить и систематизировать основные результаты анализа воздействия флуктуационных шумов на типовые устройства синхронизации (синхронизируемый автогенератор и фазовая автоподстройка частоты (см [51])), а также привести некоторые оценки влияния флуктуаций на работу релаксационных генераторов и соображения о рациональных методах импульсной синхронизации.

§ 1. ОСНОВНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Для ряда радиофизических задач при анализе работы автогенератора необходимо учитывать собственные флуктуации (шумы лампы и сопротивлений потерь) и внешние случайные воздействия (случайные вариации напряжения источников питания, колебания температуры окружающей среды, вибрации и т. д.).

Влияние флуктуаций и случайных воздействий проявляется в том, что автоколебания будут не строго гармоническими, а оказываются модулированными по амплитуде и частоте случайным образом. Флуктуации амплитуды и частоты, обусловленные только собственными шумами автогенератора, принято называть *естественными* флуктуациями [23]. Эти флуктуации принципиально неустранимы и определяют тот предел повышения стабильности частоты и амплитуды автогенератора, который для данного генератора не может быть превзойден. Флуктуации амплитуды и частоты, обусловленные внешними случайными воздействиями, называются *техническими* флуктуациями. Эти флуктуации в принципе можно устранить мерами параметрической стабилизации (термостатирование, гашение вибраций и т. д.) и стабилизации питающих напряжений.

Несмотря на то, что в реальных условиях технические нестабильности значительно превышают естественные, в дальнейшем приведем основные результаты, относящиеся к естественным флуктуациям, поскольку они представляют принципиальный интерес.

Задача о работе автогенератора с учетом собственных флуктуаций рассматривалась рядом авторов. По используемому математическому аппарату основные работы можно разделить на две группы: в первой группе работ [14-16,25,25] используется уравнение Фоккера — Планка —Колмогорова, во второй—метод малого параметра [17]. Хотя применимость обоих методов не вызывает возражений, однако более простым и в данном случае более естественным является метод линеаризации относительно флуктуационных поправок.

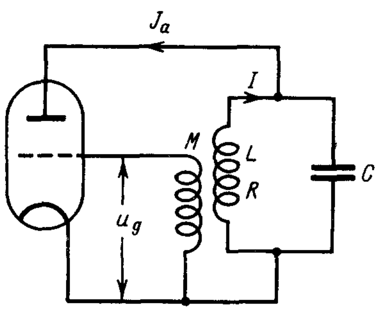

Рис. 1. Схема автогенератора.

Уравнение лампового генератора (рис. 1) и некоторых других автоколебательных систем приводится к виду

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t), \tag{1}$$

где точкой сверху обозначена производная по времени, $x(t)$ — некоторая координата (например, ток в индуктивной ветви), ω — резонансная частота колебательной системы, ε — малый параметр, $f(x, \dot{x}, t)$ — функция, вид которой определяется рассматриваемой схемой.

Для изучения решения уравнения (1) целесообразно перейти от одного уравнения второго порядка к двум уравнениям первого порядка, описывающим поведение амплитуды и фазы. Хотя понятия амплитуды и фазы интуитивно наглядны, но при попытке определить их для колебаний, хотя и близких, но не являющихся строго гармоническими, имеется некоторый произвол. Здесь уместно напомнить о неоднозначности определения огибающей и фазы квазигармонических флуктуаций [26].

Учитывая малость параметра ε и квазигармонический характер автоколебаний, определим амплитуду и фазу соотношениями

$$x = A\cos(\omega t + \theta), \qquad \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \theta). \tag{2}$$

Отсюда получим

$$A^2 = \left(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2}\right), \qquad \theta = -\omega t - \operatorname{arctg}\frac{\dot{x}}{\omega x}.$$

Дифференцируя по времени эти равенства, с учетом (1) получим

$$\dot{A} = \frac{\dot{x}}{\omega^2 A}\varepsilon f(x, \dot{x}, t), \qquad \dot{\theta} = -\frac{x}{\omega A^2}\varepsilon f(x, \dot{x}, t). \tag{3}$$

Применим эти уравнения для рассматриваемой схемы генератора (см. рис. 1). Нетрудно убедиться, что дифференциальное уравнение для тока I, протекающего через индуктивную ветвь колебательного контура, имеет вид

$$\ddot{I} + \omega^2 RC\dot{I} + \omega^2 I = \omega^2 J_a, \qquad \omega^2 = \frac{1}{LC}. \tag{4}$$

Представим анодный ток лампы J_a в виде суммы двух составляющих: регулярно изменяющейся $I_a(t)$ и флуктуационной $i(t)$, учитывающей дробовой шум анодного тока:

$$J_a(t) = I_a(t) + i(t).$$

Для упрощения формул будем считать, что сеточные токи отсутствуют; можно пренебречь анодной реакцией, и характеристику лампы на некотором участке можно аппроксимировать кубической параболой

$$I_a = Su_g - \frac{\gamma}{3} u^3_g.$$

Учитывая, что $u_g = M\dot{I}$, где M — коэффициент взаимоиндукции анодной и сеточной катушек, можем написать

$$\ddot{I} + \omega^2 I = \omega^2 \dot{I} \left[(SM - RC) - \frac{\gamma}{3} M^3 \dot{I}^2 \right] + \omega^2 i(t). \tag{5}$$

Несмотря на большое число предположений, принятых при выводе основного уравнения (5), оно удовлетворительно отражает качественную сторону процессов, происходящих в генераторе.

Введем следующие обозначения:

$$A_0 = 2\sqrt{\frac{SM - RC}{M^3\omega^2\gamma}}, \quad \varepsilon = \omega(SM - RC), \quad \frac{I}{A_0} = x, \quad \zeta(t) = \frac{\omega^2}{A_0} i(t). \tag{6}$$

Величина A_0 представляет собой стационарную амплитуду автоколебаний тока в контуре.

Уравнение (5) в новых обозначениях принимает вид (1), в котором нужно положить

$$\varepsilon f(x, \dot{x}, t) = \varepsilon\omega\dot{x}\left(1 - \frac{4\dot{x}^2}{3\omega^2}\right) + \zeta(t). \tag{7}$$

Подставив это выражение в уравнения (3), перейдя затем в них от переменных x и $\dot{x}$ к A и θ и отбросив гармонические составляющие с частотами 2ω и 4ω, получим следующие укороченные уравнения для амплитуды и фазы:

$$\left.\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\varepsilon\omega A}{2}(1 - A^2) - \frac{\omega}{A_0} i(t)\sin(\omega t + \theta), \\ \dot{\theta} &= -\frac{\omega}{AA_0} i(t)\cos(\omega t + \theta). \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

Как известно [27], влияние неучтенных нами высших гармоник сводится к некоторой поправке на частоту, однако эта поправка является регулярной. Поэтому, несмотря на то, что поправка на частоту, обусловленная высшими гармониками, превышает флуктуации частоты, следует считать, что сделанное упрощение оправдано.

Из уравнений (7) находим стационарный режим работы генератора при отсутствии флуктуаций. Так, полагая $\dot{A} = 0$ и $i(t) = 0$, получим $A_c = 1 = \text{const}$. Аналогично, полагая $i(t) = 0$, находим $\dot{\theta} = 0$, $\theta_c = \theta_0 = \text{const}$. При этом никакому значению начальной фазы нельзя отдать предпочтение. Поэтому ее нужно считать случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$.

Таким образом, в стационарном режиме ток в контуре определяется формулой

$$I = A_0 x = A_0 A_c \cos(\omega t + \theta_0) = A_0 \cos(\omega t + \theta_0). \tag{8}$$

Оценку флуктуаций частоты и амплитуды автоколебаний из-за дробового шума тока лампы можно получить, применив метод линеаризации уравнений (7) в окрестности стационарного состояния. Применение метода линеаризации оправдано тем, что дробовой шум является малым. Поэтому он вызывает небольшие отклонения амплитуды A и частоты θ (а не фазы) от их стационарных значений.

Обозначим флуктуации амплитуды и фазы, обусловленные шумом, через

$$a = A - A_c, \qquad \psi = \theta - \theta_0. \tag{9}$$

По предположению, a и $\dot{\psi}$ представляют малые флуктуационные отклонения.

Подставим выражения (9) в исходные уравнения (7) и удержим в них лишь те члены, малость которых относительно a не превосходит первого порядка. При этом флуктуационный ток $i(t)$ следует считать величиной первого порядка малости, а величины A и θ, оставшиеся в уравнениях в виде коэффициентов, следует заменить их стационарными значениями ($A_c = 1$, $\theta_c = \theta_0$). В результате выполнения указанных преобразований получим

$$\dot{a} + \varepsilon\omega a = -\frac{\omega}{A_0} i(t) \sin(\omega t + \theta_0), \tag{10}$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\omega}{A_0} i(t) \cos(\omega t + \theta_0). \tag{11}$$

Флуктуации анодного тока лампы для многих практических случаев можно рассматривать как нормальный белый шум с функцией корреляции

$$\langle i(t_1)\, i(t_2) \rangle = \frac{N}{2} \delta(t_2 - t_1), \qquad N = 2eI_s.$$

Здесь и в дальнейшем косые скобки обозначают статистическое усреднение, $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ k-заряд электрона, I_s — эквивалентный ток диода в режиме насыщения.

При известных статистических характеристиках $i(t)$ уравнения (10) и (11) позволяют вычислить все статистические характеристики флуктуаций амплитуды и фазы. В дальнейшем основной интерес будут представлять флуктуации фазы.

Из уравнения (11) находим выражение для случайного набега фазы за некоторое время T:

$$\Delta\psi = \psi(t_0 + T) - \psi(t_0) = -\frac{\omega}{A_0} \int_0^T i(t_0 + x) \cos(\omega t_0 + \omega x + \theta_0)\, dx. \tag{12}$$

Отсюда следует, что среднее значение набега фазы равно нулю: $\langle \Delta\psi \rangle = 0$. Для дисперсии набега фазы получим формулу

$$\sigma^2_{\Delta\psi} = DT, \qquad D = \frac{N\omega}{4A_0^2} = \frac{eI_s\omega^2}{2A_0^2}. \tag{13}$$

Дисперсия набега фазы растет пропорционально времени наблюдения, т. е. набег фазы имеет диффузионный характер.

Флуктуации фазы приводят к случайному разбросу мгновенного значения частоты автоколебаний относительно ее номинального значения. При этом практически нельзя предложить какие-либо меры устранения естественной нестабильности без существенного изменения принципа работы самого генератора.

Отметим кстати, что если на колебательный контур с высокой добротностью воздействует широкополосный нормальный стационарный шум, то укороченное уравнение для фазы выходных колебаний в точности совпадает с уравнением (11) [28]. Поэтому полученный результат распространяется и на этот случай.

Стационарное решение уравнения (10) имеет вид

$$a(t) = -\frac{\omega}{A_0}\int_{-\infty}^{t} e^{-\varepsilon\omega(t-x)} i(x)\sin(\omega x+\theta_0)\,dx.$$

Отсюда нетрудно получить выражение для дисперсии флуктуаций амплитуды

$$\sigma_A^2 = \frac{eI_s\omega}{4\varepsilon A_0^2}.$$

Следовательно, с учетом амплитудных и фазовых флуктуаций автоколебания можно представить в виде

$$I(t) = A_0[1+a(t)]\cos[\omega t+\theta(t)], \qquad \theta(t) = \theta_0+\psi(t). \tag{14}$$

Если учесть, что в линейном приближении флуктуации амплитуды и фазы взаимонезависимы и распределены по нормальному закону, то, проделав необходимые вычисления, получим следующее выражение для энергетического спектра автоколебаний (14):

$$S(\Omega) = A_0^2\left[\frac{\frac{1}{2}D}{\frac{1}{4}D^2+(\Omega-\omega)^2}+\frac{\varepsilon\omega\sigma_A^2}{(\varepsilon\omega)^2+(\Omega-\omega)^2}\right].$$

Из формулы (8) следует, что при отсутствии флуктуаций ($i(t)\equiv 0$) генератор вырабатывает гармоническое колебание, энергетический спектр которого представляется в виде дискретной линии высотой $A_0^2/2$, расположенной при частоте ω. Энергетический спектр квазигармонического колебания (14), получающегося при наличии флуктуаций, является сплошным. Он симметричен и имеет максимум при частоте ω. Спектр состоит из двух слагаемых, первое из которых обусловлено флуктуациями фазы, а второе — флуктуациями амплитуды.

Сделаем оценку отдельных величин. Пусть $\varepsilon = 5\cdot 10^{-2}$, $f = 10$ *Мгц*, $I_s \approx 1$ *ма*, $A_0 \approx 100$ *ма*. Тогда $D \approx 3\cdot 10^{-5}$, $\sigma_A^2 \approx 5\cdot 10^{-12}$. Для таких значений отдельных величин при рассмотрении энергетического спектра квазигармонического колебания второе слагаемое, как содержащее незначительную мощность и более «широкополосное», можно не учитывать. При этом для спектра получим простую формулу

$$S(\Omega) = \frac{2DA_0^2}{D^2+4(\Omega-\omega)^2}.$$

Итак, энергетический спектр колебания вследствие флуктуаций фазы превращается из дискретной линии в сплошной спектр, имеющий на уровне 0,5 ширину $\Delta\Omega = D$. Естественную нестабильность частоты генератора количественно можно характеризовать относительной шириной энергетического спектра

$$\frac{\Delta\Omega}{\omega} = \frac{D}{\omega} = \frac{eI_s\omega}{2A_0^2} \approx 10^{-12}.$$

§ 2. ТЕХНИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИНХРОНИЗАЦИИ

Собственные флуктуации и внешние случайные воздействия приводят к нестабильности частоты автогенераторов. Одним из эффективных средств достижения постоянства частоты является внешняя синхронизация колебаний автогенератора другим более стабильным источником колебаний. При этом возможны два пути.

Первый путь предполагает непосредственное введение синхронизирующей силы в колебательную систему автогенератора. Получающийся таким образом «захваченный» генератор работает на принципе «увлечения» частоты.

Другой путь основан на сравнении частот опорного и синхронизируемого генераторов. В соответствии с разностью частот вырабатывается управляющее напряжение, которое через исполнительное устройство подстраивает частоту стабилизируемого генератора (СГ) до ее совпадения с частотой высокостабильного опорного генератора (ОГ). Такие системы имеют, как правило, цепь обратной связи и относятся к системам автоматического регулирования. Устройство сравнения частот может иметь вид фазового детектора; тогда получается схема фазовой автоподстройки частоты. Если же сравнение производится при помощи частотного дискриминатора, то систему называют частотной АПЧ. В некоторых приложениях удобно иметь и частотный и фазовый детекторы, при которых получается система частотно-фазовой АПЧ.

Особенностью всех систем синхронизации является то, что относительно малой мощностью колебаний ОГ можно стабилизировать частоту значительно более мощных генераторов.

Наличие флуктуационных помех, действующих на системы синхронизации вместе с синхронизирующим сигналом, приводит к нарушениям нормальной работы. Если в отсутствие шумов можно добиться синфазной работы генераторов, то наличие помех вызывает флуктуационные колебания разности фаз. При малом уровне шума можно говорить о синхронности работы генераторов, т. е. о совпадении средних частот опорного и синхронизируемого генераторов. Большие шумы вызывают перескоки фазы на целое число периодов и синхронная работа ОГ и СГ невозможна. Более строгое, хотя и условное разграничение этих режимов будет дано ниже.

Из перечисленных методов синхронизации в дальнейшем будет рассмотрена работа синхронизируемого автогенератора и фазовой АПЧ при наличии помех, так как частотная АПЧ не обеспечивает синхронную работу генераторов в отсутствие шумов из-за наличия остаточной расстройки по частоте [29].

1. Синхронизируемый автогенератор. Можно показать [12,18,25], что если на контур автогенератора (см. рис. 1) подается гармонический синхронизирующий сигнал $E \sin \omega_c t$ вместе с относительно слабым флуктуационным шумом $\xi(t)$, то при определенных условиях колебания генератора можно приближенно представить в виде $A \cos(\omega_c t + \varphi)$. При этом статистические характеристики фазы φ определяются уравнением

$$\dot{\varphi} = \Delta_0 - \Delta \sin \varphi + \frac{\omega}{A_0} \xi(t) \cos(\omega_c t + \varphi), \tag{15}$$

где $\Delta_0 = \omega - \omega_c$ — начальная расстройка, $\Delta = \omega_c E / A_0$ — полоса синхронизации, A_0 — среднее значение амплитуды, ω — собственная частота колебательного контура.

Решение этого нелинейного стохастического уравнения и обсуждение результатов приведено в последующих двух параграфах.

2. Фазовая АПЧ. Рассмотрим кратко работу схемы фазовой АПЧ, блок-схема которой приведена на рис. 2. Гармонические колебания $u_0(t)$ опорного и $u_c(t)$ синхронизируемого генераторов

$$u_0(t) = A_1 \cos \Phi_1(t) = A_1 \cos[\omega_0 t + \theta_1(t)],$$

$$u_c(t) = A_2 \sin \Phi_2(t) = A_2 \sin[\omega_c t + \theta_2(t)]$$

воздействуют вместе с нормальным стационарным флуктуационным шумом

$$\xi(t) = A(t) \cos \Phi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$$

на фазовый детектор (ФД). На выходе ФД получается напряжение, пропорциональное разности фаз воздействующих колебаний. После фильтрации в фильтре низких частот (ФНЧ) это напряжение через посредство управляющего элемента (УЭ) изменяет частоту СГ, приводя ее к совпадению с частотой ОГ.

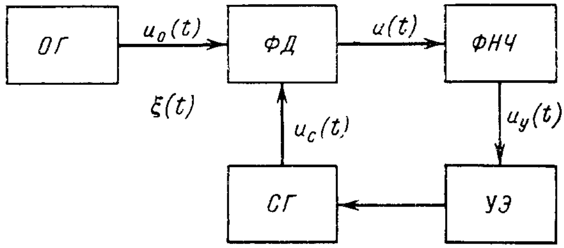

Рис. 2. Блок-схема фазовой АПЧ.

Если считать ФНЧ идеальным, т. е. его коэффициент передачи равен единице при низких частотах $(\omega_c - \omega_0)$ и нулю при высоких $(\omega_c + \omega_0)$, то для разности фаз $\varphi = \Phi_2 - \Phi_1$ можно получить следующее дифференциальное уравнение [20]:

$$\dot{\varphi} = \Delta_0 - \Delta \sin\varphi - \frac{\Delta}{A_1}(A_c \sin\varphi - A_s \cos\varphi) + \dot{\psi}. \qquad (16)$$

Здесь $\Delta_0 = \omega_{c0} - \omega_0$ — начальная расстройка генераторов по частоте, Δ — полоса синхронизации, зависящая от параметров схемы и амплитуд A_1 и A_2,

$$\dot{\psi} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1, \quad A_c = A(t)\cos(\theta - \theta_1), \quad A_s = A(t)\sin(\theta - \theta_1). \qquad (17)$$

Уравнение (16) аналогично уравнению (15).

Если в качестве ФНЧ используется интегрирующая цепочка RC, то работа фазовой АПЧ (рис. 2) описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением [21]:

$$\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + \alpha\Delta \sin\varphi = \alpha\Delta_0 + \zeta(t), \qquad (18)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{RC}, \quad \zeta(t) = \ddot{\psi} - \alpha\dot{\psi} + \frac{\alpha\Delta}{A_1}(A_s \cos\varphi - A_c \sin\varphi). \qquad (19)$$

Включение RC-фильтра приводит к повышению порядка уравнения, и интуитивно можно предполагать, что влияние шумов в такой системе сказывается меньше, чем в указанных выше системах первого порядка. Однако необходимо иметь в виду, что наличие фильтра вызывает уменьшение полосы захвата фазовой АПЧ, что не всегда приемлемо. Поэтому на практике стремятся подобрать такие фильтры, которые обеспечивают необходимую помехоустойчивость при заданной полосе захвата. К числу таких фильтров можно отнести RC-фильтр со скоростной коррекцией (пропорционально интегрирующий фильтр) [30], LCR-фильтр [31,32], а также нелинейные фильтры [33,34].

Ниже приведены решения уравнений (15), (16) и (18), причем рассмотрены раздельно два случая: когда воздействующий внешний флуктуационный шум является малым и большим.

§ 3. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РАБОТЫ УСТРОЙСТВ СИНХРОНИЗАЦИИ

При воздействии на систему синхронизации относительно малых шумов и при небольших начальных расстройках для анализа применим метод линеаризации.

Рассмотрим задачу вычисления среднего значения приращения фазы и дисперсии приращения на примере колебательного контура. Как будет показано, выводы при этом будут справедливы для захваченного автогенератора (15) и фазовой АПЧ с идеальным фильтром (16). Кроме того, полученные результаты дают непосредственно ответ на вопрос о преобразовании фазовых флуктуаций автоколебаний резонансными системами при наличии аддитивного флуктуационного шума [35].

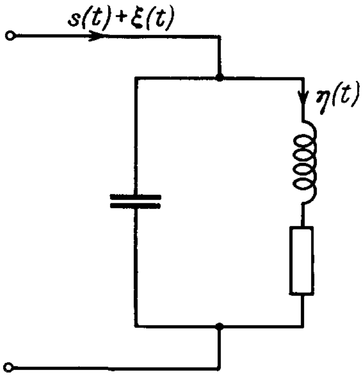

Рис. 3. Воздействие автоколебаний и шума на колебательный контур.

Пусть на колебательный контур LCR (рис. 3) воздействуют сигнал от автогенератора

$$s(t)=A(t)\cos[\omega t+\psi(t)]$$

и слабый аддитивный нормальный белый шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$\langle\xi(t)\xi(t+\tau)\rangle=\frac{N_0}{2}\delta(\tau), \qquad (20)$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

С учетом собственных флуктуаций автогенератора амплитуда $A(t)$ и фаза $\psi(t)$ будут случайными функциями времени, причем статистические характеристики фазы $\psi(t)$ определяются уравнением (11).

Согласно уравнению (11) функция корреляции для производной от фазы равна

$$K(\tau)=\langle\dot\psi(t)\,\dot\psi(t+\tau)\rangle=\frac{N\omega^2}{4A_0^2}\delta(\tau)\cos\omega\tau. \qquad (21)$$

Так как собственные флуктуации автогенератора обычно малы, в дальнейшем не будем учитывать амплитудные флуктуации автоколебаний, т. е. будем полагать $A(t)=A_0$, где A_0 — амплитуда автоколебаний, которая бы была в отсутствие собственного шума автогенератора.

Дифференциальное уравнение для тока в индуктивной ветви колебательного контура имеет вид

$$\ddot\eta+2\alpha\dot\eta+\omega_0^2\eta=\omega_0^2[s(t)+\xi(t)] \qquad \left(\alpha=\frac{R}{2L},\ \omega_0^2=\frac{1}{LC}\right). \qquad (22)$$

Ограничимся рассмотрением того практически интересного случая, когда контур обладает большой добротностью и расстройка между частотой автоколебаний ω и резонансной частотой контура ω_0 мала, т. е. $|\omega-\omega_0|\ll\omega_0$.

При сделанных предположениях решение уравнения (22) можно искать в виде квазигармонического колебания

$$\eta(t)=B(t)\cos[\omega t+\varphi(t)]. \qquad (23)$$

Для контура с большой добротностью функции $B(t)$ и $\varphi(t)$ будут медленно изменяющимися по сравнению с $\cos[\omega t+\varphi(t)]$. Поэтому с некоторым приближением можно положить

$$\dot\eta(t)=-\omega B(t)\sin[\omega t+\varphi(t)]. \qquad (24)$$

Из соотношений (23) и (24) получаем

$$B^2=\left(\eta^2+\frac{\dot\eta^2}{\omega^2}\right), \qquad \varphi=-\omega t-\operatorname{arctg}\frac{\dot\eta}{\omega\eta}.$$

Дифференцирование этих выражений дает

$$\dot{B}=\frac{\dot{\eta}}{\omega^2 B}(\ddot{\eta}+\omega^2\eta), \qquad \dot{\varphi}=-\frac{\eta}{\omega B^2}(\ddot{\eta}+\omega^2\eta). \tag{25}$$

Подставив $s(t)$ в уравнение (22) и введя начальную расстройку $\Delta_0=\omega-\omega_0$, получим

$$\ddot{\eta}+\omega^2\eta=-2\omega\Delta_0\eta-2\alpha\dot{\eta}+\omega_0^2\{A_0\cos(\omega t+\psi)+\xi(t)\}, \tag{26}$$

где принято $\omega^2-\omega_0^2=(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)=2\omega\Delta_0$.

Если подставить (26) в (25), выполнить тригонометрические преобразования и отбросить в правых частях получающихся уравнений члены, содержащие гармоники частоты 2ω, то получим следующие укороченные уравнения для амплитуды и фазы:

$$\left.\begin{aligned}\dot{B}&=-\alpha B-\frac{\omega A_0}{2}\sin(\varphi-\psi)-\omega\xi(t)\sin(\omega t+\varphi),\\ \dot{\varphi}&=\Delta_0-\frac{\omega A_0}{2B}\cos(\varphi-\psi)-\frac{\omega}{B}\xi(t)\cos(\omega t+\varphi).\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Из второго уравнения в отсутствие шума ($\xi(t)=0$) легко находим стационарное значение разности фаз, полагая $\dot{\varphi}=0$. Получаем

$$\varphi-\psi=\arccos\left(\frac{2B\Delta_0}{\omega A_0}\right). \tag{28}$$

В том частном случае, когда начальная расстройка отсутствует ($\Delta_0=0$), имеем $\varphi=\psi-\pi/2$. Следовательно, в отсутствие внешнего шума при нулевой начальной расстройке среднее значение фазы квазигармонического тока в контуре отличается от среднего значения фазы автоколебаний на $\pi/2$; остальные статистические характеристики их совпадают. При $\Delta_0\neq 0$ из-за реактивных свойств колебательного контура между фазами имеет место расхождение, не равное $\pi/2$.

Для отыскания статистических характеристик фазы $\dot{\varphi}$ перейдем во втором уравнении (27) от φ к новой переменной

$$\chi=\varphi-\psi+\frac{\pi}{2}. \tag{29}$$

Получим

$$\dot{\chi}=\Delta_0-\frac{\omega A_0}{2B}\sin\chi-\dot{\psi}-\frac{\omega}{B}\xi(t)\cos(\omega t+\varphi). \tag{30}$$

Хотя «амплитуда» $B(t)$ в этом уравнении является случайной функцией времени, мы заменим ее постоянной величиной B_0 — стационарной амплитудой колебаний тока в контуре, обусловленных только сигналом $s(t)$. В первом из уравнений (27), полагая $\xi(t)=0$, $\varphi-\psi=-\frac{\pi}{2}$, найдем

$$B(t)=B_0=\frac{\omega A_0}{2\alpha}\approx\frac{\omega_0 A_0}{2\alpha}. \tag{31}$$

Очевидно, что замена B на B_0 справедлива при условии, что дисперсия шумового тока σ_η^2 в индуктивной ветви колебательного контура много меньше B_0^2. Воспользовавшись известной формулой [36]

$$\sigma_\eta^2=\frac{\omega_0^2}{8\alpha}N_0,$$

получаем указанное вначале условие малости шума $\xi(t)$:

$$N_0 \ll \frac{2A_0^2}{\alpha}.$$

Применительно к тем случаям, для которых это неравенство не выполняется, полученные ниже результаты следует рассматривать как грубое приближение.

Подставив в уравнение (30) значение B_0 из (31), окончательно можем написать

$$\dot{\chi} = \Delta_0 - \alpha \sin \chi - \dot{\psi}(t) - \zeta_1(t), \tag{32}$$

где

$$\zeta_1(t) = \frac{2\alpha}{A_0} \xi(t) \cos(\omega t + \varphi)$$

— случайный процесс с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_1(\tau) = \frac{\alpha^2 N_0}{A_0^2} \delta(\tau) \cos \omega\tau. \tag{33}$$

Сопоставляя уравнение (32) с (15) и (16) убеждаемся, что уравнение (32) описывает процессы синхронизации в ламповом генераторе и простейшей схеме фазовой автоподстройки частоты при наличии флуктуационного шума. Разница состоит лишь в том, что в двух последних случаях в правой части уравнения (32) нужно заменить α на полосу синхронизации Δ. Аналитическое и экспериментальное исследование этого уравнения будет рассмотрено в следующих параграфах.

Ниже рассмотрен случай малых шумов, когда практически отсутствуют перескоки фазы и разность фаз χ оказывается достаточно малой, так что допустима линеаризация уравнения (32). Полагая $\sin \chi = \chi$, получаем линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{\chi} + \alpha\chi = \Delta_0 - \dot{\psi}(t) - \zeta_1(t). \tag{34}$$

Это уравнение показывает, что флуктуации фазы квазигармонического тока зависят как от фазы автоколебаний, так и от внешнего шума.

Из уравнения (34) находим среднее значение

$$\langle\chi\rangle = \frac{\Delta_0}{\alpha}, \quad \langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle + \frac{\Delta_0}{\alpha} - \frac{\pi}{2} = \frac{\Delta_0}{\alpha} - \frac{\pi}{2}. \tag{35}$$

Общее решение уравнения (34) имеет вид

$$\chi(t) = \chi_0 + e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x} [\Delta_0 - \dot{\psi}(x) - \zeta_1(x)]\, dx.$$

Найдем приращение $\Delta\chi$ за некоторое время $T > 0$:

$$\Delta\chi = \chi(t+T) - \chi(t) =$$

$$= e^{-\alpha t} \left\{ e^{-\alpha T} \int_0^{t+T} e^{\alpha x} [\Delta_0 - \dot{\psi}(x) - \zeta_1(x)]\, dx - \int_0^t e^{\alpha x} \left[\Delta_0 - \dot{\psi}(x) - \zeta_1(x) \right] dx. \right. \tag{36}$$

Среднее значение этого приращения равно

$$\langle\Delta\chi\rangle = \frac{\Delta_0}{\alpha} e^{-\alpha t}(1 - e^{-\alpha T}). \tag{37}$$

Отсюда видно, что среднее значение приращения величины χ в стационарном состоянии ($t \to \infty$) равно нулю, т. е. нет систематического расхождения фаз $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ во времени.

Вычислим теперь дисперсию приращения $\sigma_{\Delta\chi}^2$ за время T.

Согласно соотношению (36) можем написать

$$\sigma_{\Delta\chi}^2 = \langle \Delta\chi^2 \rangle - \langle \Delta\chi \rangle^2 = e^{-2\alpha T} \Big\langle \Big\{ e^{-\alpha t} \int_0^{t+T} e^{\alpha x} [\Delta_0 - \dot{\psi}(x) - \zeta_1(x)]\, dx - \int_0^{t} e^{\alpha x} [\Delta_0 - \dot{\psi}(x) - \zeta_1(x)]\, dx \Big\} \Big\{ e^{-\alpha T} \int_0^{t+T} e^{\alpha y} [\Delta_0 - \dot{\psi}(y) - \zeta_1(y)]\, dy - \int_0^{t} e^{\alpha y} [\Delta_0 - \dot{\psi}(y) - \zeta_1(y)]\, dy \Big\} \Big\rangle - \langle \Delta\chi \rangle^2.$$

При вычислениях следует учесть, что случайные процессы $\dot{\psi}(t_1)$ и $\zeta_1(t_2)$ взаимно независимы, их средние значения равны нулю, а функции автокорреляции даются соответственно формулами (21) и (33).

Опуская здесь промежуточные вычисления, приведем окончательный результат:

$$\sigma_{\Delta\chi}^2 = \frac{1}{2A_0^2} \left(N_0\alpha + \frac{\omega^2 N}{4\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha T}) [2 - e^{-2\alpha t} (1 - e^{-\alpha T})]. \tag{38}$$

Из формулы видно, что дисперсия $\sigma_{\Delta\chi}^2$ определяется как сумма двух слагаемых, первое из которых обусловлено воздействием внешнего шума и пропорционально интенсивности шума N_0 и полосе пропускания контура (на уровне 0,5) $\Delta f = \alpha/\pi$, а второе — флуктуациями фазы автоколебаний и пропорционально коэффициенту диффузии фазы $D = \omega^2 N/4A_0^2$ и обратно пропорционально полосе пропускания контура.

Применительно к стационарному состоянию ($t \to \infty$) формула (38) несколько упрощается:

$$\sigma_{\Delta\chi}^2 = \frac{1}{A_0^2} \left(N_0\alpha + \frac{\omega^2 N}{4\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha T}). \tag{39}$$

При малых временных интервалах ($\alpha T < 1$) оказывается справедливым диффузионный закон расхождения фаз:

$$\sigma_{\Delta\chi}^2 = \frac{1}{A_0^2} \left(N_0\alpha + \frac{\omega^2 N}{4\alpha} \right) \alpha T. \tag{40}$$

Для больших временных интервалов ($\alpha T \gg 1$) дисперсия разности фаз равна постоянной величине

$$\sigma_{\Delta\chi}^2 = \frac{1}{A_0^2} \left(N_0\alpha + \frac{\omega^2 N}{4\alpha} \right). \tag{41}$$

Интересно отметить, что формула (41) позволяет определить оптимальное значение коэффициента затухания контура α, при котором дисперсия имеет минимальное значение. Нетрудно убедиться, что

$$\sigma_{\Delta\chi\,\min}^2 = \frac{5}{4} \omega \frac{\sqrt{NN_0}}{A_0^2} \quad \text{при} \quad \alpha_0 = \omega \sqrt{\frac{N}{N_0}}. \tag{42}$$

Аналогичное соотношение в линейном приближении справедливо для оптимальной (с точки зрения помехоустойчивости) полосы синхронизации в «захваченном» автогенераторе или в простейшей схеме фазовой автоподстройки частоты. Кстати можно отметить, что с принципиальной стороны этот вопрос до настоящего времени оставался неясным.

Для системы синхронизации, описываемой уравнением (18), статистические характеристики можно вычислить аналогичным путем. Исключим из рассмотрения собственные фазовые флуктуации ($\dot{\psi} = 0$) и линеаризуем уравнение (18), положив $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = 1$. Получим

$$\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + \alpha\Delta\left(1 - \frac{A_c}{A_1}\right)\varphi = \alpha\Delta_0 - \frac{\alpha\Delta}{A_1}A_s.$$

Ввиду малости шумов в левой части этого уравнения можно пренебречь членом $A_c/A_1 \ll 1$. Тогда получим

$$\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + \alpha\Delta\varphi = \alpha\Delta_0 - \alpha\Delta\frac{A_s}{A_1}. \tag{43}$$

Пренебрежение лишь составляющей A_c имеет вполне определенный физический смысл. Дело в том, что косинусная составляющая приводит к амплитудным флуктуациям сигнала, которыми мы пренебрегли, а синусная составляющая A_s — к фазовым флуктуациям, на которые и реагирует фазовый детектор.

В правую часть уравнения (43) входит нормальная случайная функция

$$\eta(t) = \alpha\Delta_0 - \alpha\Delta\frac{A_s(t)}{A_1}$$

со средним значением $\langle\eta\rangle = \alpha\Delta_0$ и функцией корреляции

$$k_\eta(\tau) = \left(\frac{\alpha\Delta}{A_1}\right)^2 k_s(\tau).$$

Для стационарного состояния среднее значение разности фаз можно найти, усредняя правую и левую части уравнения (43):

$$\langle\varphi\rangle = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \tag{44}$$

что совпадает со средним значением разности фаз для систем первого порядка.

Вычисление дисперсии разности фаз σ_φ^2 в линеаризованной системе синхронизации второго порядка приводит к следующему результату:

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{\Delta}{a^2\beta}, \tag{45}$$

где $a = A_1/\sigma$ — отношение сигнал/шум на входе, $\beta = \pi\Delta f$ — параметр, характеризующий полосу пропускания избирательной системы, стоящей перед фазовым детектором.

При вычислениях было сделано предположение, что полоса пропускания ФНЧ меньше величины Δf. На практике такое предположение выполняется.

Из формулы (45) видно, что дисперсия σ_φ^2 не зависит от постоянной времени ФНЧ, если выполняется указанное выше предположение. С этой точки зрения может показаться, что система синхронизации второго порядка имеет одинаковую с системой первого порядка помехоустойчивость. Однако даже с помощью линейной теории можно показать, что в действительности это не так.

Если при помощи описанной выше методики вычислить среднее значение приращения фазы $\langle\Delta\varphi\rangle$ за некоторое время T, то оно, как и для системы первого порядка, окажется равным нулю. Дисперсия же приращения $\sigma_{\Delta\varphi}^2$ зависит от постоянной времени ФНЧ. Для практически интересного случая, когда $\alpha \ll \beta$, справедливо следующее приближенное равенство:

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 \approx \frac{\Delta}{2a^2\beta}\alpha T. \tag{46}$$

Видно, что большим постоянным времени ФНЧ соответствует меньшая дисперсия приращения разности фаз. Это свидетельствует о лучшей помехоустойчивости систем синхронизации с фильтрами нижних частот в том числе и с RC-фильтром.

§ 4. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

В том случае, когда система синхронизации работает при достаточно больших внешних шумах или на границе полосы синхронизации, линейная теория становится непригодной, так как она не позволяет получить даже качественную картину. Здесь нужно рассматривать задачу работы устройств синхронизации в нелинейной постановке и целесообразно воспользоваться аппаратом марковских процессов.

Известно [25,37], что если на какую-либо систему с постоянной времени τ_c воздействует стационарное случайное возмущение $\zeta(t)$ с малым временем корреляции $\tau_к \ll \tau_c$, то для исследования поведения такой системы можно применить аппарат марковских процессов и, в частности, уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова. Дифференциальному уравнению первого порядка

$$\dot{\varphi} = F[\varphi, \zeta(t)] \tag{47}$$

соответствует следующее уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова для одномерной плотности вероятности функции φ:

$$\frac{\partial w(\varphi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}[K_1(\varphi) w(\varphi, t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}[K_2(\varphi) w(\varphi, t)]. \tag{48}$$

Коэффициенты K_1 и K_2 вычисляются по формулам

$$K_1(\varphi) = \langle F[\varphi, \zeta(t)]\rangle,$$

$$K_2(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\langle F[\varphi, \zeta(t)] F[\varphi, \zeta(t+\tau)]\rangle - K_1^2(\varphi)\}\, d\tau. \tag{49}$$

Если интересоваться стационарным распределением, то в уравнении (48) правую часть нужно приравнять нулю:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\varphi^2}[K_2(\varphi) w(\varphi)] - \frac{d}{d\varphi}[K_1(\varphi) w(\varphi)] = 0. \tag{50}$$

Результат решения уравнения (50) для синхронизируемого автогенератора (15) при наличии внешнего флуктуационного шума $\xi(t)$ с функцией корреляции (20) имеет вид [18,12]

$$w(\varphi) = \frac{1}{M}\exp(D_0\varphi + D\cos\varphi)\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \exp(-D_0\gamma - D\cos\gamma)\, d\gamma. \tag{51}$$

Здесь M — нормировочный множитель:

$$M = 4\pi^2 e^{-\pi D_0} \, I_{iD_0}(D)\,|^2, \tag{52}$$

$I_{i\nu}(z)$ — функция Бесселя мнимого индекса и мнимого аргумента [38], параметр D_0 характеризует величину начальной расстройки, а D интенсивность воздействующих флуктуаций:

$$D_0 = \frac{8A_0^2\Delta_0}{N_0\omega^2}, \quad D = \frac{8A_0^2\Delta}{N_0\omega^2}. \tag{53}$$

Из формулы (51) видно, что плотность вероятности удовлетворяет естественному условию периодичности $w(\varphi + 2\pi) = w(\varphi)$ и условию нормировки на каждом периоде.

Интеграл, входящий в формулу (51), не выражается через известные функции. Однако в частном случае при нулевой начальной расстройке ($D_0 = 0$) для $w(\varphi)$ получается простое выражение

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi I_0(D)} \exp(D \cos \varphi). \tag{54}$$

На рис. 4 построены графики плотностей вероятности для фазы синхронизируемого автогенератора при наличии флуктуационных шумов. Видно, что распределение имеет симметричную форму с нулевым средним значением. При больших шумах (малое D) распределение стремится к равномерному на интервале $(-\pi, \pi)$. В другом крайнем случае, когда шум пренебрежимо мал, получается дельтообразное распределение.

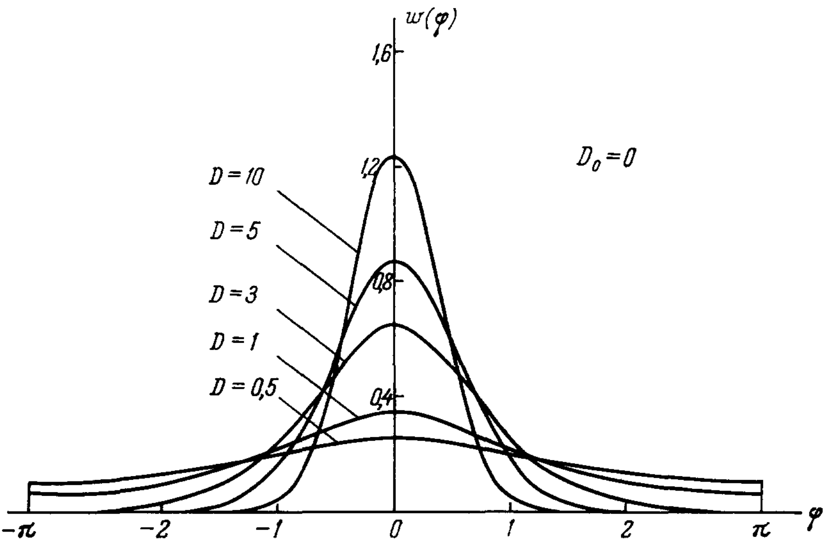

Рис. 4. Плотности вероятности разности фаз для системы синхронизации первого порядка при $\Delta_0 = 0$.

Наличие начальной расстройки ($D_0 \neq 0$) приводит к асимметрии кривой распределения. Это видно из рис. 5, где изображены плотности вероятности $w(\varphi)$, соответствующие значениям $D = 1$; 5 и нескольким значениям параметра D_0[12].

Если пренебречь собственными флуктуациями генераторов ($\dot{\psi} = 0$) и внешние флуктуации $\xi(t)$ рассматривать как достаточно широкополосный квазигармонический шум с функцией корреляции

$$k(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \tag{55}$$

то для системы фазовой АПЧ, описываемой уравнением (16), остаются справедливыми приведенные выше результаты, только теперь величины D_0 и D определяются соотношениями

$$D_0 = a^2 \frac{\Delta_0 \beta}{\Delta^2}, \quad D = a^2 \frac{\beta}{\Delta}, \tag{56}$$

где $a = A_1/\sigma$ — отношение сигнал/шум.

Для фазовой АПЧ, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка (18), можно записать соответствующее уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова [25]. Если внешний шум $\xi(t)$ считать квазигармоническим с функцией корреляции (55), то можно получить точное решение только в отсутствие начальной расстройки ($\Delta_0 = 0$). Это решение имеет вид

$$w_2(\varphi,\ \dot{\varphi})=\frac{a}{\Delta}\sqrt{\frac{\beta}{2\pi\alpha}}\,\frac{1}{2\pi I_0\left(\alpha^2\frac{\beta}{\Delta}\right)}\exp\left(-\frac{a^2\beta}{2\Delta^2}\dot{\varphi}^2+\frac{a^2\beta}{\Delta}\cos\varphi\right), \qquad (57)$$

где $a = A_1/\sigma$ — отношение амплитуды сигнала к среднеквадратичному значению шума, $I_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента.

Из формулы (57) находим одномерную плотность вероятности для разности фаз

$$w(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} w_2(\dot{\varphi},\ \varphi)\,d\dot{\varphi}=\frac{1}{2\pi I_0\left(\frac{a^2\beta}{\Delta}\right)}\times\exp\left(\frac{a^2\beta}{\Delta}\cos\varphi\right) \qquad (58)$$

и одномерную плотность вероятности для разности частот

$$w(\dot{\varphi})=\int_{-\pi}^{\pi} w_2(\varphi,\ \dot{\varphi})\,d\varphi=\frac{a}{\Delta}\sqrt{\frac{\beta}{2\pi\alpha}}\times\exp\left(-\frac{a^2\beta}{2\Delta^2\alpha}\dot{\varphi}^2\right). \qquad (59)$$

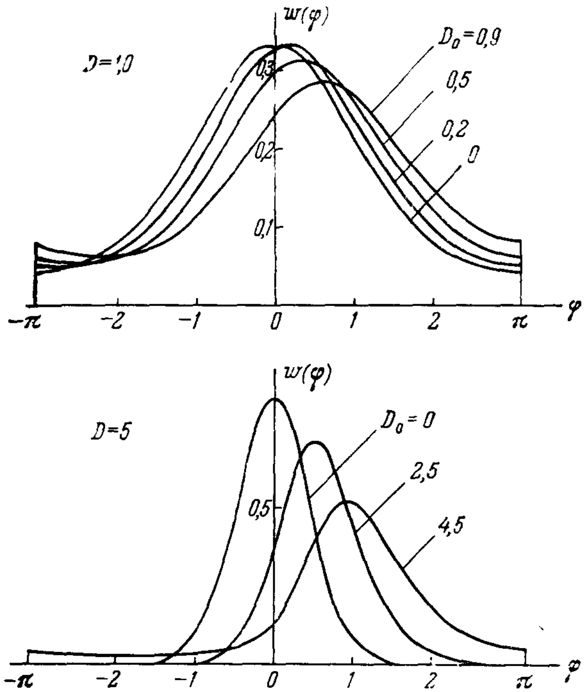

Рис. 5. Плотности вероятности разности фаз при $\Delta_0 \neq 0$.

Когда $\Delta_0 \neq 0$, не удается получить точное решение, и были предложены приближенные способы [21,34]. Реализация одного из них [21] дает следующие приближенные формулы для одномерных плотностей вероятностей:

$$w(\varphi)=\frac{1}{4\pi^2}e^{\pi D_0}\,|I_{iD_0}(D)|^{-2}\exp(D_0\varphi+D\cos\varphi)\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi}\exp(-D_0\gamma-D\cos\gamma)\,d\gamma, \qquad (60)$$

$$w(\dot{\varphi})=\frac{a}{\alpha\Delta}\left[\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2\pi}}-\dot{\varphi}\sqrt{\frac{2\pi\beta}{\alpha}}\,\frac{1-\exp(2\pi D_0)}{4\pi^2\exp(\pi D_0)}\times|I_{iD_0}(D)|^{-2}\right]\exp\left(-\frac{a\beta}{2\alpha\Delta^2}\dot{\varphi}^2\right), \qquad (61)$$

где

$$D_0=a^2\frac{\Delta_0\beta}{\Delta^2}, \quad D=a^2\frac{\beta}{\Delta}. \qquad (62)$$

Формула (60) совпадает с соответствующей формулой для системы фазовой АПЧ первого порядка (51). Поэтому графики, приведенные на рис. 5, можно рассматривать как построенные по формуле (60).

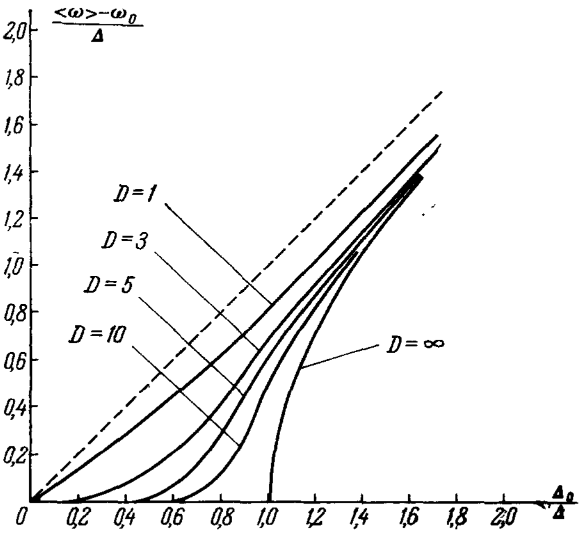

Рис. 6. Зависимость среднего смещения частоты от начальной расстройки.

Можно показать [18,20], что среднее значение производной от фазы $\langle\dot{\varphi}\rangle$ для систем, описываемых уравнениями (15) и (16), определяется формулой

$$\langle\dot{\varphi}\rangle=\langle\omega\rangle-\omega_0=\Delta_0\frac{\operatorname{sh}\pi D_0}{\pi D_0}\,|\,I_{iD_0}(D)\,|^{-2}. \tag{63}$$

Результаты вычислений, выполненных по этой формуле И. Г. Акопяном [12], представлены на рис. 6. Из анализа формулы (63) и графиков видно, что при очень больших шумах $(D\to 0)$ влияние синхронизирующего сигнала почти не сказывается. При этом средняя частота СГ оказывается близкой к собственной частоте генератора. В другом крайнем случае, когда шум мал по сравнению с сигналом, устанавливается нормальный синхронный режим, конечно, если начальная расстройка меньше полосы синхронизации (удержания).

Если выполняется неравенство $\Delta_0 \ll \Delta$, то для определения $\langle\dot{\varphi}\rangle$ можно воспользоваться асимптотическим выражением функции Бесселя в (63) и получить более простую формулу

$$\langle\dot{\varphi}\rangle=2\Delta\operatorname{sh}\left(\pi\frac{\Delta_0}{\Delta}D\right)e^{-2D}. \tag{64}$$

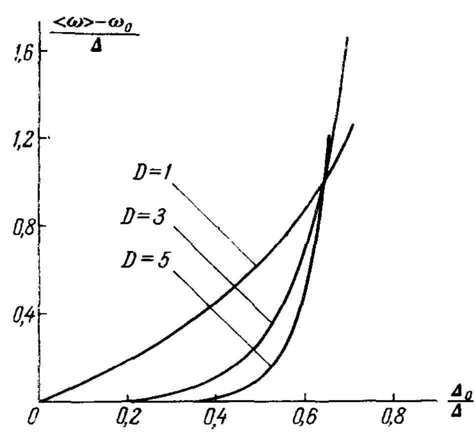

Рис. 7. Графики зависимости среднего смещения частоты от начальной расстройки при малых Δ_0.

На рис. 7 приведены графики, построенные в соответствии с формулой (64). Видно, что при нулевой начальной расстройке среднее значение разности частот генераторов равно нулю. Однако это еще не значит, что при любом уровне шума в системе возможен синхронный режим.

Для фазовой АПЧ второго порядка на основании формулы (61) получаем такое же выражение среднего значения разности частот, как и (63). Однако в данном случае формулу (63) следует рассматривать как приближенную. В таком приближении разница между системами первого и второго порядков состоит в значениях дисперсий разности частот $\sigma^2_{\dot{\varphi}}$.

Для системы первого порядка при нулевой начальной расстройке и $\dot{\psi} = 0$ из уравнения (16) можно получить следующую формулу:

$$\sigma^2_{\dot{\varphi}} = \frac{1}{\beta}\left(\Delta \frac{\sigma}{A_1}\right)^2. \tag{65}$$

Дисперсию разности частот для системы второго порядка при нулевой начальной расстройке находим из выражения (59):

$$\sigma^2_{\dot{\varphi}} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\Delta \frac{\sigma}{A_1}\right)^2. \tag{66}$$

Видно, что система синхронизации с RC-фильтром нижних частот оказывается более помехоустойчивой по сравнению с захваченным автогенератором и фазовой АПЧ с идеальным низкочастотным фильтром. При этом чем больше постоянная времени системы, тем меньше дисперсия $\sigma^2_{\dot{\varphi}}$. Этот результат находится в прямой зависимости с выводом из линейной теории: с увеличением постоянной времени ФНЧ набег дисперсии фазы за некоторое время уменьшается.

§ 5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Из формулы (63) видно, что в стационарном состоянии при наличии начальной расстройки воздействующий шум приводит к смещению среднего значения частоты синхронизируемого генератора относительно среднего значения частоты синхронизирующего сигнала. Величина появляющейся при этом остаточной расстройки по частоте определяется уровнем шума, величиной начальной расстройки и параметрами системы.

Физическое пояснение появлению расстройки по частоте можно дать на примере ФАП путем рассмотрения выбросов случайных функций [39].

В замкнутой системе фазовой АПЧ устойчивые состояния равновесия соответствуют значениям

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Постоянный сдвиг фаз на $\pi/2$ между фазами опорного и синхронизируемого генераторов обусловлен фазовым детектором. Отклонения разности фаз от какого-либо значения φ_k допустимы лишь в пределах $\pm\pi/2$. В противном случае в системе либо невозможен режим синхронизации, либо работа будет происходить в окрестности другого устойчивого состояния, причем при переходе в него фаза синхронизируемого генератора получит приращение на целое число периодов ($\pm 2k\pi$).

Если за счет воздействия шумов флуктуации разности фаз $\varphi(t)$ превышают уровень $\Phi = \pm\pi/2$, то в момент перехода φ через уровень Φ в системе возникает движение под действием случайной внешней силы. При $\Delta_0 \neq 0$ за счет начальной расстройки движение будет в среднем однонаправленным со случайными колебаниями, определяемыми шумом.

По истечении некоторого времени, которое определяется соотношением амплитуды и длительности выброса $\varphi(t)$ над уровнем Φ с временем установления системы, рабочая точка вновь входит в область устойчивого состояния и после окончания переходного процесса устанавливается стационарное значение φ.

За время длительности выброса фаза СГ получает приращение на 2π, 4π, 6π и т. д. Это явление можно назвать перескоком фазы, хотя следует иметь в виду, что каждый такой перескок осуществляется не мгновенно, а за конечный интервал времени.

При нулевой начальной расстройке ($\Delta_0 = 0$) в силу симметрии закона распределения $w(\varphi)$ (рис. 4) вероятность превышения уровней $\Phi = \pi/2$ и $\Phi = -\pi/2$ одинакова. Поэтому число перескоков фазы в обе стороны также одинаково и, следовательно, $\langle\dot{\varphi}\rangle = 0$. Это и объясняет отсутствие среднего расхождения частот ОГ и СГ, хотя при $\Delta_0 = 0$ режим нельзя считать синхронным.

Строго говоря, даже при очень малых случайных возмущениях имеется конечная вероятность перескоков фазы. Однако для практики удобно считать, что если вероятность перескоков не превышает некоторого допустимого значения, то в системе имеет место синхронный режим. Это значит, что слежение за интересующей нас величиной практически происходит без ошибок по частоте. Если же вероятность перескоков превышает предельно допустимое значение, то режим работы системы синхронизации следует считать асинхронным. Возможные количественные критерии перехода от одного режима к другому приведены в работе [22].

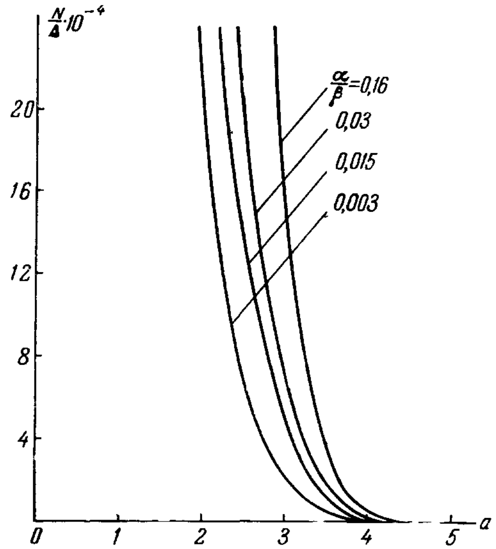

Рис. 8. Зависимость числа перескоков фазы от отношения сигнал/шум при расстройках, близких к нулевым.

Наличие начальной расстройки приводит к асимметрии закона распределения $w(\varphi)$ (рис. 5). Вероятность превышения флуктуации $\varphi(t)$ уровня $\Phi = \pi/2$ не равна вероятности превышения уровня $\Phi = -\pi/2$. Следовательно, число перескоков фазы в обе стороны будет неодинаково. Разность числа перескоков в обе стороны определяет остаточную расстройку по частоте, причем знак среднего смещения частоты СГ совпадает со знаком начальной расстройки.

Среднее число перескоков фазы в единицу времени можно вычислить, зная среднее число выбросов флуктуаций $\varphi(t)$, превышающих уровень Φ. Среднее число выбросов на уровне Φ в единицу времени определяется формулой [39]

$$N(\Phi) = \int_0^\infty \dot{\varphi} w_2(\Phi, \dot{\varphi})\, d\dot{\varphi}. \tag{67}$$

Будем рассматривать случай, когда выбросы флуктуаций $\varphi(t)$ относительно редки, т. е. когда средний интервал $\bar{\theta}$ между выбросами, превышающими уровень Φ, много больше средней длительности τ выбросов $\bar{\theta} \gg \bar{\tau}$.

Именно этот случай представляет наибольший интерес, так как противоположный случай соответствует очень большим шумам, когда работа системы синхронизации практически невозможна.

Найдем среднее число выбросов функции $\varphi(t)$, превышающих уровень $\Phi = \pi/2$ при нулевой начальной расстройке. Для этого в формулу (67) подставим выражение $w_2(\pi/2, \dot{\varphi})$ из формулы (57). После несложных преобразований получим

$$N\left(\frac{\pi}{2}\right)=N\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\Delta}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi\beta}}\frac{1}{2\pi I_0\left(\frac{a^2\beta}{\Delta}\right)}. \tag{68}$$

Заметим, что не каждый такой выброс влечет за собой перескок фазы. При малой длительности выбросов рабочая точка может вернуться в ту же область устойчивого состояния, из которой вывели ее флуктуации $\varphi(t)$. Для нулевой начальной расстройки вероятность перескоков фазы за счет выбросов $\varphi(t)$, превышающих уровень Φ, можно положить равной 0,5. Такое предположение согласуется с физической картиной воздействия шумов на захваченный автогенератор, приведенной в работе [25].

Учитывая сказанное, для числа N перескоков фазы в единицу времени, отнесенного к полосе удержания, получим

$$\frac{N}{\Delta}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi\beta}}\frac{1}{4\pi I_0\left(\frac{a^2\beta}{\Delta}\right)}. \tag{69}$$

По формуле (69) построены графики зависимости относительного числа перескоков фазы от отношения сигнал/шум (рис. 8).

Видно, что число перескоков фазы существенно зависит от постоянной времени фильтра, причем с ростом $T = RC = 1/\alpha$ число N уменьшается. Это объясняется тем, что с увеличением постоянной времени фильтра флуктуации $\varphi(t)$ становятся более медленными, число выбросов, превышающих уровень Φ, уменьшается, и, следовательно, уменьшается величина N. Формула (69) указывает на сравнительно плохую эффективность RC-фильтра. Поэтому следует изыскивать другие типы фильтров, которые бы обеспечили лучшую помехоустойчивость систем синхронизации при больших шумах. Интересным с этой точки зрения является нелинейный фильтр [30, 34], а также схема с интегратором.

Когда начальная расстройка не равна нулю, число перескоков фазы в разные стороны неодинаково. Вычисления по формуле (67) дают для относительного числа перескоков фазы в разные стороны на уровне Φ формулы

$$\frac{N_1}{\Delta}=\frac{C}{a}\left[\exp\left(\frac{3}{2}\pi D_0\right)\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi\beta}}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{\pi/2}^{3/2\pi}\exp(-D_0\gamma-D\cos\gamma)\,d\gamma+\frac{\Delta}{2a\beta}\operatorname{sh}(\pi D_0)\right],$$

$$\frac{N_2}{\Delta}=\frac{C}{a}\left[\exp\left(\frac{\pi}{2}D_0\right)\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi\beta}}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\pi/2}^{3/2\pi}\exp(-D_0\gamma-D\cos\gamma)\,d\gamma-\frac{\Delta}{2a\beta}\operatorname{sh}(\pi D_0)\right],$$

где $C={}^1/_8\pi^2\,|\,I_{iD_0}(D)\,|^2$.

Разность

$$\frac{N_1-N_2}{\Delta}=\frac{C}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi\beta}}\times$$

$$\times\exp\left(\frac{\pi}{2}D_0\right)\left[e^{\pi D_0}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}e^{-(D_0\gamma+D\cos\gamma)}\,d\gamma-\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}e^{-(D_0\gamma+D\cos\gamma)}\,d\gamma\right] \tag{70}$$

дает представление о среднем смещении частоты синхронизируемого генератора за счет действия шумов.

На рис. 9 построены графики зависимости относительного числа перескоков фазы в разные стороны от отношения сигнал/шум. Заштрихованная область соответствует разности $(N_1 - N_2)/\Delta$. Видно, что с уменьшением уровня воздействующего шума уменьшается не только число вероятных перескоков, но и разность $N_1 - N_2$, т. е. величина остаточной расстройки по частоте.

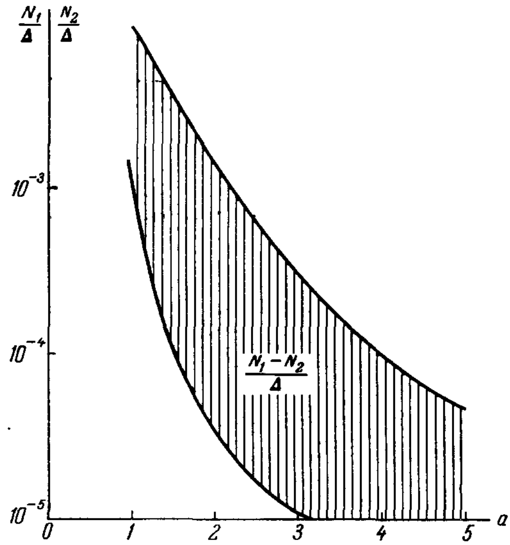

Рис. 9. Число перескоков фазы в разные стороны при $\Delta_0 \neq 0$.

Анализ зависимостей (69, 70) позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, при наличии начальной расстройки число перескоков фазы в сторону, соответствующую знаку Δ_0, всегда больше числа перескоков в одну сторону при $\Delta_0=0$, если все остальные параметры системы и отношение сигнал/шум остаются одинаковыми.

Во-вторых, с увеличением начальной расстройки уменьшается допустимое значение отношения сигнал/шум, при котором начинают проявляться перескоки фазы. Это значит, что при расстройках, близких к границе синхронизации, даже при малых шумах возможны перескоки фазы.

Следовательно, режим работы устройств синхронизации при расстройках Δ_0, близких к нулевым, является максимально стабильным синхронным режимом, дающим к тому же минимальную фазовую ошибку.

§ 6. МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ШУМОВ НА ТОЧНОСТЬ РАБОТЫ УСТРОЙСТВ СИНХРОНИЗАЦИИ

Правильное понимание результатов исследования помехоустойчивости возможно лишь при отчетливом представлении механизма воздействия помех. Составить такое представление помогают всесторонние экспериментальные исследования. Кроме того, опыт позволяет проверить правильность теоретических результатов и проанализировать вопросы, не поддающиеся теоретическому рассмотрению.

Особенностью экспериментальных исследований воздействия шумов на устройства синхронизации является то, что приходится иметь дело с такой «неэнергетической» характеристикой сигналов, как фаза. Это обстоятельство вынуждает искать косвенные методы выделения фазы (или разности фаз).

Наиболее удачным является способ, предложенный в работе [12]. Сущность его можно уяснить из рассмотрения рис. 10, где изображена функциональная схема фазовой АПЧ с дополнительными элементами, необходимыми для выделения фазы.

Из колебаний опорного генератора при помощи триггера (Тр) формируется напряжение прямоугольной формы с тем же периодом повторения, что и период колебаний ОГ. Передним фронтом положительных импульсов запускается генератор пилообразного напряжения (ГП). При этом оказывается, что фаза пилообразного напряжения жестко связана с фазой колебаний ОГ. Это напряжение подается на вход Y вертикального усилителя осциллографа.

Колебания синхронизируемого генератора также преобразуются в прямоугольную последовательность. После дифференцирования (ДЦ)

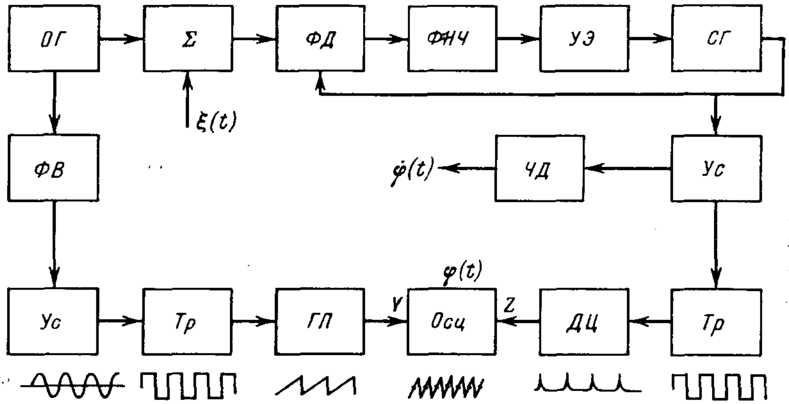

Рис. 10. Блок-схема типовой экспериментальной установки.

очень узкие импульсы, соответствующие передним фронтам положительных импульсов, поступают на вход Z осциллографа. В результате модуляции

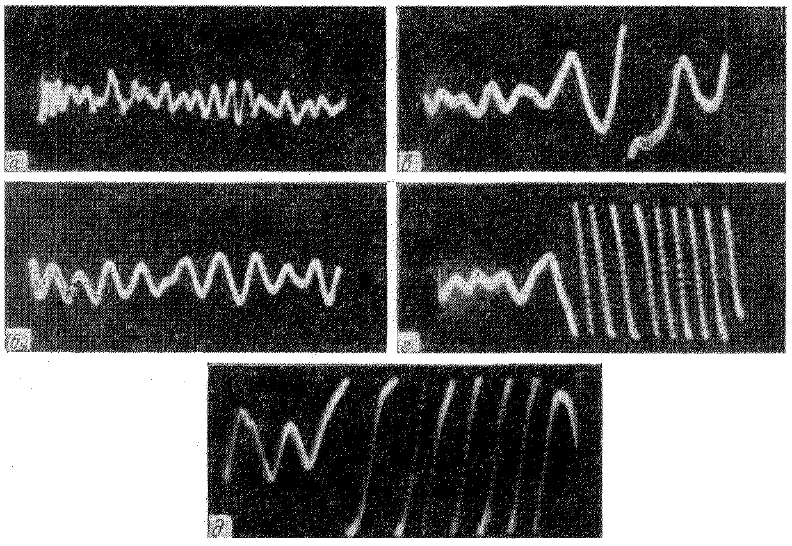

Рис. 11. Осциллограммы фазы в системе синхронизации при действии флуктуационных помех.

по яркости на изображении пилообразного напряжения на экране осциллографа возникают ярко светящиеся точки. Если разность фаз между колебаниями ОГ и СГ равна нулю, то точки располагаются в самом начале пилы. При наличии сдвига фаз между колебаниями яркостные отметки располагаются на линейном участке изображения пилообразного напряжения. Величину сдвига фаз можно измерить, учитывая, что весь размах пилы соответствует 2π.

Уменьшая скорость развертки луча осциллографа по горизонтали, можно добиться такого положения, что изображение пилообразного напряжения сольется в сплошной растр, на фоне которого будет видна линия, образованная отдельными яркостными отметками. Положение линии определяется разностью фаз колебаний ОГ и СГ. Для компенсации набега фазы в цепях схемы, а также для первоначального расположения линии фазы в центре растра в одну из ветвей управления лучом осциллографа включается фазовращатель. Регулировкой яркости можно убрать изображение растра, и на экране будет видна одна линия положения фазы.

Если на схему фазовой АПЧ вместе с сигналом действует шум $\xi(t)$, то на экране осциллографа наблюдаются флуктуации фазы. Большие шумы вызывают перескоки фазы на целое число периодов. На экране каждый перескок фазы регистрируется в виде ухода изображающей точки за пределы растра и ее появления с другой стороны.

На рис. 11 для примера приведены осциллограммы фазы колебаний СГ в системе фазовой АПЧ с RC-фильтром. Осциллограммы *а* и *б* соответствуют флуктуациям фазы при действии нормального внешнего шума,

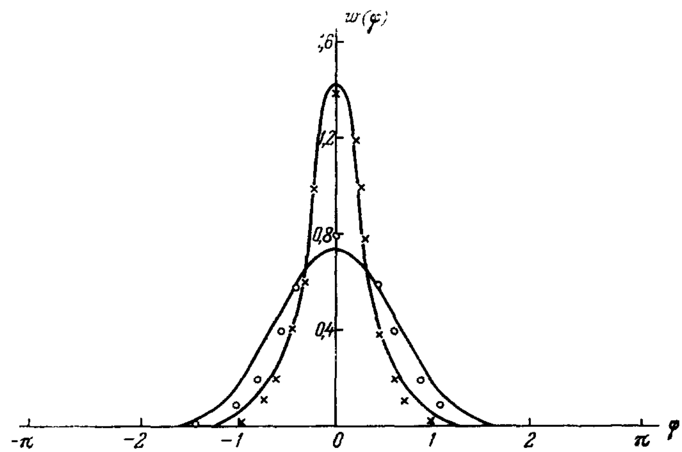

Рис. 12. Экспериментально снятые плотности вероятности разности фаз при $\Delta_0 \approx 0$.

причем осциллограмме *б* соответствует большая постоянная времени RC-фильтра (скорость развертки при этом была одинаковой). На фотографии *в* виден одиночный перескок фазы на 2π. Наличие большой начальной расстройки приводит к сериям перескоков фазы в одну сторону, что видно на фотографиях *г* и *д*, сделанных для расстроек разного знака.

Описанная методика, кроме большой наглядности, дает возможность экспериментально снимать одномерные плотности вероятности (например, фотометрическим способом), производить счет числа перескоков фазы, а при соответствующих доработках исследовать нестационарные процессы в системах синхронизации. Аналогичным путем можно проводить исследование воздействия на устройства синхронизации модулированных сигналов, гармонических и других помех.

Для экспериментального получения статистических характеристик производной от фазы достаточно к синхронизируемому генератору подключить частотный дискриминатор (ЧД).

Измерение полос захвата и удержания, а также точное определение среднего значения частоты СГ при действии помех целесообразно проводить при помощи электронных частотомеров, работающих на принципе счета числа «нулей».

На рис. 12 приведены экспериментально снятые плотности вероятности $w(\varphi)$ для системы фазовой АПЧ второго порядка. Точки, нанесенные на рисунке, соответствуют теоретическому ходу кривых. Видно, что совпадение теоретических и экспериментальных результатов вполне удовлетворительное.

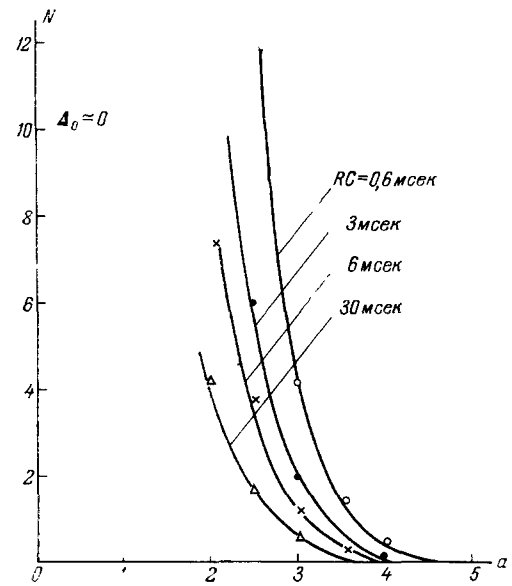

Рис. 13. Экспериментальная зависимость числа перескоков фазы от отношения сигнал/шум для нескольких постоянных времени ФНЧ.

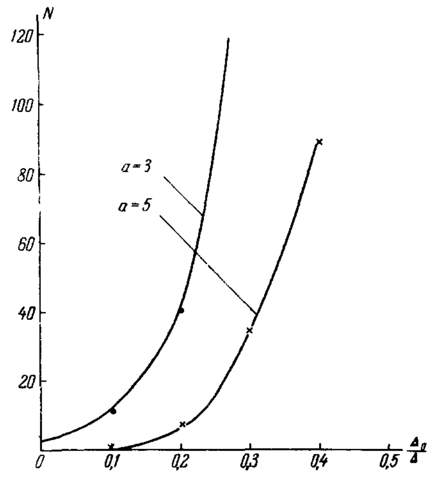

Рис. 14. Зависимость числа перескоков фазы от начальной расстройки, полученная экспериментальным путем.

Экспериментально снятая зависимость числа перескоков фазы в одну сторону от отношения сигнал/шум для нескольких постоянных времени RC-фильтра приведена на рис. 13. Начальная расстройка при этом была близка к нулевой. Качественное согласие экспериментальной зависимости $N(a)$ с теоретической (рис. 8) также свидетельствует о целесообразности описанной методики экспериментальных исследований.

При фиксированном уровне шума (a = const) число перескоков фазы зависит от величины начальной расстройки, что видно из рис. 14.

§ 7. ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ НА РАБОТУ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

Рассмотрим качественно влияние собственных флуктуаций на работу релаксационных генераторов, широко применяемых в импульсных радиолокационных станциях, осциллографах и других устройствах. В качестве примера возьмем симметричный мультивибратор (рис. 15).

В отсутствие флуктуаций работа мультивибратора характеризуется тем, что лампы $Л_1$ и $Л_2$ поочередно открываются и закрываются на одинаковое фиксированное время $T/2$, определяемое параметрами схемы. При этом на выходе мультивибратора получатся разрывные колебания, представляющие собой периодическую последовательность почти прямоугольных импульсов с периодом следования T. Спектр колебаний будет дискретным.

Если учесть собственные флуктуации элементов схемы (в частности, дробовой шум ламп), то отпирание и запирание ламп будут происходить не в точно фиксированные моменты времени: эти моменты времени будут испытывать случайное «дрожание». В результате этого длительность импульса, вырабатываемого мультивибратором, и период следования импульсов будут подвержены флуктуациям [43, 44].

Характерная особенность этих флуктуаций состоит в том, что они накапливаются [45]. Если, например, из-за собственных флуктуаций произошло «преждевременное» отпирание лампы $Л_1$, то это не повлечет за собой обязательно также преждевременного ее закрытия; момент ее закрытия будет случайным, статистически не связанным с моментом отпирания. Поэтому дисперсия σ_N^2 момента появления N-го импульса, как дисперсия суммы N независимых случайных величин, возрастает пропорционально N:

$$\sigma_N^2 = N\sigma_1^2.$$

Иначе говоря, здесь наблюдается эффект, аналогичный нарастанию дисперсии фазы со временем в автоколебательных системах гармонических колебаний. В результате этого автоколебания мультивибратора становятся непериодическими и спектр колебаний будет сплошным [46].

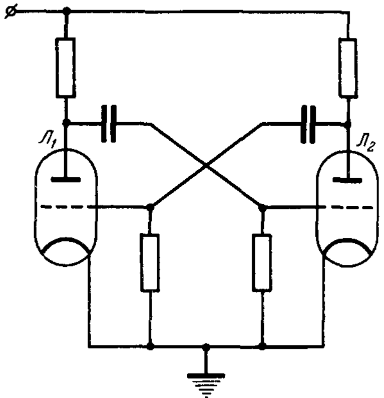

Рис. 15. Схема симметричного мультивибратора.

Если понимать под σ_1^2 дисперсию длительности одного импульса, то количественные оценки показывают [43], что относительная величина $2\sigma_1/T$ имеет примерно порядок 10^{-5}.

§ 8. О ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ МЕТОДОВ СИНХРОНИЗАЦИИ

Необходимость применения синхронизации радиоустройств при помощи импульсных процессов возникает в радиосвязи, в радиотелеметрии и других областях. В простейшем варианте назначение и работа радиолинии импульсной синхронизации состоят в следующем.

Пусть от какого-либо устройства передаются, кроме информационных импульсных сигналов (несущих полезную информацию), также один или несколько импульсов синхронизации. Предполагается, что импульсы синхронизации по времени предшествуют информационным импульсам и жестко связаны с последними. Импульсы синхронизации служат для «подготовки» приемника информации к приему только информационных импульсов. Они могут приниматься одним и тем же приемником или же специальным приемником синхронизации. Если исходить из требования повышения помехоустойчивости, то последний вариант является более предпочтительным.

Наличие шумов приводит к тому, что та связь во времени, которая существовала между информационными импульсами и импульсами синхронизации на передающей стороне, оказывается нарушенной после приема. Любое такое рассогласование всегда является нежелательным.

Не касаясь здесь подробного рассмотрения различных технических методов импульсной синхронизации и соответствующих систем, рассмотрим один простой конкретный пример, который позволит уяснить сущность задачи.

Пусть сигналом синхронизации $s_1(t)$ является видеоимпульс прямоугольной формы с известной амплитудой A и длительностью τ_u. Он принимается на фоне белого шума $\xi_1(t)$ (со спектральной интенсивностью N_0) специальным приемником, который в отношении помехоустойчивости является оптимальным [40, 41]. Импульс синхронизации с выхода этого приемника воздействует на электронное реле, которое через специальное устройство должно «открывать» информационный приемник только на тот интервал времени, когда должны появиться информационные импульсы

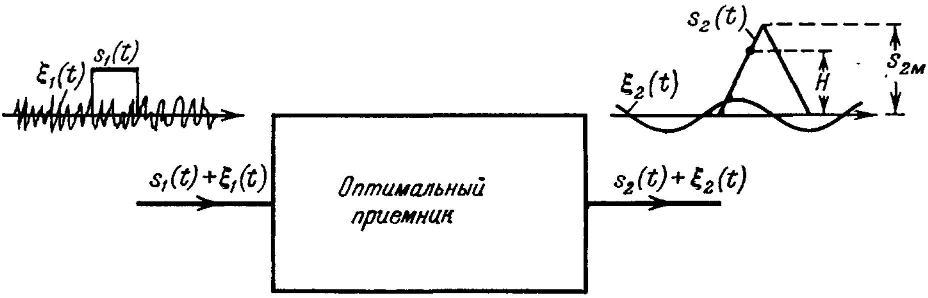

Рис. 16. Принцип работы оптимального приемника.

Под электронным реле здесь понимается устройство, которое срабатывает каждый раз, когда воздействующее на него напряжение превышает некоторое пороговое значение H.

Как известно [42], в рассматриваемом случае оптимальный приемник синхронизации представляет собой линейный фильтр, согласованный с сигналом. Сигнал $s_2(t)$ на выходе согласованного фильтра по форме совпадает с функцией автокорреляции входного сигнала, и функция корреляции выходного нормального шума $\xi_2(t)$ имеет вид функции автокорреляции входного сигнала.

Максимальное пиковое значение выходного импульса $s_2(t)$ равно

$$s_{2m} = kE, \qquad E = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t)\,dt = A^2\tau_u, \tag{71}$$

где E — «энергия» сигнала, k — некоторый коэффициент усиления.

Дисперсия нормального шума $\xi_2(t)$ на выходе согласованного фильтра определяется формулой

$$\sigma_2^2 = k^2\frac{N_0E}{2}. \tag{72}$$

Следовательно, отношение пикового значения сигнала к среднеквадратичному значению шума равно

$$\frac{s_{2m}}{\sigma_2} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}. \tag{73}$$

На рис. 16 изображены входной сигнал синхронизации $s_1(t)$ и входной белый шум $\xi_1(t)$, а также сигнал $s_2(t)$ и шум $\xi_2(t)$ на выходе приемника синхронизации.

Если не учитывать искажения сигнала при распространении и из-за различных технических нестабильностей аппаратуры, то в отсутствие шума при заданной энергии сигнала E всегда можно выбрать порог срабатывания реле

$$H < s_{2m} = kE, \tag{74}$$

который точно («жестко») определит момент срабатывания реле.

При наличии шума такая жесткая фиксация момента срабатывания реле оказывается практически невозможной.

В зависимости от отношения порогового напряжения H к уровню шума σ_2 следует различать два случая:

1. Если уровень помех мал по сравнению с пороговым напряжением ($\sigma_2 \ll H$), то можно не учитывать маловероятные ложные срабатывания реле. Шум будет вызывать «дрожание» момента срабатывания реле, тем самым будет нарушена жесткая временная связь между моментом срабатывания реле и информационными импульсами.

Можно показать [43], что среднеквадратичное значение σ_0 случайного момента срабатывания реле определяется формулами

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_2}{S_H}, \quad S_H = \frac{ds_2(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0}, \tag{75}$$

где момент времени t_0 находится из уравнения $s_2(t_0) = H$. Для прямоугольного синхроимпульса формула (75) принимает вид

$$\sigma_0 = \tau_u \frac{\sigma_2}{s_{2m}} = \tau_u \sqrt{\frac{N_0}{2E}}. \tag{76}$$

Из этой формулы видно, что при фиксированной энергии E прямоугольного синхроимпульса для уменьшения «дрожания» момента срабатывания реле нужно уменьшать длительность импульса, т. е. повышать крутизну S_H выходного импульса.

2. Когда уровень шума сравним или превышает пороговое значение ($\sigma_2 \gg H$), будут происходить главным образом ложные срабатывания реле в интервале между синхроимпульсами, особенно при большой скважности их следования [47]. Если обозначить интервал между соседними импульсами через T, то среднее число ложных срабатываний за время T определяется известной формулой [39], которую можно записать в таком виде:

$$n_T(H) = \mu T \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_2^2}\right), \tag{77}$$

где коэффициент μ определяется через корреляционную функцию шума. (Здесь не рассматривается вопрос о возможности математического вычисления его.)

Из формулы (77) видно, что для уменьшения числа ложных срабатываний необходимо по возможности повышать порог H. Согласно неравенству (74) это требует увеличения энергии синхроимпульса. Увеличения энергии можно достигнуть повышением пиковой мощности излучения либо удлинением импульса. Увеличение пиковой мощности лимитируется техническими возможностями (так называемые «пиковые» ограничения), а увеличение длительности импульса является нежелательным с точки зрения нестабильности момента срабатывания реле из-за шумов (76).

На основании рассмотрения приведенного простейшего примера становятся ясными требования, которые следует предъявить к форме сигналов, используемых в линиях импульсной синхронизации. Они состоят в том, что при ограниченной пиковой мощности излучения сигналы синхронизации должны обладать необходимой энергией E и по возможности более «узкой» функцией автокорреляции (большой крутизной S_H). Такие требования обычно выдвигаются в радиолокации к сигналам, когда нужно получить большую точность измерения дальности до цели и высокую разрешающую способность по дальности.

Сформулированным требованиям в известной мере удовлетворяют специальные сигналы с внутриимпульсной модуляцией (в частности, с фазовой манипуляцией). К таким сигналам относятся сигналы, построенные на основе кодов Баркера [48, 49], Хаффмена [50] и др.

Принцип построения таких сигналов, грубо говоря, состоит в следующем. Исходя из «пиковых» ограничений, определяется общая длительность импульса τ_u, при которой получается требуемая энергия сигнала E. Временной интервал τ_u разбивается на n элементарных подынтервалов длиной $\Delta = \tau_u/n$. Например, фаза высокочастотного колебания на каждом из элементарных подынтервалов может принимать два значения: φ и $\varphi \pm \pi$. Подбирая число n и последовательность чередования фаз на каждом из элементарных подынтервалов, удается получить сигнал с узкой функцией корреляции. Так, для кода Баркера при $n = 13$ функция автокорреляции сигнала (т. е. сигнал на выходе оптимального приемника) имеет основной узкий пик в виде равнобедренного треугольника с основанием 2Δ и двенадцать одинаковых «лепестков» такой же формы, но высота каждого из них в 13 раз меньше высоты основного пика.

Подробные сведения по методам формирования и приема таких сигналов можно найти в периодической литературе.

Дополнение при корректуре. В последнее время область применения устройств синхронизации (в частности, фазовой автоподстройки частоты) еще более расширилось. Оказывается, что при некоторых дополнениях фазовая автоподстройка частоты при определенных условиях является оптимальным устройством для помехоустойчивого приема непрерывных стохастических сигналов на фоне флуктуационных помех [52].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Мигулин, УФН **33**, 353 (1947).
2. А. В. Антонов, Ю. В. Коршунов, Е. В. Мелешко, В. С. Панасюк, Приб. и тех. эксп. **6**, 20 (1959).
3. Зарубежная радиоэлектроника **9**, 2 (1959).
4. П. В. Шмаков, Телевидение, М., Связьиздат, 1960.
5. Ю. Н. Бакаев, Радиотехника и электроника **3** (2), 227 (1958).
6. Н. Л. Теплов, Электросвязь **1**, 28 (1959).
7. М. В. Верзунов, И. В. Лобанов, А. М. Семенов, Однополосная модуляция, М., Связьиздат, 1962.
8. I. R. Costas, IRE Trans. **CS-7** (1), (1957).
9. B. Van der Pol, Phil. Mag., Ser. **7, 3** (13), 65 (1927).
10. A. Andronow, A. Witt, Arch. fur Elect. **24**, 99 (1930).
11. А. Андронов, А. Витт, Ж. прикл. физ. **6** (4), 3 (1930).
12. И. Г. Акопян, Кандидатская диссертация (МГУ, 1959).
13. А. Андронов, Л. Понтрягин, А. Витт, ЖЭТФ **3** (3), 165 (1933).
14. И. Л. Берштейн, ДАН СССР **20** (1), 11 (1938).
15. И. Л. Берштейн, ЖТФ **11** (4), 305 (1941).
16. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., **14** (2), 145 (1950).
17. С. М. Рытов, ЖЭТФ **29** (3), 304 (1955).
18. Р. Л. Стратонович, Радиотехника и электроника **3** (4), 497 (1958).
19. И. Г. Акопян, П. С. Ланда, Радиотехника и электроника **7** (8), 1285 (1962).
20. В. И. Тихонов, Автоматика и телемеханика **20** (9), 1188 (1959).
21. В. И. Тихонов, Автоматика и телемеханика **21** (3), 301 (1960).
22. В. И. Тихонов, К. Б. Челышев, Радиотехника и электроника 8 (2), 331 (1963).
23. Г. С. Горелик, Изв. АН СССР, сер. физ., **14** (2), 187 (1950).
24. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, ДАН СССР **97** (4), 639 (1954).
25. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы флуктуаций в радиотехнике, М., «Советское радио», 1961.
26. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника **2** (4), 502 (1957).
27. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., Гостехиздат, 1955.

28. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника **6** (7), 1082 (1961).
29. М. Р. Капланов, В. А. Левин, Автоматическая подстройка частоты, М., Госэнергоиздат, 1962.
30. М. В. Капранов, Научн. докл. высшей школы (Радиотехника и электроника) **1**, 162 (1958).
31. В. В. Шахгильдян, Электросвязь **9**, 22 (1961).
32. В. В. Шахгильдян, Радиотехника **16** (10), 28 (1961).
33. М. В. Капранов, В. А. Иванов, Н. Н. Иванова, Радиотехника и электроника **5** (11), 1774 (1960).
34. Ю. Н. Бакаев, Автоматика и телемеханика **23** (9), 1179 (1962).
35. Г. С. Горелик, Г. А. Елкин, Радиотехника и электроника **2** (1), 28 (1957).
36. В. И. Тихонов, Флуктуационные процессы, М., Изд-во ВВИА им. Жуковского, 1961.
37. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, ЖЭТФ **26** (2), 189 (1954).
38. S. P. Morgan, Tables of Bessel Functions of Imaginary Order and Imaginary Argument, Inst. of Techn., California, 1947.
39. В. И. Тихонов, УФН **77** (3), 449 (1962).
40. В. А. Котельников, Теория потенциальной помехоустойчивости, М., Госэнергоиздат, 1956.
41. С. Е. Фалькович, Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех, М., «Советское радио», 1961.
42. Ж. Л. Турин, Согласованные фильтры, Зарубежная радиоэлектроника **3**, 30 (1961).
43. В. И. Тихонов, Вестник МГУ **5**, 31 (1956).
44. И. М. Коган, И. Б. Погожев, Радиотехника **14** (10), 57 (1959).
45. П. Н. Амиантов, В. И. Тихонов, Радиотехника **14** (4), 9 (1959).
46. Б. С. Цыбаков, В. П. Яковлев, Радиотехника и электроника **4** (3), 543 (1959).
47. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника **2** (8), 31 (1956).
48. R. H. Barker, Communication Theory, Butterworths, Scientific Publication, 1953.
49. H. Sherman, IRE Trans. **IT-2** (1), 24 (1956).
50. Д. А. Хаффмен, в сб. «Теория передачи сообщений», М., ИЛ, 1957.
51. Витерби, Proc. IEEE, **51** (12), 1737 (1963).
52. Н. К. Кульман, Р. Л. Стратонович, Радиотехника и электроника 9(1), 67(1964).