

538.56

КВАЗИОПТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ И ПЕРЕДАЧИ МИЛЛИМЕТРОВЫХ ВОЛН

Б. З. Каценеленбаум

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Термином *к в а з и о п т и к а* можно объединить круг вопросов, относящихся к таким устройствам для формирования полей электромагнитных волн, в которых, с одной стороны, используются методы геометрической оптики — фокусировка, преломление в призмах и линзах, а с другой, — решающую роль играют явления дифракции.

В обычных оптических приборах дифракционные явления имеют второстепенное значение, так как основной геометрический параметр прибора — ширина пучка — значительно больше длины волны. В тех же случаях, где дифракция существенна, геометрические методы обычно неприменимы. С другой стороны, в технике сантиметровых волн или еще более длинных волн имеет место противоположная ситуация: сечение пучка и длина волны одного порядка, геометрооптические явления имеют относительно малое значение. Лишь простейшие свойства обычных объемных резонаторов и волноводов можно описать, пользуясь только асимптотической формой волнового уравнения — геометрической оптикой.

В сантиметровой области есть одно существенное исключение — большие антенны, однако в этом обзоре, посвященном новым идеям в применении оптических методов к радиоволнам, мы почти не будем рассматривать таких антенн (см., впрочем, § 4, п. 5), давно применяемых и подробно описанных в литературе (см., например, ¹).

Освоение *м и л л и м е т р о в ы х* и *с у б м и л л и м е т р о в ы х* радиоволн привело по крайней мере к трем новым техническим проблемам, которые являются квазиоптическими в указанном смысле. Рассмотрение их составляет основное содержание настоящей статьи. На них можно проиллюстрировать наиболее интересные в методическом отношении результаты *в з а и м н о г о* *п р о н и к н о в е н и я* *а п п а р а т о в* *г е о м е т р о о п т и ч е с к о й* *и* *в о л н о в о й* *т е о р и й*. Первая из этих проблем — зеркала и аналогичные устройства (призмы, линзы) в очень широком волноводе круглого сечения, в котором энергия передается в виде одной волны H_{01} , вторая — теория открытых резонаторов, получивших широкое применение в лазерах, третья — линзовые или аналогичные им зеркальные линии, обеспечивающие передачу радиоволн с малыми потерями (на единицу длины) путем многократной ретрансляции при относительно узком пучке.

В математическом отношении квазиоптика приводит к некоторым специальным задачам *а с и м п т о т и ч е с к о й* *т е о р и й* *д и ф ф р а к ц и и*. В первой из трех проблем нужно объединить методы оптики и теории волноводов. Особенность второй и третьей проблем состоит в следующем: отношение поперечного размера пучка к длине волны, т. е. большой

параметр задачи, оказывается не очень большим, и существует еще один, геометрический, параметр, имеющий тот же порядок. Этот большой геометрический параметр — отношение расстояния между элементами устройства, т. е. длины пучка, к его ширине. Типичная ситуация в этих двух проблемах состоит в определении поля в зоне Френеля при дифракции на большом теле. В математическом плане вторая и третья задачи почти тождественны. Мы здесь не будем рассматривать многочисленные устройства ^{2, 3} типа призмленного делителя мощности или интерферометров, в которых оптические методы без принципиальной их модификации перенесены в область миллиметровых волн.

Некоторые задачи квазиоптики давно встречались в теории ультразвука ⁴, где соотношения между геометрическими размерами приборов и длиной волны часто оказываются такими же. Однако, по-видимому, радиофизика внесла в эту область ряд новых идей.

§ 2. ОПТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ШИРОКИХ ВОЛНОВОДАХ

1. Симметричные магнитные волны в волноводе круглого сечения обладают при очень высоких частотах малыми омическими потерями; с ростом частоты эти потери монотонно убывают. Этот простой результат теории волноводов лежит в основе работ по созданию тракта для передачи

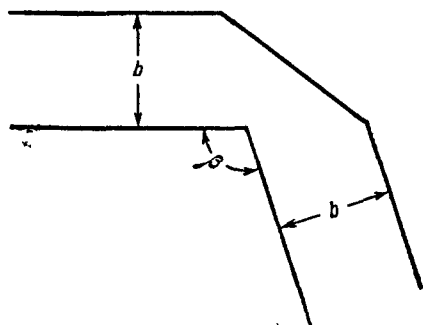


Рис. 1. Плоское зеркало в изломе волновода.

сигналов в очень широкой полосе частот в волноводе круглого сечения, работающем на волне H_{01} . Современное состояние работ по этой проблеме (см., например, ⁵⁻⁶) позволяет считать ее технически осуществимой; не исключена возможность передачи таким образом не только сигналов, но и энергии ⁷. Такой тракт будет иметь малые омические потери при большом значении параметра ka , где k — волновое число распространяющейся волны, a — радиус волновода. Разумные значения ka , определяемые различными соображениями, лежат, по-видимому, в области $ka \approx 30 \div 50$ и выше.

Одной из основных трудностей в этой проблеме является стабилизация волны H_{01} на различных нерегулярных участках. Всякая нерегулярность, вообще говоря, вызовет переход части энергии волны H_{01} в энергию волн других типов; эта энергия теряется для передачи и, более того, является причиной искажения сигнала. Поэтому преобразования энергии в нежелательные типы волн должны быть сделаны по возможности малыми.

Оптические устройства используются для снижения таких потерь на преобразование, возникающих при изменении направления оси волновода. Они предлагались и даже осуществлялись уже сравнительно давно ^{8, 9}. Простейшее из них — плоское зеркало, устанавливаемое в изломе волновода таким образом, что нормаль к нему делит пополам угол между осями волноводов (рис. 1, $b = 2a$). Применение такого зеркала основано на очень простой идее: так как $ka \gg 1$, то локально, т. е. в любой области, малой по сравнению с a , поле волны H_{01} близко к полю плоской волны. Плоская волна при падении на плоское зеркало отражается без искажений. Следовательно, почти без искажений должна отражаться, т. е. поворачиваться и идти вдоль второго

волновода, и волна H_{01} . Такое же геометрическое соображение позволяет ожидать, что диэлектрическая призма, расположенная в изломе волновода (рис. 2), повернет фронт падающей на нее волны так, что волна почти полностью пойдет по второму волноводу.

Эти соображения правильно описывают действие таких устройств. Однако особенность задачи состоит в том, что наибольший интерес представляет именно определение поправок, обязанных конечности параметра ka , и связанных с этим дифракционных эффектов. Эти поправки и описывают потери на преобразование в таких устройствах.

В настоящее время можно считать выясненным только вопрос о потерях на преобразование в изломе с зеркалом (см. рис. 1). Экспериментально

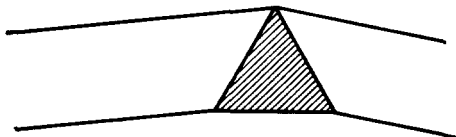


Рис. 2. Диэлектрическая призма в изломе волновода.

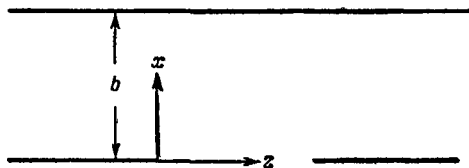


Рис. 3. Широкая щель в стенке широкого волновода.

этот вопрос исследован в работах ⁸⁻⁹ и особенно в ¹⁰, теория дана в ¹¹⁻¹³; согласие теории с экспериментом удовлетворительное.

2. Основания наиболее простой теории ¹¹ излома с зеркалом удобно изложить на вспомогательной задаче о широкой щели в стенке широкого волновода (рис. 3). Наличие щели вызывает появление паразитных волн и уход части энергии из волновода. Определение поля в правом волноводе и, в частности, определение амплитуды основной волны (т. е. той же волны, которая падает слева) производится в два этапа. Сначала находится поле на щели, а затем, по этому полю, поле в правом волноводе.

Поле на поверхности щели находится (в старшем порядке по параметру малости) элементарным образом; знание этого поля позволяет определить все существенные дифракционные характеристики, и, что особенно важно, при малой неточности в выражении поля на щели соответствующие формулы приводят к малым ошибкам. Это последнее обстоятельство не имеет места при прямом вычислении поля в сечении волновода после щели по полю в сечении перед щелью. Для того чтобы по полю в сечении волновода определить поле в волноводе, надо поле в сечении знать очень точно, значительно точнее, чем при определении поля в волноводе по полю на продолжении его стенок, т. е. на щели.

Поле на щели проще всего определить из сопоставления с задачей Зоммерфельда о дифракции на полуплоскости. Для этого надо из волноводной волны, падающей на щель слева, выделить слагаемое, соответствующее волне Бриллюэна. Например, для плоского волновода ширины b , с граничным условием первого рода, если в волноводе падает волна

$$u_{\text{пад}} = \sin \alpha_1 x \cdot e^{-i h_1 z}, \quad \alpha_m = \frac{\pi m}{b}, \quad h_m = \sqrt{k^2 - \alpha_m^2}, \quad u|_C = 0, \quad (2,1)$$

поле на щели равно

$$u = \alpha_1 \sqrt{\frac{z}{2\pi k}} e^{-i \left(k z + \frac{\pi}{4} \right)}. \quad (2,2)$$

Здесь ось z направлена вдоль оси волновода, ось x — поперек волновода и координата z в амплитуде отсчитывается от точки пересечения оси z

с кромкой щели. При граничном условии второго рода, если

$$u_{\text{пад}} = e^{-ikhz}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_C = 0, \quad (2,3)$$

на щели

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{\frac{k}{2\pi z}} e^{-i\left(kz + \frac{3\pi}{4}\right)}. \quad (2,4)$$

В обоих случаях поле на щели определяется полем падающей волны не на всей поверхности фронта, т. е. не на всем выходном отверстии левого волновода, а только на малой области, примыкающей к границе щели. Размер этой области определяется размером нескольких зон Френеля для наиболее удаленных точек щели. Если длина щели равна l , то размер этой области равен μb , где

$$\mu = \left(\frac{\pi l}{kb^2} \right)^{1/2} \quad (2,5)$$

есть основной параметр малости задачи. Условие

$$\mu \ll 1, \quad (2,6)$$

которое мы будем считать выполненным, означает, что щель освещается только малой частью фронта падающей волны. Это обстоятельство позволяет использовать решение задачи о дифракции на полуплоскости, а в дальнейшем перенести решение вспомогательной задачи (см. рис. 3) на задачу о зеркале (см. рис. 1).

Точно так же, если в волноводе круглого сечения падает симметричная магнитная волна, в которой вектор Герца равен

$$J_0\left(\frac{vr}{a}\right) \exp(-ih_1 z), \quad v = 3,83,$$

из выражения для азимутальной компоненты электрического поля падающей волны, которую мы тоже обозначим u , получим на щели

$$u = \frac{v^2}{a^2 \sqrt{2\pi}} J_0(v) \sqrt{kz} e^{-i\left(kz - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (2,7)$$

Зная поле на щели, можно по обычным формулам теории возбуждения волновода заданными магнитными и электрическими поверхностными токами определить амплитуду основной и паразитных волн, уходящих в правый и левый волноводы. Одновременно из той же задачи Зоммерфельда находится магнитное поле на щели, а затем — поток энергии, уходящей в щель. Для волны H_{01} потеря энергии основной волны пропорциональна μ^3 ; то же имеет место в аналогичной двумерной скалярной задаче с граничным условием первого рода (2,1). Для граничного условия второго рода (2,3) и аналогичной задачи о волне E_{01} в круглом волноводе — потери значительно больше, они пропорциональны первой, а не третьей степени параметра малости. Половина потерянной энергии уходит через щель, половина распределяется среди уходящих вперед паразитных волн, образуя широкий (по номерам волн) спектр. Большие потери для задачи (2,3) по сравнению с задачами (2,1) и (2,7) объясняются тем, что при граничном условии второго рода вблизи стенок в падающей волне переносится больше энергии, чем при граничном условии первого рода.

Изложенный метод представляет собой сочетание оптического (определение поля на щели) и волноводного аппаратов. Он, по-видимому, соответствует физической сущности задачи, также носящей промежуточный характер: с одной стороны, волноводных волн очень много и определение амплитуды каждой нежелательной волны ненужно и невозможно, а с другой, — структура прошедшей волны

должна быть по возможности близка к структуре одной из волноводных волн.

3. Вспомогательная задача о широкой щели в стенке плоского волновода с граничным условием второго рода (2, 3) в работе ¹² решалась более строгим методом так называемых последовательных дифракций.

Пусть сначала есть только левый волновод, правый удален. Возникающее при этом поле известно; оно найдено ^{14, 15} в работах по теории дифракции на открытом конце волновода. Поместим затем в это поле правый волновод, убрав левый. И в этом случае можно найти поле, решив задачу о дифракции сложной волны (найденной на первом этапе) на открытом конце. Затем в это поле поместим левый волновод, считая, что нет правого, и т. д. Этот метод имитирует фактический процесс формирования поля на фронте падающего импульса. Он был известен в теории дифракции на щели в плоском экране, где исходным решением являлось поле, возникающее при дифракции на полуплоскости; в ¹² таким исходным решением явилось поле в соответствующей волноводной задаче ¹⁴. В работе ¹² получено несколько аналитических выражений для суммарного поля. В частности, получено несколько членов разложения энергии прошедшей основной волны в ряд по степеням μ . Если ширина волновода равна ширине щели, потери этой волны равны

$$\frac{1}{\pi} \mu + \frac{1}{2\pi^2} \mu^2 + C\mu^3, \quad (2,8)$$

где в C входят синусы и косинусы, аргументы которых содержат μ^2 в знаменателе. Первый член в (2,8) совпадает с результатом элементарной теории ¹¹. Удовлетворительное совпадение точной теории с приближенной сохраняется до $\mu \sim 0,4 \div 0,5$, при больших μ приближенная теория дает неверные результаты.

4. Гибкость изложенного в п. 2 метода позволяет легко перенести его на задачу об изломе с зеркалом, которая, очевидно, эквивалентна задаче о волноводном кресте, возникающем при отражении волноводов рис. 1 в плоскости зеркала; к кресту при этом идут две волны. Волна, идущая, например, слева, испытывает приблизительно то же возмущение, что и в волноводе с щелями, совпадающими с устьями верхнего и нижнего волноводов. Энергия, которая в задаче рис. 3 выходит из щели и образует пространственную волну, в кресте создает паразитные волны в нижнем волноводе. Образуются несколько волн — узкий спектр по номерам, смещенный относительно широкого спектра, формируемого прямой волной.

Таким образом, получается следующий результат ¹¹, относящийся уже непосредственно к излому с зеркалом. Для плоского волновода с волной (2,1) потери равны $4\mu^3/3$; для плоского волновода с волной (2,3) они равны $2\mu/\pi$, где входящая в μ величина l — ширина щели в эквивалентной задаче — равна $b/\sin \beta$. Для круглого волновода с волной H_{01} потери этой волны равны

$$\frac{8,7}{(ka \sin \beta)^{3/2}}. \quad (2,9)$$

Во всех случаях эта энергия одинаковым образом распределяется между паразитными волнами. Одна четверть ее уходит обратно в виде нескольких паразитных волн высокого номера и столько же проходит вниз в виде таких же волн; половина энергии проходит в нижний волновод в виде многих паразитных волн (широкий спектр по номерам).

Чем выше частота, т. е. чем больше ka , тем меньше потери на преобразование, которые несут, по существу, дифракционный характер.

Зависимость от частоты ($k^{-3/2}$ или $k^{-1/2}$) довольно сложная и непривычна в обычных (неволноводных) асимптотических задачах теории дифракции. В настоящее время неясно, является ли она сколько-нибудь общей и имеет ли место, например, для излома с призмой (см. рис. 2).

Результат (2,9) показывает, что устройство рис. 1 является удовлетворительным уже при не очень высоких частотах. Например, при $ka \sim 60$ на изломе (на прямой угол) с зеркалом теряется около 2% падающей энергии. Чем больше угол излома отличается от $\pi/2$, тем шире щель, которую должна преодолеть волна, и больше потери на преобразование. Для малых углов, вероятно, меньшие потери обеспечит излом с призмой.

5. Аппарат, примененный в ¹¹ и ¹², с самого начала использует асимптотический характер задачи. При этом, разумеется, получается решение, справедливое лишь при $kb \gg 1$ (или, что практически одно и то же,

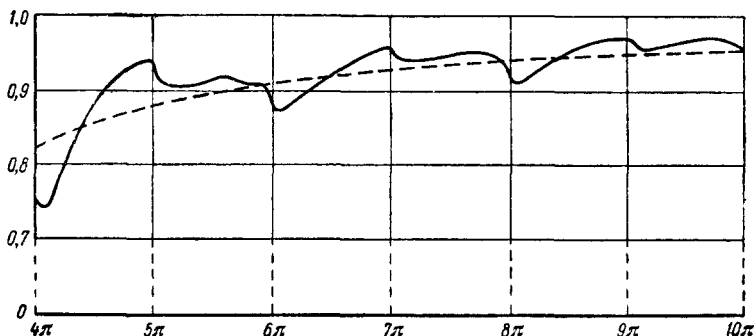


Рис. 4. Энергия волны, прошедшей сквозь излом плоского волновода с зеркалом ¹³.

при $\mu \ll 1$); кроме того, остаются невыясненными многие особенности явления. В ¹³ задача об изломе (на прямой угол) плоского волновода с зеркалом при граничном условии первого рода с начала до конца исследовалась как волноводная задача методами, разработанными в теории плоских сочленений волноводов. Поля в левом и нижнем волноводах записывались в виде суммы по всем волнам, уходящим от излома, и одной волны (2,3), падающей на излом с единичной амплитудой. Для искомых амплитуд уходящих волн устанавливалась система бесконечного числа линейных алгебраических уравнений.

Как выяснилось из тщательного численного анализа, для получения достаточно точного численного результата следует учитывать все распространяющиеся и две — три нераспространяющиеся волны. Разумеется, чем выше частота, тем этот метод более трудоемок, и он, по-видимому, не дает простых аналитических оценок для большего значения параметра kb . Однако, в отличие от асимптотических методов, полученные в ¹³ результаты являются точными.

Практически расчеты удалось провести до $kb = 10\pi$. На рис. 4 изображена потеря энергии основной волны в функции kb . Пунктирная линия соответствует асимптотическому решению, согласно которому потери равны $4\pi^{3/2}(kb)^{-3/2}/3$. Асимптотическое решение дает удовлетворительные результаты уже при $kb > (4 \div 5)\pi$.

Вероятно, наиболее интересным результатом является поведение амплитуды основной волны вблизи частот ($kb = n\pi$), при которых воз-

никают новые паразитные волны. Соответствующие резонансные явления полностью выпадают из рассмотрения в приведенных асимптотических решениях; до работы ¹³ существовали только общие соображения о том, что волноводные резонансы всегда слабо выражены. Действительно, оказалось, что переход частоты через критическую частоту паразитных волн не вызывает (во всяком случае в рассмотренной системе) существенного возмущения основной волны.

Для более сложных устройств (например, для излома с зеркалом волновода круглого сечения и для призмы, линзы и т. д.) такой строго волноводный подход значительно более громоздок, хотя, вероятно, все же осуществим. Однако более перспективным представляется развитие специального асимптотического аппарата, более соответствующего промежуточному, квазиоптическому характеру задач. Особый интерес эти асимптотические методы имеют в сочетании с исследованиями типа ¹³, обеспечивающими непрерывный переход от точных (численных) к приближенным методам.

В заключение заметим, что простота физической идеи, лежащей в основе различных оптических устройств в волноводах, привела и продолжает приводить к появлению ряда остроумных технических предложений (см., например, ¹⁶). Одной из причин медленного развития техники в этой области является отсутствие достаточно общей и в то же время эффективной и простой математической теории квазиоптических явлений в широких волноводах.

§ 3. ЛУЧЕВОЙ ВОЛНОВОД И ОТКРЫТЫЙ РЕЗОНАТОР

1. Предложение о передаче миллиметровых радиоволн в линии из ряда последовательно расположенных диэлектрических линз, размеры которых велики по сравнению с длиной волны, впервые было сформулировано несколько лет назад ^{17, 18}. Такая линзовая линия (рис. 5) основана на элементарной идее. Радиоволны от источника попадают на линзу, проходят сквозь нее, распространяются к следующей, и т. д. Каждое прохождение отрезка между линзами вызывает какое-то дифракционное расхождение, «расползание» пучка, в результате чего на линзу приходит волна, структура которой отличается от структуры волны, покидающей предыдущую линзу. Роль линзы состоит в том, чтобы скомпенсировать это изменение структуры, восстановить распределение поля в пучке, точнее, — распределение фазы по сечению пучка, так как распределение амплитуды поля практически не нарушается.

Кроме того, часть энергии, вышедшей из данной линзы, уйдет в сторону, вообще не достигнет следующей линзы, что приведет к появлению радиационных потерь энергии. Если к ним добавить потери в материале линз и на отражение, а также потери, связанные с геометрической неидеальностью реальных систем, то получатся погонные (на единицу длины) потери в линии. Для полной энергетической оценки линии следует еще учитывать потери на приемном и передающем концах.

Рассмотрим величины, характеризующие действие такой линии. Обозначим расстояние между линзами через L , поперечное сечение линзы

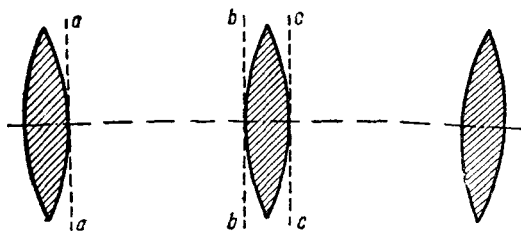


Рис. 5. Линзовая линия.

будем характеризовать величиной a . Для круглых линз a — радиус линзы, при рассмотрении двумерного случая $2a$ — ширина линзы. Предполагается, что $ka \gg 1$, $L/a \gg 1$. Параметр, от которого в первую очередь зависят радиационные потери, может быть найден из элементарных рассуждений. Пучок, ширина которого порядка a , имеет при равномерном распределении угловое дифракционное расхождение порядка $1/ka$. На расстоянии L это приведет к расширению его поперечных размеров на L/ka ; относительное расширение равно L/ka^2 . Если бы не было принято мер для того, чтобы в периферийную часть пучка уходило по возможности мало энергии, то каждый пробег длины L сопровождался бы радиационными потерями порядка L/ka^2 . Как мы увидим, формируя должным образом пучок, делая его неравномерным, удастся эти потери снизить. Для того чтобы радиационные потери не были большими, величина

$$c = \frac{ka^2}{L} (ka \gg 1, L \gg a) \quad (3,1)$$

не должна быть малой. Оказывается, что c может быть лишь несколько меньше 2π .

Таким образом, для того чтобы радиационные потери были малы, линзы надо ставить на возможно малых расстояниях друг от друга, делать радиус пучка большим и работать на возможно коротких волнах. Каждое из этих требований вызывает свои осложнения. Если линзы стоят очень часто, то велики будут погонные диэлектрические потери и потери на отражение. Если радиус пучка велик, то условия для распространения волн надо будет поддерживать в очень большом объеме. Что касается волн короче нескольких миллиметров, то их всестороннее освоение еще только начинается. В немалой степени оно связано также с созданием передающих трактов для таких волн. Кроме того, в субмиллиметровом диапазоне прибавляются еще потери в воздухе¹⁹, в длинных трактах придется обеспечивать искусственную среду или вакуум, и т. д. Опубликовано только несколько отрывочных сообщений по созданию дальней линзовой линии связи. В работе²⁰ предложены следующие параметры: длина волны 3,3 мм, $a = 15$ см, $L = 47$ м. При этом ожидаются потери порядка 3 дб/км. Вся линия должна быть уложена в бетонную трубу. В²¹ описана линия, содержащая сорок линз на км, которая на длине волны 8 мм обладает потерями 1,2 дб/км. Исследование коротких трактов проведено в¹⁸.

2. Роль линз состоит в том, чтобы исправить распределение по сечению фазы приходящей волны. Точнее, если поле волны (какой-либо ее компоненты), подходящей к линзе, есть $u(x, y)$, то уходящая волна должна иметь поле $u(x, y) \exp[i\varphi(x, y)]$. Функция $\varphi(x, y)$ характеризует фазовую коррекцию, которая обеспечивается различием в оптических длинах лучей, прошедших сквозь разные точки линзы. Другими словами, расходящийся пучок, подходящий к линзе, она должна сфокусировать, вновь превратить в сходящийся. Между двумя линзами поперечная диффузия²² вновь вызовет дифракционное расхождение пучка, которое должно быть скомпенсировано фокусирующим действием следующей линзы. Квазиоптическая сущность процесса, вероятно, отчетливее всего иллюстрируется тем, что для его описания надо одновременно употреблять как дифракционные, так и геометрооптические понятия.

Собирающая линза (диэлектрическая или металлодиэлектрическая) является, разумеется, не единственным возможным фазовым корректором. Могут быть использованы также фокусирующие отражающие зеркала различных типов (рис. 6, а — б), предложенные для этого в работах²³ и²⁴. Лучи, падающие на разные точки зеркала,

проходят разные пути, и это создает требуемую фазовую коррекцию. Очевидным преимуществом таких корректоров по сравнению с линзами является отсутствие диэлектрических потерь или аналогичных и тоже значительных потерь в искусственном диэлектрике. Потери, вызванные проводимостью зеркал, можно сделать очень малыми, применяя волны, поляризованные параллельно зеркалам и падающие на них под малым углом скольжения. Если придать при этом зеркалам форму тел вращения, то вся система — последовательность бочкообразных зеркал с общей осью²⁵ — будет по структуре поля весьма похожа на волновод круглого сечения с симметричной магнитной волной. Недостатком такой системы является малость (при скользющем падении волны) эффективной ширины пучка (величина a в (3,4)); малые радиационные потери могут быть поэтому обеспечены лишь для субмиллиметровых и более коротких волн. В системах, в которых угол падения имеет порядок $\pi/4$ ^{24, 16}, зеркала можно ставить реже.

3. Существует физическая аналогия между линиями из ряда фазовых корректоров и предложенными несколько раньше²⁶⁻²⁸ открытыми резонаторами с плоскими (рис. 6, *в*) или искривленными (рис. 6, *г*)

зеркалами. Математический же аппарат, описывающий эти два типа систем, в первом приближении тождествен; после отражения от правого зеркала волна в резонаторе вернется к левому, а в линии после прохождения каждой линзы (или отражения от зеркала) волна пройдет к очередной линзе (или зеркалу). Если говорить не о зеркалах или линзах, а о фазовых корректорах, то описание процессов в линиях и резонаторах станет тождественным — волна последовательно проходит между корректорами, испытывая на них каждый раз фазовую коррекцию. Колебание, форма которого у последующих корректоров повторяется, а амплитуда экспоненциально уменьшается, в резонаторе соответствует собственному колебанию, а в линии — собственной волне. Уменьшение энергии колебания при переходе от одного корректора к следующему в терминах линии дает погонное затухание на длину L , в терминах резонаторов — затухание за время одного пробега.

Резонаторы нашли широкое применение в лазерах (квантовых генераторах света), как колебательная система, и в измерительной технике, как микроволновый аналог известного в оптике интерферометра Фабри—Перо. Именно их применением в лазерах объясняется возросший к ним интерес.

В техническом плане требования к линиям и резонаторам не совпадают. В длинных линиях чрезвычайно важно обеспечить малые погонные потери, в коротких линиях нужно уменьшить потери в концах тракта. Большой радиус пучка является недостатком линии, в то время как для

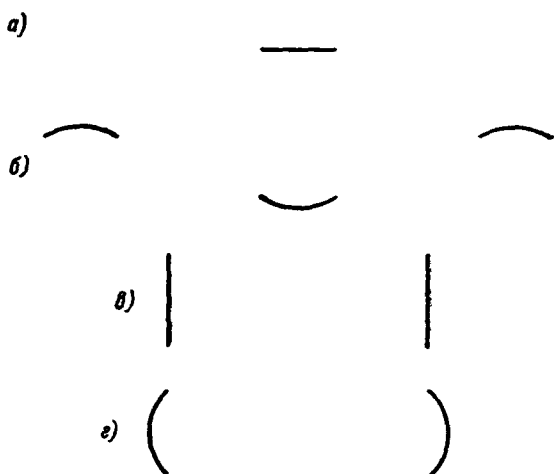


Рис. 6. *а—б*) Зеркальные линии передачи; *в*) открытый резонатор с плоскими зеркалами; *г*) открытый резонатор с фокусирующими зеркалами.

резонаторов размер зеркал не столь существен. Кроме того, в лазерах среда внутри резонатора оптически неоднородна, что ограничивает применение сравнительно простой теории, изложенной ниже.

Для открытых резонаторов очень существенна относительная редкость спектра ²⁹ по сравнению с обычным, т. е. закрытыми резонаторами. Для линий это означает большое затухание почти всех высших собственных волн — свойство, которое, может быть, позволит применять для связи сравнительно простую частотную модуляцию ²⁰. Для интерферометров Фабри — Перо существуют свои специфические проблемы (см., например, литературу в ³⁰); как и для резонаторов, для них очень существенно качество зеркал.

Излагая ниже результаты математического исследования описанных систем, мы в первую очередь будем интересоваться радиационными потерями. В этом вопросе заложены наиболее интересные проблемы, касающиеся соотношения между геометрической и дифракционной теориями. Именно здесь в последние годы получены наиболее существенные результаты, хотя в целом задачу нельзя считать решенной даже в математическом плане. Кроме того, во всех технических вариантах (рис. 5 и 6) необходимо получение малых радиационных потерь, хотя для квантовых генераторов это не столь существенно, как для линий передачи, особенно для длинных линий.

4. Наиболее эффективный и гибкий математический аппарат для исследования проблемы состоит в следующем. В качестве неизвестной функции вводится поле на выходе одного корректора. По нему определяется поле на входе следующего корректора. Поле на его выходе получается умножением на $\exp[i\varphi(x, y)]$. Затем записывается требование, что поле на выходе второго корректора отличается от поля на выходе первого корректора только постоянным (не зависящим от x, y) множителем. Это приводит к однородному интегральному уравнению Фредгольма для искомого поля.

Определение поля при $z = L$ по полю при $z = 0$ производится по принципу Гюйгенса. Пусть сначала речь идет о линзовой линии. Обозначим через $u(x, y)$, например, x -компоненту магнитного поля при $z = +0$. Поле вне корректора предполагается равным нулю. Для той же компоненты магнитного поля при $z = L - 0$ получим

$$v(\xi, \eta)|_{L=z=0} = A \int u(x, y) \frac{e^{-ikR}}{R} dx dy, \quad |A| = \frac{k}{2\pi}. \quad (3,2)$$

В двумерных задачах $|A| = \sqrt{k/2\pi}$, и R в знаменателе надо заменить на \sqrt{R} . Здесь интеграция производится по апертуре первого корректора (линия aa на рис. 5), поле получается на входе второго корректора (линия bb на рис. 5), и

$$R^2 = \sqrt{L^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (3,3)$$

Далее, заменим R в знаменателе через L , а R в показателе — по формуле

$$R = L + \frac{(x - \xi)^2}{2L} + \frac{(y - \eta)^2}{2L}. \quad (3,4)$$

Это законно, если

$$L^3 \gg ka^4 \quad (3,5)$$

— условие, которое выполняется, если $ka \gg 1$, $c/2\pi \sim 1$. Подставив (3,4) в (3,2) и умножив на $\exp[i\varphi(\xi, \eta)]$, мы найдем поле на выходе второго корректора, т. е. при $z = L + 0$ (линия cc на рис. 5). Если затем

потребовать, чтобы

$$v(\xi, \eta)|_{z=L+0} = \lambda u(\xi, \eta)|_{z=+0}, \quad (3,6)$$

мы получим интегральное уравнение для функции u

$$e^{i\varphi(\xi, \eta)} \int u(x, y) K(x, y, \xi, \eta) dx dy = \lambda u(\xi, \eta), \quad (3,7)$$

где ядро, согласно предыдущему,

$$K = A \frac{e^{-ikL}}{L} e^{-i \frac{k}{2L} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]}. \quad (3,8)$$

Величина λ имеет простой смысл; согласно (3,6) она равна уменьшению поля при переходе от линзы к линзе. Радиационные потери равны $1 - |\lambda|^2$. Таким образом, потери волн различного типа определяются модулем собственных значений уравнения (3,7), структура поля — соответствующими собственными функциями, а фазовая скорость — аргументом собственных значений.

Вместо уравнения (3,7) для поля на выходе линзы часто удобно рассматривать уравнение для поля в средней плоскости линзы; обозначим это поле через $w(x, y)$. Из определения функции $\varphi(x, y)$ следует, что

$$u(x, y) = w(x, y) e^{\frac{i}{2} \varphi(x, y)}. \quad (3,9)$$

Подставляя это в (3,7), получим интегральное уравнение

$$\int w(x, y) K(x, y, \xi, \eta) e^{\frac{i}{2} [\varphi(x, y) + \varphi(\xi, \eta)]} dx dy = \lambda w(x, y). \quad (3,10)$$

Этот метод анализа был первоначально предложен не для линзовых линий, а для открытых резонаторов^{27, 28}. В первых работах^{17, 31}, содержащих теорию линзовых линий (пучковых волноводов, как они там названы), был развит другой метод. В математическом отношении он приводит к тем же результатам, хотя и более искусственным и сложным путем. Однако в нем подчеркнуты несколько иные стороны всего процесса. Искомое поле собственной волны представляется в виде совокупности (п у ч к а) п л о с к и х в о л н, направление распространения которых лежит внутри конуса с малым углом. Искомой величиной является функция, дающая распределение амплитуд этих плоских волн в зависимости от угла, который составляет направление их распространения с осью системы (осью z).

Изменение поля волны от $z = +0$ до $z = L - 0$ описывается при этом просто законами распространения плоских волн. Затем поле при $z = L + 0$ получается из поля при $z = L - 0$ операцией, сводящейся, по существу, к умножению на $\exp[i\varphi(x, y)]$, и ставится условие, эквивалентное (3,6).

Такой же «пучковый метод» был применен и к открытым резонаторам в одной из первых работ³², в которой рассматривалась двумерная задача о резонаторе из двух плоских зеркал.

Мы будем производить анализ как линий, так и резонаторов единым методом, описанным выше, который приводит к интегральным уравнениям (3,7) и (3,10).

Покажем, что (3,10) описывает также колебания в открытом резонаторе из двух зеркал (рис. 7), если под $w(x, y)$ понимать м а г н и т н о е п о л е (или ток) н а з е р к а л а х. Пусть задано $w(x, y)$ на первом зеркале, а $w(\xi, \eta)$ на втором зеркале определяется по принципу Гюйгенса. Так как поле на первом зеркале равно нулю, для поля, падающего на второе зеркало, в формуле (3,2) будет дополнительный множитель

расстояния R принять в экспоненте (3,2) выражение

$$R = R_0 + \frac{L}{R_0} (\xi - z) + \frac{2b^2}{R_0^3} (\xi - z)^2 + \frac{2b}{R_0} [\Delta(z) + \Delta(\xi)], \quad (3,13)$$

где $R_0^2 = 4b^2 + L^2$, а $\Delta(z)$ равно расстоянию между зеркалом и точкой на апертуре с тем же значением z .

Различие в теории резонаторов (рис. 7, а) и зеркальной линии (рис. 7, б) связано только с различием выражений для R . Выражение (3,13) содержит по сравнению с (3,4) дополнительные слагаемые, пропорциональные $\Delta(z)$ и $\Delta(\xi)$. Это означает, что каждое отражение от изогнутого зеркала сопровождается фазовой коррекцией; эта фазовая коррекция равна согласно (3,13)

$$\varphi(z) = C - \frac{2b}{R_0} \cdot 2k\Delta(z). \quad (3,14)$$

Эта формула, разумеется, могла бы быть получена из обычного геометрического расчета разности хода двух лучей при наклонном падении на изогнутую поверхность. Формула (3,14) имеет тот же смысл, что и (3,11); она позволяет по выбранной функции φ определить требуемую форму зеркал.

Присутствие в (3,13) линейного по z и ξ слагаемого означает, что $w(z)$ содержит быстро меняющийся множитель, соответствующий распространению волны в направлении оси z . Выделим его, т. е. введем функцию

$$\bar{w}(z) = w(z) e^{i \frac{L}{R_0} kz}. \quad (3,15)$$

Интегральное уравнение для медленно меняющейся функции $\bar{w}(z)$ оказывается точно таким же, как и для тока $w(x)$ на зеркалах некоторого резонатора (двумерная задача), если ширина этих зеркал будет равна ширине пучка, т. е. $2a \cdot \frac{2b}{R_0}$. Последнее утверждение непосредственно следует из сравнения квадратичных членов в (3,13) и (3,4). Вводя вместо $\bar{w}(z)$ величину $\bar{u}(z)$ по (3,9), т. е. множитель при $\exp\left(ik \frac{L}{R_0} z\right)$ в выражении для магнитного поля на апертуре зеркал, мы получим для нее двумерный вариант уравнения (3,7).

Таким образом, уравнения (3,7) или (3,10) описывают поля в линзовых и зеркальных линиях и в открытых резонаторах. Их решения — вид собственных функций и величина собственных значений — определяются геометрическими параметрами и видом функции φ , т. е. характером фазовой коррекции. В работе³³ было отмечено, что общие вопросы теории уравнений типа (3,10) — с комплексным симметричным ядром — мало разработаны.

5. Наиболее интересный вид фазовой коррекции, подробнее всего изученный, мы рассмотрим в следующем параграфе, а здесь приведем некоторые результаты, относящиеся к особому случаю, когда

$$\varphi(z) \equiv 0, \quad (3,16)$$

т. е. когда коррекция вообще не производится; в резонаторах и зеркальных линиях это имеет место при отражении от плоских зеркал. Действие каждого зеркала на структуру волны состоит здесь только в том, что из волны удаляется та часть, которая проходит мимо корректора. Возможен, и даже экспериментально осуществлен³⁴, и «линзовый» вариант такой системы — ряд расположенных друг за другом диафрагм.

Резонаторы из двух плоских зеркал были первыми формами открытых резонаторов, примененных в лазерах²⁶. Сначала можно было пред-

полагать, что добротность таких резонаторов будет очень малой. Действительно, как показано в п. 1, при равномерном распределении тока на зеркалах при каждом переизлучении будут большие потери энергии, порядка $1/c$. Однако выяснилось, что дифракционные эффекты вызывают существенное изменение структуры поля и формирование такого распределения тока на зеркалах, которое обеспечивает значительно меньшие потери. Конечные зеркала производят как бы отбор в совокупности плоских волн, формирующих пучок; волны, идущие под большим углом к оси, быстро уходят из резонатора, а остальные многократно переизлучаются.

Уравнение (3,10) для ленточных и круглых (дисковых) зеркал интегрировалось²⁷ последовательными итерациями на электронной вычислительной машине (ЭВМ). Это имитировало, по существу, процесс установления колебаний; оказалось, что нужно около трехсот последовательных переизлучений. Поля собственных волн довольно быстро убывают к периферии зеркала. Например, для основного колебания при $c \approx 4\pi$ поле на краю ленты или диска примерно в четыре раза меньше, чем в центре.

Радиационные потери меньше $1/c$, но довольно велики. Например, для ленты для основного колебания потери при $c = 2\pi$ равны 0,08, при $c = 4\pi$ они равны 0,03 и т. д. Для круглого диска соответствующие значения — 0,18 и 0,07.

Для зеркал прямоугольной формы распределение тока в функции каждой координаты независимо и определяется своим параметром c , в котором a — половина длины соответствующей стороны. Потери, связанные с ограниченностью зеркала в каждом из двух направлений, складываются.

В работе²⁹ использована совершенно иная и на первый взгляд парадоксальная трактовка всего процесса формирования поля в открытом резонаторе с плоскими зеркалами. Резонатор рассматривается как отрезок волновода (*с е р т и к а л ь н ы м* на рис. 6, *в* направлением распространения волн), открытый с обоих концов. В теории волноводов известен следующий результат: если частота колебаний очень близка к критической частоте волны, падающей из волновода на его открытый конец, то эта волна почти полностью отражается от открытого конца. Такая волна в отрезке волновода будет последовательно отражаться от *верхнего* и *нижнего* концов, образуя стоячие колебания. Для очень широкого волновода (ширина волновода L — много больше длины волны) в таких условиях может оказаться волна какого-либо высокого волноводного номера. Это будет возможно не при всех частотах, а только при некоторых дискретных частотах, близких к критическим частотам волн в волноводе ширины L . Таким образом выделяются собственные частоты открытого резонатора. Наиболее интересным при этом оказывается возможность связать радиационные потери в открытом резонаторе с коэффициентом излучения из открытого конца волновода и найти аналитическую форму тока на зеркалах. Сопоставление результатов такого расчета с точными значениями²⁷, полученными по (3,10) на ЭВМ, показало, что они очень близки. Этот аппарат позволяет рассчитать также и резонатор из двух плоских круговых зеркал.

§ 4. КОНФОКАЛЬНЫЕ ФАЗОВЫЕ КОРРЕКТОРЫ

1. Рассмотренные в предыдущем пункте плоские зеркала, для которых $\varphi \equiv 0$, представляют собой вырожденную форму корректора. В них образование волн, поле которых убывает в перпендикулярном к оси z направлении, происходит только вследствие конечности корректоров,

т. е. из-за дифракционных эффектов. При $\varphi \equiv 0$ уравнение (3,10) в бесконечной области не имеет убывающих на бесконечности собственных функций.

Исследование действительно фокусирующих корректоров, концентрирующих пучок вблизи оси вследствие кривизны зеркала или линз, можно начинать с рассмотрения бесконечных корректоров. Чем больше концентрация поля, осуществляемая бесконечными корректорами, тем меньше могут быть размеры конечных корректоров той же формы, обеспечивающих распространение волны с малыми радиационными потерями. Другими словами, формы корректоров конечных размеров, дающих наименьшие потери, должны быть такими же, как у бесконечных корректоров, обеспечивающих наибольшую концентрацию. Это утверждение на первый взгляд представляется не вполне убедительным, так как оно не учитывает перераспределения поля, вызванного дифракцией. Однако ниже (п. 4) мы покажем, что оно может быть при определенных условиях строго обосновано, так что это перераспределение, играющее решающую роль при отсутствии коррекции (3,16), при правильно выбранной коррекции не особенно существенно.

Бесконечные корректоры описываются уравнением (3,10) с бесконечными пределами. Запишем его для двумерной задачи в форме

$$A \frac{e^{-ikL}}{\sqrt{L}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) e^{i \frac{kx\xi}{L}} e^{\frac{i}{2} \left[-\frac{kx^2}{L} + \varphi(x) \right] + \frac{i}{2} \left[-\frac{k\xi^2}{L} + \varphi(\xi) \right]} dx = \lambda w(\xi). \quad (4,1)$$

Мы ограничимся далее только наиболее изученными квадратичными корректорами, т. е. положим

$$\varphi(x) = v \frac{kx^2}{L}. \quad (4,2)$$

Первая собственная функция уравнения (4,1) при условии (4,2) имеет вид

$$w(x) = e^{-\alpha \frac{kx^2}{L}}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{2v-1}}{2}. \quad (4,3)$$

Эта функция будет убывать при $|x| \rightarrow \infty$, только если v лежит в интервале $0 < v < 2$; это справедливо и для остальных собственных функций (4,1).

Наибольшая концентрация достигается при $v = 1$, т. е. при фазовой коррекции

$$\varphi(x) = \frac{k}{L} x^2. \quad (4,4)$$

Эта фазовая коррекция компенсирует члены с квадратами координат в выражении для расстояния между двумя точками различных зеркал. Такое же элементарное рассуждение приводит к тому, что наилучшая фазовая коррекция в трехмерных задачах (т. е. для зеркал и линз прямоугольных или круглых) дается функцией

$$\varphi(x, y) = \frac{k}{L} (x^2 + y^2). \quad (4,5)$$

К формулам (4,4) и (4,5) можно прийти также иным путем, основываясь на наглядных геометрикооптических представлениях. Будем, для определенности, говорить о резонаторах. Потребуем, чтобы все лучи, выходящие из какой-либо точки левого зеркала, после отражения в правом зеркале вновь собрались в одной точке левого зеркала. В лучевой трактовке это означает наименьшее рассеяние энергии, наибольшую ее концентрацию. Это условие будет выполнено, если длина пути для всех лучей,

вышедших из некоторой точки левого зеркала и пришедших в другую точку левого зеркала, одинакова, т. е. не зависит от того, в какой точке правого зеркала данный луч отразился. Это условие также приводит к тому, что фазовая коррекция должна компенсировать члены x^2 и т. д. в R , так что это расстояние должно содержать только произведение координат:

$$\frac{k}{L} (x\xi + y\eta). \quad (4,6)$$

Отсюда вновь получают формулы (4,4) и (4,5).

В оптических интерферометрах Фабри — Перо также начали применять изогнутые зеркала ^{35, 36} с фазовой коррекцией (4,5), хотя при этом стремятся не столько уменьшить радиационные потери, сколько облегчить юстировку прибора.

Согласно (3,11) зеркала резонаторов, для которых выполнено условие (4,4) или (4,5), представляют собой, в пределах точности всего анализа, части (круглые или прямоугольные) поверхностей сфер с центром в середине противоположного зеркала. Так как фокус сферического зеркала отстоит от его вершины на половину радиуса, фокусы обоих зеркал совпадают. Эти системы называют конфокальными. В двумерном случае, т. е. для зеркал в форме лент, зеркала должны быть частями цилиндрических поверхностей, оси которых лежат в середине противоположного зеркала. Формулы (4,4) и (3,14) легко позволяют найти также формы зеркал в зеркальной линии.

В линзовой линии форма линз, обеспечивающих фазовую коррекцию (4,5), зависит от диэлектрической проницаемости материала ϵ . Половина толщины линзы $d(r)$ зависит от r по закону ¹⁷

$$d(r) = \frac{a^2 - r^2}{2L(\sqrt{\epsilon - 1})}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (4,7)$$

который легко найти, определив оптический путь лучей, проходящих через линзу. При этом в пределах точности всего рассмотрения следует производить расчет для лучей, идущих параллельно оси системы; это же приближение сделано и в (3,11).

Такие линзы также являются конфокальными — фокусы двух соседних линз расположены в одной точке, посередине между ними. Все лучи, выходящие из какой-либо точки одной линзы, собираются в одной точке другой линзы, расположенной через одну от данной. В частности, центр одной линзы фокусируется второй линзой в центр третьей.

2. В этом пункте мы приведем основные результаты анализа конфокальных резонаторов. Исходным является, согласно предыдущему, интегральное уравнение (3,10) с фазовой коррекцией (4,4) или (4,5).

Начнем с двумерных задач. Интегральное уравнение введением новых переменных

$$x' = x\sqrt{k/L}, \quad \xi' = \xi\sqrt{k/L} \quad (4,8)$$

приводится к виду

$$\int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} w(x') e^{ix'\xi'} dx' = \sqrt{2\pi}\chi w(\xi'). \quad (4,9)$$

Здесь c определено в (3,4), а собственное значение χ отличается от λ в (3,10) фазовым множителем; потери за один пробег равны $1 - |\chi|^2$.

Это уравнение при $c = \infty$, т. е. для неограниченных корректоров, имеет собственные функции

$$\omega_m(x') = H_m(x') e^{-\frac{1}{2}x'^2}, \quad (4,10)$$

где $H_m(x')$ — полиномы Эрмита ($H_0 = 1$, $H_1(x') = 2x'$ и т. д.), и собственные значения $\chi_m = i^m$ (37, № 7.376.1). Уравнение (4,9) можно решать, разлагая ядро и искомую функцию по функциям (4,10). Тогда χ определится из условия существования нетривиального решения системы бесконечного числа линейных уравнений для коэффициентов разложения искомой собственной функции по функциям ω_m . Однако для уравнения (4,9) известно³⁸ также явное выражение для собственных функций и собственных значений при любом значении параметра c . Собственные функции пропорциональны азимутальным волновым функциям вытянутого сфероида от параметра c и аргумента x/a ,

$$\omega_m = S_{0m}(c, \frac{x}{a}), \quad (4,11)$$

а собственные значения пропорциональны радиальным функциям от аргумента 1:

$$\chi_m = \sqrt{\frac{2c}{\pi}} i^m R_{0m}^{(1)}(c, 1), \quad (4,12)$$

где S и R определены в работе³⁸.

Рис. 8 дает потери за один прогон в функции c для $m = 0, 1, 2$.

Эти результаты непосредственно относятся также к прямоугольным зеркалам. Потери, обязанные конечности зеркал в направлениях x и y , складываются, а собственными функциями являются произведения соответствующих одномерных функций (4,11), каждая из которых зависит от соответствующего значения c .

Поле на зеркалах близко к полю на бесконечных зеркалах и при небольших m описывается в основном экспоненциальным множителем в (4,10):

$$\omega(x) \sim e^{-x^2/2x_s^2}, \quad \text{где} \quad x_s = \sqrt{\frac{L}{k}}, \quad (4,13)$$

особенно если a заметно больше ширины «светового пятна» x_s и дифракционные эффекты невелики.

Внутри резонатора поле убывает при удалении от плоскости $x = 0$ примерно по тому же закону (4,13), что и ток на зеркалах, но несколько быстрее. Эффективная протяженность поля меньше всего в средней плоскости между зеркалами; там она в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем на зеркалах.

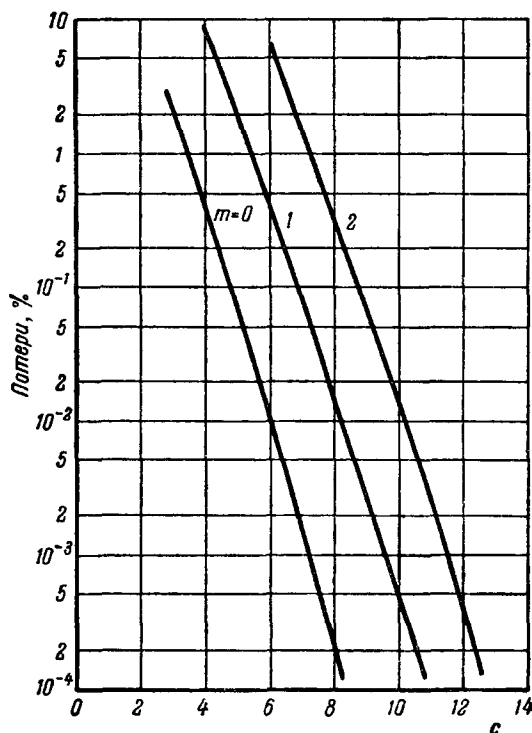


Рис. 8. Радиационные потери для ленточных конфокальных корректоров³⁸.

Выражение (4,13) для x_s легко получить и из элементарных соображений. Размер фокального пятна, как известно, равен длине волны, деленной на синус угла, под которым из фокуса видна освещающая его площадка. Если эта площадка имеет размер x_s , то величина фокального пятна равна L/kx_s . В устройствах с повторяющимся полем, которые мы рассматриваем, световое пятно должно подчиняться тому же условию, т. е. должно быть $L/kx_s \approx x_s$.

Величина \sqrt{c} равна отношению a к $\sqrt{L/k}$. При больших c в колебаниях типа (4,13) будет освещена лишь малая часть корректора. Возможны, разумеется, и такие колебания, при которых освещен весь или почти весь корректор. В терминах развиваемой здесь теории это соответствует колебаниям высоких номеров; световое пятно, т. е. область, в которой $w(x)$ имеет тот же порядок, что и $w(0)$, растет, согласно (4,10), с номером m . Аналогичные условия имеют место и в закрытых волноводах; при $ka \gg 1$, например, плоская волна, т. е. поток оптических лучей, падая на устье волновода, порождает совокупность волноводных волн высоких номеров. При $c/2\pi \gg 1$ не только основное колебание ($m = 0$), но и много высших типов имеют малые радиационные потери, и структура распространяющейся волны в сильной степени определяется характером возбуждения.

Для конфокальных резонаторов с круглыми зеркалами фазовая коррекция дается функцией (4,5). Интегральное уравнение для функции $w(r, \vartheta)$ (ϑ — угол в цилиндрической системе координат) имеет решения с любой зависимостью от ϑ . Задавшись этой зависимостью, можно в (4,10) произвести интеграцию по ϑ , после чего останется одномерное уравнение; например, для симметричного колебания, которое, как оказывается, имеет наименьшее затухание, $w = w(r)$ удовлетворяет уравнению ²⁷

$$\lambda w\left(\frac{r_1}{r_s}\right) = \int_0^{\sqrt{c}} w\left(\frac{r}{r_s}\right) J_0\left(\frac{r}{r_s} \frac{r_1}{r_s}\right) \frac{r}{r_s} d\left(\frac{r}{r_s}\right). \quad (4,14)$$

Собственными функциями этого уравнения ³⁷ при $c = \infty$ являются произведения полиномов Лагерра $L_m(r^2/r_s^2)$ ($L_0 = 1$, $L_1(x) = 1 - x$ и т. д.) на функцию

$$e^{-r^2/2r_s^2}, \quad r_s = \sqrt{L/k}. \quad (4,15)$$

Величину r_s можно считать радиусом светового пятна на зеркалах. В работах ^{17, 39} уравнение (4,14) и аналогичные уравнения для $w(r)$ в выражении $w(r, \vartheta) = w(r) \exp(in\vartheta)$ решались разложением искомой функции и ядра в ряды по собственным функциям уравнения при $c = \infty$ и сведением к бесконечной системе алгебраических уравнений. В ²⁷ это уравнение непосредственно решалось методом итераций. Результаты обоих методов численного анализа совпадают.

Рис. 9 дает потери (в процентах) на один пробег для основной волны в функции c , рис. 10 — амплитуду тока на зеркалах в функции r/a при нескольких значениях c ²⁷. Эти два рисунка (и более подробные и полные данные, относящиеся к другим волнам, в ^{27, 38}) вместе с формулой (4,5) являются, по существу, центральным результатом теории открытых резонаторов. Они показывают, в частности, что при $c = 2\pi$ радиационные потери весьма малы, однако они очень быстро растут с уменьшением c , увеличиваясь примерно в сто раз при уменьшении c вдвое.

3. Рассмотрение неограниченных фазовых корректоров оказывается полезным также и при исследовании конечных неконфокальных корректоров с квадратичной коррек-

рекции (4,2); если $a \geq x_s$, то поля на конечных и бесконечных корректорах близки. Для неограниченных симметричных квадратичных корректоров трехмерная задача всегда сводится к двумерной, которой мы и ограничимся.

Для двух одинаковых зеркал с радиусом кривизны q поле записано в (4,3), где надо положить $v = L/q$. При $v = 1$, т. е. для конфокальных резонаторов, (4,3) совпадает, разумеется, с (4,10) при $n = 0$ или с (4,13). При $v = 0$ $\varphi(x) \equiv 0$, мы имеем вырожденный случай плоских зеркал ($q = \infty$). Те же в точности условия имеют место и при $v = 2$, когда кривизна зеркал вдвое больше, чем у конфокальных зеркал, т. е. когда совпадают их центры кривизны. При $v < 0$ или $v > 2$, т. е. при зеркалах с еще большей кривизной или при выпуклых зеркалах, концентрация поля бесконечными зеркалами невозможна, колебания не образуются.

Выражение $2v - v^2$ инвариантно относительно подстановки $v' = 2 - v$. Поэтому резонаторы, соответствующие таким двум значениям v и v' , согласно (4,3) обладают одинаковой структурой поля на зеркалах. Кривизна зеркал одного из этих резонаторов больше, чем у конфокальных резонаторов, другого — меньше. Ширина светового пятна обоих резонаторов на зеркалах одинакова и, согласно (4,3), равна

$$\frac{\sqrt{L/k}}{\sqrt{2v - v^2}}. \quad (4,16)$$

По-видимому, можно считать, что если только a больше (4,16), то радиационные потери таких неконфокальных резонаторов равны потерям конфокальных резонаторов с тем же отношением a к ширине светового пятна. Иными словами, потери неконфокальных резонаторов можно определить по графику

$$c = \frac{ka^2}{L} \left(\frac{2L}{q} - \frac{L^2}{q^2} \right)^{1/2}. \quad (4,17)$$

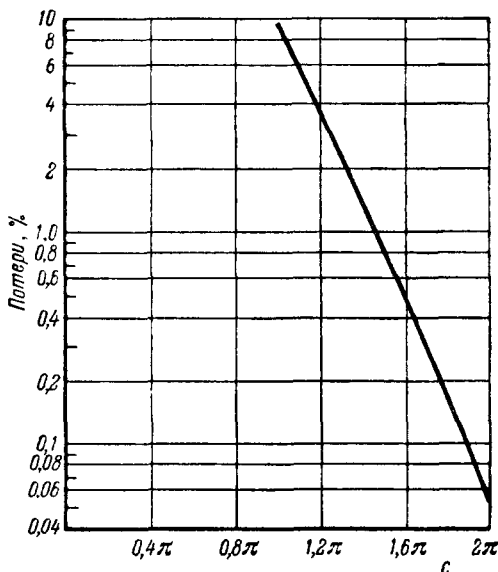


Рис. 9. Радиационные потери для круглых конфокальных корректоров ²⁷.

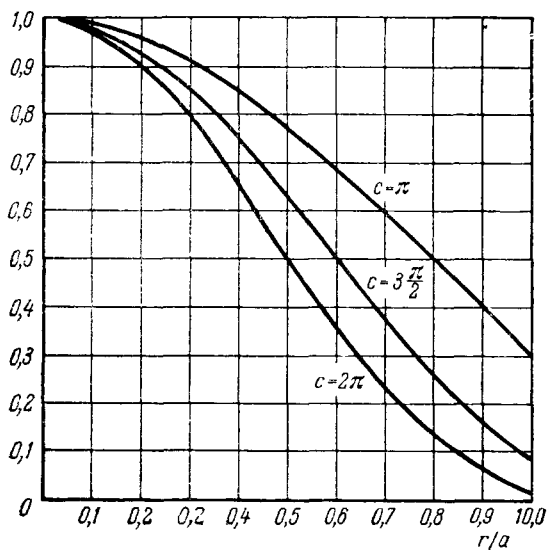


Рис. 10. Ток на зеркалах конфокальных круглых корректоров ²⁷.

ку рис. 8, если под c понимать параметр $ka^2 (2v - v^2)^{1/2} / L$, равный

Это предположение ^{38, 40} — не вполне строгое, так как оно не учитывает различия в возмущении поля дифракционными эффектами в сопоставляемых резонаторах, — для одного значения c ($c = \pi$) проверено в ⁴¹ прямым расчетом. Пунктирная кривая рис. 11 дает потери в функции $v - 1$, вычисленные по (4,17) и графику рис. 8; сплошная кривая получена численным интегрированием уравнения (3,10) при условии (4,2).

Такой же анализ может быть произведен для резонатора из двух неодинаковых зеркал. Пусть первое зеркало имеет радиус кривизны q_1 , второе — q_2 , так что фазовые коррекции определяются (4,2),

где для первого зеркала $v_1 = L/q_1$, для второго $v_2 = L/q_2$. Функции $w_1(x)$ и $w_2(\xi)$, дающие токи на первом и втором зеркалах, связаны между собой преобразованием

$$\lambda_1 w_2(\xi) = e^{\frac{i}{2} \varphi_2(\xi)} \times \\ \times \int w_1(x) e^{\frac{i}{2} \varphi_1(x)} K(x, \xi) dx \quad (4,18)$$

и вторым таким же преобразованием от $w_2(\xi)$ к $w_1(x)$. Отсюда можно получить интегральное уравнение для $w_1(x)$ или $w_2(\xi)$ ⁴¹. Проще, однако, сразу положить

$$w_1(x) \sim e^{-\alpha_1 \frac{hx^2}{L}}, \quad w_2(\xi) \sim e^{-\alpha_2 \frac{h\xi^2}{L}}. \quad (4,19)$$

Тогда для α_1 и α_2 получаются из (4,18) простые выражения:

$$\alpha_1 = \frac{v_1 - 1}{2} \sqrt{\frac{1}{(v_1 - 1)(v_2 - 1)} - 1}, \quad (4,20)$$

$$\alpha_2 = \frac{v_2 - 1}{2} \sqrt{\frac{1}{(v_1 - 1)(v_2 - 1)} - 1}.$$

Рис. 11. Радиационные потери для ленточных корректоров ⁴¹.

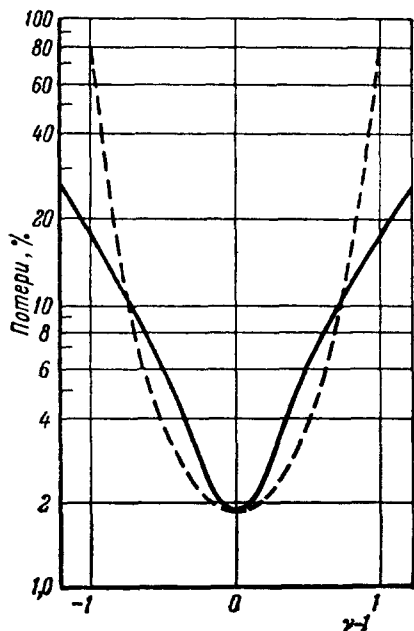
При $v_1 = v_2$ выражения (4,19) и (4,20) переходят в (4,3). Не при всех значениях v_1 и v_2 α_1 и α_2 будут вещественны. Если подкоренное выражение в (4,20) отрицательно, то α_1 и α_2 — чисто мнимые числа, и поля (4,19) в бесконечных корректорах не убывают на бесконечности. В резонаторах с конечными корректорами это соответствует очень большим радиационным потерям. Колебания имеют примерно тот же характер, что и в резонаторах из плоских или концентрических зеркал.

Область значений параметров v_1 и v_2 , в которых бесконечные корректоры формируют пучок конечной энергии, согласно (4,20) определяется условиями

$$0 < (v_1 - 1)(v_2 - 1) < 1. \quad (4,21)$$

В области (4,21) выполняется также очевидное энергетическое требование $|\lambda_1 \lambda_2| = 1$. Условие (4,21) было впервые получено в работе ⁴⁰ иным методом.

Рис. 12 из ⁴¹ вычерчен в координатах $v_1 - 1$, $v_2 - 1$. Заштрихована область, в которой нарушается (4,21). В точках, лежащих в этой области, в бесконечных корректорах колебания не формируются, а в конеч-



ных — обладают значительными потерями. Кривые на этом рисунке показывают затухание для конечных двумерных корректоров ($c = \pi$); в заштрихованной области оно значительно быстрее возрастает при уходе от конфокальной системы.

Неожиданной оказывается неустойчивость конфокальной системы. Если радиусы кривизны обоих зеркал отклоняются от условия $q = L$ в разные стороны ($q_1 > L$, $q_2 < L$), то возникает система нефокусирующая (α_1 и α_2 — чисто мнимые), ограничение поля в конечных системах обзано только дифракции на краях и это сопровождается значительными радиационными потерями. Этот эффект был проверен экспериментально ⁴². Физически, разумеется, никаких скачкообразных изменений режима колебаний при малом изменении кривизны не возникает; бесконечный корректор является хорошей идеализацией только в том случае, если в нем поле быстро убывает при $|x| \rightarrow \infty$. Однако, по-видимому, целесообразно применять резонаторы с несколько большей или меньшей кривизной зеркал, чем у конфокальных резонаторов, чтобы обезопасить себя от случайного перехода в область больших потерь ⁴⁰.

Заметим, что рассмотрение резонаторов с неодинаковыми зеркалами не позволяет сделать никаких суждений о допусках в линии. Отклонение формы одного зеркала в резонаторе от расчетной эквивалентно одинаковому отклонению форм всех четных (или всех нечетных) корректоров в линии, т. е. случаю, практически неосуществимому. Вопрос о допусках в линии должен быть решен независимо; нарушается, в частности, тождественность задач о линиях и о резонаторах.

4. Конфокальные корректоры (4,4) и (4,5) обладают следующим свойством: собственные функции w интегрального уравнения (3,10) вещественны. Это означает, что ток на зеркалах (или поле на средней плоскости линз) синфазный. Это обстоятельство подчеркивает геометрооптический смысл принятой фокусировки. Все лучи, выходящие из различных точек, например, левого зеркала, приходят в центр ($\xi = 0$, $\eta = 0$) правого зеркала в одной и той же фазе, так как поля их складываются. Лучи, приходящие в любую ($\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$) точку правого зеркала из точек (x, y) и $(-x, -y)$, складываясь, также дают вещественную величину; синфазность тока на левом зеркале обеспечивает его синфазность также и на правом зеркале.

Однако вещественность $w(x, y)$ существенна еще в одном вопросе, а именно при рассмотрении некоторых оптимальных свойств конфокальных резонаторов, к которому мы переходим.

В п. 1 мы указали, что фазовая коррекция (4,4), (4,5) является оптимальной в том смысле, что она формирует пучок, для которого радиационные потери оказываются наименьшими возможными при данных частоте, сечении пучка и расстоянии между корректорами. Дадим теперь доказательство этого положения.

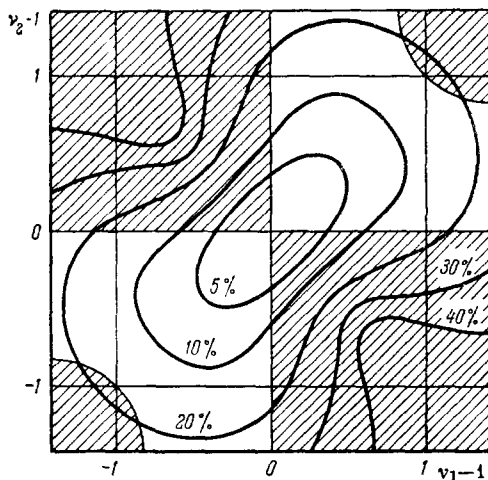


Рис. 12. Потери в резонаторе из различных ленточных корректоров ⁴¹.

Пусть задано поле $u(x, y)$ на апертуре, т. е. в сечении пучка плоскостью $z = 0$. Согласно (3,2) поле в сечении $z = L$ выражается через u по формуле

$$v(\xi, \eta) = \int u(x, y) K(x, y, \xi, \eta) dx dy. \quad (4,22)$$

Ядро K дано в (3,8); оно удовлетворяет условию $K(x, y, \xi, \eta) = K(y, x, \eta, \xi)$. В (4,22) и во всех последующих формулах этого пункта интеграл взят по площади апертуры корректоров, т. е. по сечению пучка при $z = 0$ и $z = L$. Образуем ⁴³ величину

$$\mathcal{L}[u(x, y)] = \frac{\int v(\xi, \eta) v^*(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\int u(x, y) u^*(x, y) dx dy} \quad (4,23)$$

и назовем ее коэффициентом передачи. Строго говоря, \mathcal{L} является отношением не интегральных потоков энергии сквозь первую и вторую апертуры, а интегральных плотностей энергии. Плотность и поток энергии пропорциональны друг другу только для полей, близких к плоским волнам. Если $u(x, y)$ или $v(\xi, \eta)$ заметно меняются на расстояниях порядка длины волны, то для коэффициента передачи энергии надо писать иное выражение, которое, однако, значительно сложнее исследовать, чем (4,23). Принимая для \mathcal{L} выражение (4,23), мы исключаем из рассмотрения «сверхнаправленные» системы, аналогичные сверхнаправленным антеннам.

Найденные ниже функции $u(x, y)$, обеспечивающие максимальность функционала \mathcal{L} , оказываются гладкими. Следовательно, они действительно обеспечивают оптимальное решение среди несверхнаправленных систем.

Подставляя (4,22) в (4,23), получим

$$\mathcal{L}[u(x, y)] = \frac{\iint u(x, y) u^*(x', y') K_1(x, y, x', y') dx dy dx' dy'}{\int u(x, y) u^*(x, y) dx dy}, \quad (4,24)$$

где

$$K_1(x, y, x', y') = \int K(x, y, \xi, \eta) K^*(x', y', \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (4,25)$$

Экстремум функционалу (4,24) дает, как известно, функция $u(x, y)$, удовлетворяющая уравнению

$$\int u(x, y) K_1(x, y, x', y') dx dy = \lambda u(x', y'). \quad (4,26)$$

Его собственные значения вещественны, так как ядро K_1 (4,25) эрмитово; наибольшее из них равно искомому максимуму коэффициента \mathcal{L} ⁴³.

Покажем, следуя ²⁴, что поле собственных волн конфокальных резонаторов (или соответствующих линий) удовлетворяет уравнению (4,26). Отмеченная выше вещественность функций $w(x, y)$ — собственных функций уравнения (3,10) для фазовой коррекции (4,5) — означает, что функции $u(x, y)$ удовлетворяют условию

$$u^*(x, y) = u(x, y) e^{-i\varphi(x, y)}. \quad (4,27)$$

Уравнение (3,7) имеет поэтому для полей конфокальных резонаторов вид

$$\int u(x, y) K(x, y, \xi, \eta) dx dy = \lambda u^*(\xi, \eta). \quad (4,28)$$

Возьмем комплексно-сопряженное к (4,28) уравнение и образуем итерированное уравнение. Тогда получится уравнение, тождественное с (4,26), в котором собственным значением является величина $|\lambda|^2$.

Таким образом, пучок, формируемый корректорами (4,5), оптимален, так как функция (4,5) обладает тем свойством, что уравнение (3,10) порождает вещественные собственные функции. Наибольшее достижимое значение коэффициента передачи (4,23) равно квадрату модуля наибольшего собственного значения уравнений (3,7) и (3,10).

5. Очевидно, что поле, формируемое в линии или резонаторе с оптимальными фазовыми корректорами, обеспечивает наименьшие потери и при одной передаче между двумя антеннами с одинаковыми апертурами, расположенными на относительно малом расстоянии порядка ka^2 друг от друга. Однако существует также простая и плодотворная аналогия⁴⁴ между передачей на ближние и на дальние расстояния. Можно показать, что найденные выше функции $w(x, y)$ одновременно решают также и задачу об антеннах с оптимальными диаграммами. Оказывается, что если на плоской апертуре антенны создать синфазное поле, распределение которого дается решением уравнения (3,10), диаграмма излучения такой антенны будет обеспечивать концентрацию максимальной относительной энергии внутри заданного угла $2\alpha^*$). Параметр s для этого распределения равен

$$c = ka\alpha \quad (4,29)$$

Известно, что ширина диаграммы направленности имеет порядок $2\pi/ka$. Уравнение (4,29) и полученное выше условие $s/2\pi \geq 1$, необходимое для того, чтобы энергия вне заданного угла была мала, показывают, что если не переходить к сверхнаправленным антеннам, ширина диаграммы не может быть заметно уменьшена. Однако создание именно оптимального распределения поля (по рис. 10) позволяет сделать суммарную энергию вне угла 2α весьма малой. Эта энергия равна радиационным потерям в эквивалентной конфокальной системе. Для круговых диафрагм она дается кривой рис. 9; параметр s определяется по (4,29). Для того чтобы, например, энергия в боковых лепестках не превышала $4 \cdot 10^{-3}$ части всей излученной энергии, отношение радиуса апертуры к длине волны должно быть не меньше $0,8/\alpha$. Небольшое увеличение s позволяет уменьшить энергию в боковых лепестках практически до нуля, однако заметно уменьшить α при заданном ka нельзя, так как с уменьшением s очень быстро убывает Λ .

Сформулируем еще раз условие оптимальности переизлучателей, расположенных в ближней зоне, и условия оптимальности антенн. Пусть заданы размер корректоров, длина волны и расстояние между корректорами. Этим задан параметр s (3,1). Делая корректоры конфокальными, можно обеспечить максимальную возможную передачу энергии между ними; потери зависят от величины s и находятся из рис. 8 и 9. При этом создается поле, синфазное на вогнутой поверхности зеркала (или на плоской поверхности середины линзы). Распределение поля по радиусу для симметричного (наиболее выгодного) распределения для круглых корректоров дано на рис. 10. Это же распределение, созданное на плоской поверхности, формирует в дальней зоне оптимальную диаграмму для телесного угла, равного углу, под которым один корректор виден из центра соседнего. Параметр s для диаграммы дается формулой (4,29).

*) Для двумерной задачи это следует из сопоставления результатов, содержащихся в работах ^{38, 46-48}; однако можно дать общее доказательство, справедливое и для прямоугольной и круглой апертуры.

6. Расчет систем, находящихся в квазиоптических условиях, формально сводится к асимптотическим задачам дифракции. Эти задачи имеют иной характер, чем классические задачи, для которых уже давно разрабатываются эффективные методы расчета. Применение параболического уравнения не привело пока к качественно новым результатам. Теория, основанная на волновых уравнениях или уравнениях Максвелла, всегда сложна, и переход к асимптотическим условиям очень громоздок.

С другой стороны, хотя прямое применение лучевых представлений неоправдано, нам все же представляется, что при построении общей и эффективной теории исходным пунктом должна служить некоторая модификация лучевой, а не волновой оптики. Эта модификация должна состоять в том, что в понятия геометрической оптики будут включены несколько — два, три (не более) — простейших результата теории дифракции. Может быть, достаточно будет использовать теорию фокального пятна и теорию дифракции на полуплоскости. Если бы такое простое расширение лучевой трактовки удалось, то можно было бы попытаться применить к квазиоптическим задачам весь грандиозный арсенал геометрической оптики. В этом же направлении, по-видимому, ориентирована и работа ⁴⁹.

Было бы желательно, например, так построить лучевую трактовку конфокальных систем, чтобы сделать строгим именно геометрооптическое доказательство их оптимальности. Тогда, вероятно, удалось бы внести большую ясность в вопрос о допусках и о характере тех серьезных нарушений в работе конфокальных систем, которые возникают при некоторых деформациях корректоров ⁴⁰⁻⁴². Разработку входных преобразователей для линий, согласующих поле источника с полем волны в линии, вероятно, также следовало бы базировать на оптической теории линз. Более уверенное вторжение геометрической оптики в теорию широких волноводов позволит построить гибкую и эффективную теорию призм, линз и других устройств в волноводах.

Примечание при корректуре. Параболическое уравнение использовано, кроме ²⁴, также в работах ⁵⁰⁻⁵³. В ^{50,52} интересна, в частности, трактовка экспоненциального убывания поля при малых m (4,10) как проявления каустик, ограничивающих совокупность лучей. В ⁵¹, примыкающей к ²⁹, при выводе уравнения (3,10) использован тот факт, что зависящий от x, y сомножитель в ядре (3,8) при замене L на $z - \xi$ является функцией Грина параболического уравнения. В ⁵³ предложено использовать параболическое уравнение для уточнения геометрооптического расчета линз.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Соломонович, УФН 77 (4), 589 (1962).
2. J. Dees, A. Sheppard, Electronics 36 (2), 33 (1963).
3. R. Fellers, Microwave J. 5, 80 (1962); Зарубежная радиоэлектроника, № 11, 89 (1962).
4. Л. Д. Розенберг, Рассказ о неслышном звуке, М., Изд-во АН СССР, 1961.
5. Ю. И. Казначеев, Широкополосная дальняя связь по волноводам, М., Изд-во АН СССР, 1959.
6. S. Miller, PIRE 50 (2), 1215 (1962).
7. П. Л. Капица, Электроника больших мощностей, М., Изд-во АН СССР, 1962.
8. G. Comte, F. Carfort, A. Pouthus, J. Paris, Câbles et Trans. 11 (4), 342 (1957). (Волноводные линии передачи с малыми потерями, М., ИЛ, 1960.)
9. Marcatali, BSTJ 40 (1), 185 (1961).
10. Р. Б. Ваганов, Радиотехника и электроника 8 (7), 1264 (1963).
11. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника 8 (7), 1111 (1963); ДАН СССР 144 (2), 382 (1962).
12. Б. В. Костров, Е. И. Нефедов, Радиотехника и электроника 9 (4) (1964).
13. И. П. Котик, А. Н. Сивов, Радиотехника и электроника 9 (1964).

14. Л. А. Вайнштейн, Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, М., Изд-во «Сов. радио», 1953.
 15. Б. Нобль, Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, М., ИЛ, 1962.
 16. Хроника, Радиотехника и электроника 8 (6), 1087 (1963).
 17. G. Goubau, F. Schwing, IRE Trans. AP-9 (3), 248 (1961).
 18. J. Christian, G. Goubau, IRE Trans. AP-9 (3), 256 (1961).
 19. C. Tolbert, A. Straiton, PIRE 49 (3), 649 (1961).
 20. Electronic Design, № 15, 18 (July 1961).
 21. L. Bertram, Microwave J. 5 (8), 69 (1961).
 22. Г. Д. Малюжинец, УФН 69, 321 (1959).
 23. Б. З. Каценеленбаум, Авторское свидетельство 21а4, 4868, № 146362 от 26. V 1961; Бюллетень изобретений, № 8, 30 (1962).
 24. Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов, Аннотация докладов на II Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн, г. Горький, 7—13 июня 1962 г., М., Изд. АН СССР; Известия вузов (Радиофизика) (1964).
 25. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника 8 (9), 1516 (1963).
 26. А. И. Барчуков, А. М. Прохоров, Радиотехника и электроника 4 (12), 2094 (1959).
 27. A. Fox, T. Li, BSTJ 40 (2), 453 (1961).
 28. A. Fox, T. Li, PIRE 48 (11), 1904 (1961).
 29. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ 44 (3), 1050 (1963).
 30. R. Zimmerer, M. Anderson, G. Strine, Y. Beers, IEEE Trans., MTT-11, № 2, 142 (1963).
 31. F. Schwing, Arch. d. Electr. Übert. 15 (12), 555 (1961).
 32. G. Kotik, M. Newstein, J. Appl. Phys. 32 (2), 178 (1961).
 33. S. Morgan, IEEE Trans., MTT-11, № 3, 191 (1963).
 34. J. Christian, G. Goubau, PIRE 49 (11), 1679 (1961).
 35. P. Connes, J. phys. et radium 19, 262 (1958).
 36. А. П. Кириченко, Измерит. техн., № 1, 18 (1963).
 37. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1962.
 38. G. Boyd, J. Gordon, BSTJ 40 (2), 489 (1961).
 39. J. Beyer, E. Scheibe, IRE Trans. AP-10, № 3 (1962).
 40. G. Boyd, H. Kogelnik, BSTJ 41 (4), 1347 (1963).
 41. A. Fox, T. Li, PIEEE 51 (1), 80 (1963).
 42. R. Zimmerer, PIEEE 51 (1), 474 (1963).
 43. A. Kay, IRE Trans. AP-8 (6), 586 (1960).
 44. А. М. Покрас, Перископические антенны и беспроводные линии передачи, М., Связьиздат, 1963.
 45. М. С. Гуревич, Радиотехника и электроника 1 (3), 313 (1956).
 46. D. Slepian, H. Pollak, BSTJ 40 (1), 43 (1961).
 47. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике, М., Физматгиз, 1962.
 48. H. Landau, H. Pollak, BSTJ 40 (1), 65 (1961).
 49. G. Goubau, Symposium on Electromagnetic Theory and Antennas, Copenhagen, June 1962, Proceedings, 907.
 50. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ 45 (3 (9)), 648 (1963).
 51. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ 34 (2), 193 (1964).
 52. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ 34 (2), 205 (1964).
 53. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника 9 (1964).
-

