

539.9

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

А. А. Рухадзе и В. П. Силин

Электродинамика сред с пространственной дисперсией в последние годы развивается весьма интенсивно, в частности, благодаря теоретическому изучению свойств плазмы. Большинство электродинамических задач, рассмотренных в предшествующие годы для сред с пространственной дисперсией, было посвящено изучению электромагнитных волн в неограниченной однородной среде либо исследованию эффектов, связанных с наличием четкой поверхности, ограничивающей также однородную среду¹. В самое последнее время появился целый ряд работ, посвященных теории электромагнитных свойств слабонеоднородной плазмы. Прогресс, достигнутый в развитии такой теории, в первую очередь связан с перенесением метода геометрической оптики на электродинамику сред с пространственной дисперсией. В настоящем обзоре мы изложим основы метода геометрической оптики применительно к средам с пространственной дисперсией. Рассматривая конкретную задачу о колебаниях слабонеоднородной плазмы, удерживаемой сильным магнитным полем, мы приведем ряд результатов, характеризующих спектры собственных колебаний плазмы. Такие спектры описываются фазовыми интегралами («квазиклассическими правилами квантования») Бора — Зоммерфельда². С помощью таких «квазиклассических правил квантования» проанализированы спектры колебаний и получены условия неустойчивости слабонеоднородной плазмы.

§ 1. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СРЕД С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ И ТЕНЗОР ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ, УДЕРЖИВАЕМОЙ СИЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Плазма, как известно, является такой средой, электромагнитные свойства которой во многом связаны не только с частотной, но и с пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости. Понятие пространственной дисперсии вводилось ранее для однородных сред. На языке материальных уравнений наличие пространственной дисперсии проявляется в том, что в соотношении¹

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\epsilon}_{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') E_j(\mathbf{r}', t'), \quad (1.1)$$

связывающем индукцию с электрическим полем, ядро интегральной связи $\hat{\epsilon}_{ij}$ зависит не только от времени^{*)}, но и от пространственных переменных.

^{*)} Соответствующая зависимость определяет временную или частотную дисперсию диэлектрической проницаемости.

Для однородных сред такая зависимость возникает лишь от разности координат точек, в которых рассматриваются поле и индукция. При этом тензор диэлектрической проницаемости определяется соотношением

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{\varepsilon}_{ij}(t, \mathbf{r}). \quad (1,2)$$

В произвольной неоднородной среде уже нельзя записать соотношение (1,1). Поэтому вместо тензора диэлектрической проницаемости (1,2) должна вводиться функция, зависящая от двух векторов, что делает теорию электромагнитных свойств неоднородных сред существенно более громоздкой и сложной¹. С другой стороны, ясно, что в слабонеоднородных средах при рассмотрении длин волн, много меньших характерных размеров неоднородности, можно надеяться на существенное упрощение теории, как это обычно имеет место при использовании метода геометрической оптики.

Для слабонеоднородной среды материальное уравнение, дополняющее уравнения поля

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D}' &= 4\pi q_0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1,3)$$

можно записать в следующем виде²:

$$D'_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{r}) E_j(\mathbf{r}', t'). \quad (1,4)$$

При этом, говоря о слабой неоднородности, будем считать, что зависимость ядра интегрального соотношения (1,4) от $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ является более резкой, чем зависимость от $\mathbf{r}$, поскольку именно последняя связана с пространственной неоднородностью. Такая форма записи материального уравнения весьма удобна для использования приближения геометрической оптики.

Представим электрическое поле в виде⁴

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\Psi(\mathbf{r}, t)}, \quad (1,5)$$

где главная, наиболее сильная зависимость поля от координат и времени определяется эйконалом Ψ , а амплитуда $\mathbf{E}_0$ принимается медленно меняющейся функцией. Для не зависящих от времени сред удобно пользоваться укороченным эйконалом⁵)

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = \Psi + \omega t. \quad (1,6)$$

В нулевом приближении геометрической оптики при отсутствии внешних источников уравнения поля (1,3) и материальное уравнение (1,4) могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{kD}' &= 0, & [\mathbf{kB}] &= -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}', & [\mathbf{kE}] &= \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, & \mathbf{kB} &= 0, \\ D'_i(\mathbf{r}, t) &= e^{-i\omega t + i\Psi_1(\mathbf{r})} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) E_{0j}. \end{aligned} \right\} \quad (1,7)$$

Здесь $\mathbf{k} = \nabla \Psi_1(\mathbf{r})$ — локальный волновой вектор, а (см. ³)

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{r}' \varepsilon'_{ij}(t, \mathbf{r}', \mathbf{r}) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}'}. \quad (1,8)$$

*) Поскольку вопрос о медленно изменяющихся во времени средах изучен в теории электромагнитных свойств сред с частотной дисперсией, ниже мы сконцентрируем внимание на пространственной неоднородности и пространственной дисперсии.

Формула (1,8) аналогична формуле (1,2). Именно поэтому величину, определяемую формулой (1,8), мы будем называть тензором диэлектрической проницаемости слабонеоднородной среды. При написании уравнений (1,7), (1,8) мы пренебрегли зависимостью $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{k}$ от координат. Для возможности такого пренебрежения необходимо выполнение предположения о большой величине компоненты волнового вектора в направлении пространственного изменения свойств среды. Именно, произведение такой компоненты на характерное расстояние изменения свойств среды должно быть значительно больше единицы:

$$k_L L \gg 1, \quad (1,9)$$

где L — характерный размер неоднородности среды, а k_L — проекция волнового вектора на направление неоднородности (см. также условие (2,3)).

Условие разрешимости уравнений (1,7) имеет вид³

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) \right| = 0. \quad (1,10)$$

Уравнение (1,10) является уравнением эйконала. Отличие уравнения (1,10) от соответствующего уравнения для сред без пространственной дисперсии заключается в зависимости ε_{ij} от $\mathbf{k}$. Поэтому в общем случае уравнение (1,10) является трансцендентным относительно $\mathbf{k}$, а не степенным, как это имеет место в случае геометрической оптики сред без пространственной дисперсии.

Часто электромагнитное поле можно считать потенциальным ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, $\text{rot } \mathbf{E} = 0$). Тогда уравнение эйконала запишется в виде

$$k_i k_j k^{-2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) \equiv \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0. \quad (1,11)$$

В последующих параграфах мы будем пользоваться как уравнением (1,10), так и уравнением (1,11), рассматривая конкретные спектры колебаний плазмы. Уравнение эйконала само по себе, конечно, не определяет спектра колебаний поля, и об определении спектров собственных частот говорится в следующем параграфе. Ниже в этом параграфе мы дадим вывод тензора диэлектрической проницаемости слабонеоднородной плазмы без столкновений, удерживаемой сильным магнитным полем. При этом, во-первых, мы получим конкретные выражения, служащие иллюстрацией записанных выше формул. Во-вторых, сможем получить исходные соотношения для последующего анализа спектров колебаний плазмы и рассмотрения вопроса об устойчивости плазмы, удерживаемой сильным магнитным полем.

Для описания плазмы без столкновений, как обычно, используем кинетическое уравнение в приближении самосогласованного поля

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (1,12)$$

Необходимо начать с рассмотрения равновесного состояния плазмы. Будем считать все величины, характеризующие основное состояние плазмы, зависящими лишь от одной координаты x . Постоянное магнитное поле $\mathbf{B}_0$ с прямыми силовыми линиями будем считать параллельным оси z . Полагая, что в равновесном состоянии отсутствует электрическое поле *),

*) В интересующем нас случае плазмы низкого давления, когда неоднородностью магнитного поля можно пренебречь (см. ниже), всегда можно выбрать такую систему координат, в которой постоянное электрическое поле отсутствует.

из уравнения (1,12) получаем следующее уравнение, определяющее функцию распределения частиц в равновесной плазме:

$$v_{\perp} \cos \varphi \frac{\partial f_0}{\partial x} - \Omega \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} = 0. \quad (1,13)$$

Здесь $\Omega = \frac{eB_0}{mc}$ — ларморова частота частиц, $v_{\perp}$ — абсолютная величина проекции скорости частицы на плоскость, перпендикулярную к магнитному полю, и, наконец, φ — полярный угол, характеризующий положение проекции скорости в этой плоскости.

Наше первое конкретное предположение о слабой неоднородности плазмы будет заключаться в том, что мы примем изменение величин, характеризующих равновесное состояние плазмы, малым на расстояниях порядка ларморова радиуса частиц. Именно, ниже считаем выполненным неравенство

$$\frac{v_T}{\Omega L} \ll 1, \quad (1,14)$$

где $v_T = \sqrt{T/m}$ — тепловая скорость частиц, а L — характерный размер неоднородности основного состояния плазмы. С точностью до членов первого порядка по этому параметру малости решение уравнения (1,13) можно записать в виде

$$f_0(v, x) = \left(1 + \frac{v_{\perp} \sin \varphi}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) F(v_{\perp}, v_z, x), \quad (1,15)$$

где $F(v_{\perp}, v_z, x)$ — произвольная функция скоростей $v_{\perp}$ и v_z и координаты x .

Подставляя выражение (1,15) в уравнения поля, получаем следующие уравнения равновесия плазмы:

$$\sum e \int dp F = \sum e N = 0, \quad (1,16)$$

$$\sum e \int dp v_z F = 0, \quad (1,17)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{B_0^2}{8\pi} + P_{\perp} \right) = 0, \quad (1,18)$$

где

$$P_{\perp} = \sum \int dp \frac{mv_{\perp}^2}{2} F, \quad (1,19)$$

а суммирование распространяется по всем сортам заряженных частиц плазмы. Мы ограничимся рассмотрением случая плазмы низкого давления, когда

$$\beta = \frac{8\pi P_{\perp}}{B_0^2} \ll 1. \quad (1,20)$$

В таком случае, записав уравнение (1,18) следующим образом:

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{B_0^2}{8\pi} + \beta \frac{d}{dx} \ln P_{\perp} = 0, \quad (1,21)$$

мы видим, что характерный масштаб изменения постоянного неоднородного магнитного поля оказывается много больше характерного масштаба изменения неоднородного распределения частиц равновесной плазмы. Это положение позволяет в первом приближении пренебречь пространственным изменением B_0 .

Переходя теперь к выводу тензора диэлектрической проницаемости слабонеоднородной плазмы, рассмотрим малое отклонение от равновесного состояния, которое будем описывать малой добавкой к равновесной функции распределения δf . Из уравнения (1,12) при этом имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta f - \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \delta f = -e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (1,22)$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — неравновесные электрическое и магнитное поля. Для получения тензора диэлектрической проницаемости функцию распределения можно считать пропорциональной $e^{-i\omega t}$, где ω обладает бесконечно малой положительной мнимой добавкой¹. Имея в виду также пространственную однородность распределения основного состояния вдоль осей y и z , будем искать решение уравнения (1,22) в виде

$$\delta f(x) e^{-i\omega t + ik_y y + ik_z z}. \quad (1,23)$$

Такую же зависимость от времени и координат y и z примем для неравновесных полей. Тогда можно записать следующее (периодическое по φ) решение уравнения (1,22):

$$\begin{aligned} \delta f(x) = e \int_{-\infty}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{\Omega(x')} \left\{ \mathbf{E}(x') + \frac{1}{c} [\mathbf{v}'(\varphi') \mathbf{B}(x')] \right\} \frac{\partial f_0(x', \varphi')}{\partial \mathbf{p}(\varphi')} \times \\ \times \exp \left(i \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' \frac{\omega - k_y v_{\perp} \sin \varphi'' - k_z v_z}{\Omega(x'')} \right). \end{aligned} \quad (1,24)$$

В правой части формулы (1,24) величина x' связана с x , φ и переменной интегрирования φ' уравнением характеристики^{*)}

$$x' + \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin \varphi' = x + \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin \varphi = \text{const}. \quad (1,25)$$

Подставляя выражение (1,24) в соотношение, определяющее неравновесную плотность тока,

$$\delta \mathbf{j} = \sum e \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \delta f$$

и имея в виду определение¹

$$\frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \delta \mathbf{j}, \quad [(1,26)]$$

можно, очевидно, записать

$$\begin{aligned} D'_i(\omega, x, k_y, k_z) &= \int dx' \hat{e}_{ij}(\omega, x - x', x, k_y, k_z) E_j(\omega, x', k_y, k_z) = \\ &= \int dk_x e^{ik_x x} \hat{e}_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x) E_j(\omega, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (1,27)$$

^{*)} Это уравнение характеристики является приближенным, получаемым из точного $v_{\perp} \sin \varphi + \int_x^{\varphi} dx \Omega(x) = \text{const}$ в приближении, пренебрегающем зависимостью постоянного поля от координат, что имеет смысл в случае плазмы низкого давления, когда выполняется неравенство (1,20).

Чтобы индукция была выражена только через электрическое поле, мы, как обычно, воспользовались уравнением Максвелла

$$i\omega\mathbf{B} = c \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Соотношение (1,27) представляет собой материальное уравнение типа (1,4), записанное для фурье-компонент по времени и переменным y и z , что возможно в рассматриваемом нами случае одномерной неоднородности лишь вдоль оси x . Тензор диэлектрической проницаемости имеет вид $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x) =$

$$\begin{aligned} &= \delta_{ij} + \sum \frac{i\pi e^2}{\omega^2} \int dp v_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi'}{\Omega(x')} \frac{\partial f_0(x', \varphi')}{\partial p_i(\varphi')_i} \{ \delta_{ij} [\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}(\varphi')] + \\ &+ k_i v_j(\varphi') \} \exp \left(i \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' \frac{\omega - k_y v_{\perp} \sin \varphi'' - k_{\perp} v_{\perp} \cos \varphi'' - k_z v_z}{\Omega(x'')} \right). \quad (1,28) \end{aligned}$$

Здесь, как и в формуле (1,24), величины x' и x'' связаны с x уравнением характеристики (1,25). Выражение (1,28) учитывает неоднородность магнитного поля и поэтому пригодно для плазмы конечного давления.

Принимая во внимание формулу (1,15) для равновесной функции распределения, из выражения (1,28) получаем⁵

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x) &= \delta_{ij} - \left(\delta_{ij} - \frac{B_i B_j}{B^2} \right) \sum \frac{2\pi e^2}{\omega^2} \int dp v_{\perp} \frac{\partial F}{\partial p_{\perp}} - \\ &- \frac{B_i B_j}{B^2} \sum \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \int dp v_z \frac{\partial F}{\partial p_z} + \sum_n \sum \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \times \\ &\times \int dp \frac{F_i^{(n)}(\mathbf{k}) F_j^{(n)}(\mathbf{k})}{\omega - \frac{k_y v_{\perp}^2}{2\Omega^2} \frac{d\Omega}{dx} - n\Omega - k_z v_z} \left(k_z \frac{\partial}{\partial p_z} - \frac{n\Omega}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{ck_y}{eB} \frac{\partial}{\partial x} \right) F, \quad (1,29) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_x^{(n)}(\mathbf{k}) &= \frac{v_{\perp}}{k_{\perp}} \left[ik_y J'_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) - k_x \frac{n\Omega}{k_{\perp} v_{\perp}} J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) \right], \\ F_y^{(n)}(\mathbf{k}) &= \frac{v_{\perp}}{k_{\perp}} \left[-ik_x J'_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) - k_y \frac{n\Omega}{k_{\perp} v_{\perp}} J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) \right], \\ F_z^{(n)}(\mathbf{k}) &= v_z J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1,30)$$

Примем, далее, в качестве функции F максвелловское распределение частиц с неоднородной плотностью и температурой

$$F = \frac{N(x)}{(2\pi m T(x))^{3/2}} e^{-\frac{mv^2}{2T(x)}} \quad (1,31)$$

и пренебрежем неоднородностью магнитного поля (плазма низкого давления $\beta \ll 1$). В результате формула (1,29) запишется в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x) &= \delta_{ij} + \sum \frac{1}{T} \left[1 - \frac{k_y v_T^2}{\omega \Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial}{\partial N} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T} \right) \right] \times \\ &\times T [\varepsilon_{ij}^{(0)}(\omega, \mathbf{k}, x) - \delta_{ij}]. \quad (1,32) \end{aligned}$$

Здесь $\epsilon_{ij}^{(0)}(\omega, \mathbf{k}, x)$ — тензор диэлектрической проницаемости одного сорта частиц, совпадающий с соответствующим тензором однородной плазмы, с тем лишь отличием, что N и T считаются теперь зависящими от координаты x . Суммирование ведется по электронам и ионам, которые мы будем считать однозарядными, кроме того, ограничимся одним сортом ионов.

В литературе часто (см., например, ¹⁾ приводят выражение для тензора диэлектрической проницаемости однородной плазмы в системе координат, где $\mathbf{k} = (k_\perp, 0, k_z)$. Нам же требуется аналогичное выражение, но в произвольной системе отсчета, когда $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Легко показать, что оно имеет вид

$$\epsilon_{ij}^{(0)} =$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1^{(0)} \cos^2 \alpha + \epsilon_{22}^{(0)} \sin^2 \alpha, & \sin \alpha \cos \alpha (\epsilon_{11}^{(0)} - \epsilon_{22}^{(0)}) + \epsilon_{12}^{(0)}, & \epsilon_{13}^{(0)} \cos \alpha - \epsilon_{23}^{(0)} \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha (\epsilon_{11}^{(0)} - \epsilon_{22}^{(0)}) - \epsilon_{12}^{(0)}, & \epsilon_{11}^{(0)} \sin^2 \alpha + \epsilon_{22}^{(0)} \cos^2 \alpha, & \epsilon_{23}^{(0)} \cos \alpha + \epsilon_{13}^{(0)} \sin \alpha \\ \epsilon_{13}^{(0)} \cos \alpha + \epsilon_{23}^{(0)} \sin \alpha, & -\epsilon_{23}^{(0)} \cos \alpha + \epsilon_{13}^{(0)} \sin \alpha, & \epsilon_{33}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (1,33)$$

где $k_x = k_\perp \cos \alpha$, $k_y = k_\perp \sin \alpha$, а шесть компонент тензора диэлектрической проницаемости в системе $\mathbf{k} = (k_\perp, 0, k_z)$ имеют вид ^{6, 7}

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11}^{(0)} &= 1 - \sum_n \frac{n^2 \omega_L^2}{\omega(\omega - n\Omega)} \frac{A_n(z)}{z} J_+(\beta_n), \\ \epsilon_{22}^{(0)} &= \epsilon_{11}^{(0)} + 2 \sum_n \frac{\omega_L^2}{\omega(\omega - n\Omega)} z A'_n(z) J_+(\beta_n), \\ \epsilon_{13}^{(0)} &= \sum_n \frac{n \omega_L^2}{\omega \Omega} \frac{A_n(z)}{z} \frac{k_\perp}{k_z} [1 - J_+(\beta_n)], \\ \epsilon_{23}^{(0)} &= -i \sum_n \frac{\omega_L^2}{\omega \Omega} A'_n(z) \frac{k_\perp}{k_z} [1 - J_+(\beta_n)], \\ \epsilon_{12}^{(0)} &= -i \sum_n \frac{n \omega_L^2}{\omega(\omega - n\Omega)} A'_n(z) J_+(\beta_n), \\ \epsilon_{33}^{(0)} &= 1 + \sum_n \frac{\omega_L^2 (\omega - n\Omega)}{\omega k_z^2 v_T^2} A_n(z) [1 - J_+(\beta_n)]. \end{aligned} \right\} \quad (1,34)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$A_n(z) = e^{-z} I_n(z), \quad J_+(\beta) = \beta e^{-\beta^2/2} \int_{i\infty}^{\infty} d\tau e^{\tau^2/2},$$

$$\beta_n = \frac{\omega - n\Omega}{|k_z| v_T}, \quad z = \frac{k_\perp^2 v_T^2}{\Omega^2}.$$

Кроме того, $\omega_L = (4\pi e^2 N/m)^{1/2}$ — лэнгмюровская частота, а $I_n(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

Приведенный здесь тензор диэлектрической проницаемости слабо-неоднородной плазмы значительно проще соответствующих выражений работ ⁸, где учтены члены более высокого порядка по параметру малости, определяемому соотношением (1,14). Фактический анализ показал, что

для рассмотренных ниже приложений такие члены более высокого порядка оказываются несущественными *).

Выпишем выражение потенциальной диэлектрической проницаемости слабонеоднородной плазмы, удерживаемой сильным магнитным полем:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 + \sum \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} \left\{ 1 - \sum_n \frac{\omega}{\omega - n\Omega} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{k_y v_T^2}{\omega \Omega} \left(\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T} \right) \right] A_n(z) J_+(\beta_n) \right\}. \quad (1,35)$$

Следует заметить, что члены диэлектрической проницаемости, содержащие пространственные производные числа частиц и температуры, играют существенную роль тогда, когда отношение ω/k_y по абсолютной величине невелико в сравнении со скоростью дрейфа частиц $v_d \sim v_T^2/\Omega L$. В противоположном случае, когда частота колебаний значительно превышает дрейфовую частоту $\omega_d \sim k_y v_d$, такими членами, содержащими пространственные производные, можно пренебречь, в связи с чем тензор диэлектрической проницаемости слабонеоднородной плазмы по виду в точности совпадает с аналогичным тензором для пространственно однородной плазмы. Такое выражение для диэлектрической проницаемости может иметь место и для плазмы высокого давления. Более того, оказывается возможным записать выражение для тензора диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы при пренебрежении постоянным внешним магнитным полем. В последнем случае имеем

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega, k, x) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, k, x), \quad (1,36)$$

*) В работах ⁸ выписан целый ряд членов, приводящих к отличию от приведенного здесь тензора диэлектрической проницаемости. Однако если для использования нашего тензора достаточны уравнения эйконала (1,10) и (1,11), то тензор, приведенный в работах ⁸, может быть использован лишь при применении значительно более сложной процедуры, связанной с рассмотрением уравнений поля (1,3).

Как легко показать, точное выражение для тензора диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы, получаемое при пренебрежении зависимостью постоянного магнитного поля от координат, имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x) = \delta_{ij} - i \sum \frac{4\pi e^2}{\omega \Omega T} \left\{ \left(1 - \frac{k_y v_T^2}{\omega \Omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \int dp v_{if_0}(\Omega x + v_y, \varepsilon) \times \right. \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' v_j \exp \left[\frac{i}{\Omega} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right] - \delta_{yj} \frac{v_T^2}{\omega \Omega} \frac{\partial}{\partial x} \int dp v_{if_0}(\Omega x + v_y, \varepsilon) \times \\ \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \exp \left[\frac{i}{\Omega} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right] \right\}.$$

Здесь

$$f_0(\Omega x + v_y, \varepsilon) = \left(1 + \frac{v_y}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{v_y^n}{\Omega^n} \frac{\partial^n}{\partial x^n} + \dots \right) F(x, \varepsilon),$$

где $\varepsilon = mv^2/2$, а $F(x, \varepsilon)$ определяется выражением (1,31), — равновесная функция распределения частиц в неоднородной плазме. Заметим, что ограничение первым членом этого разложения приводит к выражению (1,32). Так как для рассматриваемых

ниже дрейфовых колебаний оператор $\frac{k_y v_T^2}{\omega \Omega} \frac{\partial}{\partial x}$ оказывается порядка единицы, получение тензора диэлектрической проницаемости в приближении заданного числа пространственных производных не представляется разумным. Именно поэтому в выражении (1,32) удержаны лишь нужные члены первого порядка по пространственным производным, так же как и в работах ⁸ удержаны не все члены второго порядка. Разложение равновесной функции распределения указывает, что параметром малости в действительности является величина, определяемая соотношением (1,14).

где ¹

$$\varepsilon^r(\omega, k, x) = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega^2} J_+ \left(\frac{\omega}{kv_T} \right), \quad \varepsilon^l(\omega, k, x) = 1 + \sum \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{kv_T} \right) \right] \quad (1,37)$$

—поперечная и продольная (потенциальная) диэлектрические проницаемости неоднородной изотропной плазмы.

Полученные выше формулы непосредственно переносятся на часто осуществляющийся в практических условиях случай цилиндрической геометрии, когда неоднородный по радиусу плазменный цилиндр удерживается сильным продольным магнитным полем B_0 , направленным по оси z (ось плазменного цилиндра). Наряду с условием (1,14) в цилиндрическом случае приходится также требовать выполнения условия

$$v_T/r\Omega \ll 1. \quad (1,38)$$

Не приводя соответствующего вывода (он во многом аналогичен приведенному выше для случая плоской геометрии), укажем, что тензор диэлектрической проницаемости цилиндрически неоднородной плазмы по виду совпадает с (1,28) (см. также формулы (1,29)—(1,35)), если в нем произвести формальную замену

$$x \rightarrow r, \quad k_x \rightarrow k_r, \quad k_y \rightarrow l/r, \quad (1,39)$$

где l — целые числа *). Учитывая это обстоятельство, ниже мы всюду ограничимся приведением результатов лишь для плоской геометрии. Переход к цилиндрической геометрии по (1,39) не представляет труда.

В заключение этого параграфа отметим, что приведенное выше выражение для тензора диэлектрической проницаемости можно легко обобщить и на тот случай, когда в плазме, кроме поля B_z , имеется также малое, вообще говоря, неоднородное поперечное магнитное поле $B_\perp$ (малое по сравнению с B_z и направленное поперек оси z и неоднородности плазмы; в случае плоской геометрии $B_\perp$ направлено по оси y , а в случае цилиндрической — по азимуту). Для получения тензора диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы в этом случае в формулах (1,28)—(1,35) следует произвести замену

$$k_y \rightarrow k_y \frac{B_z}{B_0} - k_z \frac{B_\perp}{B_0}, \quad k_z \rightarrow k_z \frac{B_z}{B_0} + k_y \frac{B_\perp}{B_0}. \quad (1,40)$$

Аналогичная замена производится и в случае цилиндрической геометрии.

§ 2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА КВАНТОВАНИЯ И СПЕКТР КОЛЕБАНИЙ ИЗОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос об определении спектра собственных колебаний слабонеоднородной плазмы в случае отсутствия внешнего магнитного поля. В последующих параграфах рассмотренный здесь метод получения дисперсионных соотношений применим к более сложным случаям магнитоактивной неоднородной плазмы.

Начнем с наиболее простого случая поперечных колебаний с фазовыми скоростями, большими чем тепловые скорости частиц в плазме. Забегая несколько вперед, отметим, что в результате окажется, что фазовые скорости поперечных колебаний, как и в случае однородной плазмы,

*) При выводе тензора диэлектрической проницаемости цилиндрически неоднородной плазмы приходится также требовать выполнения условия $|l| \gg 1$. Это условие используется при исключении магнитного поля волны с помощью уравнения Максвелла. Выражение для потенциальной диэлектрической проницаемости (1,35) справедливо и без этого ограничения.

больше скорости света. Поэтому мнимая часть поперечной диэлектрической проницаемости (1,37) равна нулю. Учитывая это обстоятельство, из формул (1,36), (1,37) и (1,10) получаем следующее уравнение эйконала для высокочастотных поперечных колебаний поля в неоднородной изотропной плазме:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right) = 0. \quad (2,1)$$

С другой стороны, если выражение (1,37) подставить в формулу (1,27), то из уравнений Максвелла (1,3) в рассматриваемом случае получаем следующее уравнение для поперечного поля:

$$\Delta E^{tr} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right) E^{tr} = 0. \quad (2,2)$$

Уравнение (2,1) представляет собой уравнение эйконала, соответствующее уравнению поля (2,2) в нулевом приближении метода геометрической оптики. Малым параметром геометрической оптики является величина, стоящая в левой части неравенства

$$\frac{1}{k_x} \frac{d}{dx} \ln k_x \ll 1. \quad (2,3)$$

При этом в рассматриваемом случае функция

$$k_x^2 = -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right)$$

является чисто действительной. Из этого условия и следует, что $k_x L \gg 1$, т. е. длина волны колебаний вдоль неоднородности плазмы значительно меньше характерного размера неоднородности (см. условие (1,9)).

Уравнение (2,2) аналогично уравнению Шрёдингера с действительным потенциалом $k_x^2(\omega, x)$. Из квантовой механики хорошо известно, что из однозначности решения уравнения (2,2) (при выполнении условия (2,3)) вытекает правило квазиклассического квантования, которое и определяет спектр собственных значений этого уравнения,

$$\int dx k_x(\omega, x) = \int dx \left(-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{Le}^2}{c^2} \right)^{1/2} = \pi n, \quad (2,4)$$

где n — целое число, значительно превосходящее единицу. Интеграл в (2,4) берется по области «прозрачности» плазмы ($k_x^2(\omega, x) \geq 0$), расположенной между точками перехода, определяемыми соотношением

$$k_x^2(\omega, x) = 0. \quad (2,5)$$

Если в физической области значений x (область, занимаемая плазмой) точки перехода отсутствуют, то интегрирование распространяется по всей области изменения x . (При этом необходимо требовать выполнения недиссипативных граничных условий для уравнения (2,2).) Наибольший интерес представляет случай, когда в физической области изменения x существуют точки перехода, так как в этом случае колебания плазмы заперты в области «прозрачности» между точками перехода, т. е. заперты внутри плазмы. Если имеется несколько пар точек перехода, таких, что области прозрачности отстоят друг от друга на расстоянии, большем чем длина волны колебаний вдоль неоднородности, то интегрирование в формуле (2,4) следует проводить по любой области «прозрачности», заключенной между двумя соседними точками перехода. Эти рассуждения носят общий характер, и в дальнейшем мы их повторять не будем.

Из условия квантования (2,4) видно, что поперечные колебания изотропной неоднородной плазмы устойчивы, т. е. $\omega^2 > 0$, причем фазовая скорость колебаний больше скорости света. Поэтому такие колебания

неоднородной плазмы, так же как и в случае однородной плазмы, являются незатухающими.

Обратимся теперь к более сложному случаю продольных колебаний неоднородной изотропной плазмы в области частот $\omega \gg kv_{Te}$, когда фазовые скорости колебаний больше тепловых скоростей частиц в плазме. Из формул (1,36), (1,37) и (1,10) в рассматриваемом случае получаем следующее уравнение эйконала для продольных колебаний:

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Le}^2}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}} = 0. \quad (2,6)$$

С другой стороны, используя выражения (1,37) и (1,27) и учитывая условие применимости геометрической оптики (2,3), из уравнения Максвелла можно получить следующее уравнение для высокочастотного продольного поля в плазме:

$$\left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right) E^l + 3 \frac{\omega_{Le}^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \Delta E^l = -i \int dx' \hat{\epsilon}^{l''}(\omega, x-x', x) E^l(x'), \quad (2,7)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}^{l''}(\omega, x-x', x) &= \frac{1}{2\pi} \int dk_x e^{ik_x(x-x')} \epsilon^{l''}(\omega, k, x) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dk_x e^{ik_x(x-x')} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Le}^2}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}}. \end{aligned} \quad (2,8)$$

Уравнение (2,6) представляет собой уравнение эйконала для интегрального уравнения (2,7) в нулевом приближении метода геометрической оптики. Квазиклассический спектр собственных значений уравнения (2,7) можно определить двумя различными способами. Первый из них был использован в работе⁹ и состоит в следующем. Учитывая малость мнимой части диэлектрической проницаемости в рассматриваемой области частот, замечаем, что интегральный член в уравнении (2,7) является малым. В нулевом приближении, пренебрегая этим членом, имеем

$$\left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right) E^l + 3 \frac{\omega_{Le}^2 v_{Te}^2}{\omega^4} \Delta E^l = 0. \quad (2,9)$$

Это уравнение уже не содержит интеграла и аналогично уравнению (2,2), т. е. уравнению Шрёдингера с действительным потенциалом. Спектр собственных значений этого уравнения в приближении геометрической оптики определяется поэтому дисперсионным уравнением

$$\int dx k_x(\omega, x) = \int dx \left\{ \frac{\omega^4}{3\omega_{Le}^2 v_{Te}^2} \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - 3 \frac{\omega_{Le}^2 v_{Te}^2}{\omega^4} (k_y^2 + k_z^2) \right] \right\}^{1/2} = \pi n. \quad (2,10)$$

Интегрирование в этой формуле, так же как и выше, ведется по области прозрачности плазмы, причем собственные функции уравнения (2,9) соответственно внутри и вне области прозрачности (т. е. между точками перехода и вне этих точек) имеют вид⁹

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{0n} &= \alpha E_{0n}^l = \frac{1}{\sqrt{k_x}} \cos \left[\int_{x_v}^x dx k_x(\omega, x) - \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{при } x < x_v, \\ \Psi_{0n} &= \alpha E_{0n}^l = \frac{1}{2\sqrt{k_x}} \exp \left[- \int_{x_v}^x dx |k_x(\omega, x)| - i \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{при } x > x_v. \end{aligned} \right\} \quad (9,11)$$

где x_v — правая точка перехода (x_μ — левая точка перехода), причем $x_\mu \leq x \leq x_v$ соответствует области прозрачности плазмы, а $\alpha = \omega_{Le}^2 v_{Te}^2 / \omega^4$. Аналогичные формулы имеют место и около точки перехода x_μ .

Формулы (2,10) и (2,11) получены при полном пренебрежении диссипативными процессами и поэтому определяют лишь действительную часть частоты продольных колебаний плазмы. Для определения малой мнимой части частоты колебаний ($\omega \rightarrow \omega + i\gamma$) запишем уравнение (2,7) в следующем приближенном виде:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + k_x^2(\omega, x) \Psi + i\gamma \left(\frac{\partial}{\partial \omega} k_x^2(\omega, x) \right) \Psi = -i \int dx' \frac{1}{3\alpha(\omega, x')} \epsilon^{l''}(\omega, x - x', x) \Psi(x'), \quad (2,12)$$

где $\Psi(x) = \alpha E^l$. Отсюда благодаря ортогональности собственных функций Ψ_{0n} (см. формулы (2,11) с разными n) в первом приближении теории возмущений получаем поправку к собственному значению для n -го уровня:

$$\gamma = - \frac{\int dx \int dx' \Psi_{0n}(x) \Psi_{0n}(x') \epsilon^{l''}(\omega, x - x', x) / 3\alpha(\omega, x')}{\int dx \Psi_{0n}^2(x) \frac{\partial k_x^2(\omega, x)}{\partial \omega}}. \quad (2,13)$$

Основной вклад в этих интегралах дают области прозрачности плазмы, поэтому интегрирование ведется лишь по этим областям. Благодаря быстрым осцилляциям функции Ψ_{0n} эти интегралы можно упростить, используя метод стационарной фазы (подробнее см. работу ⁹). Учитывая при этом формулу (2,8), окончательно получим

$$\gamma = - \frac{1}{6} \frac{\int \frac{dx}{k_x(\omega, x)} \frac{\epsilon^{l''}(\omega, k, x)}{\alpha(\omega, x)}}{\int dx \frac{\partial k_x(\omega, x)}{\partial \omega}} = - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\int \frac{dx}{k_x(\omega, x)} \frac{\omega^5}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}}}{\int dx \frac{\partial k_x(\omega, x)}{\partial \omega}}. \quad (2,14)$$

Формулы (2,10) и (2,14) определяют спектр высокочастотных продольных колебаний слабонеоднородной изотропной плазмы.

Получим теперь эти выражения другим способом (более простым, хотя, может быть, и менее прямым), изложенным в работе ³ и основанным на концепции приближенно эквивалентного уравнения. Воспользовавшись малостью мнимой части продольной диэлектрической проницаемости, из уравнения эйконала (2,6) легко определить комплексную величину $k_x^2(\omega, x)$. Имеем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} k_x^2(\omega, x) &= \frac{1}{3\alpha(\omega, x)} \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - 3\alpha(\omega, x) (k_y^2 + k_z^2) \right], \\ \operatorname{Im} k_x^2(\omega, x) &= \frac{\epsilon^{l''}(\omega, k, x)}{3\alpha(\omega, x)} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Le}^2}{\alpha k^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2,15)$$

Заметим, что в выражении для мнимой части $\operatorname{Im} k_x^2(\omega, x)$ следует понимать $k^2 = k_y^2 + k_z^2 + (\operatorname{Re} k_x)^2$. Формулы (2,15) могут быть теперь рассмотрены вне связи с исходным интегродифференциальным уравнением (2,7), квазиклассический спектр собственных значений которого мы и определяем. Именно, можно сказать, что формулы (2,15), определяющие решения нулевого приближения геометрической оптики уравнения (2,7), в то же самое время определяют решения нулевого приближения геометрической

оптики дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + k_x^2(\omega, x)\Phi = 0. \quad (2,16)$$

В этом смысле можно говорить об эквивалентности уравнений (2,7) и (2,16) в нулевом приближении метода геометрической оптики. Теперь мы можем воспользоваться результатами теории асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка, перенося их с помощью приближенно эквивалентного уравнения (2,16) на интересующий нас случай теории асимптотических решений интегральных уравнений *).

Уравнение (2,16) аналогично уравнению Шрёдингера с комплексным потенциалом. Теория асимптотических решений уравнений такого вида хорошо разработана. Для случая действительных потенциалов (действительных $k_x^2(\omega, x)$) такая теория хорошо известна физикам из квантовой механики. Поэтому выше при определении спектра собственных значений уравнения (2,2) мы без дополнительных разъяснений воспользовались квазиклассическим условием квантования (2,4). Для случая комплексных потенциалов теория асимптотических решений уравнений вида (2,16) известна физикам значительно хуже. Поэтому здесь мы кратко напомним основные положения этой теории, касающиеся явления Стокса и спектра собственных значений уравнения (2,16). Для подробного ознакомления с этой теорией отсылаем читателя к специальной литературе ¹¹ (см. также работы ¹²⁻¹⁴).

Ограничимся случаем малой комплексности функции $k_x^2(\omega, x)$. Практически это, по-видимому, наиболее интересный случай, и ниже нам только с такими случаями и придется встречаться. Будем считать также, что частоты собственных колебаний почти действительны, т. е. $\omega \rightarrow \omega + i\gamma$, причем $\gamma \ll \omega$. Наконец, предположим, что точки перехода, определяемые соотношением (2,5) и лежащие, вообще говоря, в комплексной области x , расположены вблизи действительной оси, т. е. также обладают лишь малой комплексностью.

Асимптотическое решение уравнения (2,16) имеет вид

$$\Phi(x) = C_+ e^{i \int^x k_x dx} + C_- e^{-i \int^x k_x dx}. \quad (2,17)$$

В общем случае комплексная плоскость x может быть разбита на области, в которых коэффициенты $C_{\pm}$ имеют определенные значения. Переход из одной области в другую сопровождается скачкообразным изменением этих коэффициентов. В этом заключается явление Стокса, а линии, разделяющие указанные области друг от друга, называются линиями Стокса (на таких линиях $\text{Im } k_x = 0$). Очевидно, что точки перехода лежат на линиях Стокса. В окрестности точек перехода решение уравнения (2,16) выражается через функции Бесселя. Асимптотическое поведение и явление Стокса для таких функций хорошо изучены. Требуя совпадения такого асимптотического решения с выражением (2,17), находим коэффициенты $C_{\pm}$. Отсюда же следует правило квантования, определяющее спектр собственных значений уравнения (2,16). Не останавливаясь на этом вопросе более подробно (как указывалось выше, в литературе этот вопрос достаточно полно освещен), приведем окончательный результат для случая, когда

*) Гидродинамическая теория устойчивости, берущая начало с классических исследований Рэлея, прекрасное изложение которой читатель может найти в обзорных работах ¹⁰, обычно также связана с использованием асимптотических методов решений уравнений. Следует, однако, подчеркнуть, что в наиболее интересных случаях гидродинамической неустойчивости нельзя ограничиться приближением геометрической оптики.

имеются две точки перехода. Дисперсионное уравнение для спектра собственных значений имеет вид ¹²⁻¹⁵

$$\int_{x_\mu}^{x_\nu} k_x(\omega, x) dx = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2,18)$$

Интегрирование в этой формуле ведется по области прозрачности, где $\text{Re } k_x^2(\omega, x) \geq 0$, между комплексными точками перехода. Учитывая малую комплексность частоты ω , функции $k_x(\omega, x)$ и точек x_μ и x_ν (последнее позволяет пренебречь малым вкладом от интегрирования по мнимой оси), из формулы (2,18) можно получить два соотношения, определяющие частоту ω и декремент затухания колебаний γ ¹⁵:

$$\left. \begin{aligned} \int dx \text{Re } k_x(\omega, x) &= \pi n, \\ \gamma &= - \frac{\int dx \text{Im } k_x(\omega, x)}{\int dx \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re } k_x(\omega, x)}, \end{aligned} \right\} \quad (2,19)$$

в которых интегрирование ведется по области прозрачности между проекциями комплексных точек перехода на действительную ось. (В формуле (2,19) и всюду в дальнейшем пренебрегается $1/2$ по сравнению с большой величиной n .) Формулы (2,19) используются ниже для определения спектров колебаний неоднородной плазмы. В частности, если в эти соотношения подставить величины (2,15), получим выражения, в точности совпадающие с (2,10) и (2,14).

Существенно отметить, что вторым соотношением (2,19) для определения декремента затухания (или инкремента нарастания) колебаний следует пользоваться лишь в тех случаях, когда частоты, определяемые из первого соотношения (т. е. при полном пренебрежении диссипативными процессами), действительны или, как говорят, колебания плазмы гидродинамически устойчивы. Знак величины γ при этом показывает, являются ли эти колебания плазмы кинетически устойчивыми или нет ¹⁶.

Применим теперь соотношения (2,19) для определения спектра низкочастотных продольных колебаний неизотермической неоднородной плазмы в отсутствие магнитного поля (ионный звук в неоднородной плазме *). Такие колебания существуют в области частот $k v_{Ti} \ll \omega \ll k v_{Te}$, и, согласно формулам (1,26), уравнение эйконала для них имеет вид **)

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Le}^2}{k^3 v_{Te}^3} = 0. \quad (2,20)$$

Учитывая малость мнимой части этого уравнения и используя соотношения (2,19), получаем следующие дисперсионные уравнения для определения спектра низкочастотных колебаний неоднородной неизотермической

*) Для сравнения см. работу ⁹, где для изучения спектра ионного звука в неоднородной плазме используется метод теории возмущений.

**) Здесь мы пренебрегаем ионным поглощением волн в плазме, что справедливо при условии

$$1 \gg \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{M}{m}} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}}.$$

При наличии магнитного поля вместо k в этом условии следует писать k_z .

плазмы, в которой $T_e \gg T_i$:

$$\int dx \operatorname{Re} k_x(\omega, x) = \int dx \left(-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2 - \omega^2} \frac{\omega_{Le}^2}{v_{Te}^2} \right)^{1/2} = \pi n, \quad (2,21)$$

$$\gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega^2 \frac{\int dx \operatorname{Re} k_x \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_{Li}^2 - \omega^2} \frac{1}{v_{Te}^2 \sqrt{k_y^2 + k_z^2 + (\operatorname{Re} k_x)^2}}}{\int dx \operatorname{Re} k_x \frac{\omega_{Le}^2}{v_{Te}^2 (\omega_{Li}^2 - \omega^2)^2}}. \quad (2,22)$$

Отсюда, в частности, следует, что в неоднородной плазме, так же как и в однородной, низкочастотные продольные колебания возможны лишь при условии $\omega^2 < \omega_{Li}^2$.

Заметим, что наличие неоднородности плазмы лишь в направлении оси x делает плазму анизотропной. Это, в частности, проявляется в анизотропии скорости звука, вытекающей из соотношения для звукового спектра, получаемого в пределе $\omega^2 \ll \omega_{Li}^2$ из формулы (2,21):

$$\int dx \sqrt{\frac{\omega^2}{v_s^2(x)} - k_y^2 - k_z^2} = \pi n, \quad (2,23)$$

где $v_s(x) = \sqrt{T_e/M}$ — локальная скорость звука. Формула (2,23) принимает особенно простой вид при распространении звука вдоль направления неоднородности. Действительно, в этом случае имеем

$$\omega^2 = (\pi n)^2 \left[\int \frac{dx}{v_s(x)} \right]^{-2}. \quad (2,24)$$

Затухание звуковых волн определяется соотношением

$$\frac{\gamma}{\omega} = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m}{M}. \quad (2,25)$$

Следует отметить, что правая часть формулы (2,25) не зависит от неоднородности плазмы и совпадает с соответствующим выражением в теории однородной плазмы.

В заключение этого параграфа приведем простые формулы, определяющие спектр и затухание высокочастотных колебаний в максвелловской плазме с однородной температурой и плотностью, меняющейся в конечной области вблизи $x = 0$ по закону

$$N(x) = \frac{N_0}{1 - (x/d)^2} \quad (x < d). \quad (2,26)$$

При этом ограничимся случаем распространения волн вдоль неоднородности. Тогда вблизи $x = 0$ имеется область прозрачности, ограниченная точками $\pm d \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2(0)}{\omega^2} \right]^{1/2}$. Частота колебаний ω близка к $\omega_{Le}(0)$ и равна⁹

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2(0) \left[1 + \sqrt{3} \frac{r_{De}}{d} (2n + 1) \right], \quad (2,27)$$

где $r_{De} = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi e^2 N_0}}$. Затухание определяется соотношением

$$\frac{\gamma}{\omega} = - \frac{3 \sqrt{3} d}{2 r_{De} (2n + 1)} \exp \left[- \frac{\sqrt{3} d}{2 r_{De} (2n + 1)} - \frac{3}{2} \right]. \quad (2,28)$$

Как и в однородной плазме, затухание рассматриваемых колебаний с длиной волны, значительно превышающей дебаевский радиус, оказывается экспоненциально малым.

§ 3. СПЕКТР КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Перейдем теперь к исследованию спектра колебаний слабонеоднородной магнитоактивной плазмы. Ввиду большого многообразия различных ветвей колебаний неоднородной магнитоактивной плазмы мы рассмотрим отдельно область частот, больших по сравнению с дрейфовыми частотами частиц, и область частот, сравнимых с ними. Настоящий параграф посвящен исследованию колебаний в первой из этих областей. Дрейфовые колебания неоднородной магнитоактивной плазмы исследуются в последующих двух параграфах.

Как уже отмечалось выше, в области частот, больших по сравнению с дрейфовыми, $\omega \gg \omega_d$, в выражении для тензора диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы градиентными членами можно пренебречь. Уравнение эйконала (1,10) при этом по виду совпадает с дисперсионным уравнением однородной плазмы, но по существу отличается от него тем, что плотность и температура частиц (а в этой области частот также и магнитное поле) считаются зависящими от координат. Благодаря этому обстоятельству собственные частоты колебаний неоднородной плазмы определяются не локальными, а интегральными соотношениями. Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь некоторых ветвей колебаний магнитоактивной плазмы, а именно, высокочастотных колебаний, лежащих в области частот $\omega \gg \sqrt{M/m} \Omega_i$, когда движением ионов можно пренебречь, и низкочастотных колебаний, лежащих в области $\omega \ll \Omega_i$, когда движение ионов в плазме играет определяющую роль. Циклотронные колебания неоднородной плазмы нами не рассматриваются. Этому вопросу посвящена работа ¹⁷. Можно показать, что в рассматриваемой области частот, когда градиентными членами можно пренебречь, в неоднородной плазме, так же как и в однородной, возможны лишь длинноволновые колебания (исключение составляют циклотронные колебания, которых здесь мы не рассматриваем). Поэтому в этом параграфе мы всюду будем считать выполненным условие $z = k_z^2 v_T^2 / \Omega^2 \ll 1$.

Рассмотрение начнем с наиболее простого случая продольных (потенциальных) колебаний неоднородной плазмы. Уравнение эйконала (1,6) принимает вид

$$\epsilon_{33} k_z^2 + \epsilon_{11} k_{\perp}^2 = 0. \quad (3,1)$$

Для получения дисперсионных уравнений колебаний неоднородной плазмы нам нужно из этого уравнения определить комплексную функцию $k_x(\omega, x)$ и подставить ее в соотношения (2,19). Рассмотрим высокочастотную область $\omega \gg \sqrt{M/m} \Omega_i$. Если, кроме того, $\omega \pm \Omega_e$, $\omega \gg k_z v_{Te}$, то из формул (1,32) и (1,34) имеем

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}^2}{|k_z| v_{Te}} \left[e^{-\frac{(\omega - \Omega_e)^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}} + e^{-\frac{(\omega + \Omega_e)^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}} \right], \\ \epsilon_{33} &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Le}^2}{|k_z|^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3,2)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3,1) и пренебрегая в первом приближении экспоненциально малыми диссипативными членами, получим следующее дисперсионное уравнение для определения частоты

колебаний:

$$\int dx \operatorname{Re} k_x(\omega, x) = \int dx \left[-k_y^2 - \frac{k_z^2 (1 - \omega_{Le}^2/\omega^2)}{1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}} \right]^{1/2} = \pi n. \quad (3,3)$$

Отсюда видно, что эти колебания гидродинамически устойчивы, $\omega^2 > 0$. Учет малых диссипативных членов приводит к затуханию рассматриваемых колебаний. Декремент затухания γ экспоненциально мал и определяется формулой

$$\begin{aligned} \gamma &= - \left(\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \right)^{-1} \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \operatorname{Im} \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = \\ &= - \frac{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{1}{(\operatorname{Re} \varepsilon_{11})^2} (\operatorname{Re} \varepsilon_{11} \operatorname{Im} \varepsilon_{33} - \operatorname{Re} \varepsilon_{33} \operatorname{Im} \varepsilon_{11})}{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{1}{(\operatorname{Re} \varepsilon_{11})^2} \left(\operatorname{Re} \varepsilon_{11} \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} \varepsilon_{33} - \operatorname{Re} \varepsilon_{33} \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} \varepsilon_{11} \right)}. \end{aligned} \quad (3,4)$$

В области низкочастотных колебаний, когда $\omega \ll \Omega_i$, спектр колебаний плазмы существенно зависит от движения ионов. Величины ε_{11} и ε_{33} в этой области частот и при условии $\omega \gg k_z v_{Te}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 1 + \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2}, \\ \varepsilon_{33} &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Le}^2}{|k_z|^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}}. \end{aligned} \quad (3,5)$$

Подставляя эти выражения в формулу (3,4) и учитывая малость диссипативных членов, из соотношений (2,19) получаем дисперсионные уравнения для определения спектра низкочастотных потенциальных колебаний неоднородной плазмы:

$$\begin{aligned} \int dx \operatorname{Re} k_x &= \int dx \left[-k_y^2 - \frac{k_z^2 (1 - \omega_{Le}^2/\omega^2)}{1 + c^2/v_A^2} \right]^{1/2} = \pi n, \\ \gamma &= - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega^2 \left[\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{\omega_{Le}^2 k_z^2}{\omega^2 (1 + c^2/v_A^2)} \right]^{-1} \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{\omega_{Le}^2}{|k_z|^3 v_{Te}^3} \frac{\exp \left(-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \right)}{1 + c^2/v_A^2}, \end{aligned} \quad (3,6)$$

где $v_A = \sqrt{B_0^2/4\pi NM}$ — альвеновская скорость. Отсюда видно, что рассматриваемые колебания являются затухающими, хотя затухание и экспоненциально мало.

Существенно более интенсивно затухают низкочастотные колебания в условиях, когда во всей области прозрачности $\omega \ll k_z v_{Te}$. При этом необходимо предполагать, что $\omega \gg k_z v_{Ti}$, так как в противном случае область прозрачности отсутствует и колебания становятся невозможными. Последнее условие позволяет нам пренебречь ионным поглощением волн в плазме. Компоненты ε_{11} и ε_{33} в этих условиях имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 1 + \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2} = 1 + \frac{c^2}{v_A^2}, \\ \varepsilon_{33} &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Le}^2}{|k_z|^3 v_{Te}^3}. \end{aligned} \right\} \quad (3,7)$$

Дисперсионные же уравнения для спектра рассматриваемых колебаний записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \int dx \operatorname{Re} k_x &= \int dx \left[-k_y^2 - \frac{\omega_{Le}^2}{v_{Te}^2} + \frac{k_z^2 (1 - \omega_{Li}^2/\omega^2)}{1 + c^2/v_A^2} \right]^{1/2} = \pi n, \\ \gamma &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega^2 \left[\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{k_z^2 \omega_{Li}^2}{\omega^2 (1 + c^2/v_A^2)} \right]^{-1} \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{\omega_{Le}^2}{|k_z| v_{Te}^2} \frac{1}{1 + c^2/v_A^2} \end{aligned} \right\} \quad (3,8)$$

Легко видеть, что эти колебания также являются затухающими, причем затухание колебаний в этом случае происходит значительно сильнее, чем в предыдущем, так как декремент затухания γ уже не экспоненциально мал. В пределе однородной плазмы полученные выше формулы (3,3), (3,4), (3,6) и (3,8) переходят в известные формулы для спектра потенциальных колебаний однородной магнитоактивной плазмы^{1, 18}.

Магнитоактивная плазма является анизотропной средой. Потенциальные колебания электромагнитного поля в такой плазме, вообще говоря, не являются собственными колебаниями. Поэтому здесь мы рассмотрим общие непотенциальные колебания неоднородной магнитоактивной плазмы в условиях, соответствующих рассмотренным выше потенциальным колебаниям. В области высоких частот $\omega \gg \sqrt{M/m} \Omega_i$ и при условии $\omega, \omega \pm \Omega_e \gg k_z v_{Te}$ полное уравнение эйконала (1,5) принимает вид

$$k_{\perp}^4 \varepsilon_{11} + \left[\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{11} \right) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{12}^2 \right] k_{\perp}^2 + \varepsilon_{33} \left[\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{11} \right)^2 + \frac{\omega^4}{c^4} \varepsilon_{12}^2 \right] = 0, \quad (3,9)$$

где величины ε_{11} и ε_{33} определены выражениями (3,2), а

$$\varepsilon_{12} = i \frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e}{\omega (\omega^2 - \Omega_e^2)} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega |k_z| v_{Te}} \left[e^{-\frac{(\omega - \Omega_e)^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}} - e^{-\frac{(\omega + \Omega_e)^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}} \right]. \quad (3,10)$$

Уравнение (3,9) определяет две функции $k_x^2(\omega, x)$, что соответствует двум ветвям высокочастотных электронных колебаний магнитоактивной плазмы — обыкновенной и необыкновенной волнам. Пренебрегая экспоненциально малыми диссипативными членами в выражениях (3,2) и (3,10), для определения спектра рассматриваемых колебаний получаем следующие дисперсионные уравнения:

$$\int dx \operatorname{Re} k_x = \int dx (-k_y^2 - P \mp \sqrt{P^2 - q})^{1/2} = \pi n, \quad (3,11)$$

описывающие обыкновенную и необыкновенную волны в неоднородной магнитоактивной плазме. Здесь введены обозначения

$$P = \frac{1}{2\varepsilon_{11}} \left[\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{11} \right) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{12}^2 \right], \\ q = \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \left[\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{11} \right)^2 + \frac{\omega^4}{c^4} \varepsilon_{12}^2 \right].$$

Легко видеть, что в пределе $c^2 k_z^2 / \omega^2 \gg \varepsilon_{11}$, ε_{12} уравнение (3,9) переходит в уравнение эйконала для потенциальных колебаний (3,1). Одно из уравнений (3,11) при этом переходит в уравнение (3,3), описывающее высокочастотные потенциальные колебания магнитоактивной плазмы. Колебания, описываемые вторым уравнением (3,11), в этом пределе невозможны. Таким образом, высокочастотные потенциальные колебания магнитоактивной неоднородной плазмы могут распространяться лишь под достаточно острым углом к магнитному полю.

В обратном пределе $c^2 k_z^2 / \omega^2 \ll \epsilon_{11}, \epsilon_{12}$, т. е. когда колебания распространяются почти поперек магнитного поля, уравнения (3,11) принимают простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \int dx \operatorname{Re} k_x &= \int dx \left[-k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right) \right]^{1/2} = \pi n, \\ \int dx \operatorname{Re} k_x &= \int dx \left[-k_y^2 + \frac{1}{c^2} \frac{(\omega^2 - \Omega_e^2)^2 - \omega^2 \Omega_e^2}{\omega^2 - \Omega_e^2 - \omega_{Le}^2} \right]^{1/2} = \pi n. \end{aligned} \right\} \quad (3,12)$$

При строго поперечном распространении ($k_z = 0$) колебания бесстолкновительной плазмы являются незатухающими, так как диссипативные члены в тензоре диэлектрической проницаемости (антиэрмитова часть) в этом случае точно равны нулю. Однако при $k_z \neq 0$ колебания, описываемые уравнениями (3,11) и (3,12), экспоненциально слабо, но все же затухают. Так, в пределе $c^2 k_z^2 / \omega^2 \ll \epsilon_{11}, \epsilon_{12}$, когда справедливы соотношения (3,12), колебания, определяемые первым из них, являются незатухающими, так как фазовая скорость таких колебаний больше скорости света. Колебания же, определяемые вторым уравнением (3,12), затухают, причем декремент затухания γ равен *)

$$\begin{aligned} \gamma &= - \frac{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \operatorname{Im} \left(\epsilon_{11} + \frac{\epsilon_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right)}{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} \left(\epsilon_{11} + \frac{\epsilon_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right)} = \\ &= - \frac{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \left[\epsilon_{11}'' + \frac{\epsilon_{12}^2}{\epsilon_{11}'} \left(-\frac{\epsilon_{11}''}{\epsilon_{11}'} + 2 \frac{\epsilon_{12}'}{\epsilon_{12}''} \right) \right]}{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \left[\frac{\partial \epsilon_{11}'}{\partial \omega} + \frac{\epsilon_{12}^2}{\epsilon_{11}'} \left(-\frac{\partial \epsilon_{11}' / \partial \omega}{\epsilon_{11}'} + 2 \frac{\partial \epsilon_{12}'' / \partial \omega}{\epsilon_{12}''} \right) \right]}. \end{aligned} \quad (3,13)$$

Перейдем теперь к рассмотрению низкочастотных колебаний неоднородной плазмы, когда $\omega \ll \Omega_i$. В области частот $\omega \gg k_z v_{Te}$, соответствующей пределу двухжидкостной гидродинамики бесстолкновительной плазмы¹, уравнение эйконала распадается на следующие два уравнения:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{22} = 0, \quad \epsilon_{33} \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{11} \right) + \epsilon_{11} k_{\perp}^2 = 0, \quad (3,14)$$

где величины ϵ_{11} и ϵ_{33} определены выражениями (3,4), а $\epsilon_{22} = \epsilon_{11}$. Первое из этих уравнений при учете соотношений (2,19) приводит к дисперсионному уравнению

$$\int dx \operatorname{Re} k_x = \int dx \left[-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{c^2}{v_A^2} \right) \right]^{1/2} = \pi n, \quad (3,15)$$

описывающему незатухающие низкочастотные колебания неоднородной плазмы. Из второго же уравнения (3,14) получаем следующие дисперсионные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \int dx \operatorname{Re} k_x &= \int dx \left[-k_y^2 - \frac{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{c^2}{v_A^2} \right)}{1 + c^2 / v_A^2} \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right) \right]^{1/2} = \pi n, \\ \gamma &= - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \left(\omega^2 - \frac{k_z^2 c^2}{1 + c^2 / v_A^2} \right) \frac{\omega_{Le}^2}{|k_z|^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2 k_z^2 v_{Te}^2}}}{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2 k_z^2 c^2}{\omega^4 (1 + c^2 / v_A^2)} \right]} \end{aligned} \right\} \quad (3,16)$$

*) Во избежание недоразумений заметим, что эрмитова часть компоненты ϵ_{12} является мнимой, а антиэрмитова — действительной (см. формулу (3,10)).

Отсюда видно, что рассматриваемые низкочастотные колебания неоднородной магнитоактивной плазмы являются затухающими, хотя затухание и экспоненциально малое.

В области частот $\omega \ll k_z v_A$ уравнения (3,15) не имеют решений, т. е. такие колебания в плазме невозможны. Уравнения же (3,16) в этом пределе переходят в уравнения (3,6), описывающие низкочастотные потенциальные колебания магнитоактивной плазмы. Таким образом, условие $\omega \ll k_z v_A$ определяет область применимости формул (3,6), или, что то же самое, область потенциальности колебаний. В обратном пределе, когда $\omega \gg k_z v_A$, колебания, описываемые уравнениями (3,16), становятся невозможными, если принять $\Omega_i \ll \omega_{Le}$, что в реальной плазме практически всегда выполняется. Наоборот, уравнение (3,15) в этой области частот имеет решения, соответствующие поперечным альвеновским колебаниям неоднородной плазмы.

В заключение этого параграфа рассмотрим колебания неоднородной плазмы в области частот $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$, соответствующей пределу одножидкостной гидродинамики неизотермической ($T_e \gg T_i$) бесстолкновительной плазмы¹⁹. Уравнение эйконала (1,5) в этой области частот распадается на следующие для уравнения^{18, 20}:

$$k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{11} = 0, \quad \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{22} \right) \varepsilon_{33} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{23}^2 = 0, \quad (3,17)$$

где (здесь мы ограничиваемся случаем плазмы относительно высокой плотности, в которой $c^2 \gg v_A^2$, только к такой плазме применимы, строго говоря, уравнения одножидкостной гидродинамики)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{c^2}{v_A^2}, & \varepsilon_{22} &= \frac{c^2}{v_A^2} + i \sqrt{2\pi} \frac{\omega_{Le}^2 k_{\perp}^2 v_{Te}}{\omega \Omega_e^2 |k_z|}, \\ \varepsilon_{23} &= i \frac{k_{\perp}}{k_z} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \Omega_e} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right), \\ \varepsilon_{33} &= - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3,18)$$

Из первого уравнения (3,15) непосредственно следует соотношение $\omega^2 = k_z^2 v_A^2$, описывающее спектр незатухающих альвеновских колебаний неоднородной плазмы, в которых вектор скорости массы лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$ (т. е. параллелен оси y). Зависимость частоты таких колебаний от координат не должна вызывать недоумений, так как для этих колебаний поля не возникает задачи на собственные значения (аналогичное положение имеет место и в обычной магнитной гидродинамике идеально проводящей жидкости²¹).

Из второго уравнения (3,17) при учете соотношений (2,19) получаем следующие дисперсионные уравнения для определения спектра магнито-звуковых колебаний неоднородной неизотермической плазмы:

$$\left. \begin{aligned} \int dx \operatorname{Re} k_x &= \int dx \left[-k_y^2 + \frac{(\omega^2 - k_z^2 v_A^2)(\omega^2 - k_z^2 v_s^2)}{\omega^2 (v_A^2 + v_s^2) - k_z^2 v_A^2 v_s^2} \right]^{1/2} = \pi n, \\ \gamma &= - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left[\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{2 [\omega^2 (v_A^2 + v_s^2) - 2 k_z^2 v_A^2 v_s^2]}{\omega^2 (v_A^2 + v_s^2) - k_z^2 v_A^2 v_s^2} \right]^{-1} \times \\ &\times \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{\omega^2 - k_z^2 v_z^2}{|k_z| v_{Te} [\omega^2 (v_A^2 + v_s^2) - k_z^2 v_A^2 v_s^2]} \left[1 - \frac{v_A^2 (\omega^2 - k_z^2 v_s^2) \left(1 + \frac{k_z^2 v_s^4}{\omega^2 v_A^2} \right)}{\omega^2 (v_A^2 + v_s^2) - k_z^2 v_A^2 v_s^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (3,19)$$

где $v_s = \sqrt{T_e/M}$ — локальная скорость звука в неоднородной плазме. Формулы (31,9) обобщают спектр (2,21) на случай наличия магнитного поля. В случае однородной плазмы эти формулы переходят в известные формулы для спектра низкочастотных колебаний неизотермической магнитоактивной плазмы ^{1, 19, 20}.

§ 4. СПЕКТР НИЗКОЧАСТОТНЫХ ДРЕЙФОВЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

В предыдущих двух параграфах, используя метод геометрической оптики, мы рассмотрели колебания неоднородной плазмы в условиях, когда дрейфом частиц можно пренебречь. Перейдем теперь к исследованию низкочастотных дрейфовых колебаний неоднородной плазмы. В неоднородной плазме, удерживаемой сильным магнитным полем, возникают дрейфы частиц поперек магнитного поля. Электроны и ионы плазмы дрейфуют в разные стороны, в результате чего возникает относительное движение частиц в плазме. Относительное движение заряженных частиц в свою очередь может привести к раскачке колебаний плазмы, т. е. к неустойчивости неоднородной плазмы. Такая неустойчивость аналогична пучковой неустойчивости в том смысле, что она проявляется в условиях, когда в плазме существуют медленные волны, фазовая скорость которых близка к скорости относительного дрейфа частиц. В настоящем обзоре мы в основном ограничиваемся учетом лишь ларморова дрейфа частиц, т. е. дрейфа, обусловленного неоднородностью плотности и температуры частиц. Диамагнитный дрейф, вызванный либо неоднородностью, либо кривизной силовых линий магнитного поля, мы не рассматриваем (о колебаниях неоднородной плазмы с учетом диамагнитного дрейфа см. работы ²²⁻²⁴ *)). Более того, здесь мы ограничиваемся исследованием дрейфовых колебаний неоднородной плазмы низкого давления, когда $\beta = 8\pi P/B_0^2 \ll 1$. Именно в этом предположении и было получено нами выражение для тензора диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы. Еще раз подчеркнем, что в области частот, больших по сравнению с дрейфовыми частотами, это ограничение не обязательно, и поэтому результаты предыдущих двух параграфов справедливы для плазмы произвольного давления в условиях, когда столкновениями частиц можно пренебречь. В области же частот, сравнимых с дрейфовыми частотами, $\omega \lesssim \omega_d \sim k_y v_T / \Omega L$, указанное ограничение для нас существенно. Все результаты, обсуждаемые в § 4—6, справедливы только для плазмы низкого давления.

Ниже будет показано, что в области дрейфовых частот $\omega \lesssim \omega_d$ в спектре колебаний неоднородной плазмы появляются новые ветви, связанные с дрейфом частиц и отсутствующие в однородной плазме. В реальных условиях дрейфовые частоты весьма малы (наблюдаемые частоты дрейфовых колебаний порядка нескольких десятков кГц ²⁵). Учитывая это, здесь мы ограничимся исследованием лишь низкочастотных дрейфовых колебаний неоднородной плазмы, когда $\omega \ll \Omega_i$ **).

Настоящий параграф посвящен потенциальным дрейфовым колебаниям неоднородной плазмы. Дрейфовые колебания поля можно считать потенциальными лишь в определенных условиях. Эти условия будут

*) Работа ²² относится к числу первых работ, положивших начало исследованию проблемы устойчивости неоднородной плазмы на основе кинетического уравнения. Большое влияние на развитие теории колебаний неоднородной плазмы оказала работа ^{23а}, в которой впервые был учтен эффект конечности ларморова радиуса ионов.

**) О дрейфовых колебаниях неоднородной плазмы в области циклотронных частот электронов и ионов см. работы ^{26, 27}. Взаимодействие пучка заряженных частиц с дрейфовыми колебаниями неоднородной плазмы рассмотрено в работе ²⁸.

получены в следующем параграфе, где исследуются общие, вообще говоря, непотенциальные колебания неоднородной плазмы и анализируется полное уравнение эйконала (4,10) в области дрейфовых частот.

Из выражения (4,35) получаем следующее уравнение эйконала для потенциальных дрейфовых колебаний неоднородной плазмы в области частот $\omega \ll \Omega_i$:

$$1 + \sum \frac{1}{k_z^2 r_D^2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{k_y v_T^2}{\omega \Omega} \left(\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T} \right) \right] A_0(z) J_+ \left(\frac{\omega}{|k_z| v_T} \right) \right\} = 0, \quad (4,1)$$

где $r_D = \sqrt{T/4\pi e^2 N}$ — дебаевский радиус частиц. При написании этого предпологалось также, что $k_z v_T \ll \Omega$. Только при этом условии в выражении (4,35) можно ограничиться лишь членами с $n = 0$. Для получения дисперсионных уравнений колебаний нам нужно определить из уравнения (4,1) комплексную функцию $k_x(\omega, x)$ и подставить ее в соотношения (2,19). При этом мы будем различать три предельных случая: а) $z_e \ll z_i \ll 1$, соответствующий длинноволновым колебаниям плазмы; б) $z_e \ll 1$, а $z_i \gg 1$, соответствующий коротковолновым колебаниям, с длиной волны меньше ларморова радиуса ионов, но больше ларморова радиуса электронов; в) $z_i \gg z_e \gg 1$, соответствующий очень коротковолновым колебаниям, с длиной волны меньше ларморова радиуса как ионов, так и электронов. Во всех этих случаях рассматриваются колебания в области частот $\omega \gg k_z v_{Ti}$, так как в обратном пределе, как легко видеть из уравнения (4,1), потенциальные колебания неоднородной плазмы невозможны при пренебрежении неоднородностью магнитного поля (в этой области частот имеет место обычная дебаевская экранировка поля в плазме).

а) В области длинноволновых колебаний $z_i \ll 1$ и при условии $\omega \gg k_z v_{Ti}$ уравнение эйконала (4,1) принимает вид

$$k_z^2 \left[1 + \frac{c^2}{v_A^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \ln N T_i \right) \right] + k_z^2 + \\ + \sum r_D^{-2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{k_y v_T^2}{\omega \Omega} \left(\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T} \right) \right] J_+ \left(\frac{\omega}{|k_z| v_T} \right) \right\} = 0, \quad (4,2)$$

где $v_A = \sqrt{B_0^2/4\pi N M}$ — альвеновская скорость. Определив из этого уравнения комплексную функцию $k_x(\omega, x)$ и используя соотношения (2,19), получим следующие дисперсионные уравнения для спектра длинноволновых колебаний неоднородной плазмы:

$$\left. \begin{aligned} & \int dx \operatorname{Re} k_x = \int dx \left\{ -k_y^2 - \right. \\ & \left. \frac{k_z^2 + \sum r_D^{-2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{k_y v_T^2}{\omega \Omega} \left(\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T} \right) \right] \right\} \operatorname{Re} J_+ \left(\frac{\omega}{|k_z| v_T} \right)^{1/2}}{1 + \frac{c^2}{v_A^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \ln N T_i \right)} = \pi n, \right. \\ & \gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\int dx \frac{\partial \operatorname{Re} k_x}{\partial \omega} \right)^{-1} \times \\ & \times \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{\omega \omega_{Le}^2}{|k_z| v_{Te}^3} \frac{\left[1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} + \frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial x} \right) \right] e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}}}{1 + \frac{c^2}{v_A^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \ln N T_i \right)} \end{aligned} \right\} \quad (4,3)$$

Существенно заметить, что уравнения (4,3) справедливы в предположении, что во всей области прозрачности плазмы подынтегральные выражения не имеют особенностей, т. е.

$$1 + \frac{c^2}{v_A^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \ln N T_i \right) \neq 0. \quad (4,4)$$

В области «высоких» частот, значительно больших чем дрейфовые частоты электронов и ионов, градиентными членами в уравнениях (4,3) можно пренебречь. Эти уравнения переходят в уравнения (3,6), рассмотренные в предыдущем параграфе. Колебания плазмы, как было показано выше, в этой области частот всегда являются затухающими.

Иное положение имеет место в области «низких» частот, сравнимых с дрейфовыми частотами частиц в неоднородной плазме. Колебания плазмы в этой области частот в определенных условиях могут стать неустойчивыми. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим длинноволновые гидродинамические колебания ($\omega \gg k_z v_{Te}$) неоднородной плазмы в области частот, меньших чем дрейфовые частоты как электронов, так и ионов. В плазме относительно высокой плотности, в которой $c^2 \gg v_A^2$ (такой случай практически встречается довольно часто), из первого уравнения (4,3) при этом получаем ²⁹

$$\int dx \operatorname{Re} k_x = \int dx \left(-k_y^2 - \frac{M}{m} \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} \frac{T_e}{T_i} k_z^2 \frac{\partial \ln N T_e}{\partial \ln N T_i} \right)^{1/2} = \pi n. \quad (4,5)$$

Отсюда видим, что при выполнении локального неравенства

$$\frac{\partial \ln N T_e}{\partial \ln N T_i} > 0 \quad (4,6)$$

в области прозрачности плазмы, которая в рассматриваемом случае определяется условием $\omega \gg k_z v_{Te}$, частоты колебаний являются чисто мнимыми и соответствуют аperiодической неустойчивости неоднородной плазмы по отношению к таким колебаниям. Эта неустойчивость плазмы не связана с диссипативными процессами и в этом смысле является чисто гидродинамической. Инкремент нарастания таких колебаний может достигать достаточно больших значений, а именно, максимальный инкремент $\gamma_{\max} \sim v_{Ti}/L \ll \Omega_i$. Однако из условия $\omega \gg k_z v_{Te}$ следует, что такая неустойчивость возможна в плазме, продольные размеры (вдоль магнитного поля) которой превышают поперечные более чем в $\sqrt{M/m} \sim 40$ раз. Заметим также, что из условия потенциальности длинноволновых колебаний $\omega \ll k_z v_A$ (см. следующий параграф, формулу (5,4)) следует, что рассмотренные колебания могут существовать лишь в плазме очень низкого давления, когда $\beta = 8\pi P/B_0^2 \ll m/M$.

Рассмотрим теперь длинноволновые дрейфовые колебания в области частот $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$. Из дисперсионных уравнений (4,3) в этой области частот получаем

$$\int dx \operatorname{Re} k_x = \int dx \times \left\{ -k_y^2 - \frac{k_z^2 \left[1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \ln N T_i \right) \right] + \frac{\omega_{Le}^2}{v_{Te}^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right)}{1 + \frac{c^2}{v_A^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \ln N T_i \right)} \right\}^{1/2} = \pi n \quad (4,7a)$$

и

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\int dx \frac{\partial \operatorname{Re} k_x}{\partial \omega} \right)^{-1} \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{\omega \omega_{Le}^2}{|k_z| v_{Te}^3} \frac{1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}}}{1 + \frac{c^2}{v_A^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \ln N T_e \right)}. \quad (4,76)$$

При пренебрежении градиентными членами в области частот, больших чем дрейфовые, эти уравнения переходят в уравнения (3,7). Частоты, определяемые первым уравнением (4,7), всегда действительны, что свидетельствует о гидродинамической устойчивости неоднородной плазмы по отношению к рассматриваемым колебаниям. Декремент затухания γ , однако, при этом может стать положительным. Это соответствует кинетической неустойчивости плазмы (при этом γ представляет инкремент нарастания колебаний). Простой анализ уравнений (4,7) показывает, что как при положительных, так и при отрицательных значениях величины (4,4) для неустойчивости плазмы по отношению к рассматриваемым колебаниям необходимо выполнение следующего локального условия в области прозрачности:

$$1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right) < 0. \quad (4,8)$$

В случае, когда величина (4,4) положительна, а $\omega > k_z v_s$, это условие можно заменить более сильным локальным условием неустойчивости плазмы³

$$1 - \frac{1}{1 + (k_y^2 + k_z^2) r_{De}^2} \geq \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N}. \quad (4,9)$$

Отсюда, в частности, следует, что колебания с длиной волны больше дебаевского радиуса электронов являются заведомо неустойчивыми, если во всей области прозрачности плазмы $\partial \ln T_e / \partial \ln N \leq 0$. Колебания же с длиной волны меньше дебаевского радиуса неустойчивы при условии $\partial \ln T_e / \partial \ln N \leq 2$. Такие условия неустойчивости неоднородной плазмы указаны в работах^{3,15} (первое из этих условий со знаком неравенства было получено ранее в работах³⁰⁻³² *)). Следует указать еще на одно условие неустойчивости, имеющее место при положительном значении величины (4,4). Именно, в области очень низких частот $\omega < k_z v_s$, что возможно лишь в сильно неизотермической плазме, в которой $T_e \gg T_i$, из локального условия (4,8) следует, что неоднородная плазма может быть неустойчивой по отношению к колебаниям с длиной волны больше дебаевского радиуса электронов, если во всей области прозрачности $\partial \ln T_e / \partial \ln N \leq 2$.

В случае отрицательных значений величины (4,4) локальное условие неустойчивости (4,8) можно заменить более сильным условием

$$1 + \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) \frac{T_e}{T_i} \frac{\partial \ln N / \sqrt{T_e}}{\partial \ln N T_i} < 0. \quad (4,10)$$

В неизотермической плазме, в которой $T_e \gg T_i$, величина (4,4) положительна, и такая неустойчивость в ней поэтому невозможна. Что же касается

*) См. также работу³³, в которой содержится утверждение о неустойчивости неоднородной плазмы по отношению к длинноволновым колебаниям при постоянной температуре, т. е. когда $\frac{\partial \ln T}{\partial \ln N} = 0$.

изотермической плазмы, то условие (4,10) в ней может выполняться (при $c^2 \gg v_A^2$), если $-4 < \partial \ln T / \partial \ln N < -1$.

Инкременты нарастания рассмотренных колебаний могут достигать значений, сравнимых с частотой колебаний, которая порядка дрейфовой частоты электронов, т. е.

$$\gamma_{\max} < \omega \ll \frac{T_e}{T_i} \frac{v_{Ti}}{L}.$$

Следует отметить, что приведенные выше локальные условия неустойчивости являются необходимыми, но не достаточными условиями неустойчивости неоднородной плазмы. С другой стороны, выполнение этих условий во всей области прозрачности плазмы заведомо достаточно для неустойчивости. Необходимое и достаточное условие неустойчивости можно записать в виде интегрального соотношения $\gamma > 0$. Сказанное относится ко всем рассмотренным ниже кинетическим неустойчивостям плазмы. Поэтому в дальнейшем без особых оговорок это будет подразумеваться.

б) Перейдем теперь к рассмотрению коротковолновых дрейфовых колебаний неоднородной плазмы в условиях, когда $z_i \gg 1$, а $z_e \ll 1$. В однородной плазме в этой области длин волн низкочастотные колебания ($\omega \ll \Omega_i$) отсутствуют. Поэтому здесь мы рассмотрим лишь область частот, сравнимых с дрейфовыми частотами частиц, в которой существенно проявляется неоднородность плазмы. Учитывая, что в рассматриваемой области длин волн $k_\perp \gg k_z$, из уравнения (4,1) в пределе $\omega \gg k_z v_{Te}$ получаем следующее уравнение эйконала:

$$k_\perp^2 \left(1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \right) + \frac{\omega_{Li}^2}{v_{Ti}^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{v_{Te}^2} \left\{ \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln N}{\partial x} + \right. \\ \left. + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}} \left[1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} + \frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial x} \right) \right] \right\} = 0. \quad (4,11)$$

Отсюда, с учетом соотношений (2,19), получаем следующие дисперсионные уравнения для определения спектра коротковолновых колебаний неоднородной плазмы:

$$\left. \begin{aligned} \int dx \operatorname{Re} k_x &= \int dx \left\{ -k_y^2 - \frac{\omega_{Li}^2}{v_{Ti}^2} \frac{1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial \ln N}{\partial x}}{1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2}} \right\}^{1/2} = \pi n, \\ \gamma &= - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega^2 \left(\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{\frac{k_y \omega_{Li}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial \ln N}{\partial x}}{1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2}} \right)^{-1} \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{\omega_{Le}^2}{|k_z| v_{Te}^3} \frac{1}{1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2}} \times \\ &\quad \times e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}} \left[1 + \frac{T_e}{T_i} \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \left(1 + \frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4,12)$$

Легко видеть, что спектр, определяемый этими уравнениями, соответствует гидродинамически устойчивым колебаниям. Если, кроме этого, учесть, что во всей области прозрачности плазмы

$$\frac{k_y}{\omega \Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \ln N > 0,$$

то из выражения для γ получаем, что при условии $\partial \ln T_e / \partial \ln N \geq 0$ (когда оно выполняется во всей области прозрачности) рассматриваемые колебания являются также и кинетически устойчивыми. Однако вследствие

того, что $\omega^2 \gg k_z^2 v_{Ti}^2$, при любом конечном отрицательном значении величины $\partial \ln T_e / \partial \ln N < 0$ в области прозрачности плазмы, эти колебания могут стать неустойчивыми. Инкремент нарастания таких колебаний экспоненциально мал, и поэтому они не представляют большого интереса с точки зрения неустойчивости плазмы. Заметим, что, согласно условию $\omega \gg k_z v_{Te}$, такие колебания могут существовать лишь в плазме, продольные размеры которой больше поперечных по крайней мере в $\sqrt{M/m} \sim 40$ раз. Из условия же потенциальности колебаний (см. формулу (5,4)) следует, что такие колебания возможны, когда

$$\beta \ll \frac{m}{M} z_i \sim z_e \ll 1.$$

С точки зрения устойчивости плазмы более интересны коротковолновые дрейфовые колебания в области частот $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$. Как будет показано ниже, неоднородная плазма практически всегда неустойчива по отношению к таким колебаниям, причем инкремент нарастания колебаний отнюдь не мал (см. формулы (4,15) и (4,16)). Уравнение эйконала для потенциальных колебаний неоднородной плазмы (4,1) в этой области длин волн и частот колебаний примет вид *)

$$\left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) + \frac{T_e}{T_i} \frac{|\Omega_i|}{\sqrt{2\pi k_z} v_{Ti}} \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}} + \\ + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \frac{T_e}{T_i} \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} = 0. \quad (4,13)$$

Для определения спектра колебаний неоднородной плазмы при этом получаем следующие дисперсионные уравнения³:

$$\left. \begin{aligned} \int dx \operatorname{Re} k_x &= \int dx |k_y| \left[-1 + \frac{v_{Ti}^2}{2\pi\omega^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}} \right)^2 \right]^{1/2} = \pi n, \\ \gamma &= - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \\ &\times \frac{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \frac{T_i}{T_e}}{\partial \ln N / \sqrt{T_i}} \right)}{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{v_{Ti}^2}{\left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4,14)$$

Полученный спектр рассматриваемых коротковолновых колебаний свидетельствует о гидродинамической устойчивости неоднородной плазмы. При этом, однако, практически для любой неоднородности имеет место кинетическая неустойчивость. Действительно, если учесть, что во всей области прозрачности плазмы

$$\frac{k_y}{\omega \Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}} < 0,$$

*) Здесь мы для простоты ограничиваемся исследованием колебаний с длиной волны больше дебаевского радиуса частиц, что в рассматриваемых условиях возможно лишь в плазме относительно высокой плотности, в которой $c^2 \gg v_A^2$. Учет конечности дебаевского радиуса частиц не меняет полученного ниже локального условия неустойчивости неоднородной плазмы (4,18). Частоты же колебаний при этом уменьшаются на величину $1/(1 + k_z^2 r_D^2)$.

из второго соотношения (4,14) находим локальное условие неустойчивости неоднородной плазмы

$$1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_i/T_e}{\partial \ln N/\sqrt{T_i}} > 0, \quad (4,15)$$

которое, по-видимому, выполняется во всех практически реальных случаях неоднородной плазмы. В таком виде это условие неустойчивости приведено в работе ³. В случае же изотермической плазмы вывод о так называемой «универсальной» неустойчивости неоднородной плазмы по отношению к рассматриваемым колебаниям впервые был сделан в работах ³¹⁻³³.

Инкременты нарастания этих колебаний могут достигать значений, сравнимых с частотой $\gamma_{\max} < \omega < v_{Ti}/L \ll \Omega_i$ (т. е. они меньше дрейфовых частот частиц).

в) Наконец, осталось рассмотреть потенциальные колебания неоднородной плазмы в области самых коротких длин волн, меньших чем ларморов радиус электронов. Можно показать, что такие колебания в неоднородной плазме возможны лишь в области частот $\omega \gg k_z v_{Te}$. (В области частот $\omega \lesssim k_z v_{Te}$ такие колебания невозможны.) Уравнение эйконала (4,1) в этих условиях принимает вид

$$k_{\perp} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - \frac{k_y v_{Te}}{\sqrt{2\pi\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} + \\ + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_y}{\sqrt{2\pi} |k_z|} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} + \frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial x} \right) = 0. \quad (4,16)$$

Учитывая примечание на стр. 524, которое сохраняет силу и в рассматриваемом случае, здесь мы ограничились рассмотрением колебаний с длиной волны больше дебаевского радиуса электронов (это означает, что полученные ниже формулы этого параграфа (4,17) и (5,18), строго говоря, справедливы лишь для плазмы высокой плотности, в которой $c^2 \gg M v_A^2/m$). Из формул (4,16) и (2,19) получаем следующие дисперсионные уравнения для определения спектра коротковолновых колебаний плазмы:

$$\left. \begin{aligned} \int dx \operatorname{Re} k_x &= \int dx |k_y| \left[-1 + \frac{M T_i}{m T_e} \frac{v_{Ti}^2}{2\pi\omega^2} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} \right)^2}{(1 + T_i/T_e)^2} \right]^{1/2} = \pi n, \\ \gamma &= - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega^2 \frac{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{T_i v_{Ti}^2}{T_e |k_z| v_{Te}} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} \right)^2}{(1 + T_i/T_e)^2} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}} \left(1 + \frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N/\sqrt{T_e}} \right)}{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{T_i v_{Ti}^2}{T_e \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right)^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} \right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4,17)$$

Отсюда видно, что рассматриваемые колебания гидродинамически устойчивы. Кинетическая же неустойчивость возможна при выполнении следующего локального условия в области прозрачности плазмы:

$$1 + \frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N/\sqrt{T_e}} < 0. \quad (4,18)$$

Таким образом, для неустойчивости неоднородной плазмы по отношению к таким коротковолновым потенциальным колебаниям необходимо

выполнение одного из условий:

$$\text{либо } \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 0, \quad \text{либо } \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 2.$$

Инкремент нарастания колебаний экспоненциально мал, однако на краю рассматриваемой области частот $\omega \sim k_z v_{Te}$ инкремент может достигать значений, сравнимых с частотой колебаний, которая имеет порядок $\omega \sim v_{Te}/L$ (больше, чем все рассмотренные выше частоты дрейфовых колебаний). Из условия потенциальности колебаний (см. формулу (5,4)) следует, что такие колебания возможны, когда $\beta \ll m z_i / M \sim z_e$. При $\beta \ll 1$ это условие заведомо выполнено.

В заключение кратко остановимся на вопросе о роли ионного поглощения волн в неоднородной плазме. Выше мы всюду пренебрегали ионным поглощением по сравнению с электронным, как экспоненциально малым эффектом. Законность такого пренебрежения обуславливается неравенством

$$1 \gg \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{M}{m}} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Ti}^2}}. \quad (4,19)$$

Однако благодаря наличию большого множителя перед малой экспонентой (особенно в случае неизотермической плазмы, в которой $T_e \gg T_i$) это неравенство может нарушаться. Пренебрегать ионным поглощением волн при этом уже нельзя. Очевидно, такое положение может иметь место лишь в области частот $\omega \ll k_z v_{Te}$. В области же частот $\omega \gg k_z v_{Te}$ ионное поглощение волн всегда пренебрежимо мало. Не производя здесь соответствующих выкладок, укажем лишь, что в случае однородной температуры ионов, т. е. когда $\nabla T_i = 0$, слагаемые, учитывающие черенковский эффект на ионах, в выражении для γ всегда приводят к поглощению волн. Поэтому в случае неустойчивых колебаний плазмы эти слагаемые играют стабилизирующую роль *). Если же температура ионов плазмы неоднородна, то черенковский эффект на ионах в определенных условиях может привести к раскачке колебаний, т. е. стать причиной неустойчивости. Можно показать, что в пределе длинноволновых колебаний, $z_i \ll 1$, это возможно при выполнении следующего локального условия в области прозрачности плазмы:

$$\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < 0. \quad (4,20)$$

В пределе же коротковолновых колебаний, когда $z_i \gg 1$, а $z_e \ll 1$, черенковский эффект на ионах соответствует раскачке колебаний при условии

$$\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N / \sqrt{T_i}} < 0, \quad (4,21)$$

т. е. либо при $\partial \ln T_i / \partial \ln N < 0$, либо при $\partial \ln T_i / \partial \ln N > 2$. Заметим, что условия (4,20) и (4,21) можно непосредственно получить из аналогии ионной раскачки колебаний с электронной в области частот $\omega \gg k_z v_{Te}$ (см. (4,12), (4,17) и (4,18) и следствия, вытекающие из них).

*) Следует заметить, что с ростом давления плазмы (с ростом $\beta = 8\pi P/B_0^2$) черенковский эффект для дрейфовых колебаний на ионах плазмы возрастает. Как показано в работе ²⁴, благодаря ионному поглощению волн в плазме с постоянной температурой при $\beta \gtrsim 0,13$ происходит стабилизация дрейфовых колебаний в области частот $\omega \gg k_z v_{Ti}$.

§ 5. НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ДРЕЙФОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

Переходя к исследованию низкочастотных ($\omega \ll \Omega_i$) непотенциальных дрейфовых колебаний неоднородной плазмы, прежде всего отметим, что из условия $v_A^2 \gg (T_e + T_i)/M$ (или, что то же самое, $\beta = 8\pi P/B_0^2 \ll 1$) следует неравенство

$$\omega \sim \frac{k_y v_T^2}{\Omega L} \sim \frac{k_y v_s^2}{\Omega} \frac{1}{L} \ll k_y v_s \ll k_y v_A. \quad (5.1)$$

Как и в случае потенциальных колебаний, будем также считать выполненными условия $\omega \gg k_z v_{Ti}$ и $k_z v_T \ll \Omega$. Из неравенства (5.1) при этом имеем $k_y \gg k_z$. Учитывая все это, уравнение эйконала (1,10) для дрейфовых непотенциальных колебаний можно записать в виде

$$\varepsilon_{33} \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{11} \right) + k_{\perp}^2 \varepsilon_{11} = 0, \quad (5.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 1 + \sum \frac{1}{T} \left[1 - \frac{k_y v_T^2}{\omega \Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial}{\partial N} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T} \right) \right] T \frac{\omega_L^2}{\Omega^2} \frac{1 - A_0(z)}{z}, \\ \varepsilon_{33} &= 1 + \sum \frac{\omega_L^2}{k_z^2 v_T^2} \left[1 - \frac{k_y v_T^2}{\omega \Omega} \left(\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T} \right) \right] A_0(z) \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{|k_z| v_T} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

В областях частот $\omega \gg k_z v_{Te}$ (при пренебрежении экспоненциально малыми членами) и $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ и при условии $z_e \ll 1$ (длина волны больше ларморова радиуса электронов) уравнение (5,2) переходит соответственно в уравнения (6,14) и (6,13) работы ⁸.

Легко видеть, что при условии $\omega^2 \varepsilon_{11} \ll c^2 k_z^2$ уравнение (5,2) переходит в уравнение эйконала для потенциальных колебаний поля (4,1), исследованное в предыдущем параграфе. Таким образом, условие потенциальности низкочастотных дрейфовых колебаний неоднородной плазмы можно записать в виде

$$\omega^2, \omega \omega_d \ll \frac{k_z^2 v_A^2 z_i}{1 - A_0(z_i) + \frac{T_i}{T_e} (1 - A_0(z_e)) !} \equiv k_z^2 v_A^{*2}. \quad (5.4)$$

Все результаты предыдущего параграфа справедливы при выполнении этого условия. Отсюда, в частности, следует, что длинноволновые потенциальные колебания в области частот $\omega \gg k_z v_{Te}$ возможны лишь в плазме очень низкого давления, когда $\beta \ll m/M$. Коротковолновые же потенциальные колебания в этой области частот могут существовать в плазме более высокого давления, в которой $\beta \ll m z_i/M$.

В обратном пределе, когда $\omega^2 \varepsilon_{11} \gg k_z^2 c^2$, уравнение (5,2) распадается на следующие два уравнения:

$$\varepsilon_{11} = 0, \quad (5.5)$$

$$k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{33} = 0, \quad (5.6)$$

первое из которых описывает потенциальные колебания неоднородной плазмы, распространяющиеся поперек магнитного поля, второе же — непотенциальные колебания.

Исследование непотенциальных дрейфовых колебаний неоднородной плазмы мы ограничим анализом уравнения (5,6). Это вызвано тем, что,

с одной стороны, анализ уравнения (5,2) в общем случае оказывается весьма громоздким, а с другой стороны, уравнение (5,6) с а м о п о с е б е интересно, так как описывает колебания неоднородной плазмы в пределе, противоположном пределу потенциальных колебаний.

Уравнение (5,5) во всех случаях приводит к спектру устойчивых колебаний плазмы с частотой порядка дрейфовых частот $\omega \sim \omega_d$. В этом легко убедиться из самого уравнения (5,5), которое относительно ω является линейным и не содержит мнимых членов. Поэтому анализом этого уравнения мы заниматься не будем и основное внимание сосредоточим на уравнении (5,6). В области длинных волн, когда $z_i \ll 1$, выражение (5,3) для ϵ_{33} имеет вид

$$\epsilon_{33} = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \left[1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \left(\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\partial T_e}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_e} \right) \right] \left[1 - \operatorname{Re} J_+ \left(\frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) \right] +$$

$$+ i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Le}^2}{|k_z|^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}} \left[1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{|v_{Te}|} + \frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial x} \right) \right]. \quad (5,7)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5,6) и учитывая соотношения (2,19), получим следующие дисперсионные уравнения для определения спектра непотенциальных колебаний неоднородной плазмы в области частот $\omega \gg k_z v_{Te}$:

$$\left. \begin{aligned} \int dx \operatorname{Re} k_x &= \int dx \left[-k_y^2 - \frac{\omega_{Le}^2}{c^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln N T_e \right) \right]^{1/2} = \pi n, \\ \gamma &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\int dx \frac{\omega^4 \omega_{Le}^2}{|k_z|^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}} \left[1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{|v_{Te}|} + \frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial x} \right) \right]}{\int dx \frac{\omega_{Le}^2 k_y v_{Te}^2}{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln N T_e}. \end{aligned} \right\} \quad (5,8)$$

Из первого уравнения (5,8) следует, что рассматриваемые колебания гидродинамически устойчивы, причем частоты колебаний порядка дрейфовых частот электронов,

$$\omega \sim \omega_d \sim \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e}.$$

Учитывая, что в области прозрачности плазмы согласно первому уравнению (5,8)

$$1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln N T_e < 0,$$

из выражения для γ находим необходимое локальное условие кинетической неустойчивости неоднородной плазмы по отношению к таким колебаниям:

$$1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln N T_e \left(1 + \frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N T_e} \right) > 0. \quad (5,9)$$

Отсюда следует, что неоднородная плазма может быть неустойчивой при любом конечном отрицательном значении величины $\partial \ln T_e / \partial \ln N T_e$ в области прозрачности, т. е. при условии

$$-1 < \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 0.$$

Инкремент нарастания этих колебаний, вообще говоря, экспоненциально мал, но на краю рассматриваемой области частот, т. е. при $\omega \sim k_z v_{Te}$, может достигать значений, сравнимых с частотой колебаний $\gamma_{\max} < \omega \sim \omega_d$.

В области частот $k_z v_A \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ — что возможно в плазме при

$$\beta = \frac{8\pi P}{B_0^2} \gg \frac{m}{M},$$

— из формул (5,6), (5,7) и (2,19) получаем следующие дисперсионные уравнения для определения спектра длинноволновых непотенциальных колебаний неоднородной плазмы:

$$\left. \begin{aligned} \int dx \operatorname{Re} k_x &= \int dx \left[-k_y^2 + \frac{\omega^2 \omega_{Le}^2}{k_z^2 c^2 v_{Te}^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right) \right]^{1/2} = \pi n, \\ \gamma &= - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega^2 \frac{\int dx \operatorname{Re} k_x \frac{\omega_{Le}^2}{|k_z|^3 v_{Te}^2} \left[1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right) \right]}{\int dx \operatorname{Re} k_x \frac{\omega_{Le}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \left(2 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (5,10)$$

Легко видеть, что эти колебания гидродинамически устойчивы, причем частоты колебаний, так же как и рассмотренных выше, порядка дрейфовой частоты электронов. Локальное условие кинетической неустойчивости неоднородной плазмы по отношению к таким колебаниям имеет вид (учитывая, что согласно первому уравнению (5,10) $1 - k_y v_{Te}^2 / \omega \Omega_e \partial \ln N / \partial x > 0$)

$$1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right) < 0. \quad (5,11)$$

Отсюда имеем, что в случае

$$\frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln N}{\partial x} > 0$$

плазма может быть неустойчивой при условии $\partial \ln T_e / \partial \ln N < 0$, а в случае $\frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial \ln N}{\partial x} < 0$ при условии $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 2$.

Инкременты нарастания колебаний на краю рассматриваемой области частот $\omega \sim k_z v_{Te}$ здесь также могут достигать значений, сравнимых с частотой колебаний, т. е. $\gamma_{\max} < \omega \sim \omega_d$.

Формулы (5,7) — (5,11), полученные в пределе длинноволновых колебаний, остаются справедливыми и для случая коротковолновых колебаний, когда $z_i \gg 1$, а $z_e \ll 1$. Естественно, сохраняются и локальные условия неустойчивости (5,9) и (5,11). Меняются лишь условия, в которых такие коротковолновые колебания возможны. Именно, колебания, описываемые формулами (5,10) и (5,11), в случае коротких волн возможны в плазме, в которой

$$\beta = \frac{8\pi P}{B_0^2} \gg \frac{m}{M} Z_i,$$

в то время как в пределе длинноволновых колебаний они возможны в плазме, в которой $\beta \gg m/M$.

Наконец, осталось проанализировать уравнение (5,6) в области самых коротких длин волн; когда $z_e \gg 1$. Здесь, так же как и в случае потенциальных колебаний, невозможны колебания в области частот $k_z v_A^* \ll \omega \ll k_z v_{Te}$. В области же частот $\omega \gg k_z v_{Te}$ из формул (5,3) имеем

$$\begin{aligned} \epsilon_{33} &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \frac{|\Omega_e|}{\sqrt{2\pi k_{\perp} v_{Te}}} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln N \sqrt{T_e} \right) + \\ &+ i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Le}^2}{|k_z|^3 v_{Te}^3} \frac{|\Omega_e|}{\sqrt{2\pi k_{\perp} v_{Te}}} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}} \left[1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \left(\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5,12)$$

Из формул (5,6) и (2,19) при этом получаем следующие дисперсионные соотношения для определения спектра коротковолновых колебаний неоднородной плазмы:

$$\left. \begin{aligned} \int dx \operatorname{Re} k_x = &= \int dx \left\{ -k_y^2 + \left[-\frac{\omega_{Le}^2 |\Omega_e|}{\sqrt{2\pi c^2 v_{Te}}} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln N \sqrt{T_e} \right) \right]^{2/3} \right\}^{1/2} = \pi n, \\ \gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \frac{\frac{\omega_{Le}^2 |\Omega_e|}{\sqrt{2\pi c^2 v_{Te}}} \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln N \sqrt{T_e}}{\left[-\frac{\omega_{Le}^2 |\Omega_e|}{\sqrt{2\pi c^2 v_{Te}}} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln N \sqrt{T_e} \right) \right]^{1/3}} \right\}^{-1} \times \\ &\times \int \frac{dx}{(\operatorname{Re} k_x)^2} \frac{\omega^4 \omega_{Le}^2 |\Omega_e|}{\sqrt{2\pi} |k_z|^3 c^2 v_{Te}^4} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}} \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln N \sqrt{T_e} \left(1 + \frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N \sqrt{T_e}} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5,13)$$

Из этих формул видно, что рассматриваемые колебания гидродинамически устойчивы, причем они возможны в области частот, в которой

$$1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln N \sqrt{T_e} < 0.$$

Из выражения для γ при этом получаем следующее локальное условие кинетической неустойчивости неоднородной плазмы по отношению к таким колебаниям:

$$1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln N \sqrt{T_e} \left(1 + \frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N \sqrt{T_e}} \right) > 0. \quad (5,14)$$

Таким образом, для неустойчивости плазмы необходимо, чтобы в области прозрачности выполнялось условие $\partial \ln T_e / \partial \ln N \sqrt{T_e} < 0$, или, что то же самое, $-2 < \partial \ln T_e / \partial \ln N < 0$. Инкремент нарастания колебаний хотя и содержит экспоненциально малый множитель, на краю рассматриваемой области частот $\omega \sim k_z v_{Te}$ может достигать значений, сравнимых с частотой колебаний, которая по порядку величины равна дрейфовой частоте электронов, т. е. $\gamma_{\max} < \omega \leq \omega_d$.

Следует отметить, что все рассмотренные выше непотенциальные колебания, описываемые уравнением (5,6), являются устойчивыми, если температура электронов однородна, $T_e = \text{const}$, и что во всех случаях частота колебаний порядка дрейфовой частоты электронов. Неустойчивости носят кинетический характер, а поэтому инкремент нарастания колебаний меньше частоты ω_d . Отметим также, что, в отличие от потенциальных колебаний ($\omega_d \ll k_z v_A^*$), которые неустойчивы при любых градиентах плотности и температуры частиц, непотенциальные колебания, описываемые уравнением (5,6) ($\omega_d \gg k_z v_A^*$), неустойчивы лишь вне области, определенной неравенством $0 < \partial \ln T_e / \partial \ln N < 2$.

Выше, при анализе потенциальных колебаний неоднородной плазмы, было указано, что условие пренебрежения ионным поглощением волн (14,19) в области низких частот, когда $\omega \ll k_z v_{Te}$, может нарушаться. При этом становится необходимым учет черенковского эффекта на ионах,

который в определенных условиях может привести к стабилизации неустойчивых дрейфовых колебаний даже в случае плазмы низкого давления, в которой

$$\beta = \frac{8\pi P}{B_0^2} \ll 1.$$

Легко видеть, что в области непотенциальности колебаний, исследованной в этом параграфе, ионным поглощением волн всегда можно пренебречь. Действительно, из условия непотенциальности колебаний имеем $\omega \sim \omega_d \gg k_z v_A^* \gg k_z v_{Ti}$. Таким образом, фазовая скорость колебаний в этой области частот должна по крайней мере на порядок превышать тепловую скорость ионов, что обуславливает заведомое выполнение условия (4.19).

§ 6. ЭФФЕКТ НЕПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ. СТАБИЛИЗАЦИЯ ДРЕЙФОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

До сих пор все наше рассмотрение, строго говоря, относилось к случаю магнитного поля с параллельными силовыми линиями. В полученных выше формулах фигурировали волновые числа k_y и k_z . В случае плоской геометрии эти волновые числа следует понимать буквально, а в случае цилиндрической геометрии под k_y понимается величина l/r (см. формулу (1.39)). Все результаты, однако, непосредственно обобщаются на случай, когда силовые линии магнитного поля непараллельны, а именно когда наряду с продольным магнитным полем B_z имеется также малое поперечное поле $B_\perp \ll B_z$, перпендикулярное к направлению неоднородности плазмы*). В случае плоской геометрии поле $B_\perp$ направлено по оси y , а в случае цилиндрической геометрии — по азимуту. Все полученные выше формулы при этом сохраняют свой вид, если под k_y и k_z понимать величины, определенные соотношениями (1.40). В случае, когда поперечное магнитное поле $B_\perp$ в области прозрачности плазмы по отношению к каким-либо колебаниям меняется незначительно (по сравнению с изменением плотности и температуры), оно, естественно, не оказывает никакого влияния на эти колебания плазмы, ибо силовые линии полного магнитного поля при этом остаются параллельными в области прозрачности и все дело сводится к обычному повороту системы координат. Иное положение имеет место в случае, когда поперечное поле $B_\perp$ в области прозрачности меняется сильно (как было указано выше, поле $B_\perp$ может быть произвольно неоднородным, если только $B_\perp \ll B_z$). При этом сама область прозрачности существенно определяется поперечным магнитным полем $B_\perp$, и в определенных условиях может вообще отсутствовать. В этом смысле неоднородное поперечное поле оказывает существенное влияние на спектр колебаний плазмы.

Все без исключения рассмотренные выше колебания неоднородной плазмы лежат в области частот $\omega \gg k_z v_{Ti}$. Это условие собственно и определяет область прозрачности плазмы по отношению к рассмотренным колебаниям. Дрейфовые колебания попадают в эту область частот при условии $\omega_d \gg k_z v_{Ti}$. С ростом поперечного магнитного поля увеличивается величина эффективного k_z и это условие может нарушиться. Дрейфовые колебания при этом становятся невозможны. Естественно, в этом случае отсутствуют и рассмотренные выше дрейфовые неустойчивости неоднородной плазмы. В этом смысле можно говорить, что происходит запрет дрейфовых колебаний неоднородной плазмы. Учитывая формулы (1.40),

*) Здесь мы не рассматриваем эффекта гравитационной (конвективной) неустойчивости плазмы, связанной с наличием составляющей магнитного поля вдоль неоднородности.

условие запрета дрейфовых колебаний можно записать в виде ³⁵

$$\frac{k_z}{k_y} \sim \frac{B_{\perp}}{B_z} \gtrsim \frac{v_T^2}{\Omega L} \sim \frac{T_m}{T_i} \frac{v_{Ti}}{L\Omega_i}, \quad (6,1)$$

где $T_m = \max(T_e, T_i)$. Из этого условия видно, что уже достаточно малые неоднородные поперечные магнитные поля стабилизируют дрейфовую неустойчивость неоднородной плазмы.

Еще легче стабилизировать дрейфовые неустойчивости по отношению к колебаниям в области частот $\omega \gg k_z v_{Te}$ и $\omega \gg k_z v_A^*$ (к последним, в частности, относятся рассмотренные нами непотенциальные колебания неоднородной плазмы, см. формулу (5,4)). Так, условие запрета дрейфовых колебаний в области частот $\omega \gg k_z v_{Te}$ можно записать в виде

$$\frac{k_z}{k_y} \sim \frac{B_{\perp}}{B_z} \gtrsim \frac{v_T^2}{v_{Te} L \Omega} \sim \sqrt{\frac{m}{M}} \sqrt{\frac{T_m^2}{T_e T_i}} \frac{v_{Ti}}{L \Omega_i}. \quad (6,2)$$

Условие же запрета рассмотренных нами непотенциальных колебаний в области длинных волн, когда $z_i \ll 1$, имеет вид

$$\frac{k_z}{k_y} \sim \frac{B_{\perp}}{B_z} \gtrsim \frac{v_T^2}{v_A L \Omega} \sim \sqrt{\frac{8\pi P}{B_0^2}} \frac{v_{Ti}}{L \Omega_i} \sim \sqrt{\beta} \frac{v_{Ti}}{L \Omega_i}. \quad (6,3)$$

Наконец, в случае коротковолновых непотенциальных колебаний плазмы условие запрета записывается в виде

$$\frac{k_z}{k_y} \sim \frac{B_{\perp}}{B_z} \gtrsim \frac{v_T^2}{v_A^* L \Omega} \sim \sqrt{\frac{8\pi P}{B_0^2}} \sqrt{\frac{1}{z_i}} \frac{v_{Ti}}{L \Omega_i} \sim \sqrt{\frac{\beta}{z_i}} \frac{v_{Ti}}{L \Omega_i}. \quad (6,4)$$

Из условий (6,1)–(6,4) следует, что труднее всего стабилизировать неустойчивость неоднородной плазмы по отношению к потенциальным колебаниям в области частот $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$, $k_z v_A^*$ и, в особенности, если плазма к тому же является неизотермической, $T_e \gg T_i$. Указанные условия запрета дрейфовых колебаний были получены в работах ^{34–36}. В этих же работах можно найти условия стабилизации неоднородной плазмы по отношению к тому или иному конкретному виду неустойчивых дрейфовых колебаний. Такие условия без труда получаются подстановкой частот дрейфовых колебаний, определенных в предыдущих параграфах, в условия $\omega \gg k_z v_{Ti}$, $\omega \gg k_z v_{Te}$, $\omega \gg k_z v_A^*$ (в зависимости от того, каким из этих условий определяется область частот рассматриваемых дрейфовых колебаний). В таблице приведены локальные условия неустойчивостей неоднородной плазмы по отношению к рассмотренным выше дрейфовым колебаниям и указаны условия их запрета.

В настоящем обзоре мы ограничились изложением применений метода геометрической оптики к теории колебаний одномерно-неоднородной плазмы. Это обусловлено прежде всего тем, что в литературе освещен лишь только такой случай. С другой стороны, сейчас уже ясно, что практические запросы будут требовать развития теории колебаний плазмы как для случая двумерно неоднородных распределений, так и для случая трехмерных неоднородностей. В этом направлении сейчас делаются только первые шаги ^{37, 38}. При этом, если уравнению эйконала может быть поставлено в соответствие приближенно эквивалентное дифференциальное уравнение в частных производных эллиптического типа, то для определения спектра колебаний можно воспользоваться многомерными фазовыми интегралами Бора—Зоммерфельда

$$(2\pi)^m n = \int dx_1 \dots dx_m \int dk_1 \dots dk_m,$$

Область частот, тип колебаний	Локальное условие неустойчивости	Максимально возможные инкременты	Условие стабилизации
1. $\omega \gg k_z v_{Te}, z_i \ll 1$, потенциальные колебания	$\frac{\partial \ln N T_e}{\partial \ln N T_i} > 0$	$\gamma_{\max} \leq \frac{v_{Ti}}{L} \frac{T_{\min}}{T_i} \frac{k_y v_{Ti}}{\Omega_i}$	(6,2)
2. $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}, z_i \ll 1$, потенциальные колебания	$\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \leq \frac{2 k^2 r_{De}^2}{1 + k^2 r_{De}^2}$	$\gamma_{\max} < \omega \approx \frac{v_{Ti}}{L} \frac{T_e}{T_i} \frac{k_y v_{Ti}}{\Omega_i}$	(6,1)
3. $\omega \gg k_z v_{Te}, z_i \gg 1, z_e \ll 1$, потенциальные колебания	$\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 0$	$\gamma_{\max} < \omega \approx \frac{v_{Ti}}{L} \frac{k_y v_{Ti}}{\Omega} \frac{1}{1 + k_{\perp}^2 r_{Di}^2}$	(6,2)
4. $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}, z_i \gg 1, z_e \ll 1$, потенциальные колебания	$1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_i / T_e}{\partial \ln N / \sqrt{T_i}} > 0$	$\gamma_{\max} < \omega \approx \frac{v_{Ti}}{L} \frac{T_e}{T_e + T_i} \frac{1}{1 + k_{\perp}^2 r_{Di}^2}$	(6,1)
5. $\omega \gg k_z v_{Te}, z_e \gg 1$, потенциальные колебания	$\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 0, \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 2$	$\gamma_{\max} < \omega \approx \frac{v_{Te}}{L} \frac{T_i}{T_e + T_i} \frac{1}{1 + k_{\perp}^2 r_{De}^2}$	(6,2)
6. $\omega \gg k_z v_{Te}, z_i \ll 1$, непотенциальные колебания	$-1 < \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 0$	$\gamma_{\max} > \omega \approx \frac{T_e}{T_i} \frac{v_{Ti}}{L} \frac{k_y v_{Ti}}{\Omega_i} \frac{1}{1 + (k_{\perp}^2 c^2 / \omega_{Le}^2)}$	(6,2), (6,3)
7. $k_z v_A \ll \omega \ll k_z v_{Te}, z_i \ll 1$, непотенциальные колебания	$0 > \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N}, \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 2$	$\gamma_{\max} < \omega \approx \frac{T_e}{T_i} \frac{v_{Ti}}{L} \frac{k_y v_{Ti}}{\Omega_i}$	(6,3)
8. $\omega \gg k_z v_{Te}, z_i \gg 1, z_e \ll 1$, непотенциальные колебания	$-1 < \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 0$	$\gamma_{\max} < \omega \approx \frac{v_{Ti}}{L} \frac{T_e}{T_i} \frac{k_y v_{Ti}}{\Omega_i} \frac{1}{1 + (k_{\perp}^2 c^2 / \omega_{Le}^2)}$	(6,2), (6,4)
9. $k_z v_A^* \ll \omega \ll k_z v_{Te}, z_i \gg 1, z_e \ll 1$, непотенциальные колебания	$0 > \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N}, \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 2$	$\gamma_{\max} < \omega \approx \frac{v_{Ti}}{L} \frac{T_e}{T_i} \frac{k_y v_{Ti}}{\Omega_i}$	(6,4)
10. $\omega \gg k_z v_{Te}, z_e \gg 1$ непотенциальные колебания	$-2 < \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 0$	$\gamma_{\max} < \omega \approx \frac{k_y v_{Te}}{\Omega_e} \frac{v_{Te}}{L} < \frac{v_{Te}}{L}$	(6,2), (6,4)

где n — целое число, значительно превышающее единицу, m — число измерений пространства, k — волновой вектор. Важно указать область интегрирования. Прежде всего, интегрирование по k ведется по объему, ограниченному поверхностью, описываемой уравнением эйконала. Заметим, что соответствующий объем оказывается конечным для уравнений эллиптического типа, а также для некоторых колебаний, описываемых уравнением параболического типа³⁸. Интегрирование по пространственным переменным ведется либо вплоть до границ, на которых заданы недиссипативные граничные условия, либо по области, ограниченной поверхностью (или линией) $k^2 \equiv \sum k_i^2 = 0$. В этом последнем случае замкнутых лучей траектория луча почти полностью заполняет область прозрачности плазмы. При этом, очевидно, нельзя говорить о разделении переменных в уравнениях поля. Наоборот, когда такое разделение возможно, очевидно, возможно сведение трехмерной задачи к двумерной, а двумерной — к одномерной.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмодобных сред, М., Госатомиздат, 1961; А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН 74, 221 (1961).
2. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, М., Изд-во АН СССР, 1961.
3. Л. М. Коврижных, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, ЖЭТФ 44, 1953 (1963).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
5. В. П. Силин, Изв. вузов (Радиофизика) 6, 702 (1963).
6. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, ЖТФ 31, 167 (1961).
7. Р. Р. Рамазашвили, А. А. Рухадзе, ЖТФ 32, 644 (1962).
8. А. Б. Михайловский, Ядерный синтез 2, 162 (1963); А. Б. Михайловский, Колебания неоднородной плазмы, Препринт ИАЭ (1963), Вопросы теории плазмы, вып. 3, М., Госатомиздат, 1963, стр. 141.
9. В. П. Силин, Изв. вузов (Радиофизика) 6, 640 (1963); ЖТФ 34, № 2 (1964).
10. А. С. Монин, А. М. Яглом, Прикл. мех. и тех. физ. № 5, 3 (1962); Линь Цзя-Цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, М., ИЛ, 1958.
11. А. Эрдейи, Асимптотические разложения, М., ИЛ, 1962. R. E. Langer, Phys. Rev. 51, 669 (1937); Bull. Amer. Math. Soc. 40, 545 (1934); Trans. Amer. Math. Soc. 34, 447 (1932); 46, 151 (1939).
12. В. П. Силин, О квазиклассических правилах квантования для комплексных потенциалов, Препринт ФИАН (1962).
13. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Ростомаров, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 4, № 1 (1964).
14. N. A. Krall, M. N. Rosenbluth, Phys. Fluids 6, 254 (1963).
15. В. П. Силин, ЖЭТФ 44, 1271 (1963).
16. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН 76, 79 (1962).
17. Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, ЖТФ 34, (1964).
18. В. Л. Гинзбург, Электромагнитные волны в плазме, М., Физматгиз, 1960.
19. Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, ЖЭТФ 40, 1213 (1960).
20. К. Н. Степанов, Укр. физ. ж. 4, 678 (1959).
21. А. А. Рухадзе, Прикл. мех. и тех. физ., № 3, 139 (1963).
22. Ю. А. Церковников, ЖЭТФ 32, 67 (1957).
- 23а. M. Rosenbluth, N. Krall, N. Rostoker, Ядерный синтез, Приложение 1, 143 (1962).
- 23б. N. A. Krall, M. N. Rosenbluth, Phys. Fluids 5, 1435 (1962).
24. А. Б. Михайловский, Л. В. Михайловская, ЖЭТФ 45, 1566 (1963).
25. N. D. Angelo, R. W. Motley, Phys. Fluids. 6, 422 (1963).
26. А. Б. Михайловский, А. В. Тимофеев, ЖЭТФ 44, 919 (1963); А. Б. Михайловский, ЖЭТФ 44, 1552 (1963).
27. А. А. Рухадзе, Изв. вузов (Радиофизика) 6, 928 (1963).
28. В. Ф. Кулешов, А. А. Рухадзе, К теории взаимодействия пучка заряженных частиц с неоднородной плазмой, Препринт ФИАН (1963), ЖТФ 34, № 4 (1964).

29. Е. Е. Ловецкий, Л. М. Коврижных, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, ДАН СССР 149, 1052 (1963).
 30. Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев, ДАН СССР 138, 581 (1961); Ядерный синтез, Приложение 2, 481 (1962).
 31. А. Б. Михайловский, Л. И. Рудаков, ЖЭТФ 44, 912 (1963).
 32. А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖЭТФ 44, 903 (1963).
 33. Б. Б. Кадомцев, А. В. Тимофеев, ДАН СССР 135, 581 (1962).
 34. А. А. Галеев, С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, Теория устойчивости неоднородной плазмы, Препринт ИЯФ СО АН СССР (1963), Атомная энергия 15, 451 (1963).
 35. M. N. Rosenbluth, Hargwell, Sept. 17—22 (1962).
 36. А. А. Галеев, Об одном асимптотическом методе в теории устойчивости, Препринт НГУ (1962).
 37. В. П. Силин, К теории колебаний слабонеоднородной плазмы, Препринт ФИАН (1963), ЖЭТФ 45 (4), 1060 (1963).
 38. Е. Е. Ловецкий, В. П. Силин, О колебаниях многомерно слабонеоднородной плазмы, Препринт ФИАН (1963); Изв. вузов (Радиофизика) 7 (1964).
-

