

535.89

**ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ РАСЧЕТА
ОПТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КВАНТОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ
СВЕТА *)***Б. И. Степанов, В. П. Грибковский*

Вероятностный метод расчета был предложен Эйнштейном¹ еще в 1917 г. В сороковых и пятидесятых годах он успешно применялся для расчета оптических свойств вещества в рамках линейной оптики. Исходные уравнения этого метода имеют определенные границы применимости и, в общем случае, не вытекают из более общих уравнений квантовой электродинамики². Тем не менее он позволил находить правильные выражения для мощностей поглощения и испускания, законов разгорания и затухания люминесценции, квантового выхода люминесценции и ряда других оптических характеристик³⁻⁵. Вместе с тем вероятностный метод не позволяет решать задачи, связанные с контуром и смещением уровней энергии, нерезонансным взаимодействием и т. д.

В докладе на XIII Советании по спектроскопии было показано⁶, что вероятностный метод расчета можно с успехом применять для расчета различных нелинейных эффектов, возникающих при облучении вещества интенсивными потоками или в системах с метастабильным уровнем энергии. В этих случаях теряет силу закон Бугера, коэффициент поглощения начинает зависеть от плотности радиации и может принимать отрицательные значения. Нелинейность проявляется также в возникновении вынужденного дихроизма, деполяризации люминесценции и во многих оптических явлениях.

Плодотворность вероятностного метода вновь подтверждается возможностью расчета оптических свойств нелинейных систем особого типа — квантовых генераторов света (КГС). На базе вероятностного метода и теории резонатора удается объяснить основные свойства КГС и в ряде важнейших случаев получить достаточно точное совпадение с опытом.

При использовании вероятностного метода расчета уровни энергии и вероятности перехода между ними используются в качестве исходных данных **). Основная задача сводится к определению населенностей отдельных уровней в зависимости от интенсивности облучения с последующим расчетом числа оптических переходов. В квантовых генераторах нужно учитывать переходы между уровнями, возникающими как под действием радиации накачки, так и под действием самого генерируемого излучения.

*) Доклад на XV Советании по спектроскопии (Минск, июль 1963 г.).

***) Они могут быть определены только путем сравнения результатов расчета с опытом.

1. НАСЕЛЕННОСТИ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ 7

Рассмотрим совокупность n частиц, каждая из которых обладает N уровнями энергии. Пусть частицы взаимодействуют с внешней радиацией, планковским излучением и окружающей средой. Вероятность переходов между уровнями i и j обозначим через p_{ij} . С помощью коэффициентов Эйнштейна A_{ij} , B_{ij} , характеризующих вероятности спонтанных и вынужденных оптических переходов, их можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} p_{ij} &= A_{ij} + B_{ij}u_{ij}^0 + d_{ij} + B_{ij}u_{ij} = p_{ij}^0 + B_{ij}u_{ij}, \\ p_{ji} &= B_{ji}u_{ij}^0 + d_{ji} + B_{ji}u_{ij} = p_{ji}^0 + B_{ji}u_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь p_{ij}^0 и p_{ji}^0 — вероятности переходов при термодинамическом равновесии, а $B_{ij}u_{ij}$ — вероятности переходов, индуцированных внешней радиацией в предположении, что анизотропия возбужденных частиц по углам полностью отсутствует; d_{ij} , d_{ji} — вероятности неоптических переходов, u_{ij}^0 — плотность планковского излучения на частоте ν_{ij} . Величины (1) имеют размерность сек^{-1} и изменяются с переходом от одной системы к другой в широких пределах, обычно от долей 1 до 10^{10} сек^{-1} .

При стационарном режиме облучения и генерации без осцилляций населенности уровней энергии со временем не изменяются. Число частиц, уходящих с любого i -го уровня за данный промежуток времени, равно поступлению частиц на этот уровень за то же время. Поэтому населенности уровней n_k удовлетворяют следующей системе кинетических уравнений баланса:

$$n_i \sum_{j=1}^N p_{ij} - \sum_{j=1}^N n_j p_{ji} = 0. \quad (2)$$

Так как общее число частиц в единице объема n неизменно,

$$\sum_{j=1}^N n_j = n. \quad (3)$$

Следовательно, из N уравнений системы (2) линейно независимых будет $N-1$ уравнение.

Подставляя n_N из (3) в (2) и отбрасывая N -е уравнение, имеем

$$\sum_{j=1}^{N-1} a_{ij} n_j = n p_{Ni}. \quad (4)$$

Здесь введены обозначения

$$a_{ij} = p_{Ni} - p_{ji}, \quad a_{ii} = p_{Ni} + \sum_{j=1}^N p_{ij}. \quad (5)$$

Решение системы (4), как известно, имеет вид

$$n_j = n \frac{D_j}{D}, \quad (6)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1, N-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2, N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N-1, 1} & a_{N-1, 2} & \dots & a_{N-1, N-1} \end{vmatrix} \quad (7)$$

— определитель системы (4). Определители D_j для всех j от 1 до $N-1$ получаются из D заменой j -го столбца на столбец, составленный из коэф-

фициентов p_{Ni} . Элементы определителя D_n равны $a_{ij} - p_{Ni}$, где i — номер строчки. Согласно (3) $\sum_{i=1}^N D_j = D$.

С помощью уравнений (5) — (7) легко выразить в явном виде функцию распределения частиц для квантовомеханических систем с произвольным числом уровней энергии. В простейшем случае, когда имеется только два уровня, $D = a_{41} = p_{21} + p_{12}$, $D_1 = p_{21}$, $D_2 = a_{41} - p_{12} = p_{12}$. Для $N = 3$ из (5) — (7) находим

$$\begin{aligned} a_{11} &= p_{31} + p_{12} + p_{13}, & a_{12} &= p_{31} - p_{21}, \\ a_{21} &= p_{32} - p_{12}, & a_{22} &= p_{32} + p_{21} + p_{23} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$n_3 = \frac{n}{D} (p_{13}p_{21} + p_{13}p_{23} + p_{12}p_{23}), \quad (8)$$

$$n_2 = \frac{n}{D} (p_{32}p_{12} + p_{32}p_{13} + p_{31}p_{12}), \quad (9)$$

$$n_1 = \frac{n}{D} (p_{31}p_{21} + p_{31}p_{23} + p_{32}p_{21}), \quad (10)$$

где

$$D = p_{21}(p_{32} + p_{12} + p_{31}) + p_{12}(p_{32} + p_{23} + p_{31}) + p_{13}(p_{23} + p_{32}) + p_{23}p_{31}.$$

Аналогично для $N = 4$ имеем

$$\begin{aligned} n_4 &= \frac{n}{D} \{ p_{12} [p_{24}(p_{31} + p_{32}) + p_{34}(p_{24} + p_{23})] + \\ &+ p_{13} [p_{34}(p_{21} + p_{23}) + p_{24}(p_{32} + p_{34})] + \\ &+ p_{14} [(p_{24} + p_{21})(p_{31} + p_{32} + p_{34}) + p_{23}(p_{34} + p_{31})] \}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_3 &= \frac{n}{D} \{ p_{12} [p_{43}(p_{23} + p_{24}) + p_{42}p_{23}] + p_{13} [p_{43}(p_{21} + p_{23} + p_{24}) + p_{23}p_{42}] + \\ &+ p_{14} [p_{43}(p_{21} + p_{23} + p_{24}) + p_{42}p_{23}] + \\ &+ p_{41} [p_{13}(p_{21} + p_{23} + p_{24}) + p_{12}p_{23}] + p_{21}p_{42}p_{13} \}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{n}{D} \{ p_{12} [p_{42}(p_{31} + p_{32} + p_{34}) + p_{43}p_{32}] + p_{13} [p_{42}(p_{32} + p_{34}) + p_{43}p_{32}] + \\ &+ p_{14} [p_{42}(p_{31} + p_{32} + p_{34}) + p_{43}p_{32}] + \\ &+ p_{41} [p_{13}p_{32} + p_{12}(p_{31} + p_{32} + p_{34})] + p_{31}p_{43}p_{12} \}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{n}{D} \{ p_{21} [p_{42}(p_{31} + p_{32} + p_{34}) + p_{43}p_{32}] + p_{31} [p_{43}(p_{21} + p_{23} + p_{24}) + p_{42}p_{23}] + \\ &+ p_{41} [(p_{24} + p_{21})(p_{31} + p_{32} + p_{34}) + p_{23}(p_{31} + p_{34})] \}, \quad (14) \end{aligned}$$

где D — сумма всех слагаемых в фигурных скобках.

В системе с N уровнями энергии может быть не более $N - 1$ вероятностей переходов p_{ij} . Если ни одно из p_{ij} не равно нулю, то определитель D содержит N^{N-1} слагаемых, каждое из которых является произведением $N - 1$ вероятностей p_{ij} . Следовательно, для больших N функция распределения в общем виде имеет громоздкий вид. Поэтому при рассмотрении систем с $N > 4$ необходимо в самом начале приравнять нулю все вероятности переходов, которые не играют существенной роли в изучаемых процессах.

Следует обратить внимание на то, что распределение частиц по энергетическим уровням подчиняется общим для всех систем закономерностям, которые можно исследовать, не выписывая определители в явном виде. В частности, если внешняя радиация частоты ν_{ij} индуцирует переходы только между одной парой уровней $i \gtrless j$, то все D_j и D

зависят линейно от u_{ij} и поэтому D можно представить в виде ⁷

$$D = D(u_{ij}=0) + \Delta_{ij} B_{ji} u_{ij} = D(u_{ij}=0) (1 + \alpha_{ij} u_{ij}). \quad (15)$$

Здесь $D(u_{ij}=0)$ и Δ_{ij} не зависят от u_{ij} , а α_{ij} — параметр нелинейности, который входит во все формулы нелинейной оптики. Можно показать также ⁷, что населенности интересующей пары уровней выражаются формулами

$$n_i = \frac{n_i(u_{ij}=0) + l_i u_{ij}}{1 + \alpha_{ij} u_{ij}}, \quad (16)$$

$$n_j = \frac{n_j(u_{ij}=0) + l_j u_{ij}}{1 + \alpha_{ij} u_{ij}}, \quad (17)$$

причем $l_i g_j = l_j g_i$, где g_i и g_j — статистические веса. Величины l_i и l_j не зависят от u_{ij} . Величины $n_i(u_{ij}=0)$ и $n_j(u_{ij}=0)$ определяют населенности уровней при отсутствии внешнего возбуждения на частоте ν_{ij} .

Согласно (16) и (17) при достаточно больших плотностях возбуждающего света частоты ν_{ij} и $g_j = g_i$ населенности i -го и j -го уровней выравниваются и при $\alpha_{ij} u_{ij} \rightarrow \infty$ стремятся к общему пределу, равному l_i / α_{ij} . Если при $u_{ij} = 0$ $n_i = n_j$, это равенство сохранится при любом значении u_{ij} .

2. МОЩНОСТЬ И КОЭФФИЦИЕНТ ПОГЛОЩЕНИЯ

Рассматривая вынужденное испускание как отрицательное поглощение ³⁻⁵, с помощью (16) и (17) приходим к следующему выражению для мощности поглощения внешней радиации:

$$W_n^{\text{погл}} = (n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) u_{ij} h \nu_{ij} = \frac{n_j(u_{ij}=0) - n_i(u_{ij}=0) g_j / g_i}{1 + \alpha_{ij} u_{ij}} B_{ji} h \nu_{ij}, \quad (18)$$

где учтено равенство

$$g_i B_{ij} = g_j B_{ji}. \quad (19)$$

Как видно из (18), мощность поглощения может быть как положительной, так и отрицательной. При этом знак $W_{ji}^{\text{погл}}$ зависит от населенности уровня, который имел место до возбуждения на частоте ν_{ij} . Если $g_j n_j(u_{ij}=0) > g_i n_i(u_{ij}=0)$, мощность поглощения положительна, если же выполняется обратное неравенство — отрицательна при любых плотностях падающей радиации частоты ν_{ij} . Следовательно, возбуждением системы на частоте ν_{ij} нельзя изменить знака мощности поглощения на этой же частоте.

Из (18) следует также, что зависимости мощности поглощения от интенсивности внешней радиации в средах с отрицательным и положительным поглощением определяются одинаковыми формулами.

Учитывая, что интегральный по частоте коэффициент поглощения

$$k_{ij} = \frac{W_{ji}^{\text{погл}}}{\nu u_{ij}},$$

на основании (18) получим

$$k_{ji} = \frac{k_{ij}^0}{1 + \alpha_{ij} u_{ij}}. \quad (20)$$

Здесь

$$k_{ji}^0 = \left[n_j(u_{ij}=0) - n_i(u_{ij}=0) \frac{g_j}{g_i} \right] B_{ji} h \nu_{ij} / \nu$$

— коэффициент поглощения при $u_{ij} \rightarrow 0$ (практически при отсутствии зависимости k_{ji} от u_{ij}).

Согласно (20) коэффициент поглощения может быть как положительным, так и отрицательным, причем его знак полностью определяется знаком k_{ji}^0 и не зависит от величины u_{ij} . В общем случае, если плотность энергии стремится к бесконечности, то $k_{ji} \rightarrow 0$, так как величина u_{ij} входит только в знаменатель выражения (20). Формула (20), нашедшая широкое применение в теории квантовых генераторов и усилителей, справедлива для частиц с произвольным числом уровней, если выполняются два условия: во-первых, отсутствует анизотропия в распределении возбужденных молекул по углам, во-вторых, внешняя радиация частоты ν_{ij} возбуждает переходы только между уровнями i и j . В системах, в которых не выполняется первое условие, зависимость k_{ji} от u_{ij} имеет более сложный вид. Однако и в этом случае формула (20) дает хорошее приближение ⁸.

3. ПАРАМЕТРЫ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Как видно из приведенных выше формул для населенностей уровней и коэффициента поглощения, важнейшей характеристикой взаимодействия частиц с внешним излучением служат параметры нелинейности α_{ij} . Все рассмотренные нелинейные эффекты ^{6, 8, 9}, связанные с возбуждением на одной частоте ν_{ij} , являются однозначными функциями произведения $\alpha_{ij}u_{ij}$. Поэтому исследование нелинейных эффектов в значительной степени сводится к изучению параметров α_{ij} . Рассмотрим параметры нелинейности простейших квантовомеханических систем.

Для частиц с двумя уровнями энергии α_{21} равно

$$\alpha_{21} = \frac{B_{12}(1 + g_1/g_2)}{A_{21} + B_{12} + u_{21}^0(1 + g_1/g_2) + d_{21} + d_{12}}. \quad (21)$$

Согласно (21) произведение $\alpha_{ij}u_{ij}/(1 + g_1/g_2)$ не превосходит отношения вероятностей индуцированных переходов $B_{12}u_{21}$ к вероятности спонтанных переходов A_{21} . В видимой и тем более в ультрафиолетовой областях спектра вероятности вынужденных переходов при всех практически достижимых плотностях радиации накачки, не считая лазерного луча, малы по сравнению с вероятностью спонтанных переходов. Поэтому нелинейные эффекты в такой системе трудно наблюдаемы.

При переходе к инфракрасной области спектра и далее к радиоволнам отношение $B_{12}u_{21}^0/A_{21}$ быстро возрастает. В далекой инфракрасной области оно становится больше единицы уже при комнатной температуре. Но так как плотность радиации внешних потоков значительно больше фона теплового испускания, то, следовательно, $B_{12}u_{21}^0/A_{21} \gg 1$ и законы линейной оптики теряют силу. Характерно, что значение параметра нелинейности двухуровневой системы не связано однозначно с абсолютным значением вероятностей переходов или длительностью жизни возбужденного состояния τ . Если

$$A_{21} \gg d_{21} + d_{12} + 2B_{12}u_{21}^0,$$

то α_{21} является однозначной функцией расстояния между уровнями и совершенно не зависит от τ :

$$\alpha_{21}^0 = \frac{c^3}{4\pi\hbar\nu^3}. \quad (21a)$$

Фон теплового испускания и неоптические переходы приводят лишь к уменьшению параметра нелинейности, $\alpha_{21} \leq \alpha_{21}^0$.

Система частиц с тремя уровнями характеризуется тремя параметрами нелинейности:

$$\alpha_{31} = \frac{B_{13} [p_{21} (1 + g_1/g_2) + p_{23} (1 + g_1/g_3) + p_{32} + p_{12}]}{p_{21} (p_{32} + p_{31}^0) + p_{12} (p_{32} + p_{23} + p_{31}^0) + p_{23} p_{31}^0}, \quad (22)$$

$$\alpha_{21} = \frac{B_{12} [p_{32} (1 + g_1/g_2) + p_{31} (1 + g_1/g_3) + p_{13} + p_{23}]}{p_{21}^0 (p_{32} + p_{13} + p_{31}) + p_{13} (p_{23} + p_{32}) + p_{23} p_{31}}, \quad (23)$$

$$\alpha_{32} = \frac{B_{23} [p_{12} (1 + g_2/g_3) + p_{13} (1 + g_2/g_3) + p_{21} + p_{31}]}{p_{21} (p_{32}^0 + p_{13} + p_{31}) + p_{12} (p_{32}^0 + p_{31}) + p_{13} p_{32}^0}. \quad (24)$$

Последние формулы справедливы при одновременном возбуждении частиц изотропным светом трех частот.

Применим формулы (22) — (24) для численного расчета параметров нелинейности системы частиц, у которых второй уровень — метастабильный. Пусть возбуждение производится поочередно на частотах ν_{31} , ν_{21} и ν_{32} , а вероятности переходов равны $p_{31}^0 = 3 \cdot 10^5$, $p_{21}^0 = 3 \cdot 10^2$, $p_{32}^0 = 10^8 \text{ сек}^{-1}$, $p_{13}^0 = p_{12}^0 = p_{23}^0 = 0$. Пренебрегая для простоты неоптическими переходами и учитывая соотношение Эйнштейна $A/B = 8\pi h\nu^3/c^3$ для $\nu_{31} = 20\,000 \text{ см}^{-1}$, $\nu_{21} = 14\,000 \text{ см}^{-1}$, $\nu_{32} = 6000 \text{ см}^{-1}$, находим значения α_{ij} (в $\text{см}^3/\text{сек}^2 \text{ эрг}$): $\alpha_{31} = 7,8 \cdot 10^{14}$, $\alpha_{21} = 6,5 \cdot 10^{12}$, $\alpha_{32} = 4,5 \cdot 10^{16}$.

Если бы второй уровень отсутствовал или не был метастабильным, значение α_{31} было бы на три порядка ниже. Если же в системе имеется метастабильный уровень, то нелинейные эффекты в канале $3 \rightarrow 1$ наступают при плотностях энергии возбуждения, примерно в p_{21}^0/p_{31}^0 раз меньших, чем в системе частиц с двумя уровнями энергии. В канале $2 \rightarrow 1$ отклонения от линейности становятся заметными при более высоких плотностях внешней радиации. Большое значение ν_{32} объясняется тем, что частота ν_{32} лежит в инфракрасной области спектра.

Температурная зависимость параметров нелинейности произвольных систем достаточно сложна. Однако, начиная с некоторого значения температуры, при ее повышении величины α_{ij} должны убывать и в пределе ($T \rightarrow \infty$) стремиться к нулю. Высокая температура препятствует отклонению системы от термодинамического равновесия и уменьшает все нелинейные эффекты.

При введении параметров нелинейности предполагалось, что радиация заданной частоты возбуждает вынужденные переходы только между одной парой уровней. Поэтому определители D_j и D были линейными функциями от плотностей внешнего излучения u_{ij} . Возможны, однако, системы, в которых одна и та же спектральная линия индуцирует переходы между двумя, тремя и т. д. уровнями. В таких случаях функция распределения, коэффициент поглощения и другие оптические характеристики будут зависеть не только от u_{ij} , но и от u_{ij}^2 , u_{ij}^3 и т. д. И только оптические свойства единственной квантовомеханической системы, гармонического осциллятора, не зависят от плотности возбуждающего света^{10, 11}.

Рассмотрение аналогичных систем в общем виде довольно сложно. Поэтому целесообразно проводить расчеты для каждой конкретной системы в отдельности, с учетом упрощающих факторов.

4. ПОРОГ ГЕНЕРАЦИИ

Если вещество с отрицательным коэффициентом поглощения поместить в резонатор, например между двумя плоскопараллельными отражающими пластинами, при определенных условиях возникает генерация. Вероятностный метод расчета дает возможность сравнительно

просто рассчитать такие энергетические характеристики, как пороговое значение плотности радиации накачки, мощность поглощения накачки и мощность генерации.

Пусть частицы возбуждаются изотропной радиацией накачки на частоте ν_{kl} , а генерация возникает на одной из частот ν_{ij} . Для осуществления стационарной генерации необходимо выполнение условия ¹²

$$-k_{ji}(\nu_r) = k_{ji}^{\text{пот}}, \quad (25)$$

где $k_{ji}(\nu_r)$ — отрицательный коэффициент поглощения, k_{ji} — коэффициент, характеризующий потери радиации в резонаторе. Так как частота генерации обычно лежит вблизи максимума линии (полосы люминесценции), коэффициент поглощения $k_{ji}(\nu_r)$ можно рассчитать на основании интеграла Кравца по формуле

$$k_{ji}(\nu_r) = \frac{k_{ji}}{\Delta\nu_{ij}^{\text{п}}}.$$

Здесь $\Delta\nu_{ij}^{\text{п}}$ — ширина линии поглощения в канале генерации.

Коэффициент потерь плоскопараллельного слоя связан с коэффициентами отражения покрытий r_{ij} , r'_{ij} и толщиной слоя l соотношением ¹³

$$k_{ji}^{\text{пот}} = \frac{1}{l} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{r_{ij}r'_{ij}}} \right) + Q_{ji}, \quad (26)$$

где Q_{ji} — параметр, определяющий потери энергии за счет рассеяния и поглощения примесями. Первое слагаемое (26) связано с выходом излучения за пределы слоя.

Учитывая, что

$$k_{ji}(\nu) = (n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) \frac{h\nu_{ij}}{v\Delta\nu_{ij}^{\text{п}}},$$

условие стационарной генерации (25) можно представить в виде

$$n_i \frac{g_j}{g_i} - n_j = \delta_{ji} n, \quad (27)$$

где

$$\delta_{ji} = \frac{k_{ji}^{\text{пот}}(\nu_r) v\Delta\nu_{ij}^{\text{п}}}{n B_{ji} h\nu_{ij}} = \frac{k_{ji}^{\text{пот}}(\nu_r)}{\kappa_{ji}(\nu_r)} \quad (28)$$

— безразмерная величина, равная отношению коэффициента потерь к коэффициенту поглощения при $n_j = n$ ($\kappa_{ji}(\nu_r) = k_{ji}(\nu_r, n_j = n)$).

Формула (27), выражающая закон сохранения энергии в резонаторе, дает возможность сделать ряд общих выводов. Из нее следует прежде всего, что при отсутствии внешнего возбуждения, когда

$$n_i^0 \frac{g_j}{g_i} - n_j^0 = -n_j^0 [1 - \exp(-h\nu_{ij}kT)] < 0,$$

генерация невозможна даже в идеальном резонаторе ($\delta_{ji} \rightarrow 0$). Для осуществления генерации необходимо вывести систему из состояния термодинамического равновесия. При этом следует различать два качественно различных случая. В первом случае уровень j является основным, во втором — возбужденным уровнем.

Если j — основной уровень и на нем до начала возбуждения находится 10^{17} — 10^{19} частиц, то для осуществления генерации на частоте ν_{ij} необходимо перевести на i -й уровень огромное число частиц, сравнимое по порядку величины с n . Это легко сделать в настоящее время в таких

веществах, в которых i -й уровень — метастабильный и на нем происходит накопление возбужденных частиц. Простейшей моделью аналогичных веществ служит система частиц с тремя уровнями энергии, в которой второй уровень — метастабильный.

Если же j -й уровень является возбужденным, то при низких температурах на нем может быть сколь угодно мало частиц. Поэтому создание инверсионного заселения уровней i, j , необходимое для генерации, возможно без существенного обеднения частицами основного состояния. В соответствии с указанным делением принято различать трехуровневые и четырехуровневые квантовые генераторы.

Согласно (27) чем больше g_j/g_i , тем легче возбудить генерацию. Далее, из (27) и (28) следует, что для возникновения генерации необходимо, чтобы линия поглощения ν_{ij} была достаточно узкой ($\Delta\nu_{ij}^n$ мало) и достаточно интенсивной (B_{ji} велико). Уменьшение коэффициента потерь, в частности уменьшение пропускания покрытий, и увеличение концентрации частиц облегчают возникновение генерации.

Если положить плотность генерируемого излучения $u_{ij} = 0$, то равенство (27) будет определять пороговое значение радиации накачки $u_{kl}^{\text{пор}}$. Учитывая (6) и представляя определители в виде

$$D_i(u_{ij}=0) = D_i^0 + \Delta_i B_{kl} u_{kl}, \quad D_j(u_{ij}=0) = D_j^0 + \Delta_j B_{kl} u_{kl}, \\ D(u_{ij}=0) = D^0 + \Delta_{kl} B_{kl} u_{kl},$$

из (27) находим

$$u_{kl}^{\text{пор}} = \frac{1}{B_{kl}} \frac{D_j^0 - D_i g_j/g_i + \delta_{ji} D^0}{\Delta_i g_j/g_i - \Delta_j - \delta_{ji} \Delta_{kl}}. \quad (29)$$

Можно показать, что $\Delta_{kl} \geq \Delta_i$ и поэтому выражение (29) имеет конечное положительное значение, если только

$$\delta_{ji} < \frac{g_j}{g_i}. \quad (30)$$

Системы, в которых не выполняется условие (30), не могут генерировать даже при бесконечно больших накачках.

Умножая числитель и знаменатель (29) на n/D^0 и учитывая (6), приходим к следующему простому выражению для порога:

$$u_{kl}^{\text{пор}} = \frac{1}{n B_{kl}} \frac{n_j^0 (1 - e^{-h\nu_{ij}/kT}) + \delta_{ji} n}{\alpha_i g_j/g_i - \alpha_j - \delta_{ji} \alpha_{kl}}, \quad (31)$$

где α_i, α_j — положительные параметры, $\alpha_{kl} = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ — параметр нелинейности в канале $k \rightarrow l$. Через n_j^0 обозначено число частиц на j -м уровне при отсутствии внешнего возбуждения.

В трехуровневых генераторах n_j^0 близко или в точности равно n , поэтому пороговое значение радиации накачки не равно нулю даже в идеально хорошем резонаторе с $\delta_{ji} \rightarrow 0$. В четырехуровневых генераторах j -й уровень является возбужденным и $n_j^0 \rightarrow 0$, если температура среды достаточно низкая. Поэтому при $\delta_{ji} \rightarrow 0$ порог $u_{kl}^{\text{пор}} \rightarrow 0$. Генерация четырехуровневых систем возможна в принципе при очень малых плотностях радиации накачки.

Из формулы (31) в качестве частных случаев следуют выражения для порога трех- и четырехуровневого генераторов, которые приведены в работах ¹⁴⁻¹⁷ и будут рассмотрены ниже.

5. МОЩНОСТЬ ГЕНЕРАЦИИ

Рассматривая вынужденные переходы, индуцированные внешней радиацией, следует иметь в виду, что вероятность Bu является приближенным значением интеграла $\int B(\nu)u(\nu)d\nu$. Если вещество с узкими уровнями энергии облучается светом широкого спектрального состава, $u(\nu)$ можно вынести из-под знака интеграла и пользоваться обычным выражением для вероятности переходов:

$$\int B(\nu)u(\nu)d\nu = u(\nu) \int B(\nu)d(\nu) = Bu(\nu).$$

Ширина генерируемой линии $\Delta\nu_{ij}^F$ обычно меньше ширины линии поглощения $\Delta\nu_{ij}^H$, задаваемой функцией $B_{ji}(\nu)$. Поэтому

$$\int B_{ji}(\nu)u_{ij}(\nu)d\nu = B_{ji}(\nu_r) \int u_{ij}(\nu)d\nu = B_{ji}(\nu_r)u(\nu_r)\Delta\nu_{ij}^F.$$

Если частота генерации совпадает с максимумом линии поглощения, то

$$B_{ji}(\nu_r) = \frac{B_{ji}}{\Delta\nu_{ij}^H}.$$

Учитывая это замечание, на основании (20) и (25) имеем

$$u_{ij}(\nu_r)\Delta\nu_{ij}^F = \frac{k_{ji}^0(\nu_r) + k_{ji}^{пот}(\nu_r)}{\alpha_{ji}(\nu_r)k_{ji}^{пот}(\nu_r)}. \tag{32}$$

Выражение (32) определяет плотность генерируемого излучения внутри резонатора и является обобщением аналогичной формулы для трехуровневого квантового генератора¹² на случай систем с произвольным числом уровней энергии.

Мощность генерации, точнее, количество энергии излучения, выделяющейся в единице объема рабочего вещества генератора за 1 сек, равно

$$W_{ij}^{ген} = \nu k_{ji}^{пот} u(\nu_r) \Delta\nu_r = \delta_{ji} n B_{ji} h \nu_{ij} u_{ij}(\nu_r) \Delta\nu_{ij}^F / \Delta\nu_{ij}^H = \nu \frac{|k_{ji}^0(\nu_r)| - k_{ji}^{пот}(\nu_r)}{\alpha_{ji}(\nu_r)}. \tag{33}$$

Раскрывая значение $k_{ji}^0(\nu_r)$ и учитывая (28), после несложных преобразований имеем

$$W_{ij}^{ген} = \frac{n_i(u_{ij}=0)g_j/g_i - n_j(u_{ij}=0) - \delta_{ji}n}{\alpha_{ji}/B_{ji}} h \nu_{ij}. \tag{34}$$

Здесь $n_i(u_{ij}=0)$ и $n_j(u_{ij}=0)$ — по-прежнему населенности уровней при заданной плотности радиации накачки в канале $k \rightarrow l$ и отсутствии генерируемого излучения, $u_{ij} = 0$.

Формула (34) дает возможность рассчитать мощность генерации, если известны свойства резонатора и величины, характеризующие взаимодействие рабочего вещества генератора с радиацией накачки вне резонатора.

6. ТРЕХУРОВНЕВЫЙ КГС^{14,18-22}

Рассмотрим более подробно простейшую генерирующую систему, работающую по схеме трехуровневого генератора (рис. 1) с оптической накачкой в канале $3 \rightarrow 1$. Реальные вещества имеют дополнительные уровни, влияние которых, как правило, сводится к повышению порога и снижению мощности генерации. Для выяснения специфики трехуровневого КГС исследуем зависимость населенностей уровней, мощностей

поглощения люминесценции и генерации от плотности радиации накачки при отсутствии и наличии отражающих покрытий. Генерация по-прежнему предполагается стационарной и осуществляется в канале $2 \rightarrow 1$. Второй уровень — метастабильный ($p_{32}^0 \gg p_{21}^0 + p_{23}^0$).

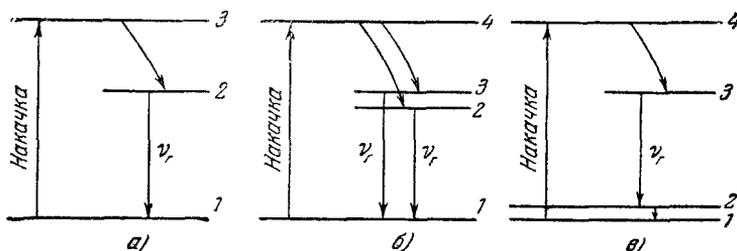


Рис. 1. Энергетические схемы трехуровневых (а, б) и четырехуровневого КГС (в).

Если частицы находятся вне резонатора, то они взаимодействуют лишь с радиацией накачки. При наличии резонатора в процессе генерации частицы подвергаются сильному действию генерируемого излучения. Населенности уровней определяются в общем виде формулами (8) — (10), в которых необходимо положить $u_{21} = 0$ при отсутствии генерации и подставить значение u_{21} , вычисленное по формуле (32), если система генерирует.

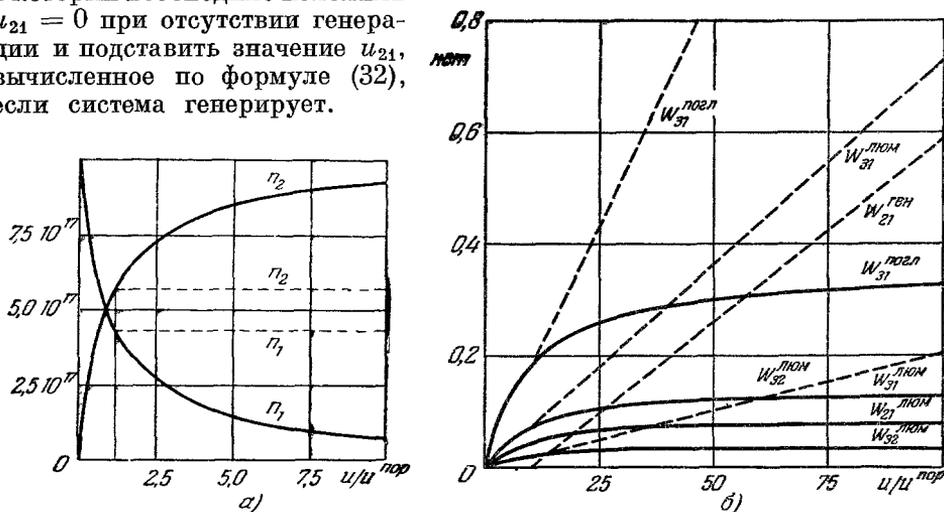


Рис. 2. Зависимость населенностей уровней (а), мощностей поглощения, люминесценции и генерации (б) от плотности радиации накачки.

Пунктирные кривые $n_2(u_{31})$, $W_{13}^{\text{полл}}$, $W_{13}^{\text{люм}}$ относятся к режиму генерации, сплошные — к отсутствию генерации.

Графики зависимости населенностей уровней от плотности радиации накачки приведены на рис. 2, а. Сплошные линии относятся к веществу вне резонатора, пунктирные — внутри резонатора. Значения u_{31} выражены в порогах $x = u_{31}/u_{31}^{\text{пор}}$. График n_3 в данном масштабе сливается с осью абсцисс.

Когда u_{31} очень малы, значение n_1 практически постоянно, а n_2 растет пропорционально u_{31} . Это — область линейной оптики. По мере накопления частиц на метастабильном уровне n_1 начинает падать, а рост n_2 замедляется. Сплошная кривая $n_2(u_{31})$, относящаяся к частицам вне резонатора,

стремится к своему верхнему пределу, близкому к n . При $u_{31} \rightarrow \infty$ населенности первого и третьего уровней стремятся к нулю (точнее, к np_{21}^0/p_{32}^0).

Пусть теперь введены отражающие покрытия. Тогда графики $n_i(u_{31})$ будут даваться сплошными кривыми только до порога генерации. При $u_{31} > u_{31}^{\text{пор}}$ возникает генерация, и внутри резонатора создается высокая плотность излучения частоты $\nu_{21} = \nu_r$, которая индуцирует переходы $2 \rightarrow 1$. С момента возникновения генерации и при дальнейшем увеличении плотности радиации накачки населенности уровней удовлетворяют соотношению

$$n_2 \frac{g_1}{g_2} - n_1 = \delta_{12}n = \text{const.}$$

Так как $n_3 \approx 0$, а $n_1 + n_2 \approx n$, то, следовательно, в режиме генерации населенности уровней практически не зависят от u_{31} . Увеличение поступления частиц на метастабильный уровень с ростом u_{31} компенсируется более интенсивными переходами $2 \rightarrow 1$ за счет увеличения вероятности индуцированных переходов $B_{12}u_{21}$.

Это справедливо до тех пор, пока n_3 пренебрежимо мало. В принципе $B_{12}u_{31}$ может стать сравнимым с A_{31} . Тогда начинает проявляться нелинейность в канале $3 \rightarrow 1$. В пределе числа частиц на всех уровнях выравниваются и дальнейшее изменение населенностей прекращается. На опыте указанная нелинейность обычно не достигается, поэтому дальнейшие исследования будут относиться только к области, примыкающей к порогу генерации, $0 \leq x \leq p_{31}^0/p_{21}^0$.

Согласно (29), (8) — (10), пороговое значение радиации накачки трехуровневого КГС равно

$$u_{31}^{\text{пор}} = \frac{1}{B_{13}} \frac{p_{31}^0 (p_{21}^0 + p_{23}^0) + p_{32}^0 p_{21}^0 (1 + \delta_{12})}{p_{32}^0 g_1 / g_2 - (p_{21}^0 + p_{23}^0) g_1 / g_3 - \delta_{12} [(p_{21}^0 + p_{23}^0) (1 + g_1 / g_2) + p_{32}^0]}. \quad (35)$$

При выводе формулы (35) учтено, что для частот ν_{ij} видимого диапазона и температур T от 0 до 300° К вероятности $p_{12}^0 = p_{13}^0 = 0$.

Учитывая условие метастабильности второго уровня ($p_{21}^0 + p_{23}^0 \ll p_{32}^0$) и полагая $T = 0$ ($p_{23}^0 = 0$), формулу (35) можно сильно упростить:

$$u_{31}^{\text{пор}} = \frac{p_{21}^0}{\eta B_{13}} \frac{1 + \delta_{12}}{g_1 / g_2 - \delta_{12}}, \quad (36)$$

где $\eta = p_{32}^0 / (p_{32}^0 + p_{31}^0)$ дает отношение числа возбужденных частиц, переходящих с лабильного уровня на метастабильный, к полному числу переходов с третьего уровня вниз.

При повышении температуры возникают переходы $2 \rightarrow 3$. Вероятность p_{23} равна $p_{32}^0 \exp(-h\nu_{32}/kT)$. Согласно (35) значение p_{23} начинает сказываться на величине порога при температурах, при которых p_{23}^0 становится сравнимым с $p_{21}^0 p_{32}^0 / p_{31}^0$, или

$$e^{-h\nu_{32}/kT} \sim \frac{p_{21}^0}{p_{31}^0}.$$

Для $\nu_{32} = 6000 \text{ см}^{-1}$, $p_{21}^0 = 3 \cdot 10^2 \text{ сек}^{-1}$, $p_{31}^0 = 3 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}$ порог увеличивается в два раза с ростом T от 0 до 2000° К.

Наблюдаемая на опыте температурная зависимость порога связана с ростом $\Delta\nu_{21}^n$ при повышении T и, как будет показано ниже, с наличием расщепления метастабильного уровня. Величина $\Delta\nu_{21}^n$ входит в выражения для порога через $\delta_{12} \sim \Delta\nu_{21}^n$. Если $\delta_{12} = 0$, то порог минимален, $B_{13}u_{31}^{\text{пор}} = p_{21}^0 g_2 / g_1 \eta$. Генерация возникает, когда вероятность вынужденных переходов $1 \rightarrow 3$ становится равной вероятности ухода частиц

с метастабильного уровня, умноженной на $g_2/g_1\eta \sim 1$. При этом величина порога связана только с внутренними потерями в рабочем веществе (люминесценция и неоптические переходы в каналах $2 \rightarrow 1$ и $3 \rightarrow 1$). В высококачественных резонаторах, для которых $\delta_{12} \ll (1 + g_1/g_2)$, зависимость порога от δ_{12} , а следовательно, и от ширины линии $\Delta\nu_{21}^H$ и температуры отсутствует. Она наблюдается только в резонаторах с низкой добротностью, где δ_{12} сравнимо с g_1/g_2 .

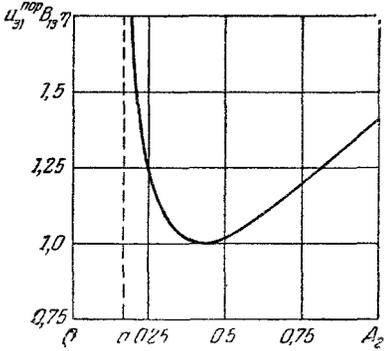


Рис. 3. Зависимость порога от A_{21} .

$u_{31}^{пор}$ не только в числителе, но и через δ_{12} в знаменателе. Подставляя значение $\delta_{12} = k_{21}^{погл} / \kappa_{12}(\nu)$ и $p_{21}^0 = A_{21} + d_{21}$ в (36), получим

$$u_{31}^{пор} = \frac{1}{B_{13}\eta} \frac{(A_{21} + d_{21})(1 + k_{12}^{погл} / \kappa_{12}(\nu_r))}{g_1/g_2 - k_{12}^{погл} / \kappa_{12}(\nu_r)}. \quad (37)$$

Допустим, далее, что полоса (линия) поглощения, максимум которой соответствует частоте генерации, не имеет структуры и поэтому

$$\kappa_{12}(\nu_r) = \frac{\kappa_{12}}{\Delta\nu_{21}^H} = \frac{nB_{12}h\nu_{21}}{v\Delta\nu_{21}^H}.$$

Выражая B_{12} через A_{21} , из (37) находим

$$u_{31}^{пор} = \frac{1}{B_{13}\eta} \frac{(A_{21} + d_{21})(A_{21} + a g_1/g_2)}{g_1/g_2 (A_{21} - a)}, \quad (38)$$

где

$$a = 8\pi\nu^2 \Delta\nu_{21} \frac{k_{12}^{погл} \nu}{n}, \quad (39)$$

а ν и $\Delta\nu_{21}$ выражены в $см^{-1}$.

На рис. 3 приведен график зависимости $u_{31}^{пор} B_{13} \eta$ от A_{21} для $\nu = 20\,000\, см^{-1}$, $n = 10^{19}\, см^{-3}$, $k_{12}^{погл} = 0,01^{-1}\, см$, $d = 0$, $v = c/1,76$. Из рисунка видно, что левая часть графика очень крута, правее минимума кривая выглядит более полого, переходя в прямую линию. При $A_{21} = a$ порог обращается в бесконечность, генерация невозможна. Значение $u_{31}^{пор}$ минимально, когда

$$A_{21}^{min} = a - \frac{d}{2} + \sqrt{\left(a - \frac{d}{2}\right)^2 + a^2 \frac{g_1}{g_2} + ad} \quad (40)$$

или, если $d = 0$,

$$A_{21}^{min} = a \left(1 + \sqrt{1 + \frac{g_1}{g_2}}\right). \quad (40a)$$

Оно равно

$$u_{31}^{пор\,min} = \frac{1}{B_{13}\eta} \frac{a}{g_1/g_2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{g_1}{g_2}}\right)^2. \quad (41)$$

Для прежних значений параметров и $g_1 = g_2$, $\Delta\nu_{21}^{\text{п}} = 1 \text{ см}^{-1}$ из (39) — (41) находим $A_{21}^{\text{мин}} \approx 0,4 \text{ сек}^{-1}$, $(B_{13}u_{31}^{\text{пор}})_{\text{мин}} \approx 1 \text{ сек}^{-1}$.

Выражение для мощности генерации (34) применительно к трехуровневому КГС принимает вид

$$W_{21}^{\text{ген}} = nh\nu_{21} \left\{ p_{32}^0 \frac{g_1}{g_2} - (p_{21}^0 + p_{23}^0) \frac{g_1}{g_3} - \delta_{21} \left[p_{32}^0 + (p_{21}^0 + p_{23}^0) \left(1 + \frac{g_1}{g_3} \right) \right] \right\} B_{13} (u_{31} - u_{31}^{\text{пор}}) \left[(p_{31}^0 + p_{32}^0) \left(1 + \frac{g_1}{g_2} \right) + p_{23}^0 + B_{13}u_{31} \left(\frac{g_1}{g_3} + \frac{g_1}{g_2} + \frac{g_1^2}{g_1g_3} \right) \right]^{-1}. \quad (42)$$

При обычных накачках вероятности вынужденных переходов $B_{13}u_{31}$ на несколько порядков меньше p_{31}^0 и ими можно пренебречь по сравнению с p_{31}^0 .

Учитывая, далее, условие метастабильности, имеем

$$W_{21}^{\text{ген}} = \eta nh\nu_{21} \frac{g_1/g_2 - \delta_{12}}{1 + g_1/g_2} B_{13} (u_{31} - u_{31}^{\text{пор}}). \quad (42a)$$

Мощность генерации пропорциональна коэффициенту Эйнштейна B_{13} , определяющему площадь полосы поглощения на частоте накачки, и увеличивается линейно с ростом u_{31} . Максимальное значение генерации осуществляется при $\eta = 1$, т. е. при отсутствии люминесценции и неоптических переходов в канале $3 \rightarrow 1$. Чем меньше δ (т. е. чем меньше значения $k_{12}^{\text{пот}}$, ширины линии поглощения $\Delta\nu_{21}^{\text{п}}$ и чем больше n и значение коэффициента Эйнштейна B_{12}), тем мощность генерации выше.

Как видно из (42a), для характеристики способности вещества к интенсивной генерации одного порога недостаточно. Одновременно с порогом необходимо знать тангенс угла наклона прямой $W_{12}^{\text{ген}}(u_{31})$, равный

$$\text{tg } \varphi = \frac{W_{21}^{\text{ген}}}{u_{31} - u_{31}^{\text{пор}}} = \eta n B_{13} h\nu_{21} \frac{g_1/g_2 - \delta_{21}}{1 + g_1/g_2}. \quad (43)$$

Параметры $u_{31}^{\text{пор}}$ и $\text{tg } \varphi$ однозначно определяют генерацию вещества при заданной мощности накачки. Могут встречаться системы, обладающие небольшим порогом и вместе с тем малым значением $\text{tg } \varphi$.

Уменьшение g_1/g_2 увеличивает порог генерации и одновременно уменьшает $\text{tg } \varphi$. Чем меньше g_1/g_2 , тем выше требования к резонатору, в котором становится возможной генерация данного вещества. Мощность поглощения радиации накачки в общем случае равна

$$W_{13}^{\text{погл}} = (n_1 B_{13} - n_3 B_{31}) u_{31} h\nu_{31} = \left(n_1 - n_3 \frac{g_1}{g_3} \right) B_{13} u_{31} h\nu_{31} = \frac{n B_{13} u_{31} h\nu_{31}}{D} \left[p_{31}^0 p_{21}^0 + p_{31}^0 p_{23}^0 + p_{32}^0 p_{21}^0 + B_{12} u_{21} \left(p_{31}^0 \frac{g_1}{g_2} + p_{32}^0 \frac{g_1}{g_2} - p_{23}^0 \frac{g_1}{g_3} \right) \right]. \quad (44)$$

Если положить $u_{21} = 0$, то формула (44) будет определять мощность поглощения радиации веществом при отсутствии генерации. Подставляя в (44) значение u_{21} из (32), получим выражение для мощности поглощения в режиме генерации как функции накачки и всех параметров, характеризующих систему частиц и резонатор. С учетом метастабильности второго уровня и $T = 0$ оно имеет вид

$$W_{13}^{\text{погл}} = \frac{n}{1 + g_1/g_2} B_{13} u_{31} h\nu_{31} \left(\frac{g_1}{g_2} - \delta_{21} \right). \quad (45)$$

Разделив (42a) на (45), найдем энергетический выход генерации

$$\gamma_r = \eta \frac{v_{21}}{v_{31}} \left(1 - \frac{u_{31}^{\text{пор}}}{u_{31}} \right) = \eta \frac{v_{21}}{v_{31}} \left(1 - \frac{1}{x} \right), \quad (46)$$

где x — число порогов. Значение γ_r увеличивается с ростом радиации накачки. В предельном случае $\eta \rightarrow 1$, $x \gg 1$, вся энергия накачки, за исключением стоксовых потерь в канале $3 \rightarrow 2$, переходит в энергию генерируемого излучения.

На рис. 2, б приведены графики зависимости мощности поглощения, генерации и люминесценции ($W_{ij}^{\text{люм}} = nA_{ij}h\nu_{ij}$) от плотности радиации накачки. Сплошные кривые относятся к случаю, когда резонатор отсутствует. Они имеют тенденцию к насыщению, проявляющуюся в нарушении закона Бугера и в нелинейной зависимости $W_{ij}^{\text{люм}}$ от u_{31} . Введение покрытий приводит к накоплению внутри слоя радиации частоты ν , преобладанию вынужденных переходов $2 \rightarrow 1$ над спонтанными переходами и под влиянием этого к резкому изменению всех оптических свойств веществ (см. пунктирные линии).

Появление значительных вероятностей вынужденных переходов $2 \rightleftharpoons 1$ равносильно снятию метастабильности второго уровня. Между первым и вторым уровнями происходит интенсивный обмен частицами, который по своей скорости может превосходить все остальные процессы в системе. Так как при этом числа частиц n_1 и n_2 перестают зависеть от мощности накачки (см. рис 2, а), в системе восстанавливаются все линейные зависимости оптических характеристик от мощности накачки. Мощность поглощения растет пропорционально u_{31} . Мощность люминесценции $W_{31}^{\text{люм}}$ также пропорциональна u_{31} , что связано с линейной зависимостью n_3 от накачки*). Величина $W_{21}^{\text{люм}}$ остается постоянной с ростом u_{31} , так как $n_2 \approx \text{const}$.

Анализ графиков рис. 2, б позволяет ответить на вопрос, как изменяется выделение энергии по всем каналам при включении отражающих покрытий и за счет чего возникает генерация.

Предположим, что частицы вне резонатора подвергаются действию мощной накачки $u_{31} \gg u_{31}^{\text{пор}}$. В этом случае значения всех исследуемых характеристик задаются точками на соответствующих сплошных кривых. Допустим далее, что введены отражающие покрытия и спустя некоторое время установился стационарный режим. Переход от первого случая ко второму сопровождается уменьшением мощности люминесценции в канале $2 \rightarrow 1$. Однако возникновение генерации связано не с уменьшением люминесценции и других потерь, а с резким скачкообразным возрастанием количества поглощенной энергии. Часть этой добавочно поглощенной энергии неизбежно расходуется на рост люминесценции и тепловых потерь в каналах $3 \rightarrow 1$ и $3 \rightarrow 2$, остальная часть идет на генерацию излучения.

Генерация, возникающая при введении отражающих покрытий, связана не с увеличением числа активных молекул $n_2 - n_1$, как это нередко формулируется в популярных обзорах, а наоборот, с уменьшением n_2 и увеличением n_1 . Именно увеличение n_1 приводит к росту мощности поглощения и возникновению генерации. Повышение плотности накачки в условиях генерации не увеличивает число активных частиц, которое остается постоянным, а приводит только к увеличению мощности поглощения.

*) Значение n_3 на несколько порядков меньше n_1 и n_2 , поэтому линейный рост n_3 с увеличением u_{31} практически не отражается на величине n_1 и n_2 .

7. УЧЕТ РАСЩЕПЛЕНИЯ МЕТАСТАБИЛЬНОГО УРОВНЯ 17

Как известно, в реальных веществах, например в рубине, метастабильный уровень расщеплен, и более строгое решение задачи должно учитывать наличие двух метастабильных уровней (рис. 1, б). Населенности уровней такой системы при стационарном режиме определяются формулами (11)–(14). Если в выражениях для n_i положить $u_{31} = u_{21} = u_{32} = 0$, они будут определять населенности уровней энергии как функции плотности радиации накачки u_{41} при отсутствии генерации. Поскольку второй и третий уровни метастабильны, т. е.

$$P_{31}^0 + P_{21}^0 \ll P_{42}^0, P_{43}^0, \quad (47)$$

с увеличением u_{41} растет населенность практически только этих уровней. При достаточно больших накачках сумма $n_2 + n_3$ близка к полному числу частиц n .

Как следует из (12) и (13), если выполняется неравенство

$$P_{32}^0 (P_{42}^0 + P_{43}^0) + P_{42}^0 P_{31}^0 > P_{13}^0 (P_{42}^0 + P_{43}^0) + P_{43}^0 P_{21}^0, \quad (48)$$

то $n_2 > n_3$. При соблюдении обратного неравенства, наоборот, $n_2 < n_3$ для любых значений радиации накачки. В резонаторах с одинаковой добротностью для R_1 - и R_2 -линий (частот ν_{21} и ν_{31} соответственно) в первом случае КГС будет генерировать R_1 -линию, во втором случае R_2 -линию.

В рубиновых генераторах, как правило, наблюдается стимулированное излучение R_1 -линии. Рассмотрим вначале этот вариант. Ограничиваясь интервалом температур от 0 до 300° К для данной схемы, можно положить

$$P_{14}^0 = P_{13}^0 = P_{12}^0 = P_{24}^0 = P_{34}^0 = 0, \quad P_{23}^0 = P_{32}^0 \exp(-h\nu_{32}/kT), \quad (49)$$

$$u_{42} = u_{43} = 0, \quad B_{14}u_{41} \ll A_{41}. \quad (50)$$

Это означает, что тепловое возбуждение отсутствует во всех каналах, кроме 2 → 3. Неравенство (50) может быть нарушено только при плотностях радиации накачки, в 10^3 — 10^5 раз превышающих $u_{41}^{\text{пор}}$.

Пороговое значение накачки $u_{41}^{\text{пор}}$ ($\nu_{\Gamma} = \nu_{21}$), приводящее к генерации на частоте ν_{21} , легко находится из (29) и (11)–(14) с учетом (49), (50). Оно имеет вид

$$u_{41}^{\text{пор}}(\nu_{\Gamma} = \nu_{21}) = \frac{1}{B_{14}} \frac{D^0(1 + \delta_{12})}{\Delta_2 g_1/g_2 - \Delta_1 - \delta_{12}\Delta_{14}}, \quad (51)$$

где

$$D^0 = (P_{41}^0 + P_{42}^0 + P_{43}^0) (P_{32}^0 P_{21}^0 + P_{31}^0 P_{23}^0 + P_{21}^0 P_{31}^0),$$

$$\Delta_2 = P_{32}^0 (P_{42}^0 + P_{43}^0) + P_{42}^0 P_{31}^0, \quad \Delta_1 = P_{21}^0 P_{31}^0 + P_{21}^0 P_{32}^0 + P_{23}^0 P_{31}^0,$$

$$\Delta_{14} = (P_{43}^0 + P_{42}^0) (P_{23}^0 + P_{32}^0) + P_{43}^0 P_{21}^0 + P_{42}^0 P_{31}^0 + 2(P_{21}^0 P_{31}^0 + P_{21}^0 P_{32}^0 + P_{31}^0 P_{23}^0).$$

Учитывая метастабильность второго уровня и полагая $P_{32}^0 \gg P_{21}^0 + P_{31}^0$, нетрудно получить

$$u_{41}^{\text{пор}}(\nu_{\Gamma} = \nu_{21}) = \frac{1}{\eta' B_{14}} \frac{P_{21}^0(1 + \delta_{12})}{g_1/g_2 - \delta_{12}}, \quad kT \ll h\nu_{32}, \quad (52)$$

$$u_{41}^{\text{пор}}(\nu_{\Gamma} = \nu_{21}) = \frac{1}{\eta' B_{14}} \frac{(P_{21}^0 + P_{31}^0)(1 - \delta_{12})}{g_1/g_2 - 2\delta_{12}}, \quad kT \gg h\nu_{32}, \quad (52a)$$

где $\eta' = (P_{42}^0 + P_{43}^0) / (P_{41}^0 + P_{42}^0 + P_{43}^0)$. Выражение (52) по форме совпадает с формулой (36), полученной без учета расщепления метастабильного уровня. Численное совпадение величин порогов осуществляется, если $\eta = \eta'$, а в формуле (36) положить g_2 равным статистическому весу нижнего подуровня метастабильного состояния $g_2 = g'$. Если же метастабильный

уровень в реальных системах может быть как расщепленным, так и нерасщепленным, то g_2 определяет вырождение нерасщепленного уровня, а g'_2 — только его нижней компоненты. В этом случае при $kT \ll h\nu_{32}$ расщепление метастабильного уровня приводит к понижению порога генерации. Процесс генерации становится возможным в резонаторах с пониженной добротностью, т. е. при $g_1/g_2 < \delta_{12} < g_1/g'_2$.

Наличие второй компоненты метастабильного уровня приводит к увеличению порога генерации лишь при температурах $kT \geq h\nu_{32}$, когда дезактивация возбужденных частиц определяется не только вероятностью p_{32}^0 , но и p_{31}^0 . Формулы (12) и (12а) справедливы только при $p_{32}^0 \gg p_{21}^0 + p_{31}^0$. В противоположном случае обмен частицами между вторым и третьим уровнями затруднен и увеличение температуры не изменяет порога генерации. Расчеты показывают также¹⁷, что расщепление метастабильного уровня приводит к снижению мощности генерации, если только $\exp(-h\nu_{32}/kT)$ соизмерима с единицей.

Появление внутри резонатора генерируемой радиации приводит к резкому изменению зависимости населенностей уровней от плотности радиации накачки. В формулах (11) — (14) необходимо учитывать вероятности переходов $B_{12}u_{21}$, индуцированных генерируемым излучением ($p_{21} = p_{21}^0 + B_{12}u_{21}$ и $p_{12} = B_{12}u_{21}$). Анализ функции распределения при генерации на частоте ν_{21} показывает, что увеличение плотности накачки приводит к постепенному росту n_3 и уменьшению n_2 и n_4 . Изменения n_i наиболее существенны в том случае, если вероятности p_{32}^0 и p_{23}^0 невелики. Если же p_{32}^0 и p_{23}^0 значительно превосходят p_{43}^0 и p_{42}^0 , то, согласно (11) — (14), значения n_i остаются практически постоянными при изменении u_{41} в большом интервале значений.

Увеличение мощности накачки в условиях генерации на частоте ν_{21} может привести к такому инверсионному заселению, которое станет удовлетворять условию генерации $n_3 - n_1 = \delta_{13}n$ в канале $3 \rightarrow 1$, не нарушая вместе с тем условия генерации на частоте ν_{21} .

Полагая вначале для простоты $\delta_{12} = 0$, $g_2 = g_1$, из этого равенства с помощью (12) и (14) при $u_{32} = u_{31} = 0$, $u_{21} \neq 0$ находим второй порог генерации, т. е. значение плотности радиации накачки, при котором одновременно с генерацией на частоте ν_{21} возникает генерация частоты ν_{32} :

$$u_{41}^* \text{ пор } (\nu) = \frac{1}{B_{14}} \frac{(p_{41}^0 + p_{42}^0 + p_{43}^0) [p_{32}^0 + p_{31}^0 - p_{23}^0 + \delta_{13} (2p_{31}^0 + 2p_{32}^0 + p_{23}^0)]}{p_{43}^0 + p_{23}^0 - p_{31}^0 - p_{32}^0 - \delta_{13} (3p_{31}^0 + 3p_{32}^0 + p_{43}^0 + p_{23}^0)} \quad (53)$$

Согласно (51) и (53) значения первого и второго порогов генерации равны по порядку величины в таких системах, в которых $p_{32}^0 + p_{31}^0 \approx p_{21}^0$, $p_{43}^0 \geq p_{42}^0 \geq p_{41}^0$, если δ_{13} достаточно мало. Наоборот, если $p_{32}^0/p_{21}^0 \gg 1$, то в такое же число раз возрастает значение второго порога по сравнению с первым. В этом последнем случае легко учесть зависимость второго порога генерации от δ_{12} :

$$u_{41}^* \text{ пор } (\nu) = \frac{1}{B_{14}} \frac{(p_{42}^0 + p_{43}^0) [(1 + 2\delta_{13} + \delta_{12}) - (1 - \delta_{13} + \delta_{12}) \exp(-h\nu_{32}/kT)]}{[p_{43}^0 (1 - \delta_{13} - \delta_{12}) / p_{32}^0 - (1 + 3\delta_{13} - \delta_{12}) + (1 - \delta_{13} + 3\delta_{12}) \exp(-h\nu_{32}/kT)]} \quad (54)$$

При выводе формулы (54) учтено условие метастабильности 2-го и 3-го уровней и неравенство $p_{32}^0 - p_{23}^0 \gg p_{21}^0 + p_{31}^0$.

Из (54) следует, что второй порог генерации уменьшается с ростом температуры и уменьшением δ_{13} . При низких температурах знаменатель (53) становится отрицательным, если только $p_{32}^0 > p_{43}^0$. Это значит, что после возникновения генерации на частоте ν_{21} невозможно возбудить генерацию в канале $3 \rightarrow 1$ в системах, в которых вероятность перераспределения частиц между компонентами метастабильного уровня p_{32}^0 больше p_{43}^0 .

Предположим теперь, что генерация осуществляется только на частоте ν_{31} . В этом случае значение порога равно

$$u_{14}^{\text{пор}}(\nu_{\Gamma} = \nu_{31}) = \frac{1}{B_{14}} \frac{D^0(1 - \delta_{12})}{\Delta_{32}g_3/g_2 - \Delta_1 - \delta_{13}\Delta_{14}}, \quad (55)$$

$$\Delta_3 = P_{23}^0(P_{42}^0 + P_{43}^0) + P_{43}^0P_{21}^0.$$

Значения D^0 , Δ_1 и Δ_{14} приведены выше.

В зависимости от конкретных значений вероятностей переходов δ_{12} и δ_{13} величина $u_{14}^{\text{пор}}(\nu_{\Gamma} = \nu_{31})$ может быть либо больше, либо меньше порога генерации на частоте ν_{21} , определяемого формулой (51). В частном случае, когда $\delta_{12} = \delta_{13}$, генерация возникает в канале $2 \rightarrow 1$, если выполняется неравенство (48), и в канале $3 \rightarrow 1$ при выполнении неравенства, противоположного (48).

В системах, для которых справедливо (48), можно вызвать генерацию на частоте ν_{31} только путем увеличения δ_{12} и уменьшения δ_{13} , что означает, в частности, увеличение пропускания покрытий на частоте ν_{21} и одновременное увеличение коэффициента отражения на частоте ν_{31} . Именно так была осуществлена генерация R_2 -линии рубина^{24, 25}.

Таким образом, в генераторах с расщепленным метастабильным уровнем можно осуществить генерацию на любой из других частот, ν_{21} или ν_{31} . Если вероятности перераспределения частиц между компонентами метастабильного уровня малы по сравнению с вероятностями поступления возбужденных частиц в метастабильное состояние, возможна одновременная генерация двух частот, ν_{21} и ν_{31} , при накачках, сравнимых с первым порогом.

8. ЧЕТЫРЕХУРОВНЕВЫЙ КГС¹⁵

Простейшая схема уровней генератора этого типа приведена на рис. 1, в. Накачка переводит частицы на 4-й уровень, откуда они переходят на 3-й, метастабильный уровень. Инверсионная населенность осуществляется прежде всего в канале $3 \rightarrow 2$, а при больших u_{41} и в канале $3 \rightarrow 1$. Для данной схемы можно положить

$$P_{13}^0 = P_{14}^0 = P_{23}^0 = P_{24}^0 = P_{34}^0 = 0, \quad u_{31} = u_{21} = u_{42} = 0, \quad (56)$$

$$P_{12}^0 = P_{21}^0 \exp(-h\nu_{21}/kT), \quad B_{14}u_{41} \ll A_{41}. \quad (57)$$

Это означает, что тепловые переходы вверх во всех каналах, кроме $1 \rightarrow 2$, пренебрежимо малы. Неравенство (57) справедливо при всех практически достижимых значениях u_{41} .

С учетом (56), (57) формулы для населенностей уровней (11) — (14) упрощаются:

$$n_4 = \frac{n}{D} \{B_{14}u_{41} [P_{21}^0(P_{31}^0 + P_{32}^0) + B_{32}u_{32}P_{21}^0 + B_{23}u_{32}P_{31}^0]\}, \quad (58)$$

$$n_3 = \frac{n}{D} \{B_{14}u_{41}P_{43}^0P_{21}^0 + B_{23}u_{32} [P_{12}^0(P_{43}^0 + P_{42}^0 + P_{41}^0) + B_{14}u_{41}(P_{41}^0 + P_{43}^0 + P_{12}^0)]\}, \quad (59)$$

$$n_2 = \frac{n}{D} \{(P_{41}^0 + P_{42}^0 + P_{43}^0 + B_{14}u_{41}) [P_{12}^0(P_{31}^0 + P_{32}^0) + B_{32}u_{32}P_{12}^0] + B_{14}u_{41} [(P_{42}^0 + P_{43}^0)(P_{32}^0 + B_{32}u_{32}) + P_{42}^0P_{31}^0]\}, \quad (60)$$

$$n_1 = \frac{n}{D} \{(P_{41}^0 + P_{42}^0 + P_{43}^0 + B_{14}u_{41}) [P_{21}^0(P_{31}^0 + P_{32}^0) + B_{32}u_{32}P_{21}^0 + B_{23}u_{32}P_{31}^0]\}, \quad (61)$$

где D — сумма всех членов, стоящих в фигурных скобках формул (58) — (61).

Если в формулах (58) — (61) положить $u_{32} = 0$, то они будут определять зависимость n_i от плотности радиации накачки u_{41} при отсутствии резонатора и, следовательно, при отсутствии генерации. Они описывают также населенности уровней частиц, помещенных в резонатор, для области значений u_{41} от нуля до $u_{41}^{\text{пор}}$, характеризующего начало генерации.

При отсутствии возбуждения населены только первый и второй уровень:

$$n_1^0 = n \frac{P_{21}^0}{P_{21}^0 + P_{12}}, \quad n_2^0 = n \frac{P_{12}^0}{P_{21}^0 + P_{12}}, \quad n_3^0 = n_4^0 = 0. \quad (62)$$

Если включить возбуждение и постепенно увеличивать u_{41} , то населенность первого уровня станет уменьшаться, а всех возбужденных уровней — увеличиваться. Значение n_4 , как и в трехуровневой схеме, на много порядков меньше n , а основная масса возбужденных частиц оказывается на 3-м уровне. Кривая $n_3(u_{41})$ пересекает график $n_2(u_{41})$, если при малых T

$$P_{21}^0 > P_{32}^0 + (P_{32}^0 + P_{31}^0) \frac{P_{42}^0}{P_{43}^0}. \quad (63)$$

В этом случае легко удовлетворить условию $n_3 - n_2 = \delta_{23}n$ и осуществить генерацию. Если условие (63) не выполнено, то $n_2 > n_3$ и генерация на частоте ν_{32} невозможна.

С помощью (29), (58) — (60) приходим к следующему выражению для порога генерации:

$$u_{41}^{\text{пор}} = \frac{1}{\eta_1 B_{14}} \frac{(P_{31}^0 + P_{32}^0) [(1 + \delta_{23}) \exp(-h\nu_{32}/kT) + \delta_{23}]}{g_2/g_3 - \delta_{23} - P_{32}^0(1 + \delta)/P_{31}^0 - c_1(1 + \delta_{23}) - c_2\delta_{23}}, \quad (64)$$

где

$$\eta_1 = P_{43}^0/(P_{41}^0 + P_{42}^0 + P_{43}^0), \quad c_1 = (P_{31}^0 + P_{32}^0)(P_{12}^0 + P_{42}^0)/P_{21}^0 P_{43}^0, \\ c_2 = 2(P_{31}^0 + P_{32}^0)/P_{43}^0.$$

Коэффициенты c_1 и $c_2 \ll 1$, и их можно опустить в (65), если соблюдаются условия

$$P_{43}^0 \gg P_{42}^0, \quad P_{21}^0 \gg P_{31}^0 + P_{32}^0, \quad (65)$$

$$P_{43}^0 \gg P_{31}^0 + P_{32}^0 \text{ или } P_{43}^0 \gg P_{21}^0. \quad (66)$$

В противоположном случае порог может быть большим. Нарушение условия (66) приводит к заметному увеличению $u_{41}^{\text{пор}}$ только при больших δ_{23} , т. е. при больших внешних потерях или малом значении $\kappa_{23}(\nu_r)$. Первое из условий (66) можно назвать условием метастабильности. Из приведенных данных следует, что в четырехуровневой схеме метастабильность третьего уровня отнюдь не обязательна.

При низких температурах, когда $\exp(-h\nu_{32}/kT) \rightarrow 0$ и $\delta_{23} \rightarrow 0$, порог генерации равен нулю. В этом и заключается основное преимущество четырехуровневого КГС.

Схема рис. 1, *в* с третьим метастабильным уровнем может работать как обычный трехуровневый генератор в канале $3 \rightarrow 1$. Специфика заключается лишь в том, что порог генерации на частоте ν_{31} будет чувствительной функцией температуры вследствие теплового взаимодействия близко расположенных уровней 1 и 2. Пренебрегая малыми членами порядка $(P_{31}^0 + P_{32}^0)/P_{43}^0$, находим

$$u_{41}^{\text{пор}}(\nu_r = \nu_{31}) = \frac{1}{\eta_1 B_{14}} \frac{(P_{31}^0 + P_{32}^0) [(1 + \delta_{13}) + \delta_{13} \exp(-h\nu_{21}/kT)]}{g_1/g_3 - \delta_{13}}. \quad (67)$$

В том же приближении отношение порогов (64) и (67) равно

$$\frac{u_{41}^{\text{пор}}(\nu_r = \nu_{32})}{u_{41}^{\text{пор}}(\nu_r = \nu_{31})} = \frac{g_1/g_3 - \delta_{13}}{g_2/g_3 - \delta_{23}} \frac{(1 + \delta_{23}) \exp(-h\nu_{21}/kT) + \delta_{23}}{(1 + \delta_{23}) + \exp(-h\nu_{21}/kT) \delta_{23}}. \quad (68)$$

Если в КГС $g_1 = g_2$ и $\delta_{23} = \delta_{13}$, то величина (68) изменяется от $\delta_{23}/(1+\delta_{23})$ до 1 при повышении температуры от нуля до $kT \gg hv_{21}$. В этом случае прежде всего будет возникать генерация частоты ν_{32} . Если же $g_1 > g_2$ или $\delta_{23} > \delta_{13}$, то при низких температурах

$$u_{41}^{\text{пор}}(\nu_r = \nu_{23}) < u_{41}^{\text{пор}}(\nu_r = \nu_{31}),$$

но с увеличением T неравенство меняется на обратное. Следовательно в процессе работы генератора на частоте ν_{32} вследствие разогревания рабочего вещества возможен срыв генерации на частоте ν_{32} и возникновение стимулированного испускания частоты ν_{31} . Срыв генерации может быть связан также с тем, что в процессе работы КГС на частоте ν_{32} число частиц на втором уровне становится больше, чем на первом.

Точная формула для мощности генерации легко получается из (34), (58) — (64), но не очень удобна при исследовании. После обычных преобразований она упрощается:

$$W_{32}^{\text{ген}} = n \frac{[(1 - p_{32}^0/p_{21}^0) - \delta_{23}(1 + p_{32}^0/p_{21}^0)] B_{14}(u_{41} - u_{41}^{\text{пор}}) hv_{32}}{[1 + p_{31}^0/p_{21}^0 + 2 \exp(-hv_{21}/kT)]/\eta_1 + 2B_{14}u_{41}/p_{21}^0}, \quad (69)$$

где для простоты положено $g_2 = g_3$. Если $B_{14}u_{41} \ll p_{21}^0$, что обычно осуществляется, то $W_{32}^{\text{ген}}$ четырехуровневого КГС, подобно трехуровневому генератору, линейно зависит от плотности радиации накачки. Насыщение достигается только при больших $B_{14}u_{41} \sim p_{21}^0$.

В предельном случае для идеального четырехуровневого генератора можно положить $p_{32}^0 \ll p_{21}^0$, $B_{14}u_{41} \ll p_{21}^0$, $\eta_1 \rightarrow 1$. Тогда достигается максимально возможная мощность

$$W_{32}^{\text{ген}} = \frac{nhv_{32}(1 - \delta_{23})}{1 + 2 \exp(-hv_{21}/kT)} \left\{ B_{14}u_{41} - \frac{(p_{31}^0 + p_{32}^0) [\delta_{23} + (1 + \delta_{23}) \exp(-hv_{21}/kT)]}{1 - \delta_{23}} \right\}. \quad (70)$$

Согласно (70), когда $kT \ll hv_{32}$, $\delta_{23} \rightarrow 0$, эффективность генератора очень высока, $W_{32}^{\text{ген}} \rightarrow nB_{14}u_{41}hv_{32}$. За исключением стоксовых потерь в каналах $4 \rightarrow 3$ и $2 \rightarrow 1$, вся поглощенная энергия превращается в стимулированное излучение.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные выше оптические характеристики трех- и четырехуровневых генераторов получены применительно к элементарному объему рабочего вещества КГС при стационарной накачке и генерации без осцилляций. На опыте же наблюдается генерация конечных объемов с неоднородным распределением накачки, а часть рабочего вещества может быть занята замкнутыми модами, которые вовсе не выходят из резонатора. Явление генерации сильно усложняется осцилляциями, которые наблюдаются во всех твердых и жидких КГС. Если добавить к этому, что ряд вероятностей переходов, а часто и плотность радиации накачки неизвестны, то становятся понятными трудности количественного сопоставления результатов расчета с опытом.

Несмотря на это, уже сейчас можно констатировать хорошее качественное совпадение результатов и выводов, полученных в рамках вероятностного метода расчета. Эксперимент подтверждает линейную зависимость мощности поглощения и генерации от плотности радиации накачки^{26, 27}, увеличение порога и срыв генерации с повышением температуры²⁸ и ряд других результатов, полученных этим методом.

Несомненно, что вероятностный метод расчета найдет широкое применение при создании законченной теории квантовых генераторов света.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein, *Phys. Zs.* **18**, 121 (1917).
 2. П. А. Анапанасевич, *Изв. АН СССР, сер. физ.* **24**, 509 (1960).
 3. Б. И. Степанов, *Люминесценция сложных молекул*, Изд-во АН БССР, Минск, 1956.
 4. Б. И. Степанов, *Основы спектроскопии отрицательных световых потоков*, Изд-во БГУ, Минск, 1961.
 5. Б. И. Степанов, В. П. Грибковский, *Введение в теорию люминесценции*, Изд-во АН БССР, Минск, 1963.
 6. Б. И. Степанов, В. П. Грибковский, *Изв. АН СССР, сер. физ.* **24**, 534 (1960).
 7. В. П. Грибковский, *ДАН БССР* **4**, 284 (1960).
 8. В. П. Грибковский, Б. И. Степанов, *Опт. и спектр.* **14**, 484 (1963).
 9. В. П. Грибковский, *ДАН БССР* **4**, 199 (1960).
 10. Б. И. Степанов, В. П. Грибковский, *ДАН СССР* **121**, 446 (1958).
 11. В. П. Грибковский, *Весті АН БССР, сер. физ. тэх.*, № 4, 45 (1961).
 12. Б. И. Степанов, А. М. Самсон, *Весті АН БССР, сер. физ. тэх.*, № 4, 45 (1961).
 13. А. П. Иванов, Б. И. Степанов, Б. И. Берковский, И. Л. Кацев, *ДАН БССР* **6**, 147 (1962).
 14. Б. И. Степанов, В. П. Грибковский, *ДАН БССР* **7**, 17 (1963).
 15. Ю. А. Ананьев, В. П. Грибковский, А. А. Мак, Б. И. Степанов, *ДАН СССР* **150**, 507 (1963).
 16. Б. И. Степанов, А. М. Самсон, В. П. Грибковский, *Изв. АН СССР, сер. физ.* **27**, № 4, 473 (1963).
 17. Б. И. Степанов, В. П. Грибковский, *ДАН БССР* **7**, 305 (1963).
 18. T. H. Maiman, *Phys. Rev.* **123**, 1145 (1961).
 19. N. Bloembergen, *Phys. Rev.* **104**, 324 (1956).
 20. M. Stitch, *J. Appl. Phys.* **32**, 1994 (1961).
 21. W. A. Barker, I. D. Keiting, *Appl. Opt.* **1**, 335 (1962).
 22. Э. Е. Фрадкин, М. П. Чайка, *Опт. и спектр.* **12**, 796 (1962).
 23. A. L. Schawlow, *Advances in Quantum Electronics*, New York — London, 1961, стр. 50.
 24. F. J. McClung, S. E. Schwarz, F. J. Meyer, R. W. Hellwarth, I. J. D. Hoeneys, *Bull. Amer. Phys. Soc., Ser. II*, No. 6, 511 (1961).
 25. F. J. McClung, S. E. Schwarz, F. J. Meyer, *J. Appl. Phys.* **33**, 3139 (1962).
 26. M. L. Stitch, E. J. Woodbury, J. H. Morse, в сб. *Advances in Quantum Electronics*, New York — London, 1961, стр. 83.
 27. C. G. Garrett, W. Kaiser, D. L. Wood, там же, стр. 77.
 28. L. F. Johnson, *J. Appl. Phys.* **34**, 897 (1963).
-