

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

537.212+538.122

**ЭВОЛЮЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О МАГНИТНЫХ  
И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ***М. А. Леонтович*

Как известно, Фарадей представлял себе магнитные и электрические поля как совокупность силовых линий («трубок»), которые были для него материальными образованиями особого рода. Современная физика представляет электромагнитное поле как поле двух векторов,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , и силовые линии — это только наглядное изображение этих полей. Обычным способом построенные силовые линии не представляют собой релятивистски инвариантного геометрического образа, поэтому никакое овеществление их не имеет смысла.

Однако для электромагнитных полей частного типа, для которых  $(\mathbf{E}\mathbf{B}) = 0$ , можно построить релятивистски инвариантные двуплоскостные силовые линии магнитного поля (а в вакууме и электрического поля). Эти инвариантные силовые линии могут «овеществляться» цепочкой зарядов или цепочкой частиц идеально проводящей жидкости. В заключение статьи обсуждается возможность построения релятивистски инвариантных образов для полей более общего типа, когда условие  $(\mathbf{E}\mathbf{B}) = 0$  не выполнено.

\* \* \*

Картина силовых линий электрического и магнитного полей чрезвычайно полезна не только для наглядного представления полей, но и для определения сил, действующих на тела в этих полях. Представление о магнитных и электрических силовых линиях возникло у Фарадея, но с тех пор и смысл, и роль силовых линий в электродинамике существенно изменились.

Как известно, Фарадей, заложивший основы теории электромагнитных явлений, не пользовался сколько-нибудь полным математическим описанием электрического и магнитного полей. Его представления о том, что мы теперь называем электромагнитным полем, были основаны на силовых линиях. Силовые линии («трубки») Фарадей представлял себе вполне вещественными, силы, действующие на тела, находящиеся в электрическом и магнитном полях, он объяснял натяжением и давлением силовых линий.

Максвелл (примерно сто лет назад) создал современную теорию электромагнитных явлений (электродинамику). На основе результатов и идей Фарадея Максвелл развил ее уже в совершенной математической

форме. С тех пор основной характеристикой электромагнитного поля являются два вектора — векторы напряженностей электрического и магнитного полей. Силовые линии стали способом наглядного представления этих полей. Попытки соединить максвелловскую электродинамику (и электронную теорию) с «вещественными» силовыми линиями в духе Фарадея делал Дж. Дж. Томсон. Они остались бесплодными.

Невозможность введения в электродинамику силовых линий как вещественных («реальных») объектов в прежнем смысле стала ясна после создания специальной теории относительности. Хотя выводы из теории относительности охватили всю физику, родилась она из вопросов, связанных с электродинамикой. Недаром же основная работа Эйнштейна 1905 г. называлась «К электродинамике движущихся тел». В этой работе было показано, что законы электродинамики справедливы в любой инерциальной системе отсчета. Это было принципиальное завершение стройной теории, которую мы теперь называем классической электродинамикой (термин «классическая теория» употребляется теперь в физике для того, чтобы показать, что это — теория, не учитывающая квантовых явлений).

Почему невозможно представить себе силовую линию как вещественную или «реальную»? Это следует из того, что обычным образом определенная силовая линия зависит от системы отсчета. Силовая линия данного магнитного (электрического) поля — это линия, касательная к которой в каждой точке направлена по магнитному (электрическому) полю в этой точке. Если поле зависит от времени, то нужно строить силовую линию для каждого момента, взяв всюду значения поля одновременно. (В этом случае форма и положение силовой линии будут зависеть от времени.) Если сделать это же построение в другой системе отсчета (движущейся относительно первой прямолинейно и равномерно), мы получим, вообще говоря, совсем другие линии, не представляющие собой прежние линии, переносящиеся относительно новой системы отсчета со скоростью относительного движения этих двух систем! А ведь именно так должно было бы быть, если бы мы могли представлять себе силовую линию как вещественное образование.

В этой зависимости силовых линий от системы отсчета (непостоянности) можно убедиться, если учесть два важных положения теории относительности, а именно:

1. События в разных точках, одновременные в одной системе отсчета, не будут одновременными в другой.

2. Разделение электромагнитного поля на электрическое и магнитное зависит от системы отсчета. Только совокупность электрического и магнитного полей имеет смысл, не зависящий от системы отсчета. (Пример. В системе  $K$  заряды покоятся и дают электрическое (электростатическое) поле. В системе  $K'$ , движущейся относительно  $K$ , заряды будут двигаться (будет ток) и будут вызывать не только электрическое, но, как всякий ток, и магнитное поле.) Поэтому можно утверждать, что силовым линиям (в смысле данного выше определения) не может соответствовать какой-либо вещественный объект.

Как же согласовать с этим утверждением, например, тот факт, что магнитные силовые линии полностью определяют траекторию заряженной частицы, движущейся в магнитном поле? Действительно, известно, что траектория электрического заряда в стационарном (неизменяющемся со временем) магнитном поле (и при отсутствии электрического поля) представляет собой винтовую линию, обвивающуюся вокруг магнитной силовой линии как оси винта.

Эта картина движения — приближенная, но она тем точнее соответствует действительности, чем сильнее магнитное поле и чем меньше скорость вращения заряда вокруг силовой линии. Чем лучше выполнены эти условия, тем винтовая линия ближе к силовой линии.

Эта особенность движения зарядов в магнитных полях часто используется в лабораториях для выяснения деталей распределения магнитного поля в установках, в которых применяются сильные магнитные поля (1 кгс и выше), — в ускорителях частиц, установках для удержания плазмы, «электромагнитных сепараторах», т. е. установках для электромагнитного разделения изотопов. Для этого в установку напускают газ (неон, аргон) при малом давлении (порядка  $10^{-3}$  мм рт. ст.) и из электронной пушки (источника электронов), помещаемой в разных местах, пускаются электроны (ускоренные в пушке напряжением в несколько киловольт), в направлении приблизительно по магнитному полю. В этих условиях электроны возбуждают на своем пути атомы газа и вызывают их свечение. Путь электрона оказывается при этом светящейся линией, наглядно показывающей магнитную силовую линию, таким образом «овеществленную» рядом светящихся атомов.

Если заряд движется в пространстве, где кроме магнитного поля есть еще слабое электрическое поле, так что отношение напряженностей полей  $E/B$  мало по сравнению с единицей (причем, разумеется, напряженности электрического поля  $E$  и магнитного  $B$  выражены в одних и тех же единицах, например, обе в гауссах или обе в вольтах на метр!), то заряд не только вьется вокруг магнитной силовой линии, но еще движется перпендикулярно к ней и к направлению электрического поля со скоростью

$$w = c \frac{E}{B},$$

где  $c$  — скорость света. Заряд еще «дрейфует» поперек магнитного поля.

Рассмотрим другое явление: быстрое движение хорошо проводящей жидкости или ионизованного, хорошо проводящего газа (или твердого тела) в магнитном поле. В рассматриваемых явлениях удельным сопротивлением проводящей среды можно пренебречь, так как эффекты, связанные с ним, не играют роли.

При движении проводящей среды в магнитном поле в ней возникают электрические токи. В свою очередь на движение среды будут влиять силы, действующие на эти токи в магнитном поле. Движение происходит так, что одни и те же частицы жидкости остаются все время на одной и той же магнитной силовой линии. Силовая магнитная линия движется вместе с веществом. Эта движущаяся магнитная силовая линия отмечена индивидуальными частицами вещества.

Этот вывод представляет собой прямое следствие закона индукции Фарадея для движущегося контура проводника. Действительно, поток магнитной индукции (поток магнитного поля), взятый через площадь, окруженную контуром, проходящим через одни и те же частицы вещества, должен оставаться все время неизменным, так как иначе в рассматриваемой среде с пренебрежимо малым удельным сопротивлением возникли бы бесконечно большие токи. А сохранение потока магнитного поля через вещественный контур и означает движение магнитных силовых линий вместе с веществом.

При движении хорошо проводящего вещества в магнитном поле в нем обязательно появляется электрическое поле. Это электрическое поле должно уравновесить лоренцеву силу, действующую благодаря

магнитному полю на каждый заряд (носитель тока), движущийся вместе со средой, иначе получился бы бесконечно большой ток, а это невозможно. Отсюда нетрудно вывести, что скорость среды  $u$  как по величине, так и по направлению равна «дрейфовой скорости»:

$$u = c \frac{E}{B} = w.$$

Мы видим, что в обоих рассмотренных случаях — движения заряда и проводящей среды в магнитном поле — силовые линии могут быть о веществе. Каждая такая линия отмечена в первом случае определенной цепочкой электронов, а во втором — определенными частицами жидкости. Разумеется, это «о веществе» силовых линий совсем не то, каким его себе представлял Фарадей, который считал, что силовые линии сами по себе вещественны; вещество, из которого они у него состояли, было не вещество из электронов и атомов, а вещество особого рода. У Фарадея силовые линии играли роль «эфира».

Как же согласовать роль магнитных силовых линий как траектории зарядов в магнитном поле и при движении проводящей среды с тем, что было сказано об их «релятивистской инвариантности», т. е. с тем, что построенные силовые линии будут разными в зависимости от того, в какой (инерциальной) системе отсчета делается их построение? Ведь траектория заряда и цепочка частиц проводящей среды не могут зависеть от системы отсчета.

Ответ на этот вопрос дается исследованием его в рамках теории относительности и состоит в следующем.

Для электромагнитных полей частного типа, для которых  $(\mathbf{E}\mathbf{B}) = 0$ , т. е. либо когда  $\mathbf{E} = 0$  или  $\mathbf{B} = 0$ , либо когда  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  взаимно перпендикулярны, можно построить геометрический (кинематический) образ, а именно систему движущихся магнитных силовых линий, не зависящих от системы отсчета. Касательная к этим линиям направлена в каждой точке по магнитному вектору, а движется она перпендикулярно к своему направлению и перпендикулярно к электрическому вектору (в данном месте) с «дрейфовой скоростью»  $w = c \frac{E}{B}$ . Эти линии движутся даже в том случае, когда поля стационарны! Построение таких не зависящих от системы отсчета («релятивистски инвариантных») магнитных силовых линий возможно только для полей указанного частного типа, когда  $(\mathbf{E}\mathbf{B}) = 0$  (само это условие, как известно, не зависит от системы отсчета).

Действительно, как вытекает из сказанного, силовая линия может быть релятивистски инвариантным геометрическим образом, если только она движущаяся. Это значит, что в четырехмерном пространстве (координат и времени) она представляет собой многообразие двух измерений. Сечение этого многообразия плоскостью (в четырехмерном пространстве)  $t = \text{const}$  дает многообразие одного измерения — линию в обычном трехмерном пространстве.

Движущиеся релятивистски инвариантные магнитные силовые линии получаются из системы уравнений для их элементов  $(dr, dt)$

$$[dr, \mathbf{B}] + c\mathbf{E} dt = 0, \quad (1)$$

$$(\mathbf{E}, dr) = 0. \quad (2)$$

Эта система уравнений релятивистски инвариантна; она может быть записана в четырехмерной тензорной форме

$$F_{ik} dx^k = 0,$$

где  $F_{ik}$  — тензор электромагнитного поля, а  $dx^k$  — это  $dx, dy, dz$  и  $cdt$ .

Система четырех уравнений (1) и (2) для  $dx, dy, dz, dt$  имеет для них ненулевые решения, если только

$$(\mathbf{E}, \mathbf{V}) = 0. \tag{3}$$

При этом условии из четырех уравнений для четырех дифференциалов  $dx, dy, dz, dt$  алгебраически независимыми являются только два. Таким образом, эта система может определять многообразие двух измерений. Однако для этого требуется еще выполнение условий интегрируемости системы двух уравнений для четырех полных дифференциалов. Это условие интегрируемости имеет вид

$$\left[ \mathbf{V}, \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right] - \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{V} = 0 \tag{4}$$

и удовлетворяется в силу уравнений Максвелла.

Из уравнений (1) вытекает, что при  $dt = 0$   $d\mathbf{r}$  параллельно  $\mathbf{V}$  и, следовательно,  $d\mathbf{r}$  — элемент силовой линии. Умножив (1) векторно на  $\mathbf{V}$ , получим

$$d\mathbf{r} = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{V}, d\mathbf{r})}{V^2} + c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{V}]}{V^2} dt,$$

откуда видно, что компонента скорости, перпендикулярная к  $\mathbf{V}$ , равна

$$\mathbf{w} = c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{V}]}{V^2}$$

и, значит, при учете условия (3)  $\mathbf{w} = c\mathbf{E}/V$ . Этот вывод был дан Ньюкомбом (1958). Добавим еще, что если условие (3) не выполнено ( $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  не перпендикулярны друг другу), можно показать, что инвариантных магнитных силовых линий вообще нельзя построить.

В рассмотренном нами примере движения очень хорошо проводящей среды в магнитном поле электромагнитное поле относится именно к тому типу, когда электрическое поле в среде перпендикулярно к магнитному. Частицы вещества среды движутся, оставаясь на этих «релятивистски инвариантных» магнитных силовых линиях.

В случае разобранный выше движения заряда в стационарном магнитном поле (в отсутствие электрического) величина  $(\mathbf{E}\mathbf{V})$  тоже, очевидно, равна нулю в рассматриваемой лабораторной системе отсчета. В этой системе заряд, как мы уже говорили, движется по магнитной силовой линии. В другой инерциальной системе отсчета, кроме (измененного) магнитного поля  $\mathbf{V}'$ , будет еще и электрическое поле  $\mathbf{E}'$ , и та же силовая линия (= траектория заряда) будет по отношению к новой системе отсчета перемещаться с дрейфовой скоростью  $w = cE'/V'$ , как раз равной скорости старой системы отсчета относительно новой.

Аналогично будет обстоять дело, если заряд движется в магнитном и электрическом полях, всюду перпендикулярных друг другу. При выполнении упомянутых условий (сильное поле, малая скорость заряда) траектория заряда будет приблизительно совпадать с дрейфующей магнитной силовой линией.

До сих пор речь шла о магнитных силовых линиях. Совсем не случайно, что внимание сосредоточивается на них: магнитные линии играют в физике большую роль, чем электрические. Как же обстоит дело с электрическими силовыми линиями, дающими наглядную картину для другой (электрической) компоненты электромагнитного поля? На первый взгляд может показаться, что здесь должна быть полная аналогия с магнитными линиями. Однако нужно иметь в виду, что симметрии между магнитным и электрическим полями нет. Ведь магнитных зарядов не существует! (В последние годы велись поиски этих магнитных зарядов, т. е. свободных магнитных полюсов, причем с использованием всех возможностей современной экспериментальной техники. Их пытались получить в результате взаимодействий элементарных частиц на ускорителях,

искали в космосе — в метеоритах, но тщетно!) Поэтому и с электрическими силовыми линиями дело обстоит не совсем так, как с магнитными, а именно, следующим образом.

Для электромагнитных полей частного типа  $(\mathbf{E}\mathbf{V}) = 0$  можно построить систему движущихся электрических силовых линий, независимых от системы отсчета. Электрические силовые линии дрейфуют перпендикулярно к своему направлению (направлению  $\mathbf{E}$ ) и перпендикулярно к направлению магнитного вектора  $\mathbf{V}$  со скоростью  $w_* = cB/E$ . При этом построение электрических силовых линий возможно не во всех точках электромагнитного поля (и в этом отличие от магнитных линий!), а лишь там, где нет зарядов и токов или по крайней мере токи параллельны электрическому полю, а зарядов нет.

Инвариантные электрические силовые линии можно определить совершенно аналогично тому, как это сделано для магнитных. Для этого нужно сделать во всех уравнениях замену  $\mathbf{V}$  на  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}$  на  $-\mathbf{V}$ . Вместо уравнений (1), (2) мы получим

$$\begin{aligned} [d\mathbf{r}, \mathbf{E}] - c\mathbf{V} dt &= 0, \\ (\mathbf{V}, d\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned}$$

Это тоже релятивистски инвариантная система уравнений. Она может быть записана в виде  $F_{ik}^* dx^k = 0$ , где  $F_{ik}^*$  — дуальный тензор поля. Опять необходимо выполнение условия (3). Условие интегрируемости получается из (4) заменой  $\mathbf{V}$  на  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}$  на  $-\mathbf{V}$  и имеет вид

$$\left[ \mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{V} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] + \mathbf{V} \text{ div } \mathbf{E} = 0. \quad (5)$$

Но эти условия уже не удовлетворяются в любой точке поля, а в силу второй пары уравнений Максвелла приводятся к условиям

$$[\mathbf{E}, \mathbf{j}] + c\mathbf{V}\rho = 0 \quad (6)$$

(где  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  — плотности заряда и тока). Только при условиях (6), которые, очевидно, выполняются всюду, где нет зарядов и токов, можно построить инвариантные электрические силовые линии. Делая замену  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  в выражении для скорости дрейфа магнитных линий, получим скорость дрейфа электрических линий:

$$\mathbf{w}_* = -c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{V}]}{E^2}, \quad (7)$$

и, значит,  $w_* = cB/E$ .

Заметим еще, что из приведенных выражений для скорости дрейфа магнитных силовых линий ( $w = cE/B$ ) и скорости дрейфа электрических ( $w_* = cB/E$ ) вытекает, что  $w < c$  при  $E < B$ , а  $w_* < c$  при  $B < E$  (условия не зависят от системы отсчета). Частицы могут двигаться только со скоростями, не превосходящими скорости света  $c$ . Поэтому частицы могут двигаться вместе с магнитной силовой линией, только если  $E < B$ . Если бы при каких-то условиях какие бы то ни было частицы двигались по электрической силовой линии, то это могло бы быть только для полей, у которых  $E > B$ .

В случае, когда  $(\mathbf{E}, \mathbf{V}) \neq 0$ , нельзя построить ни инвариантных магнитных, ни инвариантных электрических силовых линий. Однако можно искать более общие геометрические (кинематические) образы, а именно, некие «гибридные» силовые линии, которые (правда, в очень частном случае) определяют движение зарядов в поле.

Именно, можно искать силовые линии вектора

$$\mathbf{P} = \mathbf{V} + \lambda \mathbf{E}.$$

Соответствующий четырехмерный тензор будет  $F_{ik} + \lambda F_{ik}^*$ , и мы должны рассматривать, кроме  $\mathbf{P}$  (обобщение  $\mathbf{V}$ ), вектор

$$\mathbf{Q} = -\lambda \mathbf{V} + \mathbf{E},$$

являющийся обобщением  $\mathbf{E}$  и дополняющий  $\mathbf{P}$ . Вместо (1) и (2) напомним дифференциальные уравнения «гибридной» силовой линии в виде

$$[d\mathbf{r}, \mathbf{P}] + c\mathbf{Q} dt = 0,$$

$$(\mathbf{Q}, d\mathbf{r}) = 0.$$

Условие существования ненулевых решений будет  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 0$ , т. е.

$$\lambda^2 + \frac{B^2 - E^2}{(\mathbf{E}\mathbf{V})} \lambda - 1 = 0, \tag{8}$$

что дает два значения  $\lambda = \lambda(x, y, z, t)$ .

Условие интегрируемости будет

$$\left[ \mathbf{P}, \text{rot } \mathbf{Q} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right] - \mathbf{Q} \text{ div } \mathbf{P} = 0; \tag{9}$$

оно налагает еще более сложные условия на распределение полей, чем условие (6) для электрических линий при  $(\mathbf{E}\mathbf{V}) = 0$ .

Однако сразу же можно указать тривиальный случай, где условие (9) выполняется. Это случай однородного стационарного магнитного поля и однородного электростатического поля, не перпендикулярных друг другу. В этом случае мы всегда можем выбрать такую систему отсчета  $K$ , в которой эти поля параллельны друг другу. Направив ось  $z$  по их общему направлению, имеем в этой системе отсчета

$$(\mathbf{E}\mathbf{V}) = E_z B_z, \quad B^2 - E^2 = B_z^2 - E_z^2,$$

и корни уравнения (8) будут

$$\lambda = \frac{E_z}{B_z} \quad \text{и} \quad \lambda = -\frac{B_z}{E_z}.$$

Первое значение дает

$$P_z = \frac{B_z^2 + E_z^2}{B_z}, \quad P_x = P_y = 0, \quad \mathbf{Q} = 0.$$

Следовательно, в системе  $K$  мы имеем неподвижные силовые линии вектора  $\mathbf{P}$ . В любой другой системе отсчета они будут двигаться и легко можно будет найти скорость их дрейфа. Это гибридные магнитно-электрические линии (другой корень дает электрически-магнитные линии). Силовые линии гибридного вектора  $\mathbf{P}$  можно «овеществить». Действительно, представим себе, что в системе  $K$  пущен по направлению  $z$  (т. е. по направлению векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$ ) узкий пучок электронов. Они будут сохранять направление своего движения, и, таким образом, цепочка электронов отметит гибридную магнитно-электрическую силовую линию.

52

