1964 г. Декабрь **Т. LXXXIV, вып. 4**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

ОКТЕТНАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ *)

Дж. де Сварт

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Попытки понять структуру сильных взаимодействий привели к предложению нескольких схем высшей симметрии **). Эти высшие симметрии должны содержать сохранение изоспина I и гиперзаряда Y. Особенно интересно в этом отношении октетная модель (унитарная симметрия), предложенная независимо Гелл-Манном и Нееманом. В этой модели предполагается, что наиболее сильные взаимодействия инвариантны относительно преобразований, принадлежащих к группе $SU(3)$, т. е. относительно, унимодулярных унитарных преобразований в некотором трехмерном комплексном линейном векторном пространстве («пространство унитарного спина»). Симметрия этих сильных взаимодействий нарушается некоторым неизвестным более слабым взаимодействием, но так, что изоспин и гиперзаряд по-прежнему сохраняются. Еще более слабое взаимодействие — электромагнитное — нарушает и эту более низкую симметрию так, что сохраняется только гиперзаряд и третья компонента изоспина. В модели унитарной симметрии группы сильно взаимодействующих частиц с одними и теми же квантовыми числами (неодинаковыми квантовыми числами являются при этом I, Y, I_3 и непосредственно связанные с ними странность, заряд G, четность и др.) относят к неприводимым представлениям (НП) группы $SU(3)$. В октетной модели низшим нетривиальным НП физически возможным (т. е. имеющим целые квантовые числа для гиперзаряда) является НП $\{8\}$. Восемь хорошо известных барионов N, Λ, Σ и Ξ, а также восемь псевдоскалярных мезонов K, η, π и $\bar{K}$ приписываются НП $\{8\}$. Кроме того, предполагается существование восьми векторных мезонов, которые относятся к такому же представлению. По всей вероятности мезоны ϱ, ω, K^* и $\bar{K}^*$ составляют этот октет ***). Здесь существует трудность, состоящая в том, какой из двух мезонов K^* включить в октет. По-видимому, наблюдается два ($K\pi$)-резонанса: один [5] при 730 *Мэв* и другой ****) при 888 *Мэв*. Предпочитают резонанс 888 *Мэв*, так как он скорее обладает правильными квантовыми числами. Следующее, более высокое НП может содержать 10 частиц. Было предположено [7], что известный (3,3) пион-нуклонный резонанс, резонанс Y_1^* $\left(1385\ Мэв,\ I=\frac{1}{2}\right)$ [8,9], недавно открытый ($\Xi\pi$)-резонанс при 1532 *Мэв* и пока неизвестный барион Ω^- (1685 *Мэв*, $Y=-2$, $I=0$) принадлежит к этому НП [10]. Открытие этой Ω^--частицы означало бы большой триумф октетной модели *****). Окубо [10] вывел формулу для масс различных частиц, принадлежащих к одному и тому же НП. Для октетов (НП $\{8\}$) эта формула сводится к соотношению между массами различных частиц, входящих в данный октет. Это соотношение между массами очень хорошо удовлетворяется для барионов и псевдоскалярных мезонов. Однако для векторных мезонов это соотношение не выполняется ни для ($K\pi$)-резонанса 888 *Мэв*, ни для резонанса 730 *Мэв*. Для НП $\{10\}$ массовая формула опять очень хорошо удовлет-

---

*) J. J. de Swart. The Octet Model and its Clebsh — Gordan Coefficients, Rev. Mod. Phys. 35, 916 (1963). Перевод В. Б. Берестецкого и О. А. Владимировой.

**) Очень хороший обзор различных схем высших симметрий сильных взаимодействий дан в статье [1]. В ней читатель найдет библиографию обширной литературы на эту тему.

***) Более естественно считать, что октет образует мезоны ϱ, φ, K^* и $\bar{K}^*$; см. конец раздела 16. (*Прим. перев.*)

****) Более подробную библиографию см. [6], стр. 781.

*****) Барион Ω^- экспериментально обнаружен (V. E. Barnes и др., Phys. Rev. Letts. 12, 204 (1964)). Спин его пока не установлен. (*Прим. перев.*)

воряется. Коулмен и Глэшоу [11] получили соотношение, содержащее электромагнитные разности масс внутри барионного октета. Это соотношение также удовлетворяется очень хорошо. Главная задача этой статьи — получить коэффициенты Клебша — Гордана *) (КГ-коэффициенты) группы $SU(3)$ для произведений наиболее важных неприводимых представлений (§ 10, 11 и 18). Особое внимание уделено определению всех существенных фазовых множителей (§ 7, 10). Получены некоторые полезные соотношения симметрии для КГ-коэффициентов (§ 14). Формулируется теорема Вигнера — Эккарта [14] для этой группы (§ 15), которая применяется для вывода общей формулы масс для октетов (§ 16). Частный случай этой формулы дает соотношение масс Гелл-Манна — Окубо (16,3). Другой частный случай приводит к соотношению (16,15), которое очень хорошо удовлетворяется для векторных мезонов, если включить в соответствующий октет в качестве $K^*(K\pi)$-резонанс 730 *Мэв*. Для полноты картины, а также для того, чтобы продемонстрировать применение некоторых частных выборов фаз, мы рассмотрим в § 17 взаимодействие Юкавы между барионами и мезонами. Для того чтобы иметь возможность ясно показать, как получены результаты последних разделов, оказались необходимыми дополнительные разделы, в которых определяются различные понятия и величины, используемые в дальнейшем. Это приводит нас к другой цели этой статьи. Для понимания математической структуры этой специальной модели сильных взаимодействий требуется лишь небольшое расширение этих разделов и несколько дополнений к ним, что и сделано в этой статье. Изложение вопроса является «физическим» **), насколько это возможно. Автор пытается не пользоваться слишком много результатами, полученными чисто абстрактными методами теории групп. Однако в тех случаях, когда результаты можно легко получить (насколько автору известно) только этими методами, они используются. Хорошим примером является § 12, в котором изложен без доказательств изящный и простой метод Шпайзера [15] для приведения прямого произведения двух неприводимых представлений.

§ 2. ТЕНЗОРЫ [16]

Группа $SU(3)$ содержит все унитарные унимодулярные преобразования в трехмерном векторном пространстве комплексных чисел C_3. Обозначим вектор в этом пространстве через x^i, а его комплексно-сопряженный — через x_i, так что $x_i = (x^i)^*$. Преобразование группы превращает векторы x^i и x_i в векторы $\bar{x}^i$ и $\bar{x}_i$ согласно следующим формулам ***):

$$\bar{x}^i = \alpha_{ij} x^i, \tag{2,1а}$$

$$\bar{x}_j = \overset{*}{\alpha}_{ij} x_j = \alpha^{-1}_{ji} x_j. \tag{2,1б}$$

Вследствие унитарности преобразования коэффициенты α удовлетворяют соотношениям ****)

$$\alpha^+ = \alpha^{-1} \text{ или } \overset{*}{\alpha}_{ij} = \alpha^{-1}_{ji}.$$

В векторном пространстве C_3 мы можем определить смешанные тензоры $A^{\alpha\beta\ldots\gamma}_{ij\ldots k}$, которые преобразуются следующим образом:

$$\bar{A}^{\alpha\beta\ldots\gamma}_{ij\ldots k} = \alpha_{\alpha\lambda}\alpha_{\beta\mu}\ldots\alpha_{\gamma\nu}\alpha^{-1}_{li}\alpha^{-1}_{mj}\ldots\alpha^{-1}_{nk}A^{\lambda\mu\ldots\nu}_{lm\ldots n}. \tag{2,2}$$

Существуют особые тензоры δ^i_j, ε^{ijk} и ε_{ijk}. Они не меняются при преобразовании группы. Мы имеем

$$\bar{\delta}^i_j = \alpha_{ik}\alpha^{-1}_{lj}\delta^k_l = \alpha_{ik}\alpha^{-1}_{kj} = \delta^i_j$$

---

*) Таблицы КГ-коэффициентов можно найти в ряде других статей (например, [12] и [13]). При пользовании этими таблицами в комбинации с некоторыми теоремами этой статьи нужно проявлять осторожность, так как в этих КГ-коэффициентах не тот выбор фазовых множителей, а в большинстве случаев их выбор не указан.

**) Термин «физически» в данном контексте означает: «при помощи методов, известных большинству физиков, предполагая некоторое знакомство с теорией момента количества движения». Если в некоторых местах в последующих разделах читатель заметит слишком большие для себя скачки в логической последовательности, ему следует сравнить их с аналогичной ситуацией в теории момента, и тогда данный пункт почти всегда прояснится (по крайней мере, таков наш опыт).

***) Мы будем пользоваться эйнштейновским условием суммирования.

****) α^+ означает эрмитовски-сопряженное к α, α^T — транспонированное, α^* — комплексно-сопряженное.

и

$$\bar{\varepsilon}^{ijk}=\alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}\varepsilon^{lmn}=\det\alpha\varepsilon^{ijk}=\varepsilon^{ijk}$$

вследствие ограничения унимодулярными преобразованиями ($\det\alpha=1$).

Одночлены $M(p, q)$

$$x^{\alpha}y^{\beta}\ldots z^{\gamma}u_{i}v_{j}\ldots w_{k}$$

с p верхними и q нижними индексами при преобразовании группы преобразуются друг через друга. Поэтому удобно выбрать эти многочлены в качестве базиса для построения представлений группы. Эти представления в общем случае будут приводимыми, как будет показано ниже, вследствие существования тензоров δ^{i}_{j}, ε^{ijk} и ε_{ijk}.

При помощи этих тензоров мы можем составить из смешанного тензора $A^{\alpha\beta\ldots\delta}_{ij\ldots l}$ с p верхними и q нижними индексами в общем случае смешанные тензоры B, C и D. Из них

$$B^{\beta\ldots\delta}_{j\ldots l}=\delta^{i}_{\alpha}A^{\alpha\beta\ldots\delta}_{ij\ldots l}$$

представляет собой тензор с $(p-1)$ верхними и $(q-1)$ нижними индексами,

$$C^{\gamma\ldots\delta}_{\mu ij\ldots l}=\varepsilon_{\mu\alpha\beta}A^{\alpha\beta\gamma\ldots\delta}_{ij\ldots l}$$

— тензор с $(p-2)$ верхними и $(q+1)$ нижними индексами, а

$$D^{m\alpha\beta\ldots\delta}_{k\ldots l}=\varepsilon^{mij}A^{\alpha\beta\ldots\delta}_{ijk\ldots l}$$

— тензор, у которого $(p+1)$ верхний, $(q-2)$ нижний индексы. Тензоры B, C и D являются линейными комбинациями тензора A с p верхними и q нижними индексами. Однако по свойствам преобразования B, C и D отличаются от тензора с p верхними и q нижними индексами. Поэтому тензор A является приводимым, если B, C и D не обращаются тождественно в нуль.

Мы видим, что $B=0$, если $A^{i\beta\ldots\gamma}_{ij\ldots k}=0$, т. е. если след тензора A по отношению к индексам α и i равен нулю; $C=0$, если A симметрично по отношению индексов α и β, и $D=0$, если A симметричен по отношению к индексам i и j.

Теперь ясно, как построить базисы для неприводимых представлений $SU(3)$. Возьмем линейные комбинации $P(p, q)$ одночленов $M(p, q)$ так, чтобы полиномы $P(p, q)$ были:

1) полностью симметричны относительно всех p верхних индексов;
2) полностью симметричны относительно всех q нижних индексов;
3) со следом, равным нулю *).

Эти полиномы $P^{\alpha,\beta\ldots\gamma}_{ij\ldots k}$ образуют базис для неприводимого представления (НП) $D(p, q)$ группы $SU(3)$. Размерность N представления $D(p, q)$, т. е. число базисных векторов равно

$$N=(1+p)(1+q)\left[1+\frac{1}{2}(p-q)\right]. \qquad (2,3)$$

Доказательство. Тензор, имеющий только верхние индексы и симметричный по этим p индексам, имеет $\frac{1}{2}(p+1)(p+2)$ линейно независимых компонент. Это можно видеть следующим образом. В силу требования симметрии порядок индексов не существен. Поэтому мы можем расположить индексы так, чтобы первыми были все единицы, затем все двойки и, наконец, все тройки. Предположим, что мы имеем α индексов, равных единице, причем α может пробегать значения от нуля до p; тогда при данном α для двоек и троек остается $(p-\alpha)$ индексов. Мы можем поэтому составить $(p-\alpha+1)$ разных комбинаций, в которых α индексов, а остальные двойки и тройки. Всего различных компонент будет

$$\sum_{\alpha=0}^{p}(p-\alpha+1)=\frac{1}{2}(p+1)(p+2).$$

Тензор, имеющий только нижние индексы и симметричный по этим q индексам, имеет $\frac{1}{2}(q+1)(q+2)$ линейно независимых компонент. Смешанный тензор, полностью

*) В силу симметрии, требуемой условиями 1) и 2), каждый полином имеет только один след. Под следом мы понимаем свертывание только по одному верхнему и одному нижнему индексам, а не свертывание по двум верхним или двум нижним индексам.

симметричный относительно p верхних и q нижних индексов, имеет поэтому $N_1 = \frac{1}{4}(p+1)(p+2)(q+1)(q+2)$ линейно независимых компонент. Требование того, чтобы след обращался в нуль, дает дальнейшие ограничения. След представляет собой смешанный тензор с $(p-1)$ верхними и $(q-1)$ нижними индексами. След смешанного тензора, полностью симметричного относительно p верхних и q нижних индексов, имеет N_2 линейно независимых компонент, где $N_2 = \frac{1}{4}p(p+1)\cdot q(q+1)$. Все эти компоненты должны тождественно обращаться в нуль. Таким образом, тензор, симметричный относительно верхних и нижних индексов, с равным нулю следом, имеет $N = N_1 - N_2$ независимых компонент, что и требовалось доказать.

Можно обозначать данное НП как $\{N\}$, т. е. $D(1,1) = \{8\}$, $D(2,2) = \{27\}$, $D(3,0) = \{10\}$ и т. д. Если более чем одно НП имеет одинаковую размерность, то мы можем различать их при помощи звездочек, штрихов и т. д. Например, $D(p, q)$ и $D(q, p)$ $(p > q)$ имеют одинаковую размерность. Мы будем обозначать $D(p, q) = \{N\}$ и $D(q, p) = \{N^*\}$.

§ 3. ГЕНЕРАТОРЫ ГРУППЫ

В разделе 2 мы показали, что подходящий базис для НП $D(p, q)$ группы $SU(3)$ образуют N полиномов $P(p, q)$. Эти полиномы образуют линейное векторное пространство V_N. Преобразованию группы $SU(3)$, определяемому матрицей α в пространстве C_3, соответствует преобразование U в пространстве V_N. Эти преобразования U и образуют НП $D(p, q)$ группы $SU(3)$; они являются унитарными *) $(U^+ = U^{-1})$ и унимодулярными **) $(\det U = 1)$.

Каждое унитарное преобразование U может быть записано в виде

$$U = e^{iH}, \tag{3,1}$$

где H — эрмитово, $H = H^+$. Справедливо и обратное: для каждого эрмитова оператора H матрица U, определенная по формуле (3,1), является унитарной. Требование унимодулярности означает

$$\mathrm{Tr}H = 0. \tag{3,2}$$

Здесь также справедливо и обратное. Из (3,2) следует, что матрица U, определенная согласно (3,1), унимодулярна.

Преобразование α в пространстве C_3 мы можем также записать в форме (3,1) с условием (3,2). В трехмерном пространстве существуют девять линейно-независимых эрмитовых операторов, но только восемь из них имеют нулевой след. Этим восьми операторам в C_3 (генераторы группы) соответствуют восемь эрмитовых операторов с нулевым следом F_i в пространстве V_N. Мы можем написать поэтому

$$H = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i F_i, \tag{3,3}$$

где $F_i = F_i^+$, $\mathrm{Tr}F_i = 0$ и α_i действительны. Для получения соотношения коммутации для F_i более удобно записать (3,3) несколько иначе. Введем совокупность девяти операторов ***) с нулевым следом A_k^i, которые определяются так, что их представление в пространстве C_3 имеет следующий вид:

$$\left(A_k^i\right)_{\mu\nu} = \delta_{i\nu}\delta_{k\mu} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\delta_{\mu\nu} \tag{3,4}$$

$(i, k, \mu, \nu = 1, 2$ или $3)$. Эти операторы удовлетворяют условию

$$A_k^i = \left(A_i^k\right)^+. \tag{3,5}$$

Они не являются полностью независимыми, а связаны соотношением

$$A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 = 0. \tag{3,6}$$

---

*) Мы можем всегда выбрать так, чтобы матрицы были унитарными; см., например, [17].

**) Представления должны быть унимодулярными, так как в противном случае унимодулярные матрицы образовывали бы инвариантную подгруппу. Так как группа $SU(3)$ не имеет инвариантной подгруппы, то представления унимодулярны.

***) *Эти операторы A_k^i отличаются от операторов, введенных Окубо в работе* [10], общим знаком минус.

Теперь мы можем выразить (3,3) через операторы A_k^i; мы получим

$$H = \sum \beta_i^k A_k^i, \tag{3,7}$$

причем эрмитовость H требует

$$\beta_k^i = (\beta_i^k)^*. \tag{3,8}$$

Легко видеть, что эти матрицы A_k^i удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[A_k^i, A_l^j] = \delta_l^i A_k^j - \delta_k^j A_l^i. \tag{3,9}$$

Этим девяти операторам в пространстве C_3 соответствуют девять операторов в каждом из пространств V_N, которые удовлетворяют соотношениям (3,5)—(3,9). При этом они, конечно, не являются матрицами 3×3, а матрицами $N \times N$.

Мы введем еще другие обозначения для генераторов группы, которыми будем пользоваться повсюду дальше в этой статье. При помощи этих новых обозначений легко получить соотношение между операторами F_i (обозначения Гелл-Манна [3]) и операторами A_k^i (обозначения Окубо [10]). Мы обозначим

$$\left.\begin{aligned} &F_1 = I_1,\ F_4 = K_1,\ F_6 = L_1,\ F_8 = M, \\ &F_2 = I_2,\ F_5 = K_2,\ F_7 = L_2, \\ &F_3 = I_3. \end{aligned}\right\} \tag{3,10}$$

Далее мы можем образовать операторы

$$\left.\begin{aligned} I_\pm &= I_1 \pm iI_2, \\ K_\pm &= K_1 \pm iK_2, \\ L_\pm &= L_1 \pm iL_2. \end{aligned}\right\} \tag{3,11}$$

Операторы A_k^i можно теперь выразить через эти операторы:

$$\left.\begin{aligned} &A_1^1 = I_3 + \frac{1}{3}\sqrt{3}M,\ A_1^2 = I_+,\ A_2^1 = I_-, \\ &A_2^2 = -I_3 + \frac{1}{3}\sqrt{3}M,\ A_1^3 = K_+,\ A_3^1 = K_-, \\ &A_3^3 = -\frac{2}{3}\sqrt{3}M,\ A_2^3 = L_+,\ A_3^2 = L_-. \end{aligned}\right\} \tag{3,12}$$

Для полноты мы приведем также соотношения между нашей совокупностью генераторов и совокупностью, которой пользовались Беренус и др. [1]:

$$\left.\begin{aligned} &H_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) I_3,\ E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) I_+,\ E_{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) I_-, \\ &H_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) M,\ E_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) K_+,\ E_{-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) K_-, \\ &E_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) L_+,\ E_{-3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) L_-. \end{aligned}\right\} \tag{3,13}$$

§ 4. СООТНОШЕНИЯ КОММУТАЦИИ

Из соотношения коммутации (3,9) мы видим, что I_3 и M являются коммутирующими операторами. Так как ранг группы равен двум, то не существует других линейных операторов, коммутирующих с этими двумя. Мы объединим их в один вектор $\mathbf{E} = (I_3, M)$. Соотношения коммутации могут быть записаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} [\mathbf{E}, I_\pm] &= \pm \mathbf{i} I_\pm, \\ [\mathbf{E}, K_\pm] &= \pm \mathbf{k} K_\pm, \\ [\mathbf{E}, L_\pm] &= \pm \mathbf{l} L_\pm, \end{aligned}\right\} \tag{4,1а}$$

$$\left.\begin{aligned} [I_+, I_-] &= 2\mathbf{i}\mathbf{E}, \\ [K_+, K_-] &= 2\mathbf{k}\mathbf{E}, \\ [L_+, L_-] &= 2\mathbf{l}\mathbf{E}, \end{aligned}\right\} \tag{4,1б}$$

где **i**, **k** и **l** — единичные векторы, определяемые следующим образом:

$$\mathbf{i}=(1,\ 0),\ \mathbf{k}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\right),\ \mathbf{l}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Другие перестановочные соотношения, менее симметричные по форме, таковы:

$$\left.\begin{array}{l}[I_-,\ K_+]=L_+,\ [K_-,\ I_+]=L_-,\\ [I_+,\ L_+]=K_+,\ [L_-,\ I_-]=K_-,\\ [K_+,\ L_-]=I_+,\ [L_+,\ K_-]=I_-\end{array}\right\}\qquad(4,1в)$$

и остальные коммутаторы равны нулю.

Мы введем следующие операторы *):

$$P_i=e^{i\pi I_2},\ P_k=e^{i\pi K_2},\ P_l=e^{i\pi L_2}.\qquad(4,2)$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{lll}P_i^{-1}I_\pm P_i=-I_\mp, & P_i^{-1}K_\pm P_i=L_\pm, & P_i^{-1}L_\pm P_i=-K_\pm,\\ P_k^{-1}I_\pm P_k=L_\mp, & P_k^{-1}K_\pm P_k=-K_\mp, & P_k^{-1}L_\pm P_k=-I_\mp,\\ P_l^{-1}I_\pm P_l=K_\pm, & P_l^{-1}K_\pm P_l=-I_\pm, & P_l^{-1}L_\pm P_l=-L_\mp.\end{array}\right\}\qquad(4,3)$$

Эти соотношения легко доказать следующим образом:

$$P_k^{-1}I_\pm P_k=I_\pm+i\pi\,[I_\pm,\ K_2]+\left(\frac{(i\pi)^2}{2!}\right)[[I_\pm,\ K_2],\ K_2]+\ldots=$$
$$=I_\pm\cos\frac{1}{2}\pi+L_\mp\sin\frac{1}{2}\pi=L_\mp,$$

и аналогично для других соотношений. Из соотношений (4,3) непосредственно следует, что

$$\left.\begin{array}{ll}P_i^{-1}P_kP_i=P_l, & P_i^{-1}P_lP_i=P_k^{-1},\\ P_k^{-1}P_iP_k=P_l^{-1}, & P_k^{-1}P_lP_k=P_i,\\ P_l^{-1}P_iP_l=P_k. & P_l^{-1}P_kP_l=P_i^{-1}.\end{array}\right\}\qquad(4,4)$$

Кроме того, мы имеем соотношения

$$\left.\begin{array}{l}P_i^{-1}\mathbf{E}P_i=\mathbf{E}-2\mathbf{i}\,(\mathbf{iE}),\\ P_k^{-1}\mathbf{E}P_k=\mathbf{E}-2\mathbf{k}\,(\mathbf{kE}),\\ P_l^{-1}\mathbf{E}P_l=\mathbf{E}-2\mathbf{l}\,(\mathbf{lE}).\end{array}\right\}\qquad(4,5)$$

Соотношения (4,5) легко доказать следующим образом:

$$P_k^{-1}\mathbf{E}P_k=\mathbf{E}+i\pi\,[\mathbf{E},\ K_2]+\left(\frac{(i\pi)^2}{2!}\right)[[\mathbf{E},\ K_2],\ K_2]+\ldots,$$
$$=\mathbf{E}+\mathbf{k}\,(\mathbf{kE})\,(\cos\pi-1)+\mathbf{k}K_1\sin\pi,\ =\mathbf{E}-2\mathbf{k}\,(\mathbf{kE}).$$

§ 5. ПОЛНЫЙ НАБОР КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

Для того чтобы систематизировать собственные состояния, удобно индицировать их собственными значениями полного набора коммутирующих линейно независимых операторов. Набор, состоящий из I_3 и M, можно расширить, добавив $I^2=I_1^2+I_2^2+I_3^2$ и еще два оператора F^2 и G^3, называемых операторами Казимира [20,21]. Последние определяются следующим образом [10]:

$$F^2=\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}A_\mu^\nu A_\nu^\mu=\sum_{i=1}^{8}F_i^2,$$
$$G^3=\sum_{\mu\nu\lambda}A_\mu^\nu A_\nu^\lambda A_\lambda^\mu.$$

---

*) Эти операторы широко применялись в работах [18]; см. также [19].

Операторы F^2 и G^3 имеют то свойство, что они коммутируют с каждым из операторов F_i. Согласно лемме Шура *) эти операторы являются константами для данного неприводимого представления. Поэтому неприводимые представления удобно индицировать собственными значениями этих операторов f^2 и g^3. Конечно, совокупность (p, q) эквивалентна совокупности (f^2, g^3). Состояния внутри данного НП можно индицировать собственными значениями T $(T+1)$, T_z и m операторов I^2, I_3 и M. Для собственных значений оператора $\mathbf{E} = (I_3, M)$ мы также будем использовать векторное обозначение $\mathbf{e} = (T_z, m)$. Мы будем обозначать собственные состояния оператора $\mathbf{E}$, принадлежащие к собственному значению $\mathbf{e}$, через $|\mathbf{e}, \gamma)$. Символ γ описывает остальные квантовые числа. Для данного НП мы можем определить также высшее собственное значение $\mathbf{e}_H$ и высшее собственное состояние $|p, q, T, \mathbf{e}_H, \gamma)$. Высшим собственным значением называется такое значение $\mathbf{e}$, которому отвечает наибольшее T_z в данном НП. Высшим собственным состоянием называется то, которому отвечает высшее собственное значение.

§ 6. ДВЕ ТЕОРЕМЫ

Теперь мы в состоянии установить некоторые полезные теоремы.

Теорема 1. Пусть $|\mathbf{e}, \gamma)$ является собственным состоянием оператора $\mathbf{E}$. Если $K_+|\mathbf{e}, \gamma)$ отлична от нуля, то $K_+|\mathbf{e}, \gamma)$ является также собственным состоянием оператора $\mathbf{E}$ с собственным значением $\mathbf{e}+\mathbf{k}$.

Доказательство. Из $[\mathbf{E}, \mathbf{K}_+] = \mathbf{k}K_-$ следует

$$\mathbf{E}K_+|\mathbf{e}, \gamma) = K_+(\mathbf{E}+\mathbf{k})|\mathbf{e}, \gamma) = (\mathbf{e}+\mathbf{k})K_+|\mathbf{e}, \gamma),$$

что и требовалось доказать.

Аналогично имеем, если $K_-|\mathbf{e}, \gamma) \neq 0$, то $K_-|\mathbf{e}, \gamma)$ имеет собственные значения $\mathbf{e}-\mathbf{k}$; если $I_\pm|\mathbf{e}, \gamma) \neq 0$, то $I_\pm|\mathbf{e}, \gamma)$ имеет собственное значение $\mathbf{e} \pm \mathbf{i}$, и если $L_\pm|\mathbf{e}, \gamma) \neq 0$, то $L_\pm|\mathbf{e}, \gamma)$ имеет собственное значение $\mathbf{e} \pm \mathbf{l}$.

Эта теорема имеет простую геометрическую интерпретацию в виде двухмерной диаграммы собственных значений (рис. 1). На этой диаграмме каждое собственное значение представляется точкой $\mathbf{e} = (T_z, m)$. Эти точки образуют некоторую решетку, расстояние между соседними точками составляет $\mathbf{i}$, $\mathbf{k}$ или $\mathbf{l}$.

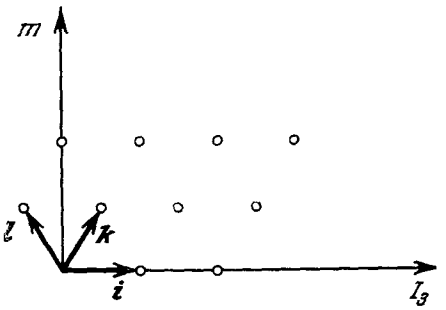

Рис. 1. Часть двухмерной диаграммы собственных значений, иллюстрирующая периодическую решетку (теорема 1).

Теорема 2. Пусть $|\mathbf{e}, \gamma)$ является собственным состоянием оператора $\mathbf{E}$, тогда $P_i|\mathbf{e}, \gamma)$ также является собственным состоянием оператора $\mathbf{E}$ с собственным значением $\mathbf{e} - 2\mathbf{i}(\mathbf{i}\mathbf{e})$. Степень вырождения состояния $P_i|\mathbf{e}, \gamma)$ такая же, как и состояния $|\mathbf{e}, \gamma)$.

Доказательство. Из $P_i^{-1}EP_i = \mathbf{E} - 2\mathbf{i}(\mathbf{i}\,\mathbf{E})$ следует

$$\mathbf{E}P_i|\mathbf{e}, \gamma) = P_i\{\mathbf{E} - 2\mathbf{i}(\mathbf{i}\mathbf{E})\}|\mathbf{e}, \gamma) = \{\mathbf{e} - 2\mathbf{i}(\mathbf{i}\mathbf{E})\}P_i|\mathbf{e}, \gamma).$$

Кроме того, так как P_i является унитарным оператором, он сохраняет кратность состояния. Аналогично найдем, что $P_k|\mathbf{e}, \gamma)$ и $P_l|\mathbf{e}, \gamma)$ имеют собственные значения $\mathbf{e} - 2\mathbf{k}(\mathbf{k}\,\mathbf{e})$ и $\mathbf{e} - 2\mathbf{l}(\mathbf{l}\,\mathbf{e})$. Степень вырождения этих состояний опять та же, что и состояния $|\mathbf{e}\gamma)$.

Эта теорема также имеет простую геометрическую интерпретацию на двухмерной диаграмме собственных значений. Если $\mathbf{e}_1$ — некоторое собственное значение, то можно получить также значения $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_4$, полученные из $\mathbf{e}_1$ посредством отражения относительно прямых, проходящих через начало координат и перпендикулярных к векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$. Эти точки изображают также собственные значения (рис. 2, *а*). Еще одно применение P_i дает еще два собственных значения $\mathbf{e}_5$ и $\mathbf{e}_6$, так что в общем случае существование одного собственного значения влечет за собой шесть собственных значений **) имеющих такую же степень вырождения.

Существуют два исключения. Первое имеет место, когда собственное значение $\mathbf{e}_1$ лежит на одной из отражательных осей (рис. 2, *б*). В этом случае существование одного

*) См. [21], § 8—14, лемма II.

**) В лекциях Рака [23] показано, что не только $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e} - \mathbf{i}(\mathbf{i}\,\mathbf{e})$ являются собственными значениями, но и вся цепочка (изомультиплет), связывающая эти два собственных значения.

собственного значения влечет за собой существование только трех собственных значений. Второе исключение имеет место, когда собственное значение e_1 находится в начале координат: $e_1 = (0, 0)$. В этом случае других собственных значений не возникает.

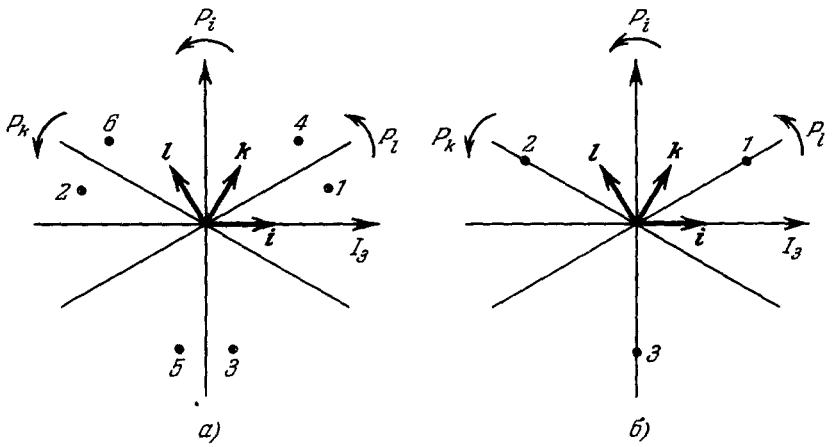

Рис. 2. Двухмерная диаграмма собственных значений, иллюстрирующая действие операторов P_i, P_k и P_l на состояние φ (1) (теорема 2). а) Для общего случая e(1): $P_i\varphi(1) = \varphi(2)$, $P_k\varphi(1) = \varphi(3)$, $P_l\varphi(1) = \varphi(4)$; $P_i\varphi(3) = \varphi(5)$, $P_l\varphi(4) = \varphi(6)$, б) для случая, когда e (1) находится на оси отражения P_l: $P_i\varphi(1) = \varphi(2)$, $P_k\varphi(1) = \varphi(3)$, $P_l\varphi(1) = \varphi(1)$.

Заметим, что оператор P_i представляет собой оператор зарядовой симметрии. Симметрии, связанные с операторами P_k и P_l, являются, таким образом, обобщением принципа зарядовой симметрии.

§ 7. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ. I

В этом разделе мы рассмотрим простейшие неприводимые представления, представляющие для нас интерес.

D (0, 0) = {1}. Это НП содержит только одно состояние и, в силу теоремы 2, собственное значение e, относящееся к этому единственному состоянию, есть e = (0, 0). В октетной модели оператор гиперзаряда $Y = S + B$ отождествляется с оператором

$$Y = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) M. \tag{7,1}$$

Поэтому это состояние является изосинглетом с $Y = 0$. Операторы F_i мы можем представить матрицами 1×1, которые тождественно равны нулю (нулевой след).

D (1, 0) = {3}. В этом случае согласно теореме 2 имеются три возможности. Первая возможность — это трехкратно вырожденное собственное значение в начале координат $I = Y = 0$. В этом случае все операторы F_i равны тождественно нулю. Так как они являются матрицами 3×3, этот случай приводим. Две другие возможности имеют диаграммы собственных значений, изображенные на рис. 3. Здесь мы должны сделать выбор. Мы сделаем обычно принятый выбор (рис. 3, *а*). Мы оставляем диаграмму собственных значений (рис. 3, *б*) для контраградиентного представления D (0, 1) = {3*}. Поэтому мы можем записать

$$I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Перед тем как установить вид других матриц, мы должны сначала определить относительные фазы этих трех состояний. Мы сделаем это следующим образом.

1) В пределах одного изомультиплета мы используем фазовое условие Кондона и Шортли [24,26]. Это устанавливает, что

$$I_+\varphi_1 = 0, \quad I_+\varphi_2 = 0, \quad I_+\varphi_3 = 0.$$

2) Относительные фазы различных изомультиплетов также можно определить весьма просто. Мы примем также для операторов $K_\pm$ выбор фаз Кондона и Шортли. Поэтому

$$K_+\varphi_1=0, \quad K_+\varphi_2=0, \quad K_+\varphi_3=-\varphi_1.$$

Матричные элементы операторов $I_\pm$ и $K_\pm$ теперь полностью определены, а этим определены также и матричные элементы оператора $L_+ = [I_-, K_+]$. Мы можем принять

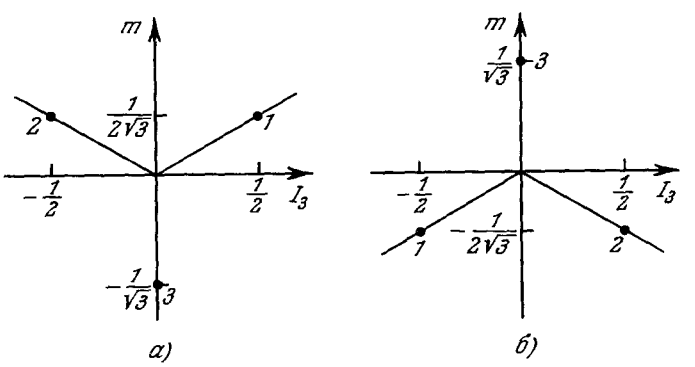

Рис. 3. Диаграммы собственных значений для неприводимых представлений с $N = 3$.

а) Неприводимое представление $D(1,0)=\{3\}$, *б*) неприводимое представление $D(0,1)=\{3^*\}$.

$\varphi_1 = x^1$, $\varphi_2 = x^2$ и $\varphi_3 = x^3$. Эти состояния φ_1, φ_2 и φ_3 для группы $SU(3)$ эквивалентны состояниям α (спин вверх) и β (спин вниз) для $SU(2)$.

$D(0, 1) = \{3^*\}$. Диаграмма собственных значений дана на рис. 3, *б*. Мы можем поэтому записать

$$I_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

В силу выбранного нами условия фаз мы имеем

$$I_+\varphi_i=\delta_{i1}\varphi_2, \quad K_+\varphi_i=\delta_{i1}\varphi_2.$$

Поэтому мы можем положить *) $\varphi_1(3^*) = -x_1$, $\varphi_2(3^*) = x_2$ и $\varphi_3(3^*) = x_3$.

Все НП $D(p, q)$ можно образовать посредством прямого произведения $D(1, 0)$ p раз и $D(0, 1)$ q раз. Это прямое произведение, конечно, содержит более чем одно НП $D(p, q)$. Однако ясно, что высшее собственное состояние $D(p, q)$ $\varphi(e_H)$ может быть образовано только одним путем:

$$\varphi(e_H)=\underbrace{x^1y^1\ \ldots\ z^1}_{p\ \text{множителей}}\ \underbrace{u_2v_2\ \ldots\ w_2}_{q\ \text{множителей}}. \tag{7,2}$$

Поэтому высшим собственным значением является

$$e_H=\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p-q}{2\sqrt{3}}\right). \tag{7,3}$$

Кроме того, ясно, что высшее собственное значение не вырождено. Высшему собственному состоянию отвечает гиперзаряд

$$Y=\frac{p-q}{3}. \tag{7,4}$$

---

*) Относительно фазовых множителей см. § 8.

Физически гиперзаряд должен быть целым. Если мы хотим ограничиться октетной моделью, то не все НП группы $SU(3)$ представляют физический интерес. Только те НП реализуются в природе *), для которых $p-q=3n$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ и т. д.

Такими являются представления:

$$\{1\}=D(0,0),\ \{10\}=D(3,0),\ \{28\}=D(6,0) \text{ и т. д.},$$
$$\{10^*\}=D(0,3),\ \{28^*\}=D(0,6) \text{ и т. д.};$$
$$\{8\}=D(1,1),\ \{35\}=D(4,1) \text{ и т. д.},$$
$$\{35^*\}=D(1,4) \text{ и т. д.},$$
$$\{27\}=D(2,2),\ \{81\}=D(5,2) \text{ и т. д.},$$
$$\{81^*\}=D(2,5) \text{ и т. д.};$$
$$\{64\}=D(3,3) \text{ и т. д.}$$

Для того чтобы быть ближе к физике, мы в дальнейшем будем пользоваться только оператором гиперзаряда Y и его собственными значениями. Однако мы так изменили масштаб вертикальной оси на диаграммах собственных значений, чтобы единица длины по вертикальной оси соответствовала, как прежде, собственным значениям оператора M. Таким образом, мы сохраним высокую симметрию этих диаграмм.

Чтобы иметь возможность простого обозначения различных собственных состояний данного НП, мы будем нумеровать их от 1 до N. Мы выберем следующий порядок нумерации состояний:

а) внутри изомультиплета состояния нумеруются в порядке убывания I_z,

б) изомультиплеты, принадлежащие к одному и тому же Y, нумеруются в порядке убывания I,

в) группы состояний с различными Y нумеруются в порядке убывания Y.

Для контраградиентных представлений $\{N^*\}$ мы выберем обратное условие для а) и б); мы будем нумеровать состояния внутри изомультиплета в порядке возрастания I_z и группы изомультиплетов с различными Y в порядке возрастания Y. Таким образом, диаграмма собственных значений для $\{N^*\}$ будет отраженной в начале координат ($I_z=0$, $Y=0$) диаграммой для $\{N\}$.

Для того чтобы иметь возможность в дальнейшем однозначно определить коэффициенты Клебша — Гордана для $SU(3)$, необходимо прежде всего определить более точно относительные фазы внутри данных НП. Мы примем поэтому следующие условия:

1. Относительные фазы внутри данного изомультиплета определяются условием фаз Кондона и Шортли [24]. Тогда

$$\begin{aligned} I_+\varphi(I, I_z, Y) &= [(I-I_z)(I+I_z+1)]^{1/2}\varphi(I, I_z+1, Y),\\ I_-\varphi(I, I_z, Y) &= [(I+I_z)(I-I_z+1)]^{1/2}\varphi(I, I_z-1, Y) \end{aligned} \tag{7,5}$$

и

$$P_i\varphi(I, I_z, Y)=(-)^{I+I_z}\varphi(I, -I_z, Y). \tag{7,6}$$

2. Относительные фазы между различными изомультиплетами мы определим при помощи операторов $K_\pm$. Биденгарн [25] показал, что

$$K_+\varphi(I, I_z, Y)=b_+\varphi\left(I+\frac{1}{2}, I_z+\frac{1}{2}, Y+1\right)+ \\ +b_-\varphi\left(I-\frac{1}{2}, I_z+\frac{1}{2}, Y+1\right), \tag{7,7}$$

где

$$b_+=\left\{\frac{(I+I_z+1)\left[\frac{1}{3}(p-q)+I+\frac{1}{2}Y+1\right]\left[\frac{1}{3}(p-2q)+I+\frac{1}{2}Y+2\right]\left[\frac{1}{3}(2p+q)-I-\frac{1}{2}Y\right]}{2(I+1)(2I+1)}\right\}^{1/2} \tag{7,8а}$$

и

$$b_-=\left\{\frac{(I-I_z)\left[\frac{1}{3}(q-p)+I-\frac{1}{2}Y\right]\left[\frac{1}{3}(p+2q)-I+\frac{1}{2}Y+1\right]\left[\frac{1}{3}(2p+q)+I-\frac{1}{2}Y+1\right]}{2I(2I+1)}\right\}^{1/2}. \tag{7,8б}$$

Мы будем требовать вещественности и положительности коэффициентов $b_\pm$. Это однозначно определяет относительные фазы всех состояний данного НП.

*) Это следует из нашего частного выбора оператора гиперзаряда (7,1).

§ 8. КОНТРАГРАДИЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Представление $D(p, q)$ называется контраградиентным представлению $D(q, p)$. Эти представления тесно связаны между собой.

Если матрица $U = e^{i\alpha_i F_i}$ является представлением элемента группы $SU(3)$, то $U^* = (U^{-1})^T$. Далее,

$$(U^{-1})^T = e^{-i\alpha_i F_i^T} = e^{i\alpha_i F_i'}.$$

Поэтому мы можем выбрать (в действительности мы не будем так поступать) (см. (8,1)) генераторы F_i' контраградиентного представления следующим образом:

$$F_i' = -F_i^T;$$

это означает, что

$$I_3' = -I_3, \quad I_\pm' = -I_\mp,$$
$$Y' = -Y, \quad K_\pm' = -K_\mp,$$
$$L_\pm' = -L_\mp,$$

и соотношение между собственными состояниями будет следующим:

$$\varphi(\{N^*\}, I, I_z, Y) = \eta\varphi^*(\{N\}, I, -I_z, -Y),$$

где η — общий фазовый множитель.

Этот выбор неудобен, так как при этом не все элементы матриц $I_\pm$ и $K_\pm$ положительны, чего требуют наши фазовые условия 1) и 2). Мы должны сделать следующий выбор для матриц F_i'' контраградиентного представления $\{N^*\}$, если нам даны матрицы F_i представления $\{N\}$:

$$I_3'' = -I_3 \text{ и } Y'' = -Y. \tag{8,1а}$$

Это следует из диаграммы собственных значений и выбора порядка нумерации различных состояний. Наши фазовые условия требуют выбора

$$I_\pm'' = I_\mp, \qquad K_\pm'' = K_\mp. \tag{8,1б}$$

Тогда из перестановочных соотношений (4,1в) следует

$$L_\pm'' = -L_\mp. \tag{8,1в}$$

Таким образом, соотношение между собственными состояниями $\{N\}$ и $\{N^*\}$ имеет вид

$$\varphi(\{N^*\}, I, I_z, Y) = \eta(-)^{I_z + \frac{1}{2}Y}\varphi^*(\{N\}, I, -I_z, -Y). \tag{8,2}$$

Здесь η — общий фазовый множитель, который удобно выбрать при помощи условия *)

$$\varphi(\{N^*\}, I, 0, 0) = \varphi^*(\{N\}, I, 0, 0); \tag{8,3}$$

тогда $\eta = 1$.

§ 9. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ. II

В этом параграфе мы рассмотрим те НП, которые будут дальше использованы.

$D(1, 1) = \{8\}$. Мы можем сразу построить диаграмму собственных значений (рис. 4, *а*). Высшим собственным значением является $\mathbf{e}_3$, для которого $I_z = 1$, $Y = 0$, откуда $I = 1$. Согласно теореме 2 это собственное значение влечет за собой существование шести собственных значений $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_7$ и $\mathbf{e}_8$ (все невырождены). Существование $\mathbf{e}_4$ ($I = 1$, $I_z = 0$, $Y = 0$) также вызвано существованием $\mathbf{e}_3$, так как $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ и $\mathbf{e}_5$ образуют изомультиплет $I = 1$. Таким образом, мы насчитываем семь состояний. Недостающее восьмое состояние $\mathbf{e}_6$ не может быть ничем, как состоянием $I = 0$, $Y = 0$. Матрицы $I_\pm$ даются формулой (7,5), а матрицы $K_\pm$ формулами (7,7) и (7,8).

$D(3, 0) = \{10\}$. Диаграмма собственных значений изображена на рис. 4, *б*. Высшим собственным значением является $\mathbf{e}_1$ $\left(I = \frac{3}{2}, I_z = \frac{3}{2}, Y = 1\right)$. Согласно теореме 2 существуют также собственные значения $\mathbf{e}_4$ и $\mathbf{e}_{10}$. Собственные значения $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ должны существовать, так как входят в изомультиплет $I = \frac{3}{2}$, $Y = 1$. Но существо-

---

*) В октетной модели каждое НП содержит состояние с $I_z = Y = 0$; см. также § 14.

вание e_2 и e_3 на основании теоремы 2 влечет за собой существование собственных значений e_5, e_7, e_8 и e_9. Последнее собственное значение e_6 должно существовать, так как оно входит в изомультиплет $I = 1$, $Y = 0$.

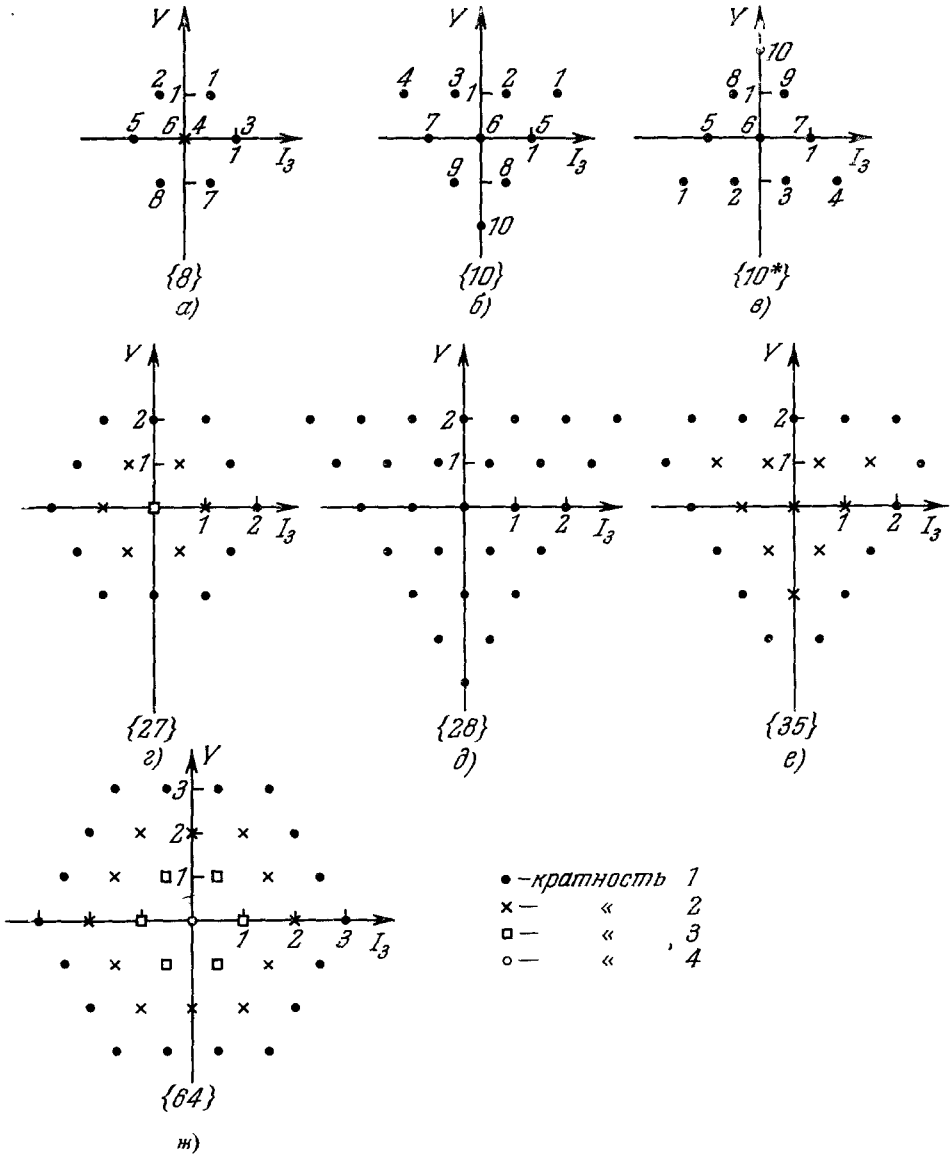

Рис. 4. Диаграммы собственных значений для низших неприводимых представлений.

$D(0, 3) = \{10^*\}$. Диаграмма собственных значений изображена на рис. 4, *в*. Матрица K_+ легко определяется из соответствующей матрицы представления $\{10\}$. Мы имеем

$$K_+(10^*) = [K_+(10)]^\dagger.$$

Представления

$$D(2,2) = \{27\},\ D(6,0) = \{28\},$$

$$D(4,1) = \{35\},\ D(3,3) = \{64\} \text{ и т. д.}$$

и соответствующие контраградиентные представления $\{28^*\}$, $\{35^*\}$ и т. д. можно получить таким же путем. Диаграммы собственных значений даны на рис. 4, *г*, *д*.

§ 10. КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША — ГОРДАНА

Произведение двух НП $D(p_1, q_1)\, D(p_2, q_2)$ в общем случае приводимо. Символически можно записать

$$D(p_1, q_1) \otimes D(p_2, q_2) = \sum_{P, Q} \oplus\, \sigma(P, Q)\, D(P, Q), \tag{10,1}$$

где $\sigma(P, Q)$ — целое число. Ряд в правой части формулы (10,1) называется рядом Клебша — Гордана (ряд КГ). Эта символическая формула означает, что представления $D(P, Q)$ содержатся $\sigma(P, Q)$ раз в прямом произведении неприводимых представлений $D(p_1, q_1)$ и $D(p_2, q_2)$.

Мы видели в § 5, что полный набор операторов, необходимый для однозначного определения состояний данного НП, состоит из G^3, F^2, I^2, I_3 и Y. Состояния произведения $D(p_1, q_1) \otimes D(p_2, q_2)$ будут поэтому полностью определены собственными значениями 10 линейно-независимых коммутирующих операторов:

$$\begin{gathered} G^3(1),\ G^3(2),\ F^2(1),\ F^2(2),\ I^2(1),\ I^2(2), \\ I_3(1),\ I_3(2),\ Y(1) \text{ и } Y(2). \end{gathered} \tag{I}$$

Если мы определим операторы

$$F_i = F_i(1) + F_i(2) \quad (i = 1, \ldots, 8), \tag{10,2}$$

то набором коммутирующих операторов (неполным) будет

$$G^3,\ G^3(1),\ G^3(2),\ F^2,\ F^2(1),\ F^2(2),\ I^2,\ I_3 \text{ и } Y.$$

Однако это дает только девять операторов. Нам нужен еще один оператор для того, чтобы сделать этот набор полным. Этот оператор Г, к сожалению, не содержится внутри группы. Мы должны выйти за пределы этой группы, чтобы найти этот оператор *), который необходим для различения разных $D(P, Q)$ при одинаковых P и Q в том случае, когда $\sigma(P, Q) > 1$. Таким образом, полным набором коммутирующих операторов является

$$G^3,\ G^3(1),\ G^3(2),\ F^2,\ F^2(1),\ F^2(2),\ I^2,\ I_3,\ Y \text{ и } \Gamma. \tag{II}$$

В дальнейшем мы будем употреблять сокращенное обозначение в тех случаях, когда это не приведет к путанице. Мы будем обозначать собственные значения g^3 и f^2 операторов G^3 и F^2 общим индексом μ, собственные значения I, I_z и Y через ν, а собственное значение Г через γ. Мы будем обозначать собственное состояние представления $D(p_1, q_1)$ через $\varphi_{\nu_1}^{(\mu_1)}$, собственные состояния $D(p_2, q_2)$ через $\varphi_{\nu_2}^{(\mu_2)}$. Мы будем обозначать собственные состояния набора оператора (II) в представлении произведения через

$$\psi\begin{pmatrix} \mu_1\ \mu_2\ \mu_\gamma \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Размерность представления $D(p_i, q_i)$ равна N_i.

В N_1N_2-мерном пространстве произведения мы можем выбрать в качестве базиса или произведения векторов $\varphi_{\nu_1}^{(\mu_1)}$ на $\varphi_{\nu_2}^{(\mu_2)}$, или векторы

$$\psi\begin{pmatrix} \mu_1\ \mu_2\ \mu_\gamma \\ \nu \end{pmatrix}$$

различных НП, содержащихся в произведении $D(p_1, q_1) \otimes D(p_2, q_2)$. Эти два различных набора ортонормированных базисных векторов связаны унитарным преобразованием **)

$$\psi\begin{pmatrix} \mu_1\ \mu_2\ \mu_\gamma \\ \nu \end{pmatrix} = \sum_{\nu_1, \nu_2} \begin{pmatrix} \mu_1\ \mu_2\ \mu_\gamma \\ \nu_1\ \nu_2\ \nu \end{pmatrix} \varphi_{\nu_1}^{(\mu_1)} \varphi_{\nu_2}^{(\mu_2)}. \tag{10,3}$$

Коэффициенты $\begin{pmatrix} \mu_1\ \mu_2\ \mu_\gamma \\ \nu_1\ \nu_2\ \nu \end{pmatrix}$ представляют собой коэффициенты Клебша — Гордана (КГ-коэффициенты) группы $SU(3)$.

Можно рассмотреть ту же задачу с иной точки зрения, весьма полезной. Произведения состояний $\varphi_{\nu_1}^{(\mu_1)} \varphi_{\nu_2}^{(\mu_2)}$ являются собственными состояниями операторов (I).

---

*) Это почти все, что можно сказать об операторе Г. Практически пользуются свойствами симметрии волновой функции.

**) Оказывается, можно выбрать различные произвольные фазы так, чтобы все КГ-коэффициенты были действительными. Тогда матрица преобразования является действительной ортогональной матрицей.

Поэтому они являются также собственными состояниями операторов $I_z = I_{1z} + I_{2z}$ и $Y = Y_1 + Y_2$, но не операторов G^3, F^3, Γ и I^2. Мы можем построить при помощи коэффициентов Клебша — Гордана $C^{I_1 I_2 I}_{I_{1z} I_{2z} I_z}$ группы $SU(2)$, собственные состояния χ операторов $G^3(1)$, $G^3(2)$, $F^2(1)$, $F^2(2)$, I, I_z и Y, не являющихся, однако, собственными состояниями операторов G^3, F^2 и Γ.

Тогда

$$\chi\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & I I_z Y \\ I_1 Y_1 & I_2 Y_2 & \end{pmatrix} = \sum_{I_{1z} I_{2z}} C^{I_1 I_2 I}_{I_{1z} I_{2z} I_z} \varphi^{(\mu_1)}_{\nu_1} \varphi^{(\mu_2)}_{\nu_2}. \tag{10,4}$$

Далее мы можем комбинировать различные χ так, чтобы получить собственные состояния операторов набора (II)

$$\psi\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ & \nu & \end{pmatrix} = \sum_{\substack{I_1, Y_1 \\ I_2, Y_2}} \left(\begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 \\ I_1 Y_1 & I_2 Y_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \mu_\gamma \\ I Y \end{matrix}\right) \chi\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & I I_z Y \\ I_1 Y_1 & I_2 Y_2 & \end{pmatrix}. \tag{10,5}$$

Коэффициенты

$$\left(\begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 \\ I_1 Y_1 & I_2 Y_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \mu_\gamma \\ I Y \end{matrix}\right)$$

называются изоскалярными факторами [12]. Отметим зависимость изоскалярных факторов от полного изоспина I.

Сравнение (10,4) с (10,5) и (10,3) дает

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} = C^{I_1 I_2 I}_{I_{1z} I_{2z} I_z} \left(\begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 \\ I_1 Y_1 & I_2 Y_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \mu_\gamma \\ I Y \end{matrix}\right). \tag{10,6}$$

Так как КГ-коэффициенты группы $SU(2)$ хорошо известны, для полного определения КГ-коэффициентов группы $SU(3)$ достаточно знать изоскалярные факторы. При этом, однако, нужно обратить внимание на то, чтобы КГ-коэффициенты группы $SU(2)$ были взяты с правильными фазовыми множителями [24].

Для однозначного определения изоскалярных факторов надо определить относительные фазы базисных векторов НП $D(P, Q)$ в КГ-ряде (10,1) по отношению к базисным векторам произведения представлений $D(p_1, q_1) \otimes D(p_2, q_2)$. Мы будем считать эти фазовые факторы всегда вещественными, тогда изоскалярные факторы тоже будут вещественны. Для выбора знака фазового множителя мы рассмотрим высшее собственное состояние $\varphi^{(\mu)}_{\nu_H}$, принадлежащего к НП $D(P, Q)$; тогда

$$\varphi^{(\mu)}_{\nu_H} = \sum_{\nu_1, \nu_2} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_H \end{pmatrix} \varphi^{(\mu_1)}_{\nu_1} \varphi^{(\mu_2)}_{\nu_2}.$$

Среди различных КГ-коэффициентов мы выберем положительным тот, который содержит наибольшее возможное I_1. Если этого недостаточно, то выберем положительным также тот из коэффициентов с наибольшим возможным I_1, у которого I_2 имеет наибольшее возможное значение. Этого условия достаточно для определения фаз в тех случаях, с которыми мы встретимся.

Конечно, этого недостаточно в общем случае, однако условие легко обобщается. Мы выбрали это условие, как наиболее прямое обобщение фазового условия, принимаемого для КГ-коэффициентов группы $SU(2)$. Последнее требует

$$C^{j_1 j_2 j}_{j_1 j - j_1 j} > 0.$$

§ 11. СООТНОШЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

КГ-коэффициенты группы $SU(3)$ образуют вещественную ортогональную матрицу. Поэтому

$$\varphi^{(\mu_1)}_{\nu_1} \varphi^{(\mu_2)}_{\nu_2} = \sum_{\mu\nu\gamma} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} \psi\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ & \nu & \end{pmatrix} \tag{11,1}$$

и

$$\sum_{\nu_1 \nu_2} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu'_{\gamma'} \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu' \end{pmatrix} = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{\nu\nu'}, \tag{11,2а}$$

$$\sum_{\mu\gamma\nu} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \nu'_1 & \nu'_2 & \nu \end{pmatrix} = \delta_{\nu_1 \nu'_1} \delta_{\nu_2 \nu'_2}. \tag{11,2б}$$

Соотношения ортогональности КГ-коэффициентов группы $SU(2)$ хорошо известны [26]. Поэтому изоскалярные факторы удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности:

$$\sum_{\substack{I_1Y_1\\ I_2Y_2}} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ I_1Y_1 & I_2Y_2 & IY \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu'_{\gamma'} \\ I_1Y_1 & I_2Y_2 & IY' \end{pmatrix} = \delta_{\mu\mu'}\,\delta_{\gamma\gamma'}\,\delta_{YY'}, \tag{11,3а}$$

$$\sum_{\mu\gamma Y} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ I_1Y_1 & I_2Y_2 & IY \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ I'_1Y'_1 & I'_2Y'_2 & IY \end{pmatrix} = \delta_{I_1I'_1}\delta_{I_2I'_2}\delta_{Y_1Y'_1}\delta_{Y_2Y'_2}. \tag{11,3б}$$

§ 12. РЯД КЛЕБША — ГОРДАНА

Прямое произведение $D \otimes D$ двух НП группы $SU(3)$ может быть разложено на несколько НП группы $SU(3)$. Это формально описывается рядом Клебша — Гордана (10,1). Для того чтобы найти различные $D(P, Q)$ и их кратности $\sigma(P, Q)$, мы будем следовать методу Шпайзера [15] *).

Мы начнем с построения координатной системы (p, q) (рис. 5). В этой координатной системе мы можем представить каждое НП $D(p, q)$ в виде точки (p, q). Пусть

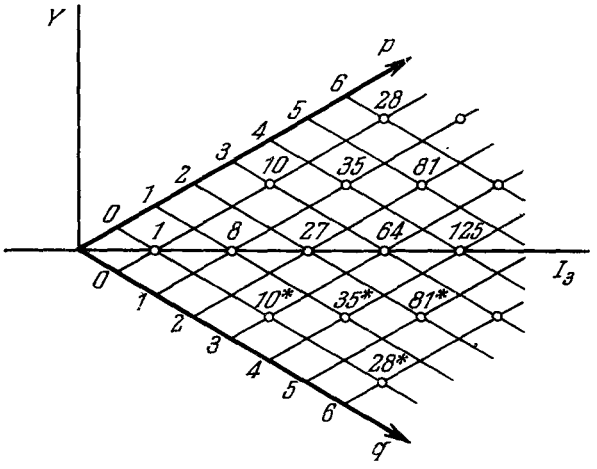

Рис. 5. Система координат, в которой каждому неприводимому представлению $\{N\} = D(p, q)$ отвечает точка (p, q).

наша система координат будет косоугольной; оси p и q расходятся под углами 30° к горизонтальной прямой, которую мы назовем осью I_3 (см. рис. 5). Ось, перпендикулярную к оси I_3, назовем осью Y. Единицей длины по осям p и q пусть будет $l/\sqrt{3}$. Далее отразим этот рисунок относительно оси p и относительно оси q. Произведя еще отражение относительно оси Y, мы получим «решетку», показанную на рис. 6. Мы припишем положительный вес незаштрихованным секстантам, а заштрихованным — отрицательный вес.

Для того чтобы получить ряд Клебша — Гордана для прямого произведения $D(p_1, q_1) \otimes D(p_2, q_2)$, нам нужна диаграмма собственных состояний представления $D(p_1, q_1)$ или $D(p_2, q_2)$ с указанием кратности собственных значений. Предположим, что мы имеем диаграмму собственных значений представления $D(p_1, q_1)$, выполненную в масштабе: единицей длины по оси I_3 является l, а по оси Y $\frac{2}{3}\sqrt{3}l$. Поместим диаграмму собственных значений $D(p_1, q_1)$ на рис. 6 так, чтобы собственное значение $(I_3, Y) = (0, 0)$ совпало с точкой решетки $\{N_2\} = D(p_2, q_2)$ в первом секстанте с положительным весом так, чтобы ось I_3 диаграммы собственных значений совпала по направлению с осью I_3 решетки. Собственные значения $D(p_1, q_1)$ будут теперь совпадать с точками решетки, изображающей неприводимые представления,

*) Этот метод можно применять для всех НП $SU(3)$, а не только для тех НП, которые используются нами. Так как нас интересует только октетная модель, то мы ограничиваемся применением метода лишь к таким случаям.

за исключением тех собственных значений, которые окажутся лежащими на осях p, q или Y. Мы можем теперь сформулировать теорему Шпайзера.

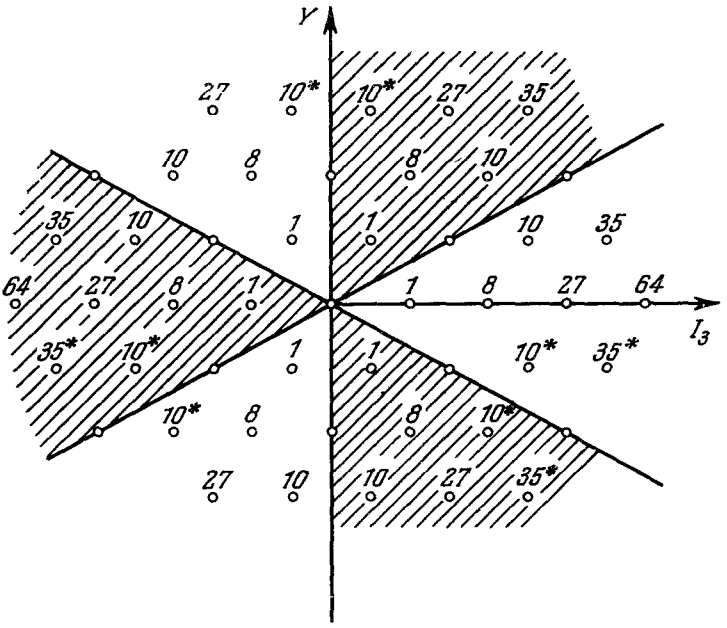

Рис. 6. Решетка. Незаштрихованные области имеют положительный вес, а заштрихованные области — отрицательный вес.

Теорема. Каждое НП, совпадающее описанным выше способом с собственным значением $D(p_1, q_1)$, содержится в прямом произведении $D(p_1, q_1) \otimes D(p_2, q_2)$

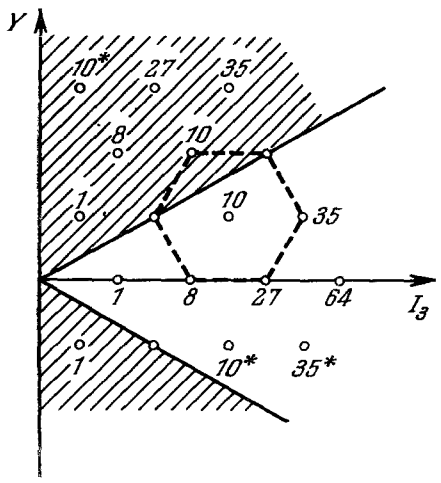

Рис. 7. Нахождение КГ-ряда для прямого произведения $\{8\} \otimes \{10\}$.

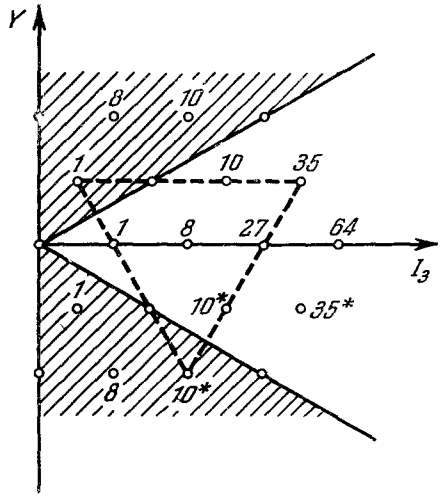

Рис. 8. Нахождение КГ-ряда для прямого произведения $\{10\} \otimes \{8\}$.

столько раз, какова кратность этого собственного значения, взятого с тем знаком, который отвечает знаку веса данного секстанта.

Поэтому вклад от секстантов отрицательного веса вычитается (а не складывается) из ряда Клебша — Гордана. Собственные значения, лежащие на осях p, q и Y, учитывать не надо.

Для иллюстрации процедуры мы получим КГ-ряд произведения $\{8\} \otimes \{10\}$. Мы сделаем это двумя способами.

Во-первых, совместим центр диаграммы собственных значений представления $\{8\}$ (см. рис. 4, *а*) с точкой $\{10\}$ на положительном секстанте решетки (рис. 7). Таким образом, эта точка (ПП) совпадает с собственным значением кратности два. Это дает вклад в КГ-ряд $\oplus\, 2 \times \{10\}$. Точки (ПП) $\{8\}$, $\{27\}$ и $\{35\}$ лежат в положительном секстанте, а $\{10\}$ в отрицательном, и отвечающие им собственные значения однократны. Поэтому они дают следующий вклад в КГ-ряд:

$$\{8\} \oplus \{27\} \oplus \{35\} \ominus \{10\}.$$

Мы пренебрегаем двумя собственными значениями, попадающими на ось p. Таким образом, полный КГ-ряд имеет вид

$$\{8\} \otimes \{10\} = \{8\} \oplus \{27\} \oplus \{35\} \ominus \{10\} \oplus 2\,\{10\} = \{8\} \oplus \{10\} \oplus \{27\} \oplus \{35\}.$$

Чтобы получить этот КГ-ряд другим способом, совместим собственное значение (0, 0) диаграммы собственных значений представления $\{10\}$ (см. рис. 4, *б*) с точкой $\{8\}$ на положительном секстанте решетки (рис. 8). Все собственные значения представления однократны. Положительный секстант дает

$$\{1\} \oplus \{8\} \oplus \{10\} \oplus \{10^*\} \oplus \{27\} \oplus \{35\},$$

отрицательные секстанты дадут $\ominus\{1\} \ominus \{10^*\}$. Опять мы пренебрежем двумя собственными значениями представления $\{10\}$, попадающими на оси p и q. Таким образом, как и прежде, КГ-ряд будет иметь вид

$$\{10\} \otimes \{8\} = \{8\} \oplus \{10\} \oplus \{27\} \oplus \{35\}.$$

§ 13. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И НЕПРИВОДИМЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

При преобразовании группы $SU(3)$ вектор x в пространстве C_3 преобразуется следующим образом:

$$x' = \alpha x. \tag{13,1}$$

Базисные векторы $\psi_\nu^{(\mu)}$ представления $\{\mu\} = D(p, q) = \{N\}$ преобразуются по закону

$$\psi_\nu'^{(\mu)} = U\psi_\nu^{(\mu)} = \sum_{\nu'=1}^{N} \psi_{\nu'}^{(\mu)} D_{\nu'\nu}^{(\mu)*}(\alpha). \tag{13,2}$$

Здесь $D^{(\mu)}$ — унимодулярная унитарная матрица. Таким образом,

$$\sum_\nu D_{\nu\nu'}^{(\mu)}(\alpha)\, D_{\nu\nu''}^{(\mu)*}(\alpha) = \delta_{\nu'\nu''} \tag{13,3}$$

и

$$\psi_\nu^{(\mu)} = \sum_{\nu'} D_{\nu\nu'}^{(\mu)}(\alpha)\, \psi_{\nu'}'^{(\mu)}. \tag{13,4}$$

Как уже отмечалось в § 3, матрицы $D^{(\mu)}$ образуют неприводимое представление $\{\mu\} = D(p, q)$ группы $SU(3)$. В том же разделе было показано, что каждое преобразование группы $SU(3)$ характеризуется восемью вещественными параметрами α_i. Таким образом, матрицы $D^{(\mu)}(\alpha)$ являются функциями α_i. Можно определить такую функцию плотности $\varrho(\alpha_i)$, чтобы *)

$$\int d\alpha_1 \ldots d\alpha_8\, \varrho(\alpha_1, \ldots, \alpha_8) = 1, \tag{13,5}$$

если этот интеграл распространен на все элементы группы $SU(3)$. Мы запишем **)

$$d\Omega = d\alpha_1 \ldots d\alpha_8\, \varrho(\alpha_1, \ldots, \alpha_8).$$

---

*) См. [21], гл. 8.

**) Для $SU(2)$ имеем

$$\int d\Omega = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\beta\, d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma,$$

где α, β и γ — три угла Эйлера.

Можно показать также, что *)

$$\int d\Omega D_{ik}^{(\mu)}(\alpha)\, D_{jl}^{(\nu)*}(\alpha) = \frac{1}{N_\mu}\, \delta_{\mu\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}. \tag{13,6}$$

Из свойства преобразований (13,2) и (13,4) базисных векторов данного НП и определения (10,3) КГ-коэффициентов находим соотношение

$$D_{\nu_1\lambda_1}^{(\mu_1)}(\alpha)\, D_{\nu_2\lambda_2}^{(\mu_2)}(\alpha) = \sum_{\mu\nu\lambda\gamma} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \end{pmatrix} D_{\nu\lambda}^{(\mu)}(\alpha) \tag{13,7}$$

и обратное соотношение

$$\sum_{\substack{\nu_1\nu_2 \\ \lambda_1\lambda_2}} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu'_{\gamma'} \\ \nu_1 & \nu_2 & \lambda \end{pmatrix} D_{\nu_1\lambda_1}^{(\mu_1)}(\alpha)\, D_{\nu_2\lambda_2}^{(\mu_2)}(\alpha) = \delta_{\mu\mu'}\delta_{\gamma\gamma'} D_{\nu\lambda}^{(\mu)}(\alpha). \tag{13,8}$$

Формула (13,2) определяет преобразование базисных векторов $\psi_\nu^{(\mu)}(\mu)$ данного НП $D(p, q)$. Мы можем также определить неприводимые тензорные операторы ранга μ. Такой тензор представляет собой набор N_μ операторов $T_\nu^{(\mu)}$, преобразующихся при преобразовании α группы $SU(3)$ следующим образом:

$$T'^{(\mu)}_\nu = U T_\nu^{(\mu)} U^{-1} = \sum_{\nu'} T_{\nu'}^{(\mu)} D_{\nu'\nu}^{(\mu)*}(\alpha), \tag{13,9}$$

с полной аналогией с формулой (13,2).

§ 14. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ КГ-КОЭФФИЦИЕНТОВ

В этом разделе мы рассмотрим некоторые свойства симметрии КГ-коэффициентов группы $SU(3)$ и изоскалярных факторов. К сожалению, недостаток сведений об операторе Г отражается в невозможности строгого определения некоторых общих фазовых множителей. Однако эти фазовые множители не очень существенны и могут быть фиксированы впоследствии.

1. Если в КГ-ряде $\{\mu_1\} \otimes \{\mu_2\}$ встречается НП $\{\mu\}_\gamma$, то оно же встретится и в КГ-ряде $\{\mu_2\} \otimes \{\mu_1\}$ ввиду тождественности этих рядов.

Отсюда следует

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} \mu_2 & \mu_1 & \mu_\gamma \\ \nu_2 & \nu_1 & \nu \end{pmatrix}, \tag{14,1}$$

где $\xi_1 = \pm 1$ в соответствии с нашим выбором фаз, приведенным в § 10. Эти коэффициенты $\xi_1 = \xi_1(\mu_1, \mu_2, \mu_\gamma)$ не зависят от «магнитных» квантовых чисел ν_1, ν_2 и ν. Поэтому мы можем использовать высшее собственное значение ν_H представления $\{\mu\}_\gamma$ и для него найти значение ξ_1.

В силу свойств КГ-коэффициентов группы $SU(2)$

$$C_{I_1z I_2z I_z}^{I_1 I_2 I} = (-)^{I_1 - I_2 - I} C_{I_2z I_1z I_z}^{I_2 I_1 I} \tag{14,2}$$

мы получим для изоскалярных факторов соотношение

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ I_1Y_1 & I_2Y_2 & IY \end{array}\right) = \xi_1 (-)^{I_1 - I_2 - I} \left(\begin{array}{cc|c} \mu_2 & \mu_1 & \mu_\gamma \\ I_2Y_2 & I_1Y_1 & IY \end{array}\right). \tag{14,3}$$

Из соотношения (14,3) получаем непосредственно, что

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mu_1 & \mu_1 & \mu_\gamma \\ I_1Y_1 & I_1Y_1 & I_2Y_1 \end{array}\right) = 0 \begin{cases} \text{для } \xi_1 = 1, \text{ если } 2I_1 - I \text{ нечетно;} \\ \text{для } \xi_1 = -1, \text{ если } 2I_1 - I \text{ четно.} \end{cases}$$

2. Рассмотрим интеграл

$$I = \int d\Omega\, D_{\nu_3\lambda_3}^{(\mu_3)*}(\alpha)\, D_{\nu_2\lambda_2}^{(\mu_2)}(\alpha)\, D_{\nu_1\lambda_1}^{(\mu_1)}(\alpha). \tag{14,4}$$

---

*) Для $SU(2)$ это хорошо известное соотношение

$$\int d\Omega\, D_{M_1M_2'}^{(J_1)*} D_{M_2M_2'}^{(J_2)*} = \frac{1}{2J_1+1}\, \delta_{J_1J_2}\delta_{M_1M_2}\delta_{M_1'M_2'}.$$

Используя (13,6) и (13,7), получим

$$I=\frac{1}{N_3}\sum_{\gamma}\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \mu_{3\gamma}\\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \mu_{3\gamma}\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\end{pmatrix}; \tag{14,5}$$

из (8,2) можно записать

$$\varphi_{\nu}^{(\mu^*)}=\eta(-)^{\bar{\nu}}\varphi_{-\nu}^{(\mu)*}, \tag{14,6}$$

где

$$\bar{\nu}=I_z+\frac{1}{2}Y \text{ и } -\nu=(I,\ -I_z,\ -Y).$$

Фазовый множитель η зависит только от μ, но не от ν. Формула (13,4) вместе с (14,6) дает

$$D_{\nu'\nu}^{(\mu^*)*}(\alpha)=(-)^{\bar{\nu}+\bar{\nu}'}D_{-\nu'-\nu}^{(\mu)}(\alpha). \tag{14,7}$$

Используя (14,7), мы можем переписать (14,4) в виде

$$I=(-)^{\bar{\nu}_2+\bar{\lambda}_2+\bar{\nu}_3+\bar{\lambda}_3}\int d\Omega\, D_{-\nu_2-\lambda_2}^{(\mu_2^*)*}(\alpha)\, D_{-\nu_3-\lambda_3}^{(\mu_3^*)}(\alpha)\, D_{\nu_1\lambda_1}^{(\mu_1)}(\alpha)=$$

$$=\frac{1}{N_2}\sum_{\gamma'}(-)^{\bar{\nu}_2+\bar{\nu}_3}\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_3^* & \mu_{2\gamma'}^*\\ \nu_1 & -\nu_3 & -\nu_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_3^* & \mu_{2\gamma'}^*\\ \lambda_1 & -\lambda_3 & -\lambda_2\end{pmatrix}(-)^{\bar{\lambda}_2+\bar{\lambda}_3}.$$

Сравнивая последнее выражение для I (14,5) и замечая, что эта формула справедлива независимо от значений «магнитных» квантовых чисел ν_1, ν_2, ν_3, λ_1, λ_2 и λ_3, получим в случае только одного квантового числа γ

$$\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \mu_{3\gamma}\\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3\end{pmatrix}=\xi_2(-)^{I_{1z}+\frac{Y_1}{2}}\left(\frac{N_3}{N_2}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_3^* & \mu_{2\gamma'}^*\\ \nu_1 & -\nu_3 & -\nu_2\end{pmatrix}. \tag{14,8}$$

Предполагается, что эта формула справедлива и может быть сделана справедливой подходящим выбором Γ и в том случае, когда имеются различные значения γ, относящиеся к одному и тому же μ_3. Например, в случае $\{8\}\otimes\{8\}=\{8\}_1\otimes\{8\}_2$ и $\{8\}\otimes\{27\}=\{27\}_1\otimes\{27\}_2$ формула (14,8) будет справедлива. Произвольный фазовый множитель $\xi_2=\xi_2(\mu_1,\mu_2,\mu_3)=\pm 1$ опять не зависит от магнитных квантовых чисел. Этот фазовый множитель можно определить в каждом частном случае, рассматривая высшее собственное значение.

Для КГ-коэффициентов группы $SU(2)$ мы имеем соотношение

$$C_{I_{1z}I_{2z}I_{3z}}^{I_1I_2I_3}=(-)^{I_1-I_{1z}}\left(\frac{2I_3+1}{2I_2+1}\right)^{1/2}C_{I_{1z}I_{2z}I_{3z}}^{I_1I_2I_3}.$$

Поэтому для изоскалярных факторов будет иметь место соотношение

$$\left(\begin{array}{cc|c}\mu_1 & \mu_2 & \mu_{3\gamma}\\ I_1Y_1 & I_2Y_2 & I_3Y_3\end{array}\right)=\xi_2(-)^{I_1-\frac{Y_1}{2}}\left(\frac{(2I_2+1)N_3}{(2I_3+1)N_2}\right)^{1/2}\left(\begin{array}{cc|c}\mu_1 & \mu_3^* & \mu_{2\gamma'}^*\\ I_1Y_1 & I_3-Y_3 & I_2-Y_2\end{array}\right). \tag{14,9}$$

Из (14,8) и $\begin{pmatrix}\mu & 1 & \mu\\ \nu & 0 & \nu\end{pmatrix}=1$ следует

$$\begin{pmatrix}\mu & \mu^* & 1\\ \nu & -\nu & 0\end{pmatrix}=(-)^{I_z-I_H+\frac{1}{2}(Y-Y_H)}N^{-1/2}, \tag{14,10}$$

если высшее собственное значение $\{\mu\}$ отвечает $I=I_H$ и $Y=Y_H$ и $\{\mu\}=\{N\}$.

Мы находим также

$$\left(\begin{array}{cc|c}\mu & \mu^* & 1\\ IY & I-Y & 00\end{array}\right)=(-)^{I_z+I_H+\frac{1}{2}(Y-Y_H)}\left(\frac{2I+1}{N}\right)^{1/2}. \tag{14,11}$$

Кроме того, из (14,9) получим

$$\left(\begin{array}{cc|c}\mu_1 & \mu_2 & \mu_{2\gamma}^*\\ I_12Y_2 & I_2-Y_2 & I_2Y_2\end{array}\right)=0\begin{cases}\text{для } \xi_2=1, \text{ если } I_1+Y_2 \text{ нечетно,}\\ \text{для } \xi_2=-1, \text{ если } I_1+Y_2 \text{ четно.}\end{cases}$$

3. Из определения КГ-коэффициентов (10,3), из их свойства вещественности и соотношения (14,6) следует

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_{3\gamma} \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} = \xi_3 \begin{pmatrix} \mu_1^* & \mu_2^* & \mu_{3\gamma}^* \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 \end{pmatrix}, \tag{14,12}$$

где ξ_3 не зависит от магнитных квантовых чисел ν_1, ν_2 и ν_3 и $\xi_3 = \pm 1$. Важно отметить, что фазовое условие (8,3) не всегда можно применять одновременно к представлениям $\{\mu_1\}$, $\{\mu_2\}$ и $\{\mu\}$. Поэтому в некоторых случаях $\xi_3 = -1$. В силу соотношения

$$C^{I_1 I_2 I_3}_{I_{1z} I_{2z} I_{3z}} = (-)^{I_1 + I_2 - I_3} C^{I_1 I_2 I_3}_{-I_{1z} - I_{2z} - I_{3z}}$$

мы получим для изоскалярных факторов

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_{3\gamma} \\ I_1 Y_1 & I_2 Y_2 & I_3 Y_3 \end{pmatrix} = \xi_3 (-)^{I_1 + I_2 - I_3} \begin{pmatrix} \mu_1^* & \mu_2^* & \mu_{3\gamma}^* \\ I_1 - Y_1 & I_2 - Y_2 & I_3 - Y_3 \end{pmatrix}. \tag{14,13}$$

И в этом случае легко определить ξ_3 для каждого частного случая, рассматривая высшие собственные состояния.

§ 15. ТЕОРЕМА ВИГНЕРА — ЭККАРТА

Для группы $SU(3)$ можно также установить теорему Вигнера — Эккарта[14]. Эта теорема относится к матричному элементу $(\varphi_{\nu_3}^{(\mu_3)}, T_{\nu_2}^{(\mu_2)} \varphi_{\nu_1}^{(\mu_1)})$ неприводимого тензорного оператора $T_{\nu_2}^{(\mu_2)}$ между двумя базисными состояниями данного НП $\varphi_{\nu_1}^{(\mu_1)}$ и $\varphi_{\nu_3}^{(\mu_3)}$. Эта теорема утверждает:

$$(\varphi_{\nu_3}^{(\mu_3)}, T_{\nu_2}^{(\mu_2)} \varphi_{\nu_1}^{(\mu_1)}) = \sum_{\gamma} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_{3\gamma} \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} (\mu_3 \| T^{(\mu_2)} \| \mu_1)_\gamma. \tag{15,1}$$

Здесь нужно суммировать по всем γ. Правая часть поэтому содержит столько членов, сколько раз данное НП $\{\mu_3\}$ содержится в произведении $\{\mu_1\} \otimes \{\mu_2\}$. Содержание теоремы, выражаемой формулой (15,1), состоит в том, что она определяет зависимость матричного элемента от ν_1, ν_2 и ν_3. Одновременно формула (15,1) служит определением приведенных матричных элементов $(\mu_3 \| T^{(\mu_2)} \| \mu_1)_\gamma$.

Мы можем доказать эту теорему следующим образом. Из формул (13,4) и (13,9) следует

$$(\varphi_{\nu_3}^{(\mu_3)}, T_{\nu_2}^{(\mu_2)} \varphi_{\nu_1}^{(\mu_1)}) = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} D^{(\mu_3)*}_{\nu_3 \lambda_3} D^{(\mu_2)}_{\nu_2 \lambda_2} D^{(\mu_1)}_{\nu_1 \lambda_1} (\varphi'^{(\mu_3)}_{\lambda_3}, T'^{(\mu_2)}_{\lambda_2} \varphi'^{(\mu_1)}_{\lambda_1}).$$

Используя свойства функции D (13,7), получим

$$(\varphi_{\nu_3}^{(\mu_3)}, T_{\nu_2}^{(\mu_2)} \varphi_{\nu_1}^{(\mu_1)}) = \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ \mu \nu \lambda \gamma}} D^{(\mu_3)*}_{\nu_3 \lambda_3} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_\gamma \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \end{pmatrix} D^{(\mu)}_{\nu\lambda} (\varphi'^{(\mu_3)}_{\lambda_3}, T'^{(\mu_2)}_{\lambda_2} \varphi'^{(\mu_1)}_{\lambda_1}).$$

Матричные элементы не зависят от нашего выбора координатной системы, поэтому они не зависят от восьми вещественных параметров преобразования $\alpha_1, \ldots, \alpha_8$. И мы можем провести интегрирование по $d\Omega$. Используя (13,6), получим

$$(\varphi_{\nu_3}^{(\mu_3)}, T_{\nu_2}^{(\mu_2)} \varphi_{\nu_1}^{(\mu_1)}) = \sum_{\gamma} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_{3\gamma} \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \frac{1}{N_3} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} (\varphi_{\lambda_3}^{(\mu_3)}, T_{\lambda_2}^{(\mu_2)} \varphi_{\lambda_1}^{(\mu_1)}).$$

Это можно записать в форме теоремы Вигнера — Эккарта (15,1), если ввести определение

$$(\mu_3 \| T^{(\mu_2)} \| \mu_1)_\gamma = \frac{1}{N_3} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_{3\gamma} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} (\varphi_{\lambda_3}^{(\mu_3)}, T_{\lambda_2}^{(\mu_2)} \varphi_{\lambda_1}^{(\mu_1)}).$$

Приведенный матричный элемент, очевидно, не зависит от квантовых чисел ν_1, ν_2 и ν_3.

§ 16. ФОРМУЛА МАСС

Мы рассмотрим здесь частный случай формулы масс для октета (НП $\{8\}$). Рассмотрение любого другого НП может быть сделано тем же способом. В октетной модели предполагается, что наиболее сильные взаимодействия инвариантны относительно преобразований, принадлежащих к группе $SU(3)$. При отсутствии других

взаимодействий все частицы, принадлежащие к одному и тому же НП $SU(3)$, имели бы одинаковую массу, массу унитарного мультиплета. Симметрия этих наиболее сильных взаимодействий (унитарная симметрия) нарушается некоторым неизвестным более слабым взаимодействием таким образом, что остаются сохраняющимися изоспин I и заряд Y. Под действием этого нарушающего унитарную симметрию взаимодействия снимается вырождение масс частиц, принадлежащих к одному и тому же унитарному мультиплету. Если предположить простейшую форму взаимодействия, нарушающего унитарную симметрию, то можно получить формулу масс Окубо [10] *) для фермионов и бозонов **)

$$M = M_0 + M_1 Y + M_2 \left\{ I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right\}, \tag{16,1}$$

$$m^2 = m_0^2 + m_2^2 \left\{ I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right\}. \tag{16,2}$$

Эти формулы дают соотношение масс Гелл-Манна — Окубо

$$M_N + M_\Xi = \frac{3}{2} M_\Lambda + \frac{1}{2} M_\Sigma, \tag{16,3а}$$

$$m_K^2 = \frac{3}{4} m_\eta^2 + \frac{1}{4} m_\pi^2, \tag{16,3б}$$

$$m_{K^*}^2 = \frac{3}{4} m_\omega^2 + \frac{1}{4} m_\rho^2. \tag{16,3в}$$

Соотношения (16,3а) и (16,3б) очень хорошо выполняются; соотношение (16,3в), однако, выполняется не так хорошо.

Электромагнитное взаимодействие должно быть введено таким образом, чтобы T_3 и Y по-прежнему сохранялись. Это взаимодействие приводит к различию масс разных членов одного и того же изомультиплета. Если учесть электромагнитное взаимодействие, но пренебречь неизвестным взаимодействием, нарушающим унитарную симметрию, то можно вывести соотношение между разностями масс членов изомультиплетов, входящих в один и тот же унитарный мультиплет. Для барионов получаем

$$M(\Xi^0) - M(\Xi^-) = M(p) - M(n) = M(\Sigma^+) - M(\Sigma^-). \tag{16,4}$$

Это соотношение также выполняется очень хорошо ***).

Мы видели, что при включении более слабого взаимодействия, нарушающего симметрию, унитарные мультиплеты расщепляются на изомультиплеты. Так как нарушение унитарной симметрии должно происходить так, чтобы сохранить правило отбора для изоспина и гиперзаряда, то всякий массовый оператор должен иметь вид

$$O_1 = \sum_\mu T^{(\mu)}_{0,\,0,\,0}, \tag{16,5}$$

где суммирование проводится по всем физически допустимым НП группы $SU(3)$, так что ****) $\mu = 1, 8, 27$ и т. д. Нарушение симметрии, вызываемое электромагнитным взаимодействием, должно быть таким, чтобы оставались сохраняющимися T_3 и Y. Наиболее общий оператор *****) [27], удовлетворяющий этому, будет

$$O_2 = \sum_{\mu,\,I} T^{(\mu)}_{I,\,0,\,0}, \tag{16,6}$$

---

*) То, что для фермионов в формулу (16,1) должна входить первая степень массы, а для бозонов в (16,2) квадрат массы, по-видимому, впервые было предложено Фейнманом. Это связано с тем, что в лагранжиан бозонов массовый член входит в виде $m^2\varphi^+\varphi$, а в лагранжиан фермионов в виде $M\bar{\chi}\chi$.

**) Заметим, что для бозонов линейный член Y не может входить в формулу масс.

***) Недавние измерения (D. Carmony et al., Phys. Rev. Letts. 12, 482 (1964)) дают

$$M(\Xi^-) - M(\Xi^0) = 6{,}1 \pm 1{,}6 \text{ Мэв},$$

в то время как $M(\Sigma^-) - M(\Sigma^+) - M(n) + M(p) = 6{,}7 \pm 0{,}4$ *Мэв*. (*Прим. перев.*)

****) Неприводимые представления $\{10\}$ и $\{10^*\}$ не содержат состояний с $I = I_z = Y = 0$.

*****) Аналогичные результаты можно найти в статье [27].

где μ пробегает всевозможные НП и I принимает все значения внутри данного НП, совместимые со значением $Y = 0$. Заметим, что оператор O_1 является частным случаем оператора O_2. Таким образом, общий вид массового оператора

$$\left.\begin{matrix} M \\ m^2 \end{matrix}\right\} = \sum_{\mu,\, I} T^{(\mu)}_{I,\,0,\,0}, \tag{16,7}$$

где M — массовый оператор для фермионов, а m^2 — для бозонов. Для НП $\{8\}$ отличные от нуля средние значения дают лишь неприводимые тензорные операторы, принадлежащие к НП $\{1\}$, $\{8\}$, $\{10\}$, $\{10^*\}$ и $\{27\}$. Поэтому если мы ограничимся только теми операторами в (16,7), которые сохраняют полный спин I, то

$$M \text{ (или } m^2) \quad T^{(1)}_{0,\,0,\,0} + T^{(8)}_{0,\,0,\,0} + T^{(27)}_{0,\,0,\,0}. \tag{16,8}$$

Используя теорему Вигнера — Эккарта (15,1), мы получим для масс изомультиплетов барионов:

$$\left.\begin{aligned} M_N &= a_1 - \frac{\sqrt{5}}{10} a_{8_1} + \frac{1}{2} a_{8_2} + \frac{1}{3\sqrt{5}} a_{27}, \\ M_\Xi &= a_1 - \frac{\sqrt{5}}{10} a_{8_1} - \frac{1}{2} a_{8_2} + \frac{1}{3\sqrt{5}} a_{27}, \\ M_\Lambda &= a_1 - \frac{\sqrt{5}}{5} a_{8_1} - \frac{1}{\sqrt{5}} a_{27}, \\ M_\Sigma &= a_1 - \frac{\sqrt{5}}{5} a_{8_1} - \frac{1}{9\sqrt{5}} a_{27}, \end{aligned}\right\} \tag{16,9}$$

где

$$a_{\mu\gamma} = (8 \| T^{(\mu)}_{0,\,0,\,0} \| 8)_\gamma. \tag{16,10}$$

Мы имеем здесь четыре массы и четыре постоянные. Решая уравнение (16,9) относительно этих постоянных, получим

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{8}(2M_N + 2M_\Xi + M_\Lambda + 3M_\Sigma), \\ a_{8_1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(3M_\Sigma - M_\Lambda - M_N - M_\Xi), \\ a_{8_1} &= M_N - M_\Xi, \\ a_{27} &= -\frac{9}{8\sqrt{5}}(3M_\Lambda + M_\Sigma - 2M_N - 2M_\Xi). \end{aligned}\right\} \tag{16,11}$$

Соотношение масс Гелл-Манна — Окубо (16,3) основывается на предположении о том, что разность масс преобразуется как $T^{(8)}_{0,\,0,\,0}$, т. е. $a_{27} = 0$. Практически это условие довольно хорошо удовлетворяется, так как *) [28, 29, 30] $a_1 = 1150{,}84$ *Мэв*/c^2, $a_{8_1} = 91{,}34$ *Мэв*/c^2, $a_{8_2} = -379{,}54$ *Мэв*/c^2 и $a_{27} = 11{,}9$ *Мэв*/c^2.

---

*) Мы используем здесь следующие значения для масс:

$$\begin{aligned} M_p &= 938{,}21 \pm 0{,}01 \text{ Мэв}/c^2, \\ M_n &= 939{,}51 \pm 0{,}01, \\ M_\Lambda &= 1115{,}36 \pm 0{,}14, \\ M_{\Sigma^+} &= 1189{,}40 \pm 0{,}20, \\ M_{\Sigma^0} &= 1191{,}5 \pm 0{,}5, \\ M_{\Sigma^-} &= 1195{,}96 \pm 0{,}30, \\ M_{\Xi^0} &= 1315{,}8 \pm 0{,}8, \\ M_{\Xi^-} &= 1321{,}0 \pm 0{,}5. \end{aligned}$$

Первые шесть значений взяты из таблицы Баркасс и Розенфелда (Berkeley, 1960). Масса Ξ^--гиперона из работы [29], а масса Ξ^0 — из [30].

Формула для электромагнитных разностей масс может быть получена путем введения таких операторов $T^{(\mu)}_{1,0,0}$, которые явно нарушают сохранение изотопического спина. Поэтому

$$T = T^{(8)}_{1,0,0} + T^{(10)}_{1,0,0} + T^{(10^*)}_{1,0,0} + T^{(27)}_{1,0,0} + T^{(27)}_{2,0,0}.$$

Мы получим

$$\left.\begin{aligned}
M_p &= M_N + \frac{\sqrt{15}}{90}(9b_{8_1} - 4b_{27}) + \frac{1}{2\sqrt{3}} b_{8_2} - \frac{1}{\sqrt{15}}(b_{10} - b_{10^*}),\\
M_n &= M_N - \frac{\sqrt{15}}{90}(9b_{8_1} - 4b_{27}) - \frac{1}{2\sqrt{3}} b_{8_2} + \frac{1}{\sqrt{15}}(b_{10} - b_{10^*}),\\
M_{\Xi^0} &= M_\Xi - \frac{\sqrt{15}}{90}(9b_{8_1} - 4b_{27}) + \frac{1}{2\sqrt{3}} b_{8_2} - \frac{1}{\sqrt{15}}(b_{10} - b_{10^*}),\\
M_{\Xi^-} &= M_\Xi + \frac{\sqrt{15}}{90}(9b_{8_1} - 4b_{27}) - \frac{1}{2\sqrt{3}} b_{8_2} + \frac{1}{\sqrt{15}}(b_{10} - b_{10^*}),\\
M_\Lambda &= M_\Lambda,\\
M_{\Sigma^0} &= M_\Sigma + \frac{4}{9} c_{27},\\
M_{\Sigma^+} &= M_\Sigma - \frac{2}{9} c_{27} + \frac{1}{\sqrt{3}} b_{8_2} + \frac{1}{\sqrt{15}}(b_{10} - b_{10^*}),\\
M_{\Sigma^-} &= M_\Sigma - \frac{2}{9} c_{27} - \frac{1}{\sqrt{3}} b_{8_2} - \frac{1}{\sqrt{15}}(b_{10} - b_{10^*}),
\end{aligned}\right\} \qquad (16,12)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
b_{\mu_\gamma} &= (8 \| T^{(\mu)}_{1,0,0} \| 8)_\gamma,\\
C_{\mu_\gamma} &= (8 \| T^{(\mu)}_{2,0,0} \| 8)_\gamma.
\end{aligned}\right\} \qquad (16,13)$$

и

Из (16,12) видно, что мы имеем по существу четыре произвольные постоянные $(9b_{8_1} - 4b_{27})$, (b_{8_2}), $(b_{10} - b_{10^*})$ и C_{27}. Однако имеется также только четыре независимые разности масс

$$(M_n - M_p), \quad (M_{\Sigma^+} - M_{\Sigma^-}), \quad (M_{\Xi^0} - M_{\Xi^-})$$

и

$$\left[M_{\Sigma^0} - \frac{1}{2}(M_{\Sigma^+} + M_{\Sigma^-})\right].$$

Соотношение (16,4) между электромагнитными разностями масс можно получить, предположив, что $b_{10} - b_{10^*} = 0$. Из экспериментального значения масс *) получается

$$b_{8_1} - \frac{4}{9} b_{27} = (2{,}52 \pm 0{,}7)\ Мэв/c^2, \quad b_{8_2} = 22{,}6\ Мэв/c^2,$$

$$b_{10} - b_{10^*} = (-0{,}12 \pm 0{,}6)\ Мэв/c^2.$$

Для векторных мезонов используем значения масс [31]

$$m_\omega = 782\ Мэв/c^2,$$

$$m_\rho = 750\ Мэв/c^2.$$

---

*) См. примечание на стр. 672.

Из (16,3в) получаем $m_{K^*} = 774$ *Мэв/с*^{2}. Известно, что существуют два резонанса K^*, один [6] при 888 *Мэв/с*^{2}, другой [5] при 730 *Мэв/с*^{2}. Оба эти значения не очень близки к 774 *Мэв/с*^{2}. Однако перепишем уравнение (16,9) для векторных мезонов. Имеем

$$\left.\begin{aligned} m_\omega^2 &= m_0^2 - 2m_1^2 - 9m_2^2, \\ m_\rho^2 &= m_0^2 + 2m_1^2 - m_2^2, \\ m_{K^*}^2 &= m_0^2 - m_1^2 + 3m_2^2, \end{aligned}\right\} \tag{16,14}$$

где

$$m_0^2 = a_1, \quad m_1^2 = \frac{\sqrt{5}}{10} a_{81}, \quad m_2^2 = \frac{1}{9\sqrt{5}} a_{27} \text{ и } a_{82} = 0.$$

Предположение, сделанное Окубо [10] для того, чтобы получить (16,2), состояло в том, что он положил $m_2^2 = 0$. Мы можем с той же степенью произвольности положить $m_1^2 = 0$. Это приводит к соотношению масс

$$m_{K^*}^2 = \frac{3}{2} m_\rho^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2. \tag{16,15}$$

Эта формула предсказывает резонанс K^* при 773 *Мэв/с*^{2}, что близко к наблюденному значению ($K\pi$)-резонанса 730 *Мэв/с*^{2}. Это может означать, что разности масс для октета векторных мезонов преобразуются не по представлению {8}, а по представлению $\{27\} = D(2,2)$.

Другое объяснение [32] состоит в том, что мезон ω не принадлежит к векторному октету, а является унитарным синглетом. Векторный октет состоит из мезонов ρ, K^* 888 *Мэв/с*^{2}) и еще одного векторного мезона со значением $I = 0$. Соотношение масс (16,3в) приводит к $m_\varphi^2 = \frac{4}{3} m_{K^*}^2 - \frac{1}{3} m^2$ или $m_\varphi = 927$ *Мэв/с*^{2}. Благодаря наличию ω-мезона с почти той же массой и такими же квантовыми числами, как у φ-мезона, этот уровень смещается, так что возможно, что φ-мезон представляет собой резонанс [33] 1020 *Мэв* в $K\bar{K}$-системе.

§ 17. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЮКАВЫ

В модели унитарной симметрии сильных взаимодействий предсказывается весьма определенное соотношение между константами взаимодействия мезонов с барионами. Мы ограничимся здесь взаимодействием типа Юкавы между октетом барионов и октетом псевдоскалярных мезонов. Обобщения на другие взаимодействия очевидны. В пространстве унитарного спина мы определяем волновую функцию барионов B и волновую функцию мезонов M.

Мы примем следующие обозначения *):

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= p, & M_1 &= K^-, \\ B_2 &= n, & M_2 &= K^0, \\ B_3 &= -\Sigma^-, & M_3 &= -\pi^+, \\ B_4 &= \Sigma^0, & M_4 &= \pi^0, \\ B_5 &= \Sigma^-, & M_5 &= \pi^-, \\ B_6 &= \Lambda, & M_6 &= \eta, \\ B_7 &= \Xi^0, & M_7 &= K^0, \\ B_8 &= \Xi^-, & M_8 &= -K^-. \end{aligned}\right\} \tag{17,1}$$

Античастицы относятся к сопряженному представлению; так как в случае мезонов представления для частиц и античастиц эквивалентны, необходимо аккуратно следить за выбором фаз. Заметим, что приведенные выше обозначения для мезонов согласуются с фазовыми условиями (8,2) и (8,3) для сопряженного представления.

---

*) Мы обозначаем $B_3 = -\Sigma^+$ по аналогии с $M_3 = -\pi^+$. Это дает $\Sigma\pi = \Sigma^+\pi^- + \Sigma^0\pi^0 + \Sigma^-\pi^+$.

С теми же условиями волновые функции антибарионов B^+ имеют следующий вид:

$$\left.\begin{array}{ll} B_1^+ = -(\Xi^-)^+, & B_3^+ = -(\Sigma^-)^+, \\ B_2^+ = (\Xi^0)^+, & B_4^+ = (\Sigma^0)^+, \\ B_7^+ = n^+, & B_5^+ = (\Sigma^+)^+. \\ B_8^+ = -p^+, & B_6^+ = \Lambda^+. \end{array}\right\} \tag{17,2}$$

Мы выберем лагранжиан взаимодействия типа Юкавы в следующем виде:

$$L_{\text{вз}} = -g\,(B^+B)\,M.$$

Лагранжиан должен представлять собой унитарный синглет, т. е. принадлежать к НП $\{1\}$. Мезоны преобразуются по НП $\{8\}$. Для сохранения унитарной симметрии величина (ток) $J = B^+B$ должна также преобразовываться по НП $\{8\}$. Однако существуют две возможности образования унитарного синглета из представлений $\{8\} \otimes \{8\}$ и $\{8\}$. Два возможных тока $J^{(1)}$ и $J^{(2)}$ даются формулой

$$J_\nu^{(\gamma)} = \sum_{\nu_1\nu_2} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8_\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} B_{\nu_1}^+ B_{\nu_2}. \tag{17,3}$$

Таким образом, лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$L_{\text{вз}} = -(g_1 J^{(1)} + g_2 J^{(2)})\,M = -JM, \tag{17,4}$$

где

$$JM = \sum_\nu \begin{pmatrix} 8 & 8 & 1 \\ \nu & -\nu & 0 \end{pmatrix} J_\nu M_{-\nu}. \tag{17,5}$$

Вводя константы

$$g_p = \left(\frac{\sqrt{30}}{40}\right) g_1 + \left(\frac{\sqrt{6}}{24}\right) g_2, \tag{17,6}$$

$$\alpha = \left(\frac{\sqrt{6}}{24}\right) \left(\frac{g_2}{g_p}\right), \tag{17,7}$$

мы можем записать лагранжиан взаимодействия в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_{\text{вз}} = {} & g_{NN\pi}(N_1^+\boldsymbol{\tau}N_1)\,\boldsymbol{\pi} + g_{\Xi\Xi\pi}(N_2^+\boldsymbol{\tau}N_2)\,\boldsymbol{\pi} + g_{\Lambda\Sigma\pi}(\Lambda^+\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}^+\Lambda)\,\boldsymbol{\pi} - ig_{\Sigma\Sigma\pi}(\boldsymbol{\Sigma}^+ \times \boldsymbol{\Sigma})\,\boldsymbol{\pi} + \\ & - g_{NN\eta}(N_1^+N_1)\,\eta + g_{\Xi\Xi\eta}(N_2^+N_2)\,\eta + g_{\Lambda\Lambda\eta}(\Lambda^+\Lambda)\,\eta + g_{\Sigma\Sigma\eta}(\boldsymbol{\Sigma}^+\boldsymbol{\Sigma})\,\eta + \\ & + g_{N\Lambda K}\{(N_1^+K)\,\Lambda + \Lambda^+(K^+N_1)\} + g_{\Xi\Lambda K}\{(N_2^+K_c)\,\Lambda + \Lambda^+(K_c^+N_2)\} + \\ & + g_{N\Sigma K}\{\boldsymbol{\Sigma}^+(K^+\boldsymbol{\tau}N_1) + (N_1^+\boldsymbol{\tau}K)\,\boldsymbol{\Sigma}\} + g_{\Xi\Sigma K}\{\boldsymbol{\Sigma}^+(K_c^+\boldsymbol{\tau}N_2) + (N_2^+\boldsymbol{\tau}K_c)\,\boldsymbol{\Sigma}\}, \end{aligned} \tag{17,8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} & g_{NN\pi} = g_p, \quad g_{\Xi\Xi\pi} = -g_p(1-2\alpha_p), \\ & g_{\Lambda\Sigma\pi} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,g_p(1-\alpha_p), \quad g_{\Sigma\Sigma\pi} = 2g_p\alpha_p, \\ & g_{NN\eta} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,g_p(4\alpha_p-1), \\ & g_{\Xi\Xi\eta} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\,g_p(1+2\alpha_p), \\ & g_{\Sigma\Sigma\eta} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,g_p(1-\alpha_p), \quad g_{\Lambda\Lambda\eta} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,g_p(1-\alpha_p), \\ & g_{N\Lambda K} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\,g_p(1-2\alpha_p), \\ & g_{\Xi\Lambda K} = +\frac{1}{3}\sqrt{3}\,g_p(4\alpha_p-1), \quad g_{N\Sigma K} = g_p(1-2\alpha_p), \\ & g_{\Xi\Sigma K} = -g_p. \end{aligned}\right\} \tag{17,9}$$

Здесь мы использовали обозначения:

$$N_1=\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix},\quad N_2=\begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix},\quad K_c=\begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ -K^- \end{pmatrix}; \tag{17,10}$$

Λ, Σ, π и η для изоспиновых волновых функций частиц. Для того чтобы проиллюстрировать дальнейшее, мы рассмотрим более подробно взаимодействие η-мезона с барионами. Мы имеем $\eta = M_6$. Уравнения (17,4), (17,5) и (14,10) дают

$$L_{\text{вз}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}J_6M_6.$$

Используя изоскалярные факторы из табл. II, получим

$$J_6^{(1)}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\{B_1^+B_8-B_8^+B_1-B_2^+B_7-B_7^+B_2\}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\{B_3^+B_5-B_4^+B_4+B_5^+B_3\}-\frac{1}{\sqrt{5}}B_6^+B_6=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{5}}\{(\Xi^-)^+\Xi^-+p^+p+(\Xi^0)^+\Xi^0+n^+n\}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\{(\Sigma^-)^+\Sigma^-+(\Sigma^0)^+\Sigma^0+(\Sigma^+)^+\Sigma^+\}-\frac{1}{\sqrt{5}}\Lambda^+\Lambda-$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{5}}\{N_1^+N_1+N_2^+N_2\}+\frac{1}{\sqrt{5}}\{\Sigma^+\Sigma-\Lambda^+\Lambda\}$$

и

$$J_6^{(2)}=\frac{1}{2}\{B_1^+B_8-B_8^+B_1-B_2^+B_7+B_7^+B_2\}-\frac{1}{2}\{N_1^+N_1-N_2^+N_2\}.$$

Таким образом, используя (17,6), (17,7) и (17,9), получим

$$J_6=g_1J_6^{(1)}-g_2J^{(2)}=2\sqrt{2}\left[\left(-\frac{g_1}{4\sqrt{10}}+\frac{g_2}{4\sqrt{2}}\right)N_1^+N_1-\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{g_1}{4\sqrt{10}}-\frac{g_2}{4\sqrt{2}}\right)N_2^+N_2-\frac{1}{2\sqrt{10}}g_1(\Sigma^+\Sigma-\Lambda^+\Lambda)\right]=$$

$$=2\sqrt{2}\left[\frac{1}{3}\sqrt{3}\,g_p(4\alpha_p-1)N_1^+N_1-\frac{1}{3}\sqrt{3}\,g_p(1-2\alpha_p)N_2^+N_2-\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}\sqrt{3}g_p(1-\alpha_p)(\Sigma^+\Sigma-\Lambda^+\Lambda)\right]=$$

$$=2\sqrt{2}(g_{NN_\eta}N_1^+N_1+g_{\Xi\Xi_\eta}N_2^+N_2+g_{\Sigma\Sigma_\eta}\Sigma^+\Sigma+g_{\Lambda\Lambda_\eta}\Lambda^+\Lambda)$$

Это приводит непосредственно к лагранжиану взаимодействия (17,8).

Экспериментально известно очень хорошо постоянная [34] g_{NN_π}, а относительно постоянных $g_{\Lambda\Sigma_\pi}$ и $g_{\Sigma\Sigma_\pi}$ имеются только некоторые весьма грубые представления. Это определяет малость α_p [35]; по-видимому [36], $\alpha_p\sim{}^1/_4$.

Формула типа (17,8) описывает также взаимодействие векторных мезонов с барионами. Мы должны сделать замену $\pi\to\varrho$, $\eta\to\omega$ (или φ), $K\to K^*$ и $K_c\to K_c^*$.

Однако мы имеем в этом случае две константы связи $g_v^{(e)}$ и $g_v^{(m)}$ и два коэффициента $\alpha_v^{(e)}$ и $\alpha_v^{(m)}$ для связи магнитного или электрического типа.

В случае, если мезон φ является унитарным синглетом, лагранжиан взаимодействия этого мезона с октетом барионов имеет вид

$$L_{\text{вз}} = g\{N_1^+N_1 + \Lambda^+\Lambda - \Sigma^+\Sigma + N_2^+N_2\}\varphi. \tag{17,11}$$

Весьма изящный частный случай взаимодействия октета векторных мезонов с октетом барионов получится, если положить $\alpha_v^{(e)} = 1$. Мы восстановим тогда универсальное взаимодействие принадлежащих к унитарному октету векторных мезонов: ϱ-мезона ($I = 1$) с изоспиновым током и ω (или φ)-мезона ($I = 0$) с гиперзарядовым током, как и предполагалось Сакураи [37]. Унитарно синглетный векторный мезон имеет универсальное взаимодействие с барионным током.

§ 18. ТАБЛИЦА ИЗОСКАЛЯРНЫХ ФАКТОРОВ

В табл. I—VI представлены изоскалярные факторы для следующих случаев:

$$\{8\}\otimes\{8\} = \{27\}\oplus\{10\}\oplus\{10^*\}\oplus\{8\}_1\oplus\{8\}_2\oplus\{1\},$$

$$\{8\}\otimes\{10\} = \{35\}\oplus\{27\}\oplus\{10\}\oplus\{8\},$$

$$\{8\}\otimes\{27\} = \{64\}\oplus\{35\}\oplus\{35^*\}\oplus\{27\}_1\oplus\{27\}_2\oplus\{10\}\oplus\{10^*\}\oplus\{8\},$$

$$\{10\}\otimes\{10\} = \{35\}\oplus\{28\}\oplus\{27\}\oplus\{10^*\},$$

$$\{10\}\otimes\{10^*\} = \{64\}\oplus\{27\}\oplus\{8\}\oplus\{1\}.$$

При помощи свойств симметрии (14,3), (14,9) и (14,13) эти таблицы могут быть несколько расширены. В действительности уже некоторые данные, вошедшие в таблицы, можно было получить при помощи формул (14,3), (14,9) или (14,13) из других частей таблиц. Однако нам казалось, что опустив эти числа, мы создали бы неудобства пользования таблицами. В табл. I приводятся для некоторых случаев фазовые множители ξ_1, ξ_2 и ξ_3, что должно облегчить расширение таблицы изоскалярных факторов для этих случаев.

Таблица I

Фазовые множители, которые надо применять в формулах (14,1), (14,3), (14,8), (14,9), (14,12) и (14,13)

μ_1	μ_2	μ_3	ξ_1	ξ_2	ξ_3	μ_1	μ_2	μ_3	ξ_1	ξ_2	ξ_3
8	8	27	1	—1	1	8	10*	35*	1	—1	1
		10	—1	—1	1			27	—1	—1	1
		10*	—1	1	1			10*	—1	—1	—1
		8_1	1	1	1			8	1	—1	—1
		8_2	—1	—1	—1	10	10	28	1	1	1
		1	1	—1	1			35	—1	—1	1
8	10	35	1	—1	1			27	1	1	1
		27	—1	1	1			10*	—1	—1	1
		10	—1	—1	—1	10	10*	64	1	1	1
		8	1	1	—1			27	—1	1	—1
8	27	64	1	—1	1			8	1	1	1
		35	—1	—1	1			1	—1	1	—1
		35*	—1	1	1	10*	10*	28*	1	—1	1
		27_1	1	1	1			35*	—1	—1	1
		27_2	—1	—1	—1			27	1	—1	1
		10	1	—1	—1			10	—1	—1	1
		10*	1	1	—1						
		8	1	—1	1						

Таблица II

Изоскалярные факторы для $\{8\}\otimes\{8\}$. В таблице приведены изоскалярные факторы

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 8 & \mu_\gamma \\ I_1Y_1 & I_2Y_2 & IY \end{array}\right)$$

для КГ-ряда $\{8\}\otimes\{8\}=\{27\}\oplus\{10\}\oplus\{10^*\}\oplus\{8\}_1\oplus\{8\}_2\oplus\{1\}$.

$Y=2,\ I=1$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	27	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1;	$\frac{1}{2}$,	1	1	

$Y=2,\ I=0$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	10*	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1;	$\frac{1}{2}$,	1	-1	

$Y=1,\ I=\frac{2}{3}$

I_1,	Y_1,	I_2,	Y_2	27	10	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1;	1,	0	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	
1,	0;	$\frac{1}{2}$,	1	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	

$Y=0,\ I=0$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	27	8_1	1	8_2	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1;	$\frac{1}{2}$,	-1	$\sqrt{5}/10$	$\sqrt{10}/10$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	
$\frac{1}{2}$,	-1;	$\frac{1}{2}$,	1	$-\sqrt{5}/10$	$-\sqrt{10}/10$	$-1/2$	$\sqrt{2}/2$	
1,	0;	1,	0	$-\sqrt{10}/20$	$-\sqrt{15}/5$	$\sqrt{6}/4$	0	
0,	0;	0,	0	$3\sqrt{30}/20$	$-\sqrt{5}/5$	$-\sqrt{2}/4$	0	

$Y=1,\ I=\frac{1}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	27	8_1	8_2	10*	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1;	1,	0	$\sqrt{5}/10$	$3\sqrt{5}/10$	$1/2$	$-1/2$	
1,	0;	$\frac{1}{2}$,	1	$-\sqrt{5}/10$	$-3\sqrt{5}/10$	$1/2$	$-1/2$	
$\frac{1}{2}$,	1;	0,	0	$3\sqrt{5}/10$	$-\sqrt{5}/10$	$1/2$	$1/2$	
0,	0;	$\frac{1}{2}$,	1	$3\sqrt{5}/10$	$-\sqrt{5}/10$	$-1/2$	$-1/2$	

$Y=1,\ I=\frac{3}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	27	10*	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	-1;	1,	0	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	
1,	0;	$\frac{1}{2}$,	-1	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	

Продолжение табл. II

$Y=0,\ I=2$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	27	μ_γ
1,	0;	1,	0	1	

$Y=-1,\ I=\frac{1}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	27	8_1	8_2	10	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	-1;	1,	0	$-\sqrt{5}/10$	$-3\sqrt{5}/10$	1/2	1/2	
1,	0;	$\frac{1}{2}$,	-1	$\sqrt{5}/10$	$3\sqrt{5}/10$	1/2	1/2	
$\frac{1}{2}$,	-1;	0,	0	$3\sqrt{5}/10$	$-\sqrt{5}/10$	$-1/2$	1/2	
0,	0;	$\frac{1}{2}$,	-1	$3\sqrt{5}/10$	$-\sqrt{5}/10$	1/2	$-1/2$	

$Y=0,\ I=1$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	27	8_1	8_2	10	10*	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1;	$\frac{1}{2}$,	-1	$\sqrt{5}/5$	$-\sqrt{30}/10$	$\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{6}/6$	$\sqrt{6}/6$	
$\frac{1}{2}$,	-1;	$\frac{1}{2}$,	1	$\sqrt{5}/5$	$-\sqrt{30}/10$	$-\sqrt{6}/6$	$\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{6}/6$	
1,	0;	1,	0	0	0	$\sqrt{6}/3$	$\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{6}/6$	
1,	0;	0,	0	$\sqrt{30}/10$	$\sqrt{5}/5$	0	1/2	1/2	
0,	0,	1,	0	$\sqrt{30}/10$	$\sqrt{5}/5$	0	$-1/2$	$-1/2$	

$Y=-2,\ I=1$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	27	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	-1;	$\frac{1}{2}$,	-1	1	

$Y=-2,\ I=0$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	10	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	-1,	$\frac{1}{2}$,	-1	1	

Таблица III

Изоскалярные факторы для $\{8\}\otimes\{10\}$. В таблице приведены изоскалярные факторы

$$\left(\begin{matrix} 8 & 10 \\ I_1Y_1 & I_2Y_2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix}\mu_\gamma \\ IY\end{matrix}\right)$$

для КГ-ряда $\{8\}\otimes\{10\}=\{35\}\oplus\{27\}\oplus\{10\}\oplus\{8\}$.

$Y=2,\ I=2$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	35	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1,	$\frac{3}{2}$,	1	1	

$Y=2,\ I=1$

I_1,	Y_1,	I_2,	Y_2	27	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1,	$\frac{3}{2}$,	1	1	

$Y=1,\ I=\frac{5}{2}$

I_1,	Y_1	I_2,	Y_2	35	μ_γ
1,	0,	$\frac{3}{2}$,	1	1	

$Y=1,\ I=\frac{3}{2}$

I_1,	Y_1,	I_2,	Y_2	35	27	10	μ_γ
1	0,	$\frac{3}{2}$,	1	$-1/4$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{10}/4$	
0,	0	$\frac{3}{2}$,	1	$\sqrt{5}/4$	$-3/4$	$-\sqrt{2}/4$	
$\frac{1}{2}$	1,	1	0	$\sqrt{10}/4$	$\sqrt{2}/4$	$1/2$	

$Y=1,\ I=\frac{1}{2}$

I_1,	Y_1,	I_2	Y_2	27	8	μ_γ
1,	0,	$\frac{3}{2}$,	1	$\sqrt{5}/5$	$-2\sqrt{5}/5$	
$\frac{1}{2}$	1,	1,	0	$-2\sqrt{5}/5$	$-\sqrt{5}/5$	

$Y=0,\ I=2$

I_1,	Y_1,	I_2,	Y_2	35	27	μ_γ
1,	0,	1,	0	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	
$\frac{1}{2}$,	-1,	$\frac{3}{2}$,	1	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	

$Y=0,\ I=1$

I_1	Y_1,	I_2,	Y_2	35	27	10	8	μ_γ
1,	0,	1,	0	$-\sqrt{3}/6$	$-3\sqrt{5}/10$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{30}/15$	
0,	0,	1,	0	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{30}/10$	0	$-\sqrt{5}/5$	
$\frac{1}{2}$,	1,	$\frac{1}{2}$,	-1	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{5}/5$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{30}/15$	
$\frac{1}{2}$,	-1,	$\frac{1}{2}$,	1	$-\sqrt{3}/6$	$\sqrt{5}/10$	$\sqrt{3}/3$	$-2\sqrt{30}/15$	

Продолжение табл III

$Y=0,\ I=0$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	27	8	μ_γ
1,	0;	1,	0	$\sqrt{10}/5$	$-\sqrt{15}/5$	
$\frac{1}{2}$,	1;	$\frac{1}{2}$,	-1	$-\sqrt{15}/5$	$-\sqrt{10}/5$	

$Y=-1,\ I=\frac{3}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	35	27	μ_γ
1,	0,	$\frac{1}{2}$,	-1	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	
$\frac{1}{2}$,	-1,	1,	0	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	

$Y=-1,\ I=\frac{1}{2}$

I_1,	Y_1,	I_2,	Y_2	35	27	10	8	μ_γ
1,	0;	$\frac{1}{2}$,	-1	$-1/4$	$-7\sqrt{5}/20$	$\sqrt{2}/4$	$\sqrt{5}/5$	
0,	0;	$\frac{1}{2}$,	-1	$3/4$	$-3\sqrt{5}/20$	$\sqrt{2}/4$	$-\sqrt{5}/5$	
$\frac{1}{2}$,	1;	0,	-2	$\sqrt{2}/4$	$3\sqrt{10}/20$	$1/2$	$\sqrt{10}/5$	
$\frac{1}{2}$,	-1;	1,	0	$-1/2$	$\sqrt{5}/10$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{5}/5$	

$Y=-2,\ I=1$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	35	27	μ_γ
1,	0;	0,	-2	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	
$\frac{1}{2}$,	-1,	$\frac{1}{2}$,	-1	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	

$Y=-2,\ I=0$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	35	10	μ_γ
0,	0;	0,	-2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	
$\frac{1}{2}$,	-1;	$\frac{1}{2}$,	-1	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	

$Y=-3,\ I=\frac{1}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	35	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	-1;	0,	-2	1	

Таблица IV

Изоскалярные факторы для $\{8\} \otimes \{27\}$. В таблице приведены изоскалярные факторы

$$\left(\begin{matrix} 8 & 27 \\ I_1Y_1 & I_2Y_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \mu_\gamma \\ IY \end{matrix}\right)$$

для КГ-ряда $\{8\} \otimes \{27\} = \{64\} \oplus \{35\} \oplus \{35^*\} \oplus \{27\}_1 \oplus \{27\}_2 \oplus \{10\} \oplus \{10^*\} \oplus \{8\}$.

$Y=3,\ I=\frac{3}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1,	1,	2	1	

$Y=3,\ I=\frac{1}{2}$

I_1,	Y_1,	I_2,	Y_2	35*	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1,	1,	2	-1	

$Y=2,\ I=2$

I_1,	Y_1,	I_2,	Y_2	64	35	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1,	$\frac{3}{2}$,	1	$\sqrt{6}/3$	$-\sqrt{3}/3$	
1,	0,	1,	2	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{6}/3$	

$Y=2,\ I=1$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	35*	27_1	27_2	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1;	$\frac{3}{2}$,	1	$\sqrt{14}/21$	$-2\sqrt{3}$	$\sqrt{70}/14$	$\sqrt{6}/6$	
$\frac{1}{2}$,	1,	$\frac{1}{2}$,	1	$2\sqrt{70}/21$	$\sqrt{5}/6$	$-\sqrt{14}/28$	$\sqrt{30}/12$	
1,	0;	1,	2	$-\sqrt{21}/21$	$-\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{105}/14$	$1/2$	
0,	0,	1,	2	$\sqrt{14}/7$	$-1/2$	$-\sqrt{70}/28$	$-\sqrt{6}/4$	

$Y=2,\ I=0$

I_1,	Y_1,	I_2,	Y_2	35*	10*	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1,	$\frac{1}{2}$,	1	$-\sqrt{30}/6$	$-\sqrt{6}/6$	
1,	0,	1,	2	$\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{30}/6$	

$Y=1,\ I=\frac{5}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	35	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1;	2,	0	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{6}/3$	
1,	0;	$\frac{3}{2}$,	1	$\sqrt{6}/3$	$\sqrt{3}/3$	

Продолжение табл. IV

$Y=1,\ I=\frac{3}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	35	35*	27_1	27_2	10	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1;	2,	0	$\sqrt{7}/21$	$-1/12$	$-\sqrt{5}/6$	$5\sqrt{42}/56$	$\sqrt{10}/8$	$-5\sqrt{2}/12$	
$\frac{1}{2}$,	1;	1,	0	$5\sqrt{7}/21$	$-5/12$	$\sqrt{5}/6$	$-3\sqrt{42}/56$	$\sqrt{10}/8$	$-\sqrt{2}/12$	
1,	0;	$\frac{3}{2}$,	1	$-\sqrt{21}/63$	$7\sqrt{3}/36$	$-\sqrt{15}/9$	$-5\sqrt{14}/56$	$\sqrt{30}/8$	$5\sqrt{6}/36$	
1,	0,	$\frac{1}{2}$,	1	$5\sqrt{42}/63$	$5\sqrt{6}/18$	$\sqrt{30}/18$	$\sqrt{7}/7$	0	$\sqrt{3}/9$	
0,	0;	$\frac{3}{2}$,	1	$\sqrt{105}/21$	$-\sqrt{15}/12$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{70}/56$	$-\sqrt{6}/8$	$\sqrt{30}/12$	
$\frac{1}{2}$,	-1;	1,	2	$\sqrt{35}/21$	$\sqrt{5}/6$	$-1/3$	$-\sqrt{210}/28$	$-\sqrt{2}/4$	$-\sqrt{10}/6$	

$Y=1,\ I=\frac{1}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	35*	27_1	27_2	10*	8	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1;	1,	0	$\sqrt{35}/21$	$-\sqrt{10}/6$	$3\sqrt{105}/70$	$1/2$	$-1/3$	$2\sqrt{5}/15$	
$\frac{1}{2}$,	1;	0,	0	$2\sqrt{35}/21$	$\sqrt{10}/6$	$-\sqrt{105}/70$	$1/2$	$1/3$	$\sqrt{5}/15$	
1,	0;	$\frac{3}{2}$,	1	$-\sqrt{42}/63$	$\sqrt{3}/9$	$-\sqrt{14}/7$	0	$-\sqrt{30}/9$	$2\sqrt{6}/9$	
1,	0;	$\frac{1}{2}$,	1	$-\sqrt{210}/63$	$-5\sqrt{15}/36$	$-19\sqrt{70}/280$	$\sqrt{6}/8$	$7\sqrt{6}/36$	$\sqrt{30}/45$	
0,	0;	$\frac{1}{2}$,	1	$\sqrt{210}/21$	$-\sqrt{15}/12$	$-13\sqrt{70}/280$	$-\sqrt{6}/8$	$-\sqrt{6}/12$	$-\sqrt{30}/15$	
$\frac{1}{2}$,	-1;	1,	2	$-2\sqrt{7}/21$	$\sqrt{2}/12$	$-\sqrt{21}/28$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}/6$	$-2/3$	

Продолжение табл. IV

$Y=0,\ I=3$

$I_1,\ Y_1;\ I_2,\ Y_2$	64	μ_γ
1, 0; 2, 0	1	

$Y=0,\ I=2$

$I_1,\ Y_1;\ I_2,\ Y_2$	64	35	35*	27_1	27_2	μ_γ
$\frac{1}{2}$, 1; $\frac{3}{2}$, −1	$2\sqrt{21}/21$	$-3\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{210}/28$	$\sqrt{2}/4$	
$\frac{1}{2}$, −1; $\frac{3}{2}$, 1	$2\sqrt{21}/21$	$\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{210}/28$	$-\sqrt{2}/4$	
1, 0; 1, 0	$\sqrt{210}/21$	$\sqrt{30}/12$	$\sqrt{30}/12$	$\sqrt{21}/14$	0	
1, 0; 2, 0	0	$\sqrt{2}/4$	$-\sqrt{2}/4$	0	$\sqrt{3}/2$	
0, 0; 2, 0,	$\sqrt{7}/7$	$-1/2$	$-1/2$	$\sqrt{70}/14$	0	

$Y=0,\ I=1$

$I_1,\ Y_1;\ I_2,\ Y_2$	64	35	35*	27_1	27_2	10	10*	8	μ_γ
$\frac{1}{2}$, 1; $\frac{3}{2}$, −1	$2\sqrt{35}/63$	$-1/9$	$-5/18$	$3\sqrt{14}/28$	$\sqrt{30}/12$	$-2\sqrt{5}/9$	$-\sqrt{5}/9$	4/9	
$\frac{1}{2}$, −1; $\frac{3}{2}$, 1	$-2\sqrt{35}/63$	$5/18$	$1/9$	$-3\sqrt{14}/28$	$\sqrt{30}/12$	$-\sqrt{5}/9$	$-2\sqrt{5}/9$	$-4/9$	
$\frac{1}{2}$, 1; $\frac{1}{2}$, −1	$10\sqrt{7}/63$	$-\sqrt{5}/9$	$2\sqrt{5}/9$	$-3\sqrt{70}/70$	$\sqrt{6}/6$	$-1/9$	$4/9$	$2\sqrt{5}/45$	
$\frac{1}{2}$, −1, $\frac{1}{2}$, 1	$10\sqrt{7}/63$	$2\sqrt{5}/9$	$-\sqrt{5}/9$	$-3\sqrt{70}/70$	$-\sqrt{6}/6$	$-4/9$	$1/9$	$2\sqrt{5}/45$	
0, 0; 1, 0	$5\sqrt{7}/21$	$\sqrt{5}/6$	$-\sqrt{5}/6$	$-\sqrt{70}/70$	0	$1/3$	$-1/3$	$-2\sqrt{5}/15$	
1, 0; 0, 0	$10\sqrt{7}/63$	$2\sqrt{5}/9$	$2\sqrt{5}/9$	$4\sqrt{70}/70$	0	$2/9$	$-2/9$	$-\sqrt{5}/45$	
1, 0; 1, 0	0	$\sqrt{30}/12$	$-\sqrt{30}/12$	0	$1/2$	$\sqrt{6}/6$	$\sqrt{6}/6$	0	
1, 0; 2, 0	$-\sqrt{14}/63$	$\sqrt{10}/36$	$\sqrt{10}/36$	$-\sqrt{35}/14$	0	$5\sqrt{2}/18$	$-5\sqrt{2}/18$	$2\sqrt{10}/9$	

Продолжение табл. IV

$Y=0,\ I=0$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	27_1	27_2	8	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	1;	$\frac{1}{2}$,	−1	$2\sqrt{21}/21$	$\sqrt{210}/70$	$\sqrt{2}/2$	$2\sqrt{15}/15$	
$\frac{1}{2}$,	−1;	$\frac{1}{2}$,	1	$-2\sqrt{21}/21$	$-\sqrt{210}/70$	$\sqrt{2}/2$	$-2\sqrt{15}/15$	
1,	0;	1,	0	$-\sqrt{21}/21$	$-4\sqrt{210}/70$	0	$2\sqrt{15}/15$	
0,	0;	0,	0	$2\sqrt{7}/7$	$-4\sqrt{70}/70$	0	$-\sqrt{5}/5$	

$Y=-1,\ I=\frac{5}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	35*	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	−1;	1,	0	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{6}/3$	
1,	0;	$\frac{3}{2}$,	−1	$\sqrt{6}/3$	$\sqrt{3}/3$	

$Y=-1,\ I=\frac{3}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2	Y_2	64	35*	35	27_1	27_2	10*	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	−1;	2,	0	$-\sqrt{7}/21$	$1/12$	$\sqrt{5}/6$	$-5\sqrt{42}/56$	$\sqrt{10}/8$	$-5\sqrt{2}/12$	
$\frac{1}{2}$,	−1;	1,	0	$5\sqrt{7}/21$	$-5/12$	$\sqrt{5}/6$	$-3\sqrt{42}/56$	$-\sqrt{10}/8$	$\sqrt{2}/12$	
1,	0;	$\frac{3}{2}$,	−1	$\sqrt{21}/63$	$-7\sqrt{3}/36$	$\sqrt{15}/9$	$5\sqrt{14}/56$	$\sqrt{30}/8$	$5\sqrt{6}/36$	
1,	0;	$\frac{1}{2}$,	−1	$5\sqrt{42}/63$	$5\sqrt{6}/18$	$\sqrt{30}/18$	$\sqrt{7}/7$	0	$-\sqrt{3}/9$	
0,	0;	$\frac{3}{2}$,	−1	$\sqrt{105}/21$	$-\sqrt{15}/21$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{70}/56$	$\sqrt{6}/8$	$-\sqrt{30}/12$	
$\frac{1}{2}$,	1;	1,	−2	$\sqrt{35}/21$	$\sqrt{5}/6$	$-1/3$	$-\sqrt{210}/28$	$\sqrt{2}/4$	$\sqrt{10}/6$	

Продолжение табл. IV

$Y=-1,\ I=\frac{1}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	35	27_1	27_2	10	8	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	-1;	1,	0	$-\sqrt{35}/21$	$\sqrt{10}/6$	$-3\sqrt{105}/70$	$1/2$	$-1/3$	$-2\sqrt{5}/15$	
$\frac{1}{2}$,	-1;	0,	0	$2\sqrt{35}/21$	$\sqrt{10}/6$	$-\sqrt{105}/70$	$-1/2$	$-1/3$	$\sqrt{5}/15$	
1,	0;	$\frac{3}{2}$,	-1	$-\sqrt{42}/63$	$\sqrt{3}/9$	$-\sqrt{14}/7$	0	$\sqrt{30}/9$	$2\sqrt{6}/9$	
1,	0;	$\frac{1}{2}$,	-1	$\sqrt{210}/63$	$5\sqrt{15}/36$	$-19\sqrt{70}/280$	$\sqrt{6}/8$	$7\sqrt{6}/36$	$-\sqrt{30}/45$	
0,	0;	$\frac{1}{2}$,	-1	$\sqrt{210}/21$	$-\sqrt{15}/12$	$-13\sqrt{70}/280$	$\sqrt{6}/8$	$\sqrt{6}/12$	$-\sqrt{30}/15$	
$\frac{1}{2}$,	1;	1,	-2	$2\sqrt{7}/21$	$-\sqrt{2}/12$	$\sqrt{21}/28$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}/6$	$2/3$	

$Y=-2,\ I=2$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	35*	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	-1;	$\frac{3}{2}$,	-1	$\sqrt{6}/3$	$-\sqrt{3}/3$	
1,	0;	1,	-2	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{6}/3$	

$Y=-2,\ I=0$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	35	10	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	-1;	$\frac{1}{2}$,	-1	$\sqrt{30}/6$	$-\sqrt{6}/6$	
1,	0;	1,	-2	$\sqrt{6}/6$	$\sqrt{30}/6$	

$Y=-2,\ I=1$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	35	27_1	27_2	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	-1;	$\frac{3}{2}$,	-1	$-\sqrt{14}/21$	$2/3$	$-\sqrt{70}/14$	$\sqrt{6}/6$	
$\frac{1}{2}$,	-1;	$\frac{1}{2}$,	-1	$2\sqrt{70}/21$	$\sqrt{5}/6$	$-\sqrt{14}/28$	$-\sqrt{30}/12$	
1,	0;	1,	-2	$\sqrt{21}/21$	$\sqrt{6}/6$	$\sqrt{105}/14$	$1/2$	
0,	0;	1,	-2	$\sqrt{14}/7$	$-1/2$	$-\sqrt{70}/28$	$\sqrt{6}/4$	

$Y=-3,\ I=\frac{3}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	-1;	1,	-2	1	

$Y=-3,\ I=\frac{1}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	35	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	-1;	1,	-2	1	

Таблица V

Изоскалярные факторы для $\{10\}\otimes\{10\}$. В таблице приведены изоскалярные факторы

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & 10 & \mu_\gamma \\ I_1Y_1 & I_2Y_2 & IY \end{array}\right)$$

для КГ-ряда $\{10\}\otimes\{10\}=\{35\}\oplus\{28\}\oplus\{27\}\oplus\{10^*\}$.

$Y=2,\ I=3$

I_1,	Y_1,	I_2	Y_2	28	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1,	$\frac{3}{2}$,	1	1	

$Y=2,\ I=2$

I,	Y_1;	I_2,	Y_2	35	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1;	$\frac{3}{2}$,	1	-1	

$Y=2,\ I=1$

I_1,	Y_1,	I_2,	Y_2	27	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1;	$\frac{3}{2}$,	1	1	

$Y=0,\ I=1$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	35	27	10*	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1,	$\frac{1}{2}$,	-1	$-\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/3$	
$\frac{1}{2}$,	-1,	$\frac{3}{2}$,	1	$-\sqrt{6}/6$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/3$	
1,	0;	1;	0	$-\sqrt{6}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	

$Y=0,\ I=0$

I_1,	Y_1,	I_2,	Y_2	27	μ_γ
1,	0;	1,	0	1	

$Y=-1,\ I=\frac{3}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	28	35	27	10*	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1;	0,	-2	$\sqrt{5}/10$	$1/2$	$3\sqrt{5}/10$	$1/2$	
0,	-2,	$\frac{3}{2}$,	1	$\sqrt{5}/10$	$-1/2$	$3\sqrt{5}/10$	$-1/2$	
1,	0;	$\frac{1}{2}$,	-1	$3\sqrt{5}/10$	$1/2$	$-\sqrt{5}/10$	$-1/2$	
$\frac{1}{2}$,	-1;	1,	0	$3\sqrt{5}/10$	$-1/2$	$-\sqrt{5}/10$	$1/2$	

Продолжение табл. V

$Y=2,\ I=0$

$I_1,$	$Y_1;$	$I_2,$	Y_2	10*	μ_γ
$\frac{3}{2},$	1,	$\frac{3}{2},$	1	-1	

$Y=1,\ I=\frac{5}{2}$

$I_1,$	$Y_1;$	I_2	Y_2	28	35	μ_γ
$\frac{3}{2},$	1;	1,	0	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	
1,	0;	$\frac{3}{2},$	1	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	

$Y=1,\ I=\frac{3}{2}$

$I_1,$	$Y_1;$	$I_2,$	Y_2	35	27	μ_γ
$\frac{3}{2},$	1;	1,	0	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	
1,	0,	$\frac{3}{2},$	1	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	

$Y=-1,\ I=\frac{1}{2}$

$I_1,$	$Y_1;$	$I_2,$	Y_2	35	27	μ_γ
1,	0,	$\frac{1}{2},$	-1	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	
$\frac{1}{2},$	$-1;$	1,	0	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	

$Y=-2,\ I=1$

$I_1,$	$Y_1;$	$I_2,$	Y_2	28	35	27	μ_γ
1,	0;	0,	-2	$\sqrt{5}/5$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{30}/10$	
0,	$-2,$	1,	0	$\sqrt{5}/5$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{30}/10$	
$\frac{1}{2},$	$-1,$	$\frac{1}{2},$	-1	$\sqrt{15}/5$	0	$-\sqrt{10}/5$	

$Y=-2,\ I=0$

$I_1,$	$Y_1;$	$I_2,$	Y_2	35	μ_γ
$\frac{1}{2},$	$-1,$	$\frac{1}{2},$	-1	-1	

Продолжение табл. V

$Y=1,\ I=\frac{1}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	27	10*	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1;	1,	0	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	
1,	0;	$\frac{3}{2}$,	1	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	

$Y=-3,\ I=\frac{1}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	28	35	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	-1;	0;	-2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	
0,	-2;	$\frac{1}{2}$,	-1	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	

$Y=0,\ I=2$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	28	35	27	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1,	$\frac{1}{2}$,	-1	$\sqrt{5}/5$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{30}/10$	
$\frac{1}{2}$,	-1;	$\frac{3}{2}$,	1	$\sqrt{5}/5$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{30}/10$	
1,	0;	1,	0	$\sqrt{15}/5$	0	$-\sqrt{10}/5$	

$Y=-4,\ I=0$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	28	μ_γ
0,	-2;	0,	-2	1	

Таблица VI

Изоскалярные факторы для $\{10\} \otimes \{10^*\}$. В таблице приведены изоскалярные факторы для

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & 10^* & \mu_\gamma \\ I_1Y_1 & I_2Y_2 & IY \end{array}\right)$$

для КГ-ряда $\{10\} \otimes \{10^*\} = \{64\} \oplus \{27\} \oplus \{8\} \oplus \{1\}$.

$Y=3,\ I=\frac{3}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1;	0,	2	1	

$Y=2,\ I=2$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1;	$\frac{1}{2}$,	1	1	

$Y=2,\ I=1$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	27	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1;	$\frac{1}{2}$,	1	$\sqrt{21}/7$	$2\sqrt{7}/7$	
1	0;	0,	2	$2\sqrt{7}/7$	$-\sqrt{21}/7$	

$Y=1,\ I=\frac{5}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	μ_γ
$\frac{5}{2}$,	1;	1,	0	1	

$Y=0,\ I=1$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	27	8	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1;	$\frac{3}{2}$,	-1	$\sqrt{21}/21$	$\sqrt{14}/7$	$\sqrt{6}/3$	
1,	0;	1,	0	$\sqrt{210}/21$	$3\sqrt{35}/35$	$-2\sqrt{15}/15$	
$\frac{1}{2}$,	-1;	$\frac{1}{2}$,	1	$\sqrt{210}/21$	$-4\sqrt{35}/35$	$\sqrt{15}/15$	

$Y=0,\ I=0$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	27	8	1	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1;	$\frac{3}{2}$,	-1	$\sqrt{35}/35$	$\sqrt{210}/35$	$\sqrt{10}/5$	$\sqrt{10}/5$	
1,	0;	1,	0	$2\sqrt{105}/35$	$\sqrt{70}/14$	0	$-\sqrt{30}/10$	
$\frac{1}{2}$,	-1;	$\frac{1}{2}$,	1	$3\sqrt{70}/35$	$-\sqrt{105}/35$	$-\sqrt{5}/5$	$\sqrt{5}/5$	
0,	-2;	0,	2	$2\sqrt{35}/35$	$-3\sqrt{210}/70$	$\sqrt{10}/5$	$-\sqrt{10}/10$	

$Y=-1;\ I=\frac{5}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	μ_γ
1,	0;	$\frac{3}{2}$,	-1	1	

$Y=-1,\ I=\frac{3}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	27	μ_γ
1,	0;	$\frac{3}{2}$,	-1	$\sqrt{14}/7$	$\sqrt{35}/7$	
$\frac{1}{2}$,	-1;	1,	0	$\sqrt{35}/7$	$-\sqrt{14}/7$	

Продолжение табл. VI

$Y=-1,\ I=\frac{1}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	27	8	μ_γ
1,	0;	$\frac{3}{2}$,	-1	$\sqrt{7}/7$	$4\sqrt{35}/35$	$\sqrt{10}/5$	
$\frac{1}{2}$,	-1,	1,	0	$2\sqrt{7}/7$	$\sqrt{35}/35$	$-\sqrt{10}/5$	
0,	-2;	$\frac{1}{2}$,	1	$\sqrt{14}/7$	$-3\sqrt{70}/35$	$\sqrt{5}/5$	

$Y=-2,\ I=2$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	-1;	$\frac{3}{2}$,	-1	1	

$Y=-2,\ I=1$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	27	μ_γ
$\frac{1}{2}$,	-1;	$\frac{3}{2}$,	-1	$\sqrt{21}/7$	$2\sqrt{7}/7$	
0,	-2;	1,	0	$2\sqrt{7}/7$	$-\sqrt{21}/7$	

$Y=-3,\ I=\frac{3}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	μ_γ
0,	2;	$\frac{3}{2}$,	-1	1	

$Y=1,\ I=\frac{3}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	27	μ_γ
$\frac{5}{2}$,	1;	1,	0	$\sqrt{14}/7$	$\sqrt{35}/7$	
1,	0;	$\frac{1}{2}$,	1	$\sqrt{35}/7$	$-\sqrt{14}/7$	

$Y=1,\ I=\frac{1}{2}$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	27	8	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1;	1,	0	$\sqrt{7}/7$	$4\sqrt{35}/35$	$\sqrt{10}/5$	
1,	0;	$\frac{1}{2}$,	1	$2\sqrt{7}/7$	$\sqrt{35}/35$	$-\sqrt{10}/5$	
$\frac{1}{2}$,	-1;	0,	2	$\sqrt{14}/7$	$-3\sqrt{70}/35$	$\sqrt{5}/5$	

$Y=0,\ I=3$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1;	$\frac{3}{2}$,	-1	1	

$Y=0,\ I=2$

I_1,	Y_1;	I_2,	Y_2	64	27	μ_γ
$\frac{3}{2}$,	1;	$\frac{3}{2}$,	-1	$\sqrt{7}/7$	$\sqrt{42}/7$	
1,	0;	1,	0	$\sqrt{42}/7$	$-\sqrt{7}/7$	

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. R. E. Behrends, J. Dreitlein, C. Fronsdal, and B. W. Lee, Rev. Mod. Phys. **34**, 1 (1962).
2. D. R. Speiser and J. Tarski, Math. Phys. **4**, 588 (1963).
3. М. Гелл-Манн, в сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля», М., Изд-во «Мир», 1964, стр. 117.
4. Y. Ne'eman, Nucl. Phys. **26**, 222 (1961) (см. перевод в [3], стр. 176).
5. G. Alexander, G. R. Kalbfleisch, D. H. Miller and G. A. Smith, Phys. Rev. Letts. **8**, 447 (1962).
6. Proceedings of the 1962 Annual International Conference on High-Energy Physics at CERN (CERN, Geneva, 1962).
7. M. Gell-Mann, см. [6], стр. 805.
8. G. M. Pjerrou, D. J. Prowse, P. Schlein, W. E. Slater, D. H. Stork and H. K. Ticho, см. [6], стр. 289.
9. L. Bertanza, W. Brisson, P. L. Conolly, E. L. Hart, I. S. Mittra, G. C. Moneti, R. R. Rau, N. P. Samios, S. S. Yamamoto, M. Goldberg, L. Gray, J. Leitner, S. Lichtman and J. Westgard, см. [6], стр. 279.
10. S. Okubo, Progr. Theoret. Phys. (Kyoto) **27**, 949 (1962).
11. S. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. Letts. **6**, 423 (1961).
12. A. R. Edmonds, Proc. Roy. Soc. (London) **A268**, 567 (1962).
13. M. A. Rashid, Nuovo cimento **26**, 118 (1962).
14. C. Eckart, Rev. Mod. Phys. **2**, 302 (1930); Е. Вигнер, Теория групп, М., ИЛ, 1961.
15. D. R. Speiser, Proceedings of the Istanbul International Summer School, 1962.
16. R. H. Dalitz, Lectures, University of Chicago, 1962.
17. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М., Гостехиздат, 1954.
18. G. A. Levinson, H. J. Lipkin and S. Meshkov, Phys. Letts. **1**, 44, 125 and 307 (1962); Nuovo cimento **23**, 236 (1962); Phys. Rev. Letts. **10**, 361 (1962).
19. A. J. Macfarlane, E. C. G. Sudarshan and C. Dullemond, Nuovo cimento **30**, 845 (1963).
20. H. B. G. Casimir, Proc. Roy. Acad. Amsterdam **34**, 844 (1931).
21. M. Hamermesh, Group Theory and its Application to Physical Problems, Addison — Wesley Publishing Company, New York, 1962, Sec. 8—13.
22. I. Schur, Sitzber. Preuss. Acad. Wiss. Phys. Math. Kl. **24**, 406 (1905).
23. G. Racah, Group Theory and Spectroscopy, Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, 1951.
24. Е. Кондон и Г. Шортли, Теория атомных спектров, М., ИЛ, 1949.
25. L. C. Biedenharn, Phys. Letts. **3**, 69, 254 (1962); J. Math. Phys. **4**, 436 (1963); см. также: G. E. Baird and L. C. Biedenharn, J. Math. Phys. **4**, 1449 (1963).
26. M. E. Rose, Theory of Angular Momentum, John Wiley, New York, 1957.
27. M. A. Rashid and I. I. Yamanaka, Phys. Rev. **131**, 2797 (1963).
28. W. H. Barkas and A. H. Rosenfeld, University of California, Berkeley, 1960, UCRL-8050.
29. L. Bertanza, W. Brisson, P. L. Conolly, E. L. Hart, I. S. Mittra, G. C. Moneti, R. R. Rau, N. P. Samios, I. O. Skillicorn, S. S. Yamamoto, M. Goldberg, L. Gray, J. Leitner, S. Lichtman and J. Westgard, Proceedings of the 1962 Annual International Conference on High-Energy Physics at CERN (CERN, Geneva, 1962), стр. 437.
30. D. H. Stork, Bull. Amer. Phys. Soc. **8**, 46 (1963).
31. B. P. Gregory, см. [6], стр. 779.
32. J. J. Sakurai, Phys. Rev. Letts. **9**, 472 (1962).
33. P. Schlein, W. E. Slater, L. T. Smith, D. H. Stork and H. K. Ticho, Phys. Rev. Letts. **10**, 368 (1963); P. L. Connolly, E. L. Hart, K. W. Lai, G. London, G. C. Moneti, R. R. Rau, N. P. Samios, I. O. Skillicorn, S. S. Yamamoto, M. Goldberg, M. Gundzik, J. Leitner and Lichtman, Phys. Rev. Letts. **10**, 371 (1963).
34. T. Spearman, Nucl. Phys. **16**, 402 (1960); G. Salzman and H. Schnitzer, Phys. Rev. **113**, 1153 (1959).
35. J. J. de Swart and C. K. Iddings, Phys. Rev. **130**, 319 (1963).
36. A. W. Martin and K. C. Wali, Phys. Rev. **130**, 2455 (1963).
37. J. J. Sakurai, Ann. Phys. (N. Y.) **11**, 1 (1960).