

548.0:53

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИСЛОКАЦИЙ***А. М. Косевич***ВВЕДЕНИЕ**

Понятие дислокации в кристалле и связанные с ним различные дислокационные представления и дислокационные модели в последнее десятилетие необычайно широко используются для теоретического истолкования многих весьма разнообразных физических явлений, наблюдаемых при изучении пластичности и прочности твердых тел. Большой успех дислокационных представлений среди физиков и инженеров, обсуждающих с «единой точки зрения» огромное количество экспериментальных фактов, в значительной мере, по-видимому, связан с тем, что понятие дислокации очень широко: оно допускает многообразные микроскопические модели структуры и свойств этой особенности в кристалле. Последнее позволяет очень легко приспособить дислокационные модели в кристалле любой симметрии к описанию ряда явлений неупругого деформирования, не имеющих, на первый взгляд, общей физической природы.

Однако большая часть существенных физических свойств дислокаций не связана с их микроскопическими моделями и может быть описана феноменологически в рамках макроскопической теории упругости в такой же мере, в какой теория упругости позволяет описывать распространение в кристаллическом теле звуковых волн не очень малой длины. Теорию дислокаций, основанную на представлениях сплошной среды и базирующуюся на теории упругости, принято называть континуальной теорией дислокаций. Континуальная теория дислокаций в настоящее время хорошо развита и может быть сформулирована и изложена в таком же виде, как и другие разделы теоретической физики. В частности, существует полная система уравнений, связывающая в общем случае упругие поля с распределением дислокаций и их потоков. Известны строгие соотношения для нахождения пластической деформации тела по известному движению дислокаций.

Настоящий обзор представляет собой попытку дать изложение основ континуальной теории дислокаций, т. е. показать место дислокаций в общей схеме теории упругости и изложить свойства дислокаций, не зависящие от их микроскопических моделей. Перед предлагаемым обзором не ставилась цель рассмотреть применение теории дислокаций к конкретным вопросам пластичности и прочности твердых тел, чему посвящено большое число обзоров, монографий и сборников (см., например, 1-7).

Приведенный в конце обзора список цитированной литературы может служить лишь кратким библиографическим указателем по теории дислокаций. Довольно полный перечень работ по теории дислокаций содержится в монографиях <sup>5, 8</sup> и обзорах <sup>6, 9-13</sup>, а также в соответствующем разделе

Библиографического указателя по дислокациям \*). Кроме того, подчеркнем, что при упоминании некоторого утверждения или результата, как правило, ссылка дается не на источник, где впервые формулируется или доказывается этот результат, а на последнее издание, в котором он, по нашему мнению, изложен наиболее общо и просто.

## § 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСЛОКАЦИИ. ПЛОТНОСТЬ ДИСЛОКАЦИЙ

Дислокацией в сплошной среде называют особенность поля вектора смещения (а следовательно, поля деформаций и напряжений), расположенную вдоль некоторой линии и обладающую таким свойством (см., например, <sup>11</sup>): если описать замкнутый контур  $\mathcal{L}$ , охватывающий один раз линию дислокации  $\mathcal{D}$  (рис. 1), то при обходе по этому контуру вектор упругого смещения среды  $\mathbf{u}$  получает определенное приращение:

$$\oint_{\mathcal{L}} dx_i \nabla_i u_k = -b_k, \quad \nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1,1)$$

где  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) — декартовы координаты, а  $\mathbf{b}$  — заданный вектор (вектор Бюргерса). В формуле (1,1), как и в дальнейшем, по дважды встречающимся индексам производится суммирование от 1 до 3.



Рис. 1.

Направление обхода контура  $\mathcal{L}$  связано по правилу правого винта с выбранным направлением обхода петли дислокации  $\mathcal{D}$ , т. е. с направлением единичного вектора касательной к линии дислокации  $\boldsymbol{\tau}$  (рис. 1).

Условие (1,1) означает, что при наличии дислокации в среде вектор упругого смещения  $\mathbf{u}$  является неоднозначной функцией координат: он получает заданное приращение при обходе вокруг линии дислокации \*\*).

Из уравнения (1,1) вытекают два важных следствия, вывод которых очевиден<sup>9</sup>:

- 1) Линия дислокации всегда замкнута либо выходит обоими концами на поверхность твердого тела.
- 2) Вектор  $\mathbf{b}$  имеет одно и то же значение вдоль всей линии дислокации  $\mathcal{D}$ . Последнее следствие иногда называют законом сохранения вектора Бюргерса вдоль дислокации.

Цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны вектору  $\mathbf{b}$ , а направляющая совпадает с линией дислокации, называется поверхностью скольжения дислокации. Эта поверхность является огибающей семейства плоскостей скольжения всех элементов дислокации. Под плоскостью скольжения элемента дислокации понимается касательная плоскость к соответствующему элементу линии, заданная векторами  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{b}$ .

\*) Л. В. Матвеева, Дислокации в кристаллах. Библиографический указатель, под редакцией В. Л. Инденбома, М., 1960.

\*\*) Заметим, что в среде с отдельной петлей дислокации  $\mathcal{D}$  вместо неоднозначного вектора упругого смещения всегда можно ввести однозначный вектор  $\mathbf{u}$ , если произвести воображаемый разрез среды по произвольной поверхности  $S$ , опирающейся на линию  $\mathcal{D}$ , и вместо условия (1,1) задать разность значений  $\mathbf{u}$  на противоположных берегах разреза:

$$\delta \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_- = \mathbf{b}, \quad (1,1a)$$

где  $\mathbf{u}_+$  и  $\mathbf{u}_-$  — значения  $\mathbf{u}$  соответственно на «верхнем» и «нижнем» берегах разреза. Направление «вверх» (положительное направление) определяется в правовинтовой системе направлением обхода линии  $\mathcal{D}$ .

Возвращаясь к исходному определению (1,1), перепишем его в виде

$$\oint_{\mathcal{L}} dx_i u_{ik} = -b_k, \quad u_{ik} = \nabla_i u_k. \quad (1.2)$$

Входящий в (1,2) тензор  $u_{ik}$  в теории дислокаций принято называть тензором упругой дисторсии. Его симметричная часть дает обычный тензор упругой деформации  $\varepsilon_{ik}$ .

В дополнение к условию (1,1), определяющему тип дислокационной особенности, предполагается<sup>9, 11</sup>, что при наличии дислокаций в среде тензор упругой дисторсии  $u_{ik}$  есть однозначная функция координат, непрерывная и дифференцируемая во всем пространстве \*). В теории дислокаций тензор дисторсии удобно считать самостоятельной величиной, описывающей деформацию кристалла.

Определение (1,2) можно обобщить, представив вектор Бюргерса  $\mathbf{b}$  в виде интеграла по поверхности  $S$ , опирающейся на контур  $\mathcal{L}$ :

$$b_i = \int_S dS_k \alpha_{ki}, \quad (1.3)$$

где  $\alpha_{ik}$  — тензор плотности вектора Бюргерса (тензор плотности дислокаций)<sup>8-12</sup>.

Тогда вместо (1,2) мы будем иметь

$$\oint_{\mathcal{L}} dx_k u_{ki} = - \int_S dS_k \alpha_{ki}. \quad (1.4)$$

В случае отдельной линейной дислокации тензор  $\alpha_{ik}$  в соответствии с (1,3) имеет вид

$$\alpha_{ik} = \tau_i b_k \delta(\xi), \quad (1.5)$$

где  $\tau$  — единичный вектор касательной к линии дислокации (рис. 1).  $\delta(\xi)$  — двумерная  $\delta$ -функция, а  $\xi$  — двумерный радиус-вектор, отсчитанный от оси дислокации в плоскости, перпендикулярной к вектору  $\tau$  в данной точке.

Поскольку контур  $\mathcal{L}$  и опирающаяся на него поверхность  $S$  в (1,4) произвольны, из (1,4) следует

$$e_{ilm} \nabla_l u_{mk} = -\alpha_{ik}, \quad (1.6)$$

где  $e_{ilm}$  — единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Как видно из (1,6), тензор  $\alpha_{ik}$  должен удовлетворять условию

$$\nabla_i \alpha_{ik} = 0, \quad (1.7)$$

которое в случае линейной дислокации выражает собой закон сохранения вектора Бюргерса вдоль линии дислокации.

Уравнения (1,4) и (1,6) допускают естественное обобщение на случай непрерывного распределения дислокаций в среде<sup>8-12</sup>. Для осуществления такого обобщения следует считать плотность вектора Бюргерса  $\alpha_{ik}$  некоторой непрерывной функцией координат, удовлетворяющей условию (1,7).

\*) Если ограничиться требованием, чтобы тензор деформации  $\varepsilon_{ik}$ , а не тензор дисторсии  $u_{ik}$ , обладал однозначностью, непрерывностью и дифференцируемостью, то возможно включить в рассмотрение дислокации более общего типа, чем те, которые определяются свойством (1,1) (см., например, <sup>9</sup>).

## § 2. ТЕНЗОР ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ДИСЛОКАЦИЙ

Условие (1,4) и уравнение (1,6), являющиеся основными соотношениями, вводящими дислокации в теорию упругости, не зависят от того, покоятся или движутся дислокации. Однако очевидно, что в динамическом случае изменение тензора дисторсии со временем должно существенно определяться характером движения дислокаций.

Если при смещении элементов среды дислокации остаются неподвижными, то имеет место очевидное равенство

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial t} = \nabla_i v_k, \quad (2,1)$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  — скорость смещения элемента среды с координатами  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ .

Если же дислокации движутся и плотность дислокаций меняется со временем, то равенство (2,1) не совместимо с (1,6), поэтому мы заменим его уравнением<sup>14</sup>

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial t} = \nabla_i v_k + j_{ik}, \quad (2,2)$$

в котором тензор  $j_{ik}$  должен быть выбран так, чтобы (1,6) и (2,2) были совместными.

Условие совместности (1,6) и (2,2) имеет вид уравнения

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial t} - e_{ilm} \nabla_l j_{mk} = 0. \quad (2,3)$$

Легко убедиться, что (2,3) является дифференциальной формой закона сохранения вектора Бюргерса в среде. Действительно, рассмотрим в упругой среде некоторую неподвижную замкнутую линию  $\mathcal{L}$ . Возьмем произвольную поверхность, опирающуюся на линию  $\mathcal{L}$ , и введем по формуле (1,3) полный вектор Бюргерса  $\mathbf{b}$  дислокаций, «сцепленных» с этой поверхностью, т. е. охваченных линией  $\mathcal{L}$ . Тогда элементарным путем из (2,3) можно получить

$$\frac{db_k}{dt} = - \oint_{\mathcal{L}} dl_i j_{ik}. \quad (2,4)$$

Из смысла соотношения (2,4) следует, что интеграл в правой части (2,4) определяет величину вектора Бюргерса, «протекающего» в единицу времени через контур  $\mathcal{L}$ , т. е. уносимого дислокациями, пересекающими линию  $\mathcal{L}$ . Поэтому тензор  $j_{ik}$  естественно назвать плотностью потока дислокаций, а уравнение (2,3) — уравнением непрерывности потока дислокаций. Уравнение, совпадающее по форме записи с (2,3), было получено Холлендером<sup>15</sup>, однако оно связывало несколько другие величины.

Определение тензора  $j_{ik}$  становится однозначным, если заметить, что плотность потока дислокаций непосредственно определяет скорость пластической деформации среды. Чтобы убедиться в этом, заметим, что вектор  $\mathbf{v}$  есть скорость полного геометрического смещения элемента среды, поэтому он определяет скорость полной геометрической дисторсии  $U_{ik}$ :

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial t} = \nabla_i v_k. \quad (2,5)$$

С помощью (2,5) перепишем (2,2) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_{ik} - u_{ik}) = -j_{ik}. \quad (2,6)$$

Разность  $U_{ik} - u_{ik}$  определяет ту часть тензора полной дисторсии, которая не связана с упругими напряжениями и обычно называется пластической дисторсией тела. Обозначая эту величину  $u_{ik}^{п\pi}$ , получим

$$\frac{\partial u_{ik}^{п\pi}}{\partial t} = -j_{ik}. \quad (2,7)$$

Таким образом, изменение тензора пластической дисторсии в некоторой точке среды за малое время  $\delta t$  равно

$$\delta u_{ik}^{п\pi} = -j_{ik} \delta t. \quad (2,8)$$

Если написать соотношение типа (2,8) для тензора пластической деформации  $\epsilon_{ik}^{п\pi}$ , то оно будет иметь вид

$$\delta \epsilon_{ik}^{п\pi} = -J_{ik} \delta t, \quad J_{ik} = \text{Sy} \{j_{ik}\}, \quad (2,9)$$

где символ  $\text{Sy} \{ \dots \}$  означает, что берется симметричная часть тензора второго ранга.

Соотношение, равноценное (2,7) — (2,9), но в другой форме записи, было указано Крёнером и Ридером<sup>16</sup>.

Исходя из физического смысла плотности потока дислокаций, легко установить соотношение между тензорами  $j_{ik}$  и  $\alpha_{ik}$  при известной скорости движения дислокаций.

Рассмотрим вначале линейную дислокацию с вектором Бюргерса  $\mathbf{b}$ , каждая точка петли которой перемещается со скоростью  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , и вычислим поток вектора Бюргерса, создаваемый такими дислокациями при пересечении некоторой линии  $\mathcal{L}$  (рис. 2). Если  $d\mathbf{l}$  — элемент дуги линии  $\mathcal{L}$ , а  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор касательной к петле дислокации в окрестности точки пересечения с линией  $\mathcal{L}$ , то пересечение линии  $\mathcal{L}$  петлей дислокации с переносом вектора Бюргерса произойдет лишь в том случае, когда имеется составляющая скорости  $\mathbf{V}$ , перпендикулярная как к  $d\mathbf{l}$ , так и к  $\boldsymbol{\tau}$ . Очевидно, что число таких пересечений элемента  $d\mathbf{l}$  «параллельными» петлями дислокаций в единицу времени определяется величиной

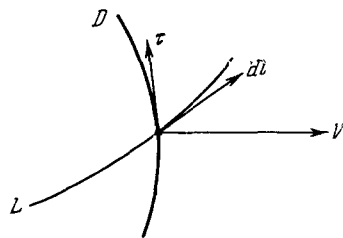


Рис. 2.

$$N [d\mathbf{l}, \boldsymbol{\tau}] \mathbf{V},$$

где  $N$  — это число рассматриваемых дислокаций, приходящихся на единичную площадку плоскости, перпендикулярной к  $\boldsymbol{\tau}$ .

Поэтому поток составляющей вектора Бюргерса  $b_k$  через линию  $\mathcal{L}$  равен

$$\int_{\mathcal{L}} dl_i j_{ik} = \int_{\mathcal{L}} N [d\mathbf{l}, \boldsymbol{\tau}] \mathbf{V} b_k, \quad (2,10)$$

Из (2,10) следует, что в случае линейных дислокаций, имеющих в рассматриваемой точке пространства одинаковые скорости,

$$j_{ik} = N e_{ilm} \tau_l b_k V_m. \quad (2,11)$$

В случае непрерывного распределения дислокаций тензор  $j_{ik}$  является непрерывной функцией координат, удовлетворяющей условию (2,3). Тензор  $j_{ik}$  имеет самостоятельный смысл и является основной характеристикой движения дислокаций.

Специальный интерес представляет связь следа тензора  $j_{ik}$  ( $j_0 \equiv j_{kk}$ ) с уравнением непрерывности сплошной среды<sup>14</sup>. Свертка  $j_0$  входит в уравнение, получающееся из (2,2):

$$\operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} = -j_0. \quad (2,12)$$

Нетрудно выяснить физическое содержание уравнения (2,12). Действительно, свертка  $\varepsilon_{kk}$  есть относительное упругое изменение объема элемента среды, связанное очевидным образом с соответствующим относительным изменением ее плотности:

$$\varepsilon_{kk} = -\frac{\delta \varrho}{\varrho} \quad (2,13)$$

( $\varrho$  — плотность среды).

Подставляя (2,13) в (2,12) и используя линейность теории, мы приходим к соотношению

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = -\varrho j_0. \quad (2,14)$$

Если при движении дислокации перемещение элементов среды происходит без нарушения сплошности, то в силу уравнения непрерывности левая часть (2,14) исчезает и

$$j_0 \equiv j_{kk} = 0. \quad (2,15)$$

Сравнивая (2,15) с (2,9), мы видим, что утверждения о равенстве нулю  $j_0$  и о том, что соответствующая пластическая деформация не связана с изменением объема тела, эквивалентны.

Для линейных дислокаций условие (2,15) имеет простой смысл. Действительно, в случае отдельной линейной дислокации свертка  $j_0$  пропорциональна  $[\mathbf{b}, \boldsymbol{\tau}] \cdot \mathbf{V}$  (см. хотя бы (2,11)), т. е. пропорциональна проекции скорости дислокации на направление, перпендикулярное к векторам  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{b}$ , другими словами, на направление, перпендикулярное к плоскости скольжения дислокации. Таким образом, (2,15) означает, что при сохранении непрерывности среды вектор скорости дислокации  $\mathbf{V}$  всегда лежит в ее плоскости скольжения, а следовательно, механическое движение дислокации может происходить лишь в этой плоскости<sup>9-11</sup>.

Если же движение дислокации сопровождается образованием некоторых разрывов сплошности, например макроскопическим скоплением вакансий вдоль участка линии дислокации, то левая часть (2,14) отличается от нуля и равна скорости относительного неупругого увеличения массы некоторого элементарного объема среды (или, соответственно, уменьшения его удельного объема). Обозначим через  $q(\mathbf{r}, t)$  относительное увеличение удельного объема среды в точке  $\mathbf{r}$  в единицу времени; тогда

$$j_0 = q(\mathbf{r}, t). \quad (2,16)$$

Из (2,16) вытекает, что движение дислокации в направлении, перпендикулярном к ее плоскости скольжения («переползание дислокации»), возможно за счет образования (или уничтожения) некоторой цепочки вакансий или междоузельных атомов.

### § 3. УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ДВИЖУЩИМИСЯ ДИСЛОКАЦИЯМИ. УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ. ДИСЛОКАЦИОННЫЙ МОМЕНТ

Составим полную систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику упругого тела, в котором имеются движущиеся дислокации. Будем считать, что перемещение дислокации не сопровождается переносом массы, и учтем, что с линией дислокации не связано никакого

дополнительного распределения сосредоточенной объемной силы<sup>11</sup>. Тогда уравнение движения упругой среды в линейном по скорости смещения приближении следует писать обычно:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \nabla_k \sigma_{ki}, \quad (3,1)$$

где тензор упругих напряжений  $\sigma_{ik}$  связан законом Гука с тензором упругих деформаций:

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} \varepsilon_{lm} = \lambda_{iklm} u_{lm}. \quad (3,2)$$

В соотношение (3,2) входят обычные модули упругости  $\lambda_{iklm}$ .

Уравнение (3,1) вместе с уравнением (1,6) и (2,2) составляет систему уравнений теории упругости для динамического поля деформаций в среде с движущимися дислокациями.

Для упрощения записи уравнений этой системы мы будем обозначать любой тензор второго ранга  $A_{ik}$  символом  $\hat{\mathbf{A}}$  и введем обозначения<sup>8</sup>:

$$\text{Rot } \hat{\mathbf{A}} \equiv (\varepsilon_{ilm} \nabla_l A_{mk}), \quad \text{Div } \mathbf{A} \equiv (\nabla_i A_{ik}), \quad \text{Grad } \mathbf{a} \equiv (\nabla_i a_k). \quad (3,3)$$

Тогда система уравнений (1,6), (2,2) и (3,1) может быть представлена в виде<sup>14</sup>

$$\text{Rot } \hat{\mathbf{u}} = -\hat{\mathbf{a}}, \quad (3,4)$$

$$\text{Div } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad \sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}. \quad (3,5)$$

$$\text{Grad } \mathbf{v} = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} - \hat{\mathbf{j}}. \quad (3,6)$$

При заданных тензорах  $\hat{\mathbf{a}}$  и  $\hat{\mathbf{j}}$ , т. е. при заданных плотностях дислокаций и их потоков, система (3,4) — (3,6) является полной. Условиями совместности этой системы являются «законы сохранения» (1,7) и (2,3):

$$\text{Div } \hat{\mathbf{a}} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{a}}}{\partial t} + \text{Rot } \hat{\mathbf{j}} = 0. \quad (3,7)$$

Система (3,4) — (3,6) позволяет найти  $\hat{\mathbf{u}}$  (или  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ ) и  $\mathbf{v}$  по любому известному распределению дислокаций и их потоков. Общее решение этой системы для случая изотропной среды было указано в работе автора<sup>14</sup>.

Поскольку мы приняли закон Гука (3,2) с тензором модулей упругости, обладающим обычными свойствами симметрии, упругие напряжения определяются лишь симметричной частью тензора дисторсии (тензором деформаций). В связи с этим иногда бывает удобно представить систему уравнений (3,4) — (3,6) в такой записи, которая содержит лишь симметричную часть тензора дисторсии. Последнее можно сделать, если представить тензор  $\hat{\mathbf{a}}$  в виде суммы двух тензоров,

$$\hat{\mathbf{a}} = -\hat{\mathbf{a}}^0 - \hat{\mathbf{a}}', \quad (3,8)$$

первый из которых ( $\hat{\mathbf{a}}^0$ ) порождает симметричный тензор несовместности  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  Крёнера<sup>8</sup>

$$\eta_{ik} \equiv \varepsilon_{ilm} \nabla_l \alpha_{mk}^0 = \varepsilon_{klm} \nabla_l \alpha_{mi}^0 \quad (3,9)$$

и определяет тензор деформаций уравнением, аналогичным (3,4), а второй ( $\hat{\mathbf{a}}'$ ) определяет кривизну решетки<sup>6, 8</sup>.

Уравнение (3,5) содержит симметричный тензор  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ , а уравнение (3,6) симметризуется тривиально, поэтому «симметризованная» форма записи

уравнений (3,4) — (3,6) имеет вид

$$\text{Rot } \hat{\mathbf{e}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^0, \quad (3,10)$$

$$\text{Div } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \varrho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad (3,11)$$

$$\text{Def } \mathbf{v} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}}{\partial t} - \hat{\mathbf{J}}, \quad (\text{Def } \mathbf{v})_{ik} \equiv \frac{1}{2} (\nabla_i v_k + \nabla_k v_i). \quad (3,12)$$

Существенно отметить, что в уравнения (3,10) — (3,12) не входят тензор  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}'$  и антисимметричная часть тензора плотности потока дислокаций (последняя определяет скорость изменения тензора поворотов решетки).

Однако следует иметь в виду, что уравнение (3,10) является чисто формальным. Действительно, введение исходного тензора  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  было связано с определением дислокаций, и описываемая этим тензором плотность дислокаций поддается экспериментальному определению. В отсутствие дислокаций  $\hat{\boldsymbol{\alpha}} \equiv 0$ . Что же касается тензора  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^0$ , то он не связан однозначно с плотностью дислокаций, в частности, он может быть отличным от нуля, если в кристалле вовсе нет дислокаций, но образец подвергнут кручению.

Система уравнений, подобная системе (3,10) — (3,12), но все же отличная от приведенной выше, была предложена Холлендером<sup>15</sup>.

Выше отмечалось, что входящие в уравнения (3,4) — (3,6) тензорные плотности могут описывать как систему дискретных (линейных) дислокаций, так и непрерывное распределение дислокаций.

Естественно, что когда говорится о непрерывном распределении дислокаций, то имеются в виду физические условия, при которых система дислокаций может описываться некоторыми усредненными (макроскопическими) характеристиками. Эти условия возникают в тех задачах, в которых не представляет интереса точное распределение поля между отдельными дислокациями и в которых теория оперирует с физическими величинами, усредненными по элементам объема, включающим большое число дислокаций. Но поскольку дислокации являются протяженными дефектами кристалла, часто обладающими макроскопическими линейными размерами, вопрос о введении усредненных величин, т. е. о выборе «физически бесконечно малого» объема, не является тривиальным. Выбор элемента объема, по которому производится усреднение, естественным образом связан с выбором соотношения линейных размеров этого объема и линейных размеров дислокационных линий. Очевидно, что в разных задачах это соотношение может быть различным, и потому усредненные величины могут описываться разными функциями распределения.

Наиболее простой случай пространственного расположения дислокаций имеет место тогда, когда средний размер дислокационных петель  $r_m$  значительно больше среднего расстояния  $h$  между разными дислокациями:  $r_m \gg h$ . Если при этом нас интересует изменение упругого поля на расстояниях, меньших или порядка величины  $r_m$ , то линейный размер области усреднения  $l_0$  естественно определить условием

$$h \ll l_0 \ll r_m. \quad (3,13)$$

Если мы учтем теперь, что в кристалле вектор  $\mathbf{b}$  может иметь лишь некоторое число вполне определенных направлений, то усредненная плотность дислокаций  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  (средние значения мы будем обозначать теми же буквами) в этом случае может быть записана в виде<sup>6, 14</sup>

$$\alpha_{ik}(\mathbf{r}) = \sum_{\beta} \int \tau_i b_k^{\beta} \varrho^{\beta}(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{r}) d\mathbf{O}, \quad (3,14)$$



где  $\beta$  — номера возможных направлений вектора  $\mathbf{b}$ , интегрирование производится по полному телесному углу, а  $q^\beta(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{r})$  — скалярная плотность распределения векторов  $\mathbf{b}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  по возможным направлениям;  $q^\beta(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{r}) dO$  есть число дислокаций с направлением  $\beta$  вектора Бюргерса, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную к вектору  $\boldsymbol{\tau}$ , и расположенных внутри телесного угла  $dO$  около направления  $\boldsymbol{\tau}$ .

В динамическом случае скалярная функция распределения  $q(\mathbf{r})$ , естественно, зависит от времени.

Средняя плотность потока дислокаций может быть выражена через ту же скалярную функцию распределения  $q^\beta(\boldsymbol{\tau})$ , которая входит в (3,14):

$$j_{ik}(\mathbf{r}) = e_{ilm} \sum_{\beta} \int \tau_l b_k^\beta V_m^\beta(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{r}) q^\beta(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{r}) dO, \quad (3,15)$$

где  $V_\beta(\boldsymbol{\tau})$  — средняя скорость элемента длины дислокаций с соответствующими направлениями векторов  $\mathbf{b}$  и  $\boldsymbol{\tau}$ .

Другой простой случай усреднения соответствует ситуации, при которой нас интересует изменение поля на расстояниях, значительно превышающих размеры дислокационных петель и расстояния между ними. В таком случае объем усреднения должен выбираться из условия

$$l_0 \gg r_m, h, \quad (3,16)$$

и он будет содержать большое число замкнутых дислокационных петель.

Вид уравнений при таком усреднении будет рассмотрен в следующем параграфе. Однако прежде чем приступить к нему, введем некоторую новую величину, которой удобно характеризовать систему замкнутых дислокационных петель, а именно величину <sup>14</sup>

$$D_{ik} = \frac{1}{2} \int e_{ilm} r_l a_{mk} d\Omega, \quad (3,17)$$

где  $d\Omega$  — дифференциал объема, а интегрирование производится по объему, занятому системой дислокаций.

Смысл величины  $\hat{\mathbf{D}}$  легко выясняется при переходе в формуле (3,17) к суммированию по дислокационным петлям  $\mathcal{L}$ :

$$D_{ik} = \frac{1}{2} e_{ilm} \sum b_k \oint_{\mathcal{L}} x_l dx_m = \sum s_i b_k; \quad (3,18)$$

$s$  — аксиальный вектор с компонентами, равными площадям, ограниченными проекциями дислокационной петли  $\mathcal{L}$  на плоскости, перпендикулярные к соответствующим координатным осям:

$$s_i = \frac{1}{2} e_{ikl} \oint_{\mathcal{L}} x_k dx_l, \quad \oint_{\mathcal{L}} x_i dx_k = e_{ikl} s_l.$$

Таким образом, тензор  $\hat{\mathbf{D}}$  непосредственно выражается через площади дислокационных петель и их векторы Бюргерса. По аналогии с подобным определением в электродинамике мы назовем тензор  $\hat{\mathbf{D}}$  тензором дислокационного момента системы \*).

Так как

$$\frac{ds_i}{dt} = \oint_{\mathcal{L}} e_{ikm} V_k dx_m, \quad (3,19)$$

\*) Дислокационный момент замкнутой петли не зависит от выбора начала координат.

где  $V$  — скорость движения элемента дислокационной петли, то из (3,18) и (2,11) следует, что

$$\frac{d\hat{\mathbf{D}}}{dt} = - \int \hat{\mathbf{j}} d\Omega. \quad (3,20)$$

§ 4. ПЛАСТИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.  
ПОЛЕ ДЕФОРМАЦИЙ, СОЗДАННОЕ СИСТЕМОЙ НЕПРЕРЫВНО  
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИСЛОКАЦИОННЫХ ПЕТЕЛЬ  
В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

Наиболее простой, но часто встречающийся случай распределения дислокаций — это случай такого распределения, при котором, во-первых, в каждом макроскопически малом элементе объема тела содержится большое число дислокационных петель, а во-вторых, отсутствует суммарный (полный) вектор Бюргера всех дислокаций в рассматриваемом теле \*). Последнее условие имеет простое математическое выражение:

$$\int_S dS_i a_{ik} = 0, \quad (4,1)$$

где  $S$  — любая поверхность поперечного сечения тела.

В силу производительности поверхности  $S$  из (4,1) вытекает, что плотность дислокаций может быть написана в виде

$$\hat{\mathbf{a}} = \text{Rot } \hat{\mathbf{P}}, \quad (4,2)$$

причем  $\hat{\mathbf{P}}$  — это некоторый тензор второго ранга, равный нулю вне тела. Действительно, интегрируя (4,2) по поверхности, опирающейся на контур  $\mathcal{L}$ , лежащий с внешней стороны поверхности тела, получим

$$\int_S dS_i a_{ik} = \int_S dS_i e_{ilm} \nabla_l P_{mk} = \oint_{\mathcal{L}} dl_i P_{ik} = 0.$$

Для выяснения физического смысла тензора  $\hat{\mathbf{P}}$  рассмотрим полный дислокационный момент дислокационных петель в теле, вычислив интеграл (3,17) по объему всего тела. Используем (4,2), произведем элементарные преобразования интеграла (3,17):

$$D_{ik} = \frac{1}{2} \int e_{ilm} e_{mpq} x_l \nabla_p P_{qk} d\Omega - \frac{1}{2} \int x_m (\nabla_i P_{mk} - \nabla_m P_{ik}) d\Omega = \int P_{ik} d\Omega,$$

и убедимся, что

$$\hat{\mathbf{D}} = \int \hat{\mathbf{P}} d\Omega. \quad (4,3)$$

Таким образом, тензор  $\hat{\mathbf{P}}$  равен плотности дислокационного момента деформируемой среды. Впервые этот тензор, по-видимому, был введен Кроупа<sup>18</sup>. Мы будем называть  $\hat{\mathbf{P}}$  тензором пластической поляризации.

Точно так же, как в электродинамике вектор намагниченности тела определяет поверхностную плотность тока, значение тензора  $\hat{\mathbf{P}}$  на поверхности тела определяет поверхностную плотность дислокаций  $\hat{\mathbf{a}}^{\wedge}$ :

$$a_{ik}^{\wedge} = e_{ilm} P_{mk} n_l; \quad (4,4)$$

$\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности тела.

\*) Равенство нулю полного вектора Бюргера дислокаций означает отсутствие макроскопического пластического изгиба у образца твердого тела.

Сравнивая (3,20) и (4,3), мы можем заключить, что

$$\dot{\mathbf{J}} = - \frac{\partial \hat{\mathbf{P}}}{\partial t}. \quad (4,5)$$

Поскольку тензор плотности потока дислокаций по формуле (2,8) определяет изменение пластической дисторсии тела, то

$$\delta \hat{\mathbf{u}}^{\text{пл}} = \delta \hat{\mathbf{P}}. \quad (4,6)$$

Следовательно, при отсутствии в теле полного вектора Бюргерса изменение тензора пластической дисторсии в каждой точке среды равно изменению тензора дислокационной поляризации в той же точке. Однако следует помнить, что между тензорами  $\hat{\mathbf{P}}$  и  $\hat{\mathbf{u}}^{\text{пл}}$  существует принципиальное различие. В то время как тензор  $\mathbf{P}$  является функцией состояния тела, тензор пластической дисторсии не является функцией состояния тела, а зависит от процесса, приведшего тело в данное состояние.

Возвратимся теперь к системе уравнений (3,4) — (3,6) и выясним, какие упрощения вытекают из условия (4,1) или соотношения (4,2). Подставив (4,2) в (3,4), получим уравнение

$$\text{Rot } \hat{\mathbf{U}} = 0, \quad (4,7)$$

где введена новая величина  $\hat{\mathbf{U}}$ , определяемая как

$$\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{P}}. \quad (4,8)$$

Из уравнения (4,7) следует, что новый тензор дисторсии может быть представлен в виде

$$\hat{\mathbf{U}} = \text{Grad } \mathbf{U}. \quad (4,9)$$

Если условиться считать тело недеформированным в состоянии, в котором оно находится при  $\hat{\mathbf{P}} \equiv 0$  и при отсутствии внешних сил ( $\hat{\mathbf{u}} = 0$ ), то вектор  $\mathbf{U}$  можно положить совпадающим с вектором полного геометрического смещения элемента среды. Тогда тензор  $\hat{\mathbf{U}}$  определит полную геометрическую дисторсию тела, порожденную как упругой деформацией среды, так и перемещением дислокаций<sup>6</sup>. Скорость смещения в таком случае обычным образом связана с временной производной вектора  $\mathbf{U}$ .

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}. \quad (4,10)$$

Подставим (4,10) в уравнение движения упругой среды (3,5) и приведем его к привычному виду

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = \text{Div } \hat{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (4,11)$$

Воспользуемся теперь законом Гука и, объединяя (4,11) с (4,8), получим уравнение для определения вектора  $\mathbf{U}$ :

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} - \lambda_{iklm} \nabla_k \nabla_l U_m = - \lambda_{iklm} \nabla_k P_{lm}. \quad (4,12)$$

Таким образом, вопрос о нахождении упругого поля, созданного дислокациями с равным нулю полным вектором Бюргерса, сводится к известной задаче теории упругости. При заданном тензоре пластической поляризации тела  $\hat{\mathbf{P}}$  вектор  $\mathbf{U}$  находится из динамического уравнения теории упругости в смещениях, роль плотности объемной силы в котором играет вектор  $p_i = - \lambda_{iklm} \nabla_k P_{lm}$ .

Перепишем определение вектора  $\mathbf{p}$ , пользуясь соотношениями (3,18) и (4,3):

$$p_i = \nabla_k Q_{ik}, \quad Q_{ik} = -\lambda_{iklm} P_{lm} = -\lambda_{iklm} \sum_{\text{ед. об.}} s_l b_m. \quad (4,13)$$

Тензор  $\hat{\mathbf{Q}}$  имеет смысл плотности дипольной силы. Следовательно, в отношении создания поля смещений система дислокационных петель эквивалентна определенному распределению дипольной силы.

Рассмотрим поле смещений, созданное системой дислокационных петель в неограниченной среде. Решение уравнения (4,12) для этого случая можно представить как <sup>17, 19</sup>

$$U_i(\mathbf{r}, t) = \int d\Omega' \int_{-\infty}^t d\tau G_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - \tau) p_k(\mathbf{r}', \tau), \quad (4,14)$$

где  $G_{ik}(\mathbf{r}, t)$  — тензор Грина динамического уравнения теории упругости для неограниченного пространства.

Формула (4,14) совместно с (4,8) и (4,10) полностью решает задачу о нахождении полей смещений, упругих деформаций и напряжений, а также скоростей смещений.

В статическом случае, когда можно полностью пренебречь запаздыванием звуковых волн, выражение для вектора полного геометрического смещения можно записать как

$$U_i^0(\mathbf{r}) = \int G_{ik}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') p_k(\mathbf{r}') d\Omega', \quad (4,15)$$

где  $G_{ik}^0(\mathbf{r})$  — статический тензор Грина теории упругости.

Соответственно, статический тензор упругой дисторсии описывается формулой

$$u_{ik}^0(\mathbf{r}) = \int \nabla_l G_{il}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') p_k(\mathbf{r}') d\Omega' = P_{ik}(\mathbf{r}). \quad (4,16)$$

Выражения для полей  $\mathbf{U}_0$  и  $\hat{\mathbf{u}}_0$ , созданных непрерывно распределенными дислокационными петлями, были обсуждены Крюпа <sup>18</sup>. Однако Крюпа избрал очень неудачную форму записи для  $\hat{\mathbf{u}}_0$ , из-за чего интегралы, представляющие упругую дисторсию среды, оказались обладающими нефизическими сингулярностями. Приведенное выше соотношение для  $\hat{\mathbf{u}}_0$  является более удобным, так как при его использовании не возникает вопроса о сходимости интегралов в случае ограниченных функций  $p_i(\mathbf{r})$ .

## § 5. ПОЛЕ СМЕЩЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ЛИНЕЙНОМ ПО СКОРОСТИ ДИСЛОКАЦИЙ ПРИБЛИЖЕНИИ <sup>17,28</sup>

Пусть дислокации занимают некоторую конечную часть упругой среды, перемещаясь с малыми скоростями  $V$  в области с линейными размерами  $L$ . Будем считать, что  $V \ll c$ , где  $c$  — скорость звука в среде, или, что то же самое,  $L \ll \lambda$ , где  $\lambda$  — характерная длина звуковой волны, порожденной движением дислокаций, и разложим все интересующие нас величины по времени запаздывания звуковых волн внутри системы дислокаций, ограничившись первыми членами разложения. Такое разложение справедливо как внутри системы дислокаций, так и на расстояниях  $R \sim L$  от нее.

В изотропной среде уравнение (4,12) упрощается, и формула (4,14) для вектора  $\mathbf{U}$  имеет вид<sup>20</sup>

$$U_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi Q} \int \nabla_i \nabla_k \left( \frac{1}{R} \right) \left\{ \int_{R/a}^{R/c} \tau p_k(\mathbf{r}', t - \tau) d\tau \right\} d\Omega' - \\ - \frac{1}{4\pi\mu} \int (n_i n_k - \delta_{ik}) p_k \left( \mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) \frac{d\Omega'}{R} + \\ + \frac{1}{4\pi Q a^2} \int n_i n_k p_k \left( \mathbf{r}', t - \frac{R}{a} \right) \frac{d\Omega'}{R}, \quad (5,1)$$

где  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $R\mathbf{n} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $c^2 = \mu/Q$ ,  $a^2 = (\lambda + 2\mu)/Q$ , а вектор  $\mathbf{p}$  равен

$$\mathbf{p} = -2\mu \operatorname{Div} \hat{\mathbf{P}}^S - \lambda \operatorname{grad} P_{kk}, \quad \hat{\mathbf{P}}^S = S_y \{\hat{\mathbf{P}}\}$$

( $\mu$  и  $\lambda$  — упругие модули Ламе для изотропной среды).

Запишем вектор полного смещения в виде  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1$ , где индексом 0 будут сопровождаться члены разложения, получающиеся при полном пренебрежении запаздыванием (квазистатистические слагаемые), а индексом 1 — члены, пропорциональные производным по времени от вектора  $\mathbf{p}$ . При вычислении основных членов разложения учтем, что в силу определения вектора  $\mathbf{p}$  (4,13) и конечности размеров системы дислокаций

$$\int \mathbf{p} d\Omega = 0. \quad (5,2)$$

Используя последнее условие, получим

$$\mathbf{U}_0 = \frac{1}{8\pi\mu} \left\{ (1 - \gamma^2) \int \mathbf{n} (\mathbf{n}\mathbf{p}) \frac{d\Omega}{R} + (1 + \gamma^2) \int \mathbf{p} \frac{d\Omega}{R} \right\}, \quad (5,3)$$

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{32\pi\mu c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ (\gamma^4 - 1) \int \mathbf{n} (\mathbf{n}\mathbf{p}) R d\Omega + (3 + \gamma^4) \int \mathbf{p} R d\Omega \right\}, \quad (5,4)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный от рассматриваемого элемента объема в точку наблюдения,  $\gamma^2 = c^2/a^2$ .

Формула (5,3) для квазистатистического вектора смещений после соответствующих преобразований, естественно, совпадает с формулой, полученной Круппа<sup>18</sup> для системы неподвижных дислокационных петель.

Слагаемое  $\mathbf{U}_1$ , определяемое формулой (5,4), обусловлено движением дислокаций и описывает существенно динамические эффекты.

С помощью выражений (5,3) и (5,4) для  $\mathbf{U}$  нетрудно построить тензор упругой деформации среды, который мы также представим в виде двух слагаемых, первое из которых ( $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ ) определяет квазистатистическое поле деформаций, а второе ( $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$ ) описывает динамические эффекты. Квазистатистическое слагаемое мы запишем в форме

$$\varepsilon_{ik}^0 + P_{ik}^S = \frac{1}{8\pi\mu} \left\{ (1 - \gamma^2) \int (\delta_{ik} - n_i n_k) (\mathbf{n}\mathbf{p}) \frac{d\Omega}{R^2} - \right. \\ \left. - \gamma^2 \int (n_i p_k + n_k p_i) \frac{d\Omega}{R^2} \right\}, \quad (5,5)$$

оставляя его выраженным через вектор  $\mathbf{p}$ .

Слагаемое  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$  мы сразу же преобразуем так, чтобы оно было выражено через интегралы от тензора  $\hat{\mathbf{P}}$ , и воспользуемся связью тензора  $\hat{\mathbf{P}}$

с тензором плотности потока  $\hat{\mathbf{j}}$  (4,5):

$$\varepsilon_{ik}^1 = \frac{1}{16\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (1 - \gamma^4) \int (\delta_{ik} - 3n_i n_k) n_l J_{lm} n_m \frac{d\Omega}{R} - \right. \\ \left. - 2\gamma^4 \int (n_i J_{kl} n_l + n_k J_{il} n_l) \frac{d\Omega}{R} + 2(1 + \gamma^4) \int J_{ik} \frac{d\Omega}{R} - \right. \\ \left. - (1 - 2\gamma^2 + 3\gamma^4) \int (\delta_{ik} - n_i n_k) J_{mm} \frac{d\Omega}{R} \right\}. \quad (5,6)$$

Выражения (5,5) и (5,6) для тензора упругих деформаций позволяют по закону Гука построить тензор напряжений  $\hat{\sigma}$ :  $\sigma_{ik} = 2\mu \varepsilon_{ik} + \lambda \delta_{ik} \varepsilon_{ll}$ , причем след тензора  $\hat{\varepsilon}$  имеет слагаемые

$$\varepsilon_{ll}^0 + P_{ll} = -(\gamma^2/4\pi\mu) \int (\mathbf{n}\mathbf{p}) \frac{d\Omega}{R^2}, \quad (5,7)$$

$$\varepsilon_{ll}^1 = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\gamma^2 \int n_i J_{ik} n_k \frac{d\Omega}{R} + (1 - \gamma^2) \int J_{ll} \frac{d\Omega}{R} \right\}. \quad (5,8)$$

Заметим, что в формулах (5,6) и (5,8) последние слагаемые обращаются в нуль, если движение дислокаций происходит без нарушения сплошности среды, когда  $J_{ll} = 0$ .

Мы не будем выписывать явный вид квазистатической части тензора напряжений, поскольку она неоднократно обсуждалась в литературе<sup>18, 21</sup> и получается очевидными операциями из (5,5) и (5,7). Однако отметим, что эта часть тензора напряжений может быть представлена в виде

$$\sigma_{ik}^0 = \frac{1}{4\pi} \int q_{ikl}(\mathbf{n}) p_l \frac{d\Omega}{R^2}, \quad (5,9)$$

где вполне определенная тензорная функция  $q_{ikl}(\mathbf{n})$  содержит лишь компоненты вектора  $\mathbf{n}$  и безразмерные множители порядка единицы.

Что касается динамической части тензора  $\hat{\sigma}$ , то ее мы сокращенно представим в виде

$$\sigma_{ik}^1 = \frac{9}{4\pi} \int \beta_{iklm}(\mathbf{n}) \dot{J}_{lm} \frac{d\Omega}{R^2}, \quad (5,10)$$

где точка обозначает производную по времени, а тензор  $\beta_{iklm}(\mathbf{n})$  в изотропной среде связан с компонентами вектора  $\mathbf{n}$  соотношением

$$\beta_{iklm}(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} [(1 - 2\gamma^2 + 3\gamma^4) \delta_{ik} - 3(1 - \gamma^4) n_i n_k] n_l n_m - \frac{1}{2} \gamma^4 [(n_i \delta_{km} + \\ + n_k \delta_{im}) n_l + (n_i \delta_{kl} + n_k \delta_{il}) n_m] + \frac{1}{2} (1 + \gamma^4) (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) - \\ - \left[ \frac{1}{2} (1 - 2\gamma^2 + 3\gamma^4) (\delta_{ik} - n_i n_k) - \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) \gamma^2 (1 - \gamma^2) \delta_{ik} \right] \delta_{lm}. \quad (5,11)$$

В анизотропной среде формула (5,10), естественно, остается в силе, а связь тензора  $\beta_{iklm}(\mathbf{n})$  с упругими модулями среды для общего случая определена в работе<sup>28</sup>.

## § 6. ПОЛЕ ДЕФОРМАЦИЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ ОТ СИСТЕМЫ ДИСЛОКАЦИЙ<sup>14</sup>

Рассмотрим деформацию неограниченной изотропной среды, созданную системой движущихся дислокационных петель на далеких расстояниях  $R$ , значительно превышающих размеры системы  $L$ . Предположим, что движение дислокаций происходит со скоростями  $V$ , малыми по сравнению со скоростью звука в твердом теле  $c$ . Тогда отношения  $L/R$  и  $V/c$  являются

малыми параметрами, по степеням которых можно разложить величины, характеризующие поле деформаций. Ограничимся первыми не исчезающими членами такого разложения, считая малость обоих параметров одного порядка величины.

Выберем начало координат где-нибудь внутри системы дислокаций и обозначим через  $R_0$  расстояние от начала до точки наблюдения ( $\mathbf{n}_0$  — орт соответствующего направления). Тогда в силу малости размеров системы в формуле (5,4) можно положить  $R \approx R_0 - \mathbf{r}'\mathbf{n}_0$  и разложить подынтегральное выражение по степеням  $\mathbf{r}'\mathbf{n}$ .

Для простоты мы ограничимся случаем  $J_{ll} = j_c = 0$ . Тогда в силу соотношения (3,20) свертка  $D_{ll}$  не зависит от времени, и мы можем выделить содержащую ее часть вектора  $\mathbf{U}$  в виде отдельного статического слагаемого. В связи с последним вектор  $\mathbf{U}$  удобно представить как

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{\text{ст}} + \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_l, \quad (6,1)$$

где отдельные слагаемые определяются следующим образом.

Статическое слагаемое  $\mathbf{U}_{\text{ст}}$ , как уже отмечалось, происходит от той части  $\mathbf{U}$ , которая содержит свертку  $\mathcal{D}_{ll}$ :

$$U_i^{\text{ст}}(\mathbf{r}) = \int G_{ik}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \lambda \nabla'_k P_{ll}(\mathbf{r}') d\Omega', \quad (6,2)$$

где  $G_{ik}^0(\mathbf{r})$  — статический тензор Грина теории упругости. Элементарные преобразования (6,2) и явный учет принятого нами приближения позволяет переписать формулу для  $\mathbf{U}_{\text{ст}}$  в следующем виде:

$$\mathbf{U}_i^{\text{ст}} = \lambda \nabla_k G_{ik}^0(\mathbf{R}_0) D_{ll}. \quad (6,3)$$

Слагаемое  $\tilde{\mathbf{U}}$  в (6,1) зависит от поведения дислокационного момента в интервале времени  $(t - R_0/c, t - R_0/a)$ :

$$\tilde{U}_i = -\frac{c^2}{2\pi} \left( \int_{R_0/a}^{R_0/c} \tau D_{kl}^S(t - \tau) d\tau \right) \nabla_i \nabla_k \nabla_l \left( \frac{1}{R_0} \right), \quad \hat{\mathbf{D}}^S = \text{Sy} \{ \hat{\mathbf{D}} \}. \quad (6,4)$$

Последние два слагаемых в (6,1) определяются дислокационным моментом системы в моменты времени  $t - R_0/c$  и  $t - R_0/a$ , связанные с запаздыванием соответственно сдвиговых волн ( $\mathbf{u}_l$ ) и волн сжатия ( $\mathbf{u}_t$ ) в твердом теле:

$$u_i^t = -\frac{1}{2\pi} \left[ t_{ik} \nabla_l \frac{D_{kl}^S}{R_0} - N_{ikl} \frac{D_{kl}^S}{R_0^2} \right], \quad (6,5)$$

$$u_i^l = -\frac{\gamma^2}{2\pi} \left[ n_i n_k \nabla_l \frac{D_{kl}^S}{R_0} - N_{ikl} \frac{D_{kl}^S}{R_0^2} \right]_a. \quad (6,6)$$

При записи (6,5) и (6,6) мы ввели тензор  $t_{ik} = \delta_{ik} - n_i n_k$ , умножение которого на вектор дает «поперечную» составляющую этого вектора (относительно направления  $\mathbf{n}$ ), и обозначили

$$N_{ikl} = t_{ik} n_l + n_i \delta_{kl} + n_k \delta_{il} - 4n_i n_k n_l.$$

В формулах (6,3) — (6,6) дифференцирование производится по координатам точки наблюдения.

Квадратные скобки в (6,5) означают, что заключенные в них величины берутся в момент времени  $t - R_0/c$ . Квадратные скобки с индексом  $a$  в (6,6) означают, что заключенные в них величины берутся в момент времени  $t - R_0/a$ .

Нетрудно убедиться, что  $\text{div } \mathbf{u}_t = 0$  и  $\text{rot } \mathbf{u}_l = 0$ , поэтому  $\mathbf{u}_t$  и  $\mathbf{u}_l$  дают вклад соответственно в поперечную и продольную части поля смещения.

Формулы (6,5) и (6,6) вместе с (6,3) и (6,4) определяют вектор смещения  $\mathbf{U}$  в рассматриваемом приближении.

На расстояниях  $R_0$ , больших по сравнению с длиной волны испускаемых упругих волн ( $R_0 \gg cL/V$ ), полученные выражения определяют вектор упругого смещения поля излучения. В последнем случае все формулы значительно упрощаются и для вектора смещения в излученной звуковой волне имеем

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\pi c R_0} \{ \gamma^3 \mathbf{n} [(\mathbf{n}\dot{\mathbf{D}})]_a + [\dot{\mathbf{D}} - \mathbf{n} (\mathbf{n}\dot{\mathbf{D}})] \}. \quad (6.7)$$

Входящий в (6,7) вектор  $\mathbf{D}$  обозначает «проекцию» симметричной части тензора  $\hat{\mathbf{D}}$  на направление  $\mathbf{n}$ :

$$D_i = n_k D_{ki}^S \equiv \frac{1}{2} n_k (D_{ik} + D_{ki}).$$

С помощью (6,7) по известной формуле для плотности потока звуковой энергии<sup>20</sup> вычислим дифференциальную интенсивность излучения  $dI$  (излучение в элементе телесного угла  $d\Omega$ ):

$$dI = \frac{c}{4\pi^2} \{ \gamma^5 [(\mathbf{n}\dot{\mathbf{D}})]_a^2 + [\dot{\mathbf{D}}]^2 - [(\mathbf{n}\dot{\mathbf{D}})]^2 \} d\Omega. \quad (6,8)$$

Черта в формуле (6,8) означает усреднение по области пространства, размеры которой превышают длину волны излучения.

Полная энергия излучения упругих волн системой движущихся дислокаций равна

$$I = \frac{c}{5\pi} \left\{ \frac{2}{3} \gamma^5 \overline{[\dot{D}_{ik}^S]_a^2} - \overline{[\dot{D}_{ik}^S]^2} \right\}. \quad (6,9)$$

Излучение упругих волн системой движущихся дислокаций в анизотропной среде может быть также рассмотрено в общем виде<sup>17</sup>.

## § 7. ПОЛЕВАЯ ПРИРОДА УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДИСЛОКАЦИИ. ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ДИСЛОКАЦИЙ И УПРУГОГО ПОЛЯ

Сформулированная в § 3 система уравнений (3,4) — (3,6) определяет тензор упругой дисторсии  $\hat{\mathbf{u}}$  и вектор скорости смещения среды  $\mathbf{v}$  по известному распределению дислокаций и их потоков. Тензоры  $\hat{\mathbf{a}}$  и  $\hat{\mathbf{j}}$ , а значит, и движение дислокаций считаются заданными. Для того чтобы система (3,4) — (3,6) была полностью замкнутой и определяла самосогласованную эволюцию дислокаций и упругого поля, необходимо показать, как изменяются плотности дислокаций и их потоков под действием упругих полей. Другими словами, должно быть указано уравнение движения дислокации.

В силу данного выше определения дислокации (в частности, в силу отсутствия дополнительной объемной силы и отсутствия переноса массы на линии дислокации при ее перемещении) уравнение движения дислокации должно иметь полевое происхождение. Мы сделаем вывод уравнения движения дислокации эквивалентно выводу уравнения движения электрона по методу Лоренца, т. е. будем исходить из представления о самодействии дислокации. Представления о полевой природе уравнений движения и полевой природе соответствующих масс общеизвестны, и мы их излагать не будем.



Вывод уравнения движения дислокации удобно производить в лагранжевом формализме. При наличии линейных (дискретных) дислокаций функция Лагранжа для упругого поля могла бы быть записана обычно:

$$L = \int \mathcal{L}_0 d\Omega, \quad \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\rho v^2 - \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}), \quad (7,1)$$

где «напряженности полей»  $\mathbf{v}$  и  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  (или  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ ) обычным образом выражены через производные вектора упругого смещения  $\mathbf{u}$ , играющего роль потенциала поля деформаций.

Так как наличие дискретных дислокаций допускает введение вектора  $\mathbf{u}$  и не нарушает однозначности его производных, формула (7,1) вполне описывает упругое поле между дислокациями. Однако выбор вектора упругого смещения  $\mathbf{u}$  в качестве потенциала поля исключает возможность ввести плотность лагранжиана взаимодействия упругого поля с дислокациями, поскольку вектор  $\mathbf{u}$  не имеет смысла в тех частях упругой среды, в которых находятся дислокации. Поэтому в качестве потенциалов поля вместо вектора  $\mathbf{u}$  при наличии дислокаций удобно ввести другие величины.

Ввиду того, что функция Лагранжа выражена через тензор  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  (симметричную часть тензора дисторсии), при выборе новых потенциалов будем исходить из системы уравнений (3,10) — (3,12). Новые потенциалы мы выберем таким образом, чтобы тождественно удовлетворялось уравнение (3,11):

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \text{Rot } \hat{\boldsymbol{\varphi}} - \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\psi}}}{\partial t}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \text{Div } \hat{\boldsymbol{\psi}}, \quad (7,2)$$

где  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$  и  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$  — некоторые тензоры второго ранга. В статическом случае потенциал  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$  совпадает с потенциалом, введенным Крёнером<sup>8</sup>.

Для дальнейшего удобно выбрать тензор  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$  симметричным ( $\psi_{ik} = \psi_{ki}$ ); тогда тензор  $\text{Rot } \hat{\boldsymbol{\varphi}}$  также является симметричным тензором.

Запишем теперь в потенциалах  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$  и  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$  функцию Лагранжа для поля упругих напряжений и дислокаций. Эта функция Лагранжа, заменяющая (7,1), должна порождать уравнения (3,10) — (3,12) и для свободного упругого поля путем преобразований, при которых опускаются полные производные по времени и поверхностные интегралы по бесконечно удаленным поверхностям\*), должна переходить в (7,1). Интересующая нас функция Лагранжа имеет вид

$$L = \int \mathcal{L} d\Omega, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \varepsilon_{ik} - \rho v^2) - \alpha_{ik}^0 \varphi_{ik} + J_{ik} \psi_{ik}, \quad (7,3)$$

где  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  и  $\mathbf{v}$  выражены через потенциалы  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$  и  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$  по формулам (7,2), а тензор  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  связан с  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  законом Гука.

Легко убедиться, что из функции Лагранжа (7,3) вытекают уравнения (3,10) и (3,12).

Функция Лагранжа естественным образом разделяется на две части: функцию Лагранжа упругого поля с плотностью функции Лагранжа

$$\mathcal{L}_{\text{уп}} = \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \varepsilon_{ik} - \rho v^2)$$

и функцию Лагранжа взаимодействия дислокаций с упругим полем

$$L_{\text{вз}} = \int (J_{ik} \psi_{ik} - \alpha_{ik}^0 \varphi_{ik}) d\Omega. \quad (7,4)$$

\*) Для того чтобы упомянутые поверхностные интегралы можно было опустить, достаточно ограничиться тем случаем, когда выполняются условия  $\psi_{ik} = 0$ ,  $\varphi_{ik} = 0$  на внешних поверхностях тела. Выполнение этих условий одновременно означает, что исключаются поступательное движение и вращение тела как целого.

Чтобы получить уравнение движения дислокации, используя лагранжовый формализм, необходимо иметь функцию Лагранжа для дислокаций в поле упругих деформаций. Так как никакой «собственной» функцией Лагранжа, не связанной с упругим полем, дислокация не обладает, то интересующая нас функция Лагранжа совпадает с функцией  $L_{вз}$ , определенной формулой (7,4).

Имея в виду, что для вывода уравнения движения нам будет необходимо выразить функцию Лагранжа через координаты дислокации, преобразуем (7,4), представив  $L_{вз}$  непосредственно через плотность дислокаций  $\hat{\alpha}$ . Это нетрудно проделать, поскольку для дислокаций в неограниченной среде в силу симметрии  $\text{Rot } \hat{\phi}$  имеет место равенство

$$-\int \alpha_{ik}^n \varphi_{ik} d\Omega = \int \alpha_{ik} \varphi_{ik} d\Omega. \quad (7,5)$$

Подставим (7,5) в (7,4) и получим функцию Лагранжа для дислокаций в упругом поле, которую мы обозначим через  $L_{\mathcal{L}}$ :

$$L_{\mathcal{L}} = \int (\alpha_{ik} \varphi_{ik} + j_{ik} \psi_{ik}) d\Omega. \quad (7,6)$$

Первое слагаемое в (7,6) формально совпадает с выражением для энергии взаимодействия (взятой с обратным знаком) дислокации с внешним полем напряжений в статическом случае. Ниже мы убедимся, что действительно гамильтониан взаимодействия дислокации с внешним полем напряжений в общем случае имеет вид

$$\mathcal{H}^{вз} = - \int \alpha_{ik} \varphi_{ik} d\Omega. \quad (7,7)$$

Рассмотрим линейную дислокационную петлю  $\mathcal{L}$ , каждый элемент которой движется с некоторой скоростью  $\mathbf{V}$ , и выразим  $L_{\mathcal{L}}$  через координаты и скорости петли. Для этого совершим переход от объемных интегралов в (7,6) к контурным по дислокационной линии. Указанный переход осуществляется путем формальной замены

$$\alpha_{ik} d\Omega \rightarrow \tau_i b_k dl, \quad j_{ik} d\Omega \rightarrow e_{ilm} \tau_l b_k V_m dl, \quad (7,8)$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор касательной к линии дислокации,  $\mathbf{b}$  — вектор Бюргерса,  $dl$  — элемент длины линии дислокации, а  $\mathbf{V}$  — его скорость.

Выполняя замену (7,8) в выражении (7,6), мы придем к следующей формуле для  $L_{\mathcal{L}}$ :

$$L_{\mathcal{L}} = \oint_{\mathcal{L}} \mathcal{L}_1 dl,$$

где  $\mathcal{L}_1$  — «линейная плотность» функции Лагранжа дислокации

$$\mathcal{L}_1 = \tau_i \varphi_{ik} b_k + e_{ilm} \tau_l V_m \psi_{ik} b_k. \quad (7,9)$$

Из формулы (7,9) следует, что «линейная плотность» гамильтониана взаимодействия дислокации с внешним полем напряжений имеет вид

$$\mathcal{H}_1^{вз} = V_k \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial V_k} - \mathcal{L}_1 = -\tau_i \varphi_{ik} b_k. \quad (7,10)$$

Из (7,10) естественным образом вытекает (7,7).

Зная плотность лагранжиана (7,9) или плотность гамильтониана (7,10), можно стандартным путем вывести уравнение движения элемента дислокации с координатами  $X_i = X_i(l, t)$ , где  $l$  — длина, отсчитываемая от некоторой точки вдоль мгновенного положения петли (при фиксированном моменте времени  $t$ ). Мы приведем лишь результат вывода<sup>22</sup>:

$$e_{ikl} \tau_k \sigma_{lp} b_p + \rho (\mathbf{v} \mathbf{b}) [\boldsymbol{\tau}, \mathbf{V}]_i = 0. \quad (7,11)$$

Входящие в (7,11) тензор  $\hat{\sigma}$  и вектор  $\mathbf{v}$  включают как внешние упругие поля, так и собственные поля дислокационной петли. Таким образом, соотношение (7,11) связывает собственное поле дислокации, а значит, и порождающее его движение дислокационной петли, с внешними полями. Поскольку внешние поля, входящие в (7,11), берутся в той точке пространства  $X_i = X_i(l, t)$ , в которой находится в данный момент времени рассматриваемый элемент дислокации, то (7,11), имеет смысл неявной записи уравнения движения дислокации.

Выражение

$$f_i(\hat{\sigma}) = e_{ikh} \tau_k \sigma_{lm} b_m + q(\mathbf{vb}) [\boldsymbol{\tau}, \mathbf{V}]_i, \quad (7,12)$$

равенство нулю которого является уравнением движения (7,11), определяет полную силу, действующую на единицу длины дислокации со стороны внешнего поля. В статическом случае, когда  $\mathbf{v} \equiv 0$ , аналогичное выражение для силы  $\mathbf{f}(\hat{\sigma})$  было получено Пичем и Кёлером<sup>21</sup>.

Чтобы уравнение движения (7,11) имело обычный явный вид, т. е. связывало мгновенные координаты и скорости дислокации с мгновенными значениями внешнего поля напряжений, следует выразить собственное поле движущейся дислокации в некоторый момент времени через координаты и скорости элементов ее петли в тот же момент времени. Известно, что это всегда можно сделать в линейном по скорости дислокации приближении. Такому расчету будет посвящен следующий параграф.

Но прежде чем переходить к явной записи уравнения движения и введению эффективной массы дислокации, следует обратить внимание на то, что в уравнение движения (7,11) включены лишь силы упругого происхождения. Что же касается движения реальной дислокации в кристалле, то на нее действуют также определенные силы неупругого происхождения, «сторонние» по отношению к теории упругости силы. К этим силам относятся, во-первых, сила торможения, обусловленная дискретностью структуры кристалла и атомным характером строения ядра дислокации. Такая сила, описывающая сопротивление кристалла перемещению дислокации, состоит из двух частей. Имеется статическая составляющая, аналогичная в некотором смысле силе «сухого трения» (сила Пайерлса)<sup>1</sup>, и составляющая, пропорциональная скорости дислокации<sup>23,24</sup>, эквивалентная обычному трению движения. Величина и направление силы торможения зависят от вида дислокации и в значительной мере от модели ядра дислокации. Во-вторых, на частичную дислокацию, являющуюся контуром некоторого плоского дефекта упаковки кристалла, действует сила поверхностного натяжения, связанного с поверхностью дефекта. Эта сила всегда направлена в плоскости дефекта по нормали к линии дислокации в данной точке.

## § 8. ЯВНЫЙ ВИД УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДИСЛОКАЦИИ В СРЕДЕ. ЭФФЕКТИВНАЯ МАССА ДИСЛОКАЦИИ<sup>22,28</sup>

Чтобы уравнение движения дислокации имело обычный вид, следует в уравнении (7,11) явным образом выделить силу самодействия дислокации и исключить сингулярности собственного поля дислокации, подобно тому как это делается при выводе полевой массы и уравнения движения электрона<sup>25</sup>.

Как отмечалось в конце предыдущего параграфа, мгновенное самодействие дислокации, определяемое ее координатами и скоростями в рассматриваемый момент времени, можно ввести лишь в линейном по  $V/c$  приближении ( $V$  — скорость дислокации). Но поскольку всегда  $v < V$ ,

рассматриваемое уравнение движения имеет смысл только в линейном по скоростям приближении. Анализируя порядок величин слагаемых в (7,11), легко заметить, что второе слагаемое квадратично по скоростям, и его учет является превышением точности нашего уравнения движения. Поэтому второе слагаемое в (7,11) должно быть опущено, и мы должны писать

$$f_i(\hat{\sigma}) \equiv e_{ikl} \tau_k \sigma_{lm} b_m = 0. \quad (8,1)$$

Для учета самодействия представим поле  $\hat{\sigma}$ , входящее в (8,1), в виде  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^o + \hat{\sigma}^s$ , где  $\hat{\sigma}^o$  — внешнее поле, а  $\hat{\sigma}^s$  — собственное поле напряжений дислокации. Перепишем собственную часть силы  $f(\hat{\sigma}^s)$  в (8,1), считая дислокационную петлю не бесконечно тонкой, а имеющей некоторую малую толщину с «размазанным» по этой толщине вектором Бюргерса \*):

$$f_i(\hat{\sigma}^s) = e_{ikl} \tau_k b_m \int \sigma_{lm}^s(\xi) d\xi, \quad (8,2)$$

где  $\xi$  — двумерный вектор, отсчитываемый от оси дислокации в плоскости, перпендикулярной к  $\tau$ ,  $g(\xi)$  — некоторая функция, отличная от нуля в малой окрестности вблизи линии дислокации и обладающая очевидным свойством

$$\int g(\xi) d\xi = 1.$$

Воспользуемся теперь разложением тензора  $\hat{\sigma}^s$ , вытекающим из закона Гука и формул (5,7)–(5,10), представив его как сумму двух слагаемых,  $\hat{\sigma}^s = \hat{\sigma}_0^s + \hat{\sigma}_1^s$ , первое из которых ( $\hat{\sigma}_0^s$ ) определяет квазистатическое поле напряжений, а  $\hat{\sigma}_1^s$  — напряжения, пропорциональные ускорению дислокации.

Часть силы (8,2), порожденная слагаемым  $\hat{\sigma}_0^s$ , характеризует собственное линейное натяжение статической дислокационной петли. Эту силу легко можно вычислить, подставив в (8,2) «статические» выражения для  $\hat{\sigma}_0^s$ . Так как указанная операция совершенно очевидна, а сама сила квазистатического натяжения дислокационной петли не имеет отношения к интересующему нас вопросу об эффективной массе дислокации, мы не будем приводить явное выражение для этой силы. Однако отметим, что силе собственного натяжения соответствует определенная собственная энергия покоящейся дислокации

$$E_s = \frac{1}{2} \oint \oint \mathcal{E}(l, l') dl dl',$$

где  $\mathcal{E}(l, l')$  имеет смысл нелокальной плотности собственной энергии дислокации. Выражение для  $\mathcal{E}(l, l')$  непосредственно следует из соответствующих формул в <sup>8,13</sup>.

Вторая часть силы самодействия (8,2) определяется слагаемым  $\hat{\sigma}_1^s$ , которое связано с плотностью потока формулой (5,10). В формуле (5, 10) следует перейти с помощью (7,8) к интегрированию по дислокационной петле, и тогда тензор  $\hat{\sigma}_1^s$  будет выражен через ускорение дислокации.

\*) Очевидно, что, как и в случае статических дислокаций <sup>8</sup>, самодействие строго линейных (т. е. имеющих нулевую толщину) движущихся дислокаций описывается расходящимися интегралами.

С помощью формул (5,11), (5,10) и (7,8) составим входящую в выражение (8,2) свертку  $\sigma_{ik}^1 b_k$  для дислокации в изотропной среде

$$\sigma_{ik}^1 b_k = \frac{qb^2}{8\pi} \int \{ \Phi_i(\mathbf{n}, \boldsymbol{\beta}) [\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}] \dot{\mathbf{V}} + n_i (1 - 2\gamma^2 + 2\gamma^4) \cos \theta [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}] \dot{\mathbf{V}} + \\ + (1 + \gamma^4 \sin^2 \theta) [\boldsymbol{\tau}, \dot{\mathbf{V}}]_i + 2(1 - \gamma^2)^2 \beta_i [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}] \dot{\mathbf{V}} \} \frac{g(\xi) d\xi dl}{R}, \quad (8,3)$$

где

$$\cos \theta = \mathbf{n}\boldsymbol{\beta},$$

$$\Phi_i(\mathbf{n}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_i (1 - 2\gamma^2 + 2\gamma^4) \cos \theta - n_i [3(1 - \gamma^4) \cos^2 \theta + \gamma^4],$$

$\mathbf{a} \boldsymbol{\beta}$  — единичный вектор, направленный вдоль вектора Бюргерса:  $\mathbf{b} = b\boldsymbol{\beta}$ .

Из записи (8,3) следует, что вклад в напряжения дает лишь составляющая скорости дислокации, перпендикулярная к линии дислокации в данной точке. Этот результат очевиден, поскольку перемещение линии дислокации вдоль самой себя не имеет физического смысла.

Так как приведенная выше свертка должна вычисляться для точек, лежащих на линии дислокации или в ее малой окрестности, и должна подставляться в выражение (8,2), интеграл (8,3) можно разбить на две группы существенно различных слагаемых. Слагаемые одной группы, содержащие под знаком интеграла в числителе либо векторное произведение  $[\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}]$ , либо вектор  $\mathbf{n}$ , при подстановке в (8,2) остаются конечными для линейной дислокации, линия которой везде гладкая. (Для перехода к линейной дислокации следует положить  $g(\xi) = \delta(\xi)$ , где  $\delta(\xi)$  — двумерная дельта-функция.) Слагаемые же второй группы имеют в этом случае логарифмическую особенность. Поскольку нас интересует предельный случай линейной дислокации, следует рассматривать только последние слагаемые. При таком рассмотрении удастся выделить основную часть силы  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_i^s)$  лишь с логарифмической точностью, которой нам вполне достаточно. Тогда, подставляя в (8,2) указанную часть  $\sigma_{ik}^1 b_k$ , мы можем записать соответствующую часть силы самодействия как

$$f_i(\boldsymbol{\sigma}_i^s) = - \oint_{\mathcal{L}} \mu_{ik}(l, l') W_k(l') dl', \quad \mathbf{W}(l) = \dot{\mathbf{V}}(l), \quad (8,4)$$

где

$$\mu_{ik}(l, l') = \frac{1}{2} qb^2 \{ \delta_{ik}(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}' - \tau'_i \tau_k) (1 + \gamma^4 \sin^2 \theta) + [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}]_i [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}']_k \} G(l, l'), \quad (8,5)$$

$$G(l, l') = \frac{1}{4\pi} \int \int g(\xi) g(\xi') \frac{d\xi d\xi'}{R}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(l), \quad \boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau}(l').$$

Отметим, что в формуле (8,5) вектор  $\mathbf{n}$  вынесен из-под знака интегрирования по  $\xi$  и  $\xi'$ . Учет  $\mathbf{n}$  при таком интегрировании приведет к малой поправке в (8,4), если отношение «толщины» дислокационной линии к характерному линейному размеру всей петли мало. Последнее отношение мы будем предполагать очень малым.

Выражение для  $\mu_{ik}(l, l')$  в анизотропной среде получено автором и Нациком в работе<sup>28</sup>.

Подставляя (8,4) в (8,1) и учитывая наличие указанных в конце § 7 сил неупругого происхождения, действующих на дислокацию, запишем окончательный вид уравнения движения элемента дислокационной петли:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mu_{ik}(l, l') W_k(l') dl' = f_i^0(l) + e_{ikm} \tau_k(l) \sigma_{mp}^e(l) b_p + S_i(l, \mathbf{V}), \quad (8,6)$$

где  $W(l)$  — ускорение элемента дислокации,  $f_0$  — упомянутая выше сила собственного квазистатического натяжения дислокации, а  $S$  — сила неупругого происхождения, которая, естественно, зависит от скорости дислокации.

Из уравнения (8,6) можно заключить, что  $\mu_{ik}(l, l')$  имеет смысл нелокальной плотности эффективной полевой массы дислокационной линии. Физический смысл тензорной функции  $\mu_{ik}(l, s)$  заключается в том, что она устанавливает вклад  $k$ -й компоненты скорости элемента с координатой  $s$  на дислокационной петле в  $i$ -ю компоненту количества движения элемента единичной длины с координатой  $l$  на той же петле.

Можно с несколько иной точки зрения определить физический смысл величин  $\mu_{ik}(l, l')$ , если записать кинетическую энергию дислокационной петли

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{L}} \mu_{ik}(l, l') V_i(l) V_k(l') dl dl'. \quad (8,7)$$

Из (8,7) следует очевидная симметрия тензора  $\mu_{ik}(l, s)$ , которая, естественно, заключена в его определении (8,5):

$$\mu_{ik}(l, s) = \mu_{ki}(s, l). \quad (8,8)$$

Важно заметить, что инерционный член в уравнении движения, т. е. левая часть соотношения (8,6), играет существенную роль только при резко нестационарном движении дислокации, когда ее ускорение очень велико. Если же ускорение дислокации невелико, то определяющим является действие сил торможения (сил неупругого происхождения), включающих в себя диссипативные силы. Величина и зависимость от скорости дислокации именно этих сил в основном определяет характер почти стационарного движения дислокации.

Если сравнить  $\mu_{ik}(l, l')$  с выражением для плотности собственной энергии дислокации  $\mathcal{E}(l, l')$ , то легко убедиться, что  $\mu(l, l')$  и  $\mathcal{E}(l, l')$  имеют сходную структуру в смысле функциональной зависимости от точек на дислокационной петле и по порядку величины

$$\mu(l, l') c^2 \sim \mathcal{E}(l, l').$$

Однако их конкретные выражения и даже тензорные размерности различны, поэтому динамическая нелокальная плотность массы не сводится в общем случае к нелокальной плотности «массы покоя». И лишь для прямолинейной винтовой дислокации

$$\mu_{ik}(l, l') c^2 = \delta_{ik} \mathcal{E}(l, l').$$

Обратим внимание на то, что слагаемое в первой строке (8,5) определяет массу, связанную с механическим движением дислокации в плоскости скольжения, а слагаемое во второй строке — массу, связанную с перемещением дислокации вдоль нормали к плоскости скольжения. Второй вид движения в большинстве случаев (кроме случая динамического разветвления трещины) происходит с малыми скоростями и ускорениями, поэтому соответствующие инерционные члены не играют никакой роли. Имея это в виду, рассмотрим массу дислокации, движущейся в плоскости скольжения. Введем в каждой точке линии дислокации тройку единичных векторов  $(\tau, \nu, \kappa)$ , образующих правовинтовую систему, причем  $\nu$  — это вектор нормали к плоскости скольжения, а  $\kappa$  — вектор нормали к линии дислокации в плоскости скольжения.

Как отмечалось выше, вклад в силу самодействия дает лишь составляющая скорости (или ускорения) дислокации, перпендикулярная

к линии дислокации. В рассматриваемом случае эти составляющие равны

$$\mathbf{V}_\perp = \kappa \mathbf{V}_\perp, \quad V_\perp = (\kappa, \mathbf{V}), \quad \mathbf{W}_\perp = \kappa \mathbf{W}_\perp, \quad W_\perp = (\kappa, \mathbf{W}).$$

Поэтому, умножая (8,6) на  $\kappa$ , мы получим

$$\oint_{\mathcal{L}} \mu(l, l') W_\perp(l') dl' = f_0(l) + v_m(l) \sigma_{mp}^e(l) b_p + S(l, V_\perp), \quad (8,9)$$

где для изотропной среды с логарифмической точностью

$$\mu(l, l') = \frac{1}{2} \varrho b^2 (\tau \tau') (\kappa \kappa') (1 + \gamma^4 \sin^2 \theta) G(l, l'). \quad (8,10)$$

Выражение для  $\mu(l, l')$ , заменяющее (8,10) в анизотропной среде, получено в<sup>28</sup>.

Уравнение (8,9) описывает механическое движение дислокационной петли во внешнем поле напряжений.

Наряду с уравнением движения элемента дислокации (8,6) можно рассмотреть усредненное уравнение движения всей дислокационной петли, проинтегрировав (8,6) по петле:

$$\oint_{\mathcal{L}} m_{ik}(l) W_k(l) dl = F_i^e, \quad F_i^e = c_{ikm} b_p \oint_{\mathcal{L}} \tau_k \sigma_{mp}^e dl + \oint_{\mathcal{L}} S_i dl, \quad (8,11)$$

где  $F^e$  — полная внешняя сила, действующая на дислокацию,

$$m_{ik}(l) = \oint_{\mathcal{L}} \mu_{ik}(l', l) dl'. \quad (8,12)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (8,6) при интегрировании по всей петле выпадает, так как полная сила самодействия покоящейся дислокации равна нулю.

Из (8,11) следует, что  $m_{ik}(l)$  играет роль эффективной массы единицы длины дислокации при рассмотрении движения всей дислокационной петли. Но очевидно, что введенная таким образом эффективная масса единицы длины дислокации не является локальным свойством рассматриваемой точки на дислокационной петле. Она зависит от размеров и формы всей петли.

Воспользовавшись выражением (8,12) и определением тензора  $\mu_{ik}$  (8,5), оценим порядок величины  $m_{ik}$ . Для такой оценки будем считать функцию  $g(\xi)$  равной постоянному значению внутри трубки малого радиуса  $r_0$ , описанной вокруг линии дислокации и равной нулю вне этой трубки. Тогда легко получается оценка

$$m \sim \frac{\varrho b^2}{4\pi} \ln \frac{r_m}{r_0}, \quad r_m \gg r_0, \quad (8,13)$$

где  $r_m$  — характерный радиус кривизны линии дислокации в рассматриваемой точке (в случае прямолинейной дислокации  $r_m$  — ее длина). Что же касается  $r_0$ , то согласно существующим атомным моделям дислокаций его величина должна быть порядка величины смещения, порождающего дислокацию, т. е.  $r_0 \sim b$ . Эта же оценка естественна с точки зрения теории упругости, так как она ограничивает снизу те расстояния, на которых справедлива рассматриваемая теория дислокаций.

Приведенная оценка для  $m_{ik}$  позволяет оправдать наше предположение о чисто полевой массе дислокации. Дело в том, что при движении реальной дислокации в кристалле часть атомов в окрестности оси дислокации на расстояниях порядка  $r_0$  от нее также приходит в движение. Это создает дополнительную инерцию дислокации, связанную с обычной

массой этих атомов. Порядок величины массы атомов внутри трубки радиуса  $r_0 \sim b$  на единице длины дислокации может быть оценен как  $\varrho r_0^2 \sim \varrho b^2$ . Сравнивая эту оценку с (8,13), мы видим, что при  $r_m \gg r_0$  учет массы перемещающихся атомов вблизи оси дислокации не дает существенного изменения инерции дислокации, и с логарифмической точностью массу дислокации действительно можно считать полевой.

Наконец, рассмотрим движение дислокационной петли как целого,

$$M_{ik} W_k^0 = F_i^e, \quad (8,14)$$

введя среднее ускорение дислокационной петли  $W_0$  и тензор ее полной массы  $M_{ik}$  по формулам

$$M_{ik} W_k^0 = \oint_{\mathcal{D}} m_{ik}(l) W_k(l) dl, \quad M_{ik} = \oint_{\mathcal{D}} m_{ik}(l) dl. \quad (8,15)$$

Для прямолинейной дислокации, когда векторы  $\tau$  и  $b$ , а также  $\sin^2 \theta$  неизменны вдоль линии дислокации, тензор полной массы  $M_{ik}$  описывается выражением, аналогичным таковому для коэффициента самоиндукции прямолинейного проводника. Пользуясь известным выражением для коэффициента самоиндукции, получим полную массу прямолинейной дислокации

$$M_{ik} = \frac{\varrho b^2 r_m}{4\pi} \{(\delta_{ik} - \tau_i \tau_k)(1 + \gamma^4 \sin^2 \theta) + [\beta, \tau]_i [\beta, \tau]_k 2(1 - \gamma^2)^2\} \ln \frac{r_m}{r_0}, \quad (8,16)$$

где  $r_m$  обозначает длину дислокации ( $r_m \gg r_0$ ). В случае винтовой дислокации соотношение (8,16) приводит к выражению для массы винтовой дислокации, полученному ранее Франком<sup>26</sup> и Эшелби<sup>27</sup>.

Найдя из (8,14) среднее ускорение всей дислокации, опишем относительное движение отдельных элементов дислокационной линии. Для составления соответствующего уравнения движения представим ускорение элемента в точке  $l$  на дислокации в виде

$$W(l) = W_0 + w(l), \quad (8,17)$$

где  $w(l)$  — ускорение элемента дислокации относительно «центра инерции» дислокационной петли. Тогда из (8,6) и (8,14) получим

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{D}} \mu_{ik}(l, l') w_k(l') dl' = \\ = f_i^0(l) - m_{ik}(l) M_{km}^{-1} F_m^e + e_{ikn} b_p \tau_k(l) \sigma_{mp}^e(l) + S_i(l, V), \end{aligned} \quad (8,18)$$

где  $M_{ik}^{-1}$  — тензор, обратный тензору полной массы дислокации.

Уравнения движения (8,14) и (8,18) позволяют разделить изучение движения дислокационной петли как целого и относительного движения ее элементов.

## § 9. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИСЛОКАЦИЙ

После вывода уравнения движения отдельной дислокации мы в принципе имеем полную систему уравнений, определяющих эволюцию набора дислокационных петель и упругого поля в твердом теле. Но уравнения движения дислокаций входят в эту систему как уравнения движения



дискретных образований. В то же время вся теория динамического упругого поля, создаваемого дислокациями, а также функция Лагранжа для дислокаций и поля сформулированы в терминах непрерывного распределения дислокаций. Чтобы придать указанной системе уравнений единообразную форму записи, представляется естественным усреднение уравнений движения большого числа отдельных дислокаций и преобразование их к виду уравнений движения непрерывно распределенных дислокаций. При любой попытке перейти к уравнениям движения непрерывно распределенных дислокаций мы неизбежно возвращаемся к намеченному в § 3 вопросу о способе усреднения пространственного распределения дислокаций. Отмечая важность этого вопроса, мы проанализируем усреднение уравнений движения лишь в двух простейших случаях, выделенных в § 3, и убедимся, что переход к уравнениям движения непрерывно распределенных дислокационных петель в разных случаях приводит к различным физическим результатам. В частности, покажем, что плотность эффективной массы не может иметь одинаковый вид при разных условиях усреднения.

Ограничимся рассмотрением чисто упругого взаимодействия дислокаций друг с другом и с внешними полями, не обсуждая вопросов зарождения, размножения и взаимопревращения дислокаций. При этом мы, естественно, отдаем себе отчет в том, что эволюция системы дислокаций в реальном случае должна описываться некоторым аналогом кинетического уравнения, учитывающим все эти и другие аналогичные процессы. Однако нас в первую очередь будет интересовать вопрос о введении плотности эффективной массы непрерывно распределенных дислокаций, совершающих чисто механическое движение и не участвующих в перечисленных процессах.

Начнем со случая распределения дислокаций, который определяется условиями (3,13). Предположим дополнительно, что характерный линейный размер  $\lambda$ , определяющий пространственное изменение внешнего поля (например, длина волны внешнего поля), удовлетворяет условию

$$h \ll \lambda \ll r_m. \quad (9,1)$$

Тогда при переходе к макроскопическим уравнениям линейные размеры  $l_0$  объема, по которому производится усреднение, следует выбирать из условия

$$h \ll l_0 \ll \lambda \ll r_m. \quad (9,2)$$

В этом случае, как уже отмечалось в § 3, распределение дислокаций и их потоков описывается скалярной плотностью  $q^B(\mathbf{r}; \mathbf{r})$ , связанной с тензорами  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\mathbf{j}}$  формулами (3,14) и (3,15.)

Пусть дислокации совершают механическое движение в своих плоскостях скольжения. Выделим в некоторой точке  $\mathbf{r}$  элемент упругой среды объемом  $\Omega_0$  в форме цилиндра длиной  $l_0$ , ось которого параллельна некоторому вектору  $\mathbf{t}$ , и рассмотрим дислокации с заданными одинаковыми векторами  $\mathbf{b}$ , имеющие внутри объема  $\Omega_0$  заданные параллельные векторы  $\mathbf{t}$ .

Тогда усреднение по сечению цилиндра  $\Omega_0$  любых локальных дислокационных характеристик сведется к умножению их средних величин на скалярную плотность  $q(\mathbf{r})$ . Усреднение локальных характеристик по высоте цилиндра  $\Omega_0$  при указанном его выборе дает умножение на единицу. Поэтому усреднение внешних сил, действующих на дислокацию и входящих в правую часть уравнения (8.6), не представляет труда:

$$\bar{f}_i^e = e_{ilm} \tau_l b_k \sigma_{mk}^e(\mathbf{r}) q(\mathbf{r}; \mathbf{r}), \quad (9,3)$$

$$\bar{S}_i = \kappa_i S_0(\mathbf{r}; \mathbf{V}) q(\mathbf{r}; \mathbf{r}), \quad (9,4)$$

где  $\hat{\sigma}^0$  — внешнее по отношению ко всем дислокациям поле, а  $\mathbf{x}$  — по-прежнему единичный вектор нормали к линии дислокации, лежащий в плоскости скольжения. Величина и зависимость от направленных векторов  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{b}$  силы  $S_0$  должна конкретизоваться в каждом случае отдельно.

Что касается усреднения силы статического самодействия, то мы произведем его с учетом того, что после усреднения эта сила должна описывать квазистатическое взаимодействие со всеми непрерывно распределенными дислокациями:

$$\bar{f}_i^0 = e_{ilm} \tau_l b_k \sigma_{mk}^0(r) q(\mathbf{t}; r), \quad (9,5)$$

где тензор  $\hat{\sigma}^0(r)$  связан с непрерывной плотностью дислокаций  $\hat{\mathbf{a}}(r)$  в тот же момент времени общей формулой

$$\sigma_{ik}^0 = \frac{\mu}{4\pi} \int \gamma_{iklm}(\mathbf{n}) \alpha_{lm} \frac{d\Omega}{R}. \quad (9,6)$$

Тензорная функция  $\gamma_{iklm}(\mathbf{n})$  единичного вектора  $\mathbf{n}$ , зависящая от упругих модулей среды, содержит при компонентах  $n_i$  множители порядка величины единицы. В изотропном случае тензор  $\gamma_{iklm}(\mathbf{n})$  можно построить на основании известных выражений<sup>21,22</sup>:

$$\begin{aligned} \gamma_{iklm}(\mathbf{n}) = & 2\{3n_i n_k - \gamma^2(\delta_{ik} + 3n_i n_k) n_p e_{plm}\} + \\ & + (2\gamma^2 - 1)(n_i e_{klm} + n_k e_{ilm}) + e_{ipl} \delta_{km} n_p + \delta_{im} e_{kpl} n_p. \end{aligned} \quad (9,7)$$

В двумерном случае, когда все дислокации прямолинейны и бесконечно протяжены вдоль одной оси, интеграл (9,6) следует понимать в смысле главного значения.

Наконец, перейдем к усреднению левой части уравнения (8,6), т. е. члена

$$\oint_{\mathcal{L}} \mu_{ik}(l, l') W_k(l') dl', \quad (9,8)$$

в котором точка  $l$  дислокационной петли находится в элементе объема  $\Omega_0$ .

Усреднение величины (9,8) мы запишем в виде

$$\frac{1}{\Omega_0} \int_{l_0} dl \sum \oint_{\mathcal{L}} \mu_{ik}(l, l') W_k(l') dl', \quad (9,9)$$

где суммирование производится по всем дислокациям с одинаковыми векторами  $\mathbf{b}$ , обладающим внутри объема  $\Omega_0$  вектором касательной  $\mathbf{t}$  и пересекающим основание цилиндра  $\Omega_0$ .

Разобьем контурный интеграл в (9,9) на две части:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_0} \int_{l_0} dl q(r) \int_{l_0} \mu_{ik}(l, l') \overline{W_k(l')} dl' + \\ + \frac{1}{\Omega_0} \int_{l_0} dl \sum_{\mathcal{L}-l_0} \int dl' \mu_{ik}(l, l') W_k(l'), \end{aligned} \quad (9,10)$$

в первой из которых все величины относятся к элементу дислокации с заданными векторами  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{b}$ , а потому элементарно усредняются.  $\overline{W_k}$  — среднее ускорение соответствующих элементов дислокации. Во втором слагаемом интегрирование  $\int dl' \dots$  производится по всей длине дислокации, за вычетом прямолинейного участка, пересекающего объем  $\Omega_0$ .

Преобразуем второе слагаемое в (9,10), вспомнив соотношение (8,4), которым формально вводилось определение эффективной массы дислокации:

$$\oint_{\mathcal{Z}} \mu_{ik}(l, l') W_k(l') dl' \equiv -f_i^1(r) = -e_{ikl} \tau_k b_m \sigma_{lm}^1, \quad (9,11)$$

где  $\hat{\sigma}_1$  — динамическая часть поля напряжений, созданного движением дислокации.

В сумме (9,10) учтены поля всех дислокаций заданного типа, проходящих через элемент объема  $\Omega_0$ . Однако, так как теперь мы рассматриваем некоторую произвольную совокупность непрерывно распределенных дислокаций, нас должно интересовать взаимодействие элементов петель внутри  $\Omega_0$  со всеми остальными линиями дислокаций. Поэтому для  $\hat{\sigma}_1$ , определяющего второе слагаемое в (9,10), следует писать выражение типа (5,10), в котором интеграл распространяется по всему пространству, за исключением объема  $\Omega_0$ . Но поскольку интеграл типа (5,10) не имеет никаких особенностей и, вычисленный по бесконечно малому объему, исчезает вместе с этим объемом, для интересующего нас тензора  $\hat{\sigma}_1$  можно воспользоваться буквально формулой (5,10), где интегрирование производится по всему объему.

Однако замена второго слагаемого в (9,10) величиной  $-f_1(r)$ , определенной указанным выше образом соотношением (9,11), не в одинаковой мере точно учитывает вклад в динамическую силу самодействия дискретной дислокации близких и далеких ее участков. Что касается вклада собственных далеких частей дислокационной линии ( $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg l_0$ ), то он ничем не отличается от вкладов элементов других дислокационных петель, находящихся на таком же расстоянии от объема  $\Omega_0$ . Поэтому характер движения далеких участков дислокационной петли и их влияние на движение дислокации в элементе объема  $\Omega_0$  наравне с таковыми других («чужих») дислокационных линий учитывается выражением (9,11) точно и правильно.

Но мы должны помнить, что динамическое взаимодействие разных частей дислокации медленно спадает с расстоянием между ними. В силу этого примыкающие к объему  $\Omega_0$  участки отдельных дислокаций рассматриваемого типа вносят существенный вклад в эффективную массу единицы длины элемента дислокации в объеме  $\Omega_0$ . Их влияние на эффективную массу специфично дискретное, и индивидуальность ближайших к объему  $\Omega_0$  элементов дислокации «не растворяется» полностью в непрерывном распределении дислокаций, как это происходит на больших расстояниях.

Поэтому соотношение (9,11), с достаточной точностью передающее плавный характер среднего динамического поля ближайших к объему  $\Omega_0$  участков дислокационных петель, не учитывает их индивидуального вклада в массу «своих» дислокационных линий. Следовательно, при замене второго слагаемого в (9,10) величиной  $-f_1(r)$  мы должны одновременно «исправить» входящую в первое слагаемое (9,10) массу единицы длины дислокации. Это исправление заключается в том, что масса единицы длины дислокации в объеме  $\Omega_0$  должна формироваться участком дислокации, одинаковым по форме с таковыми для всех дислокаций рассматриваемого типа. Таким участком дислокации является тот, который перемещается как поступательно движущаяся прямолинейная дислокация. Длина указанного участка дислокации порядка величины  $\lambda$ . Действительно,  $\lambda$  — это то расстояние, на котором, в соответствии с условием (9,4), дислокационная линия может считаться прямолинейной. С другой стороны,  $\lambda$  — это то наибольшее расстояние, на котором ускорение дислокационной линии приближенно может считаться постоянным.

Вклад более далеких элементов различных дислокационных петель в массу единицы длины никак не скоррелирован, и потому при усреднении он выпадает. Это обстоятельство и означает, что роль удаленных участков дислокаций правильно учтена выражением (9,11).

Имея в виду все изложенное выше, мы можем написать вместо (9,10) выражение

$$q(\mathbf{r}) m_{ik}(\lambda) W_k(\mathbf{r}) - c_{ikl} \tau_k b_m Q(\mathbf{r}) \sigma_{lm}^1(\mathbf{r}), \quad (9,12)$$

где  $W(\mathbf{r})$  — среднее ускорение дислокационного элемента заданного типа в точке  $\mathbf{r}$ , а  $m_{ik}(\lambda)$  — эффективная масса единицы длины прямолинейной дислокации длины  $\lambda$ . В изотропной среде масса скользящей дислокации  $m_{ik}(\lambda)$  определяется формулой, вытекающей из (8,16):

$$m_{ik}(\lambda) = \frac{qb^2}{4\pi} (\delta_{ik} - \tau_i \tau_k) (1 + \gamma^4 \sin^2 \theta) \ln \frac{\lambda}{r_0}. \quad (9,13)$$

Величина  $\lambda$  определяется лишь по порядку величины, поэтому можно было бы думать, что соотношения, в которые она входит, являются грубой качественной оценкой. Однако соотношение (9,13) показывает, что зависимость от  $\lambda$  очень слабая (логарифмическая), поэтому хотя изложенный выше анализ носил в значительной степени качественный характер, можно надеяться на достаточную точность окончательного результата.

Таким образом, усредненное уравнение движения непрерывно распределенных дислокаций для дислокаций каждого типа (для дислокаций, имеющих в точке  $\mathbf{r}$  определенные векторы  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{b}$ ) может быть записано в виде

$$m_{ik}(\lambda) W_k = c_{ilm} \tau_l b_k \{ \sigma_{mk}^e + \sigma_{mk}^0 + \sigma_{mk}^1 \} - \kappa_i S_0(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{V}), \quad (9,14)$$

где  $\hat{\sigma}_0$  и  $\hat{\sigma}_1$  связаны формулами (9,6) и (5,10) с тензорами плотности дислокаций и их потоков, а последние выражаются через скалярную плотность  $q^B(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{r})$  и средние скорости дислокаций соотношениями (3,14) и (3,15). Кроме того, тензоры  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{j}$  связаны уравнениями неразрывности дислокационного потока (3,7).

Структура уравнения движения непрерывно распределенных дислокаций, характерная для (9,14), изменяется в другом предельном случае, когда размеры дислокационных петель и расстояния между ними малы по сравнению с размером  $\lambda$ :

$$\lambda \gg r_m, h. \quad (9,15)$$

В этом случае линейные размеры  $l_0$  объема, по которому следует производить усреднение, должны быть меньше  $\lambda$  и в то же время удовлетворять требованию (3,16), т. е. должны иметь место неравенства

$$r_m, h \ll l_0 \ll \lambda. \quad (9,16)$$

Мы сделаем определенные дополнительные предположения модельного характера, упрощающие анализ уравнений. Во-первых, будем считать дислокации достаточно удаленными друг от друга, чтобы не учитывать явлений, связанных с их пересечениями (столкновениями).

Во-вторых, мы будем считать все дислокационные петли плоскими и лежащими в своих плоскостях скольжения. Тогда возможные ориентации петель определяются набором направлений вектора нормали к плоскости скольжения  $\mathbf{v}$  и направлений вектора Бюргерса  $\mathbf{b}$ . Эти направления мы будем нумеровать соответственно индексами  $\gamma$  и  $\beta$ .

В-третьих, упругие свойства среды предположим такими, чтобы свободная дислокационная петля в однородном внешнем поле имела кру-

говую форму (в случае изотропной среды эти свойства сводятся к равенству нулю коэффициента Пуассона). Тогда в процессе движения дислокации в однородном поле ее форма будет мало отличаться от круговой. Действительно, если участки дислокации с меньшими массами начнут перемещаться быстрее соседних, то изменится кривизна соответствующего участка линии и возникнет дополнительная сила квазистатического линейного натяжения, стремящаяся вернуть дислокации круговую форму. Поэтому не сможет произойти значительного изменения формы дислокационной петли в процессе ее движения. Поскольку нас интересует в первую очередь выяснение качественной стороны отличия второго предельного случая от первого, мы для простоты произведем анализ, считая все дислокации круговыми. Если принять это упрощение, то при заданных  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{b}$  петли характеризуются еще лишь одним параметром — своим радиусом, который мы будем обозначать через  $r_m$ .

При таких простых условиях непрерывное распределение дислокаций может быть описано плотностью  $\varrho^{\gamma\beta}(r_m; \mathbf{r})$ , указывающей среднее число дислокаций типа  $(\gamma, \beta)$  и радиуса  $r_m$  в единице объема с координатой  $\mathbf{r}$ . Тензор пластической поляризации  $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r})$  выражается через указанную плотность следующим образом:

$$P_{ik} = \pi \sum_{\gamma, \beta} v_i^\gamma b_k^\beta \int \varrho^{\gamma\beta}(r_m) r_m^2 dr_m, \quad (9,17)$$

где интегрируется по всем возможным радиусам петель.

В силу условий (9,15) поля напряжений почти однородны на протяжении одной петли, а потому полная упругая сила  $\mathbf{F}$ , действующая на дислокацию и входящая в уравнение (8,11), определяется градиентом упругих напряжений

$$F_i = s \nabla_i \sigma_{mk} v_m b_k, \quad (9,18)$$

где  $s$  — площадь, ограниченная дислокационной петлей:  $s = \pi r_m^2$ .

Имея в виду (9,18) и выражение типа (9,4), запишем уравнение движения петли как целого

$$M_{ik} W_k^0 = s \nabla_i \sigma_{mk} v_m b_k - \oint_{\mathcal{L}} \kappa_i S_0(V_0) dl, \quad (9,19)$$

где  $\mathbf{W}_0(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{V}_0(\mathbf{r})$  — соответственно среднее ускорение и средняя скорость петли, находящейся в точке  $\mathbf{r}$ , а  $M_{ik}$  — полная масса петли. В изотропной среде масса  $M_{ik}$  определяется формулой, следующей из (8,5) и (8,15):

$$M_{ik} = \frac{1}{2} \varrho b^2 \oint \oint (1 + \gamma^4 \sin^2 \theta) [\delta_{ik}(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}') - \tau_i \tau'_k] G(l, l') dl dl'. \quad (9,20)$$

Входящий в уравнение (9,19) тензор  $\sigma_{ik}$  описывает все внешние по отношению к рассматриваемой дислокации поля, т. е. как поле внешних сил  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^e$ , так и поле, созданное всеми дислокациями, за исключением рассматриваемой. Движущиеся дислокационные петли порождают поле, которое мы по-прежнему будем представлять как сумму квазистатического поля  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0$  и чисто динамического поля  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1$ :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^e + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1. \quad (9,21)$$

Тензор  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0$  выражается формулой (5,9) через пространственные производные тензора пластической поляризации  $\mathbf{P}$ , а тензор  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1$  может быть

выражен через производную по времени от  $\hat{\mathbf{P}}$ , если в формулу (5,10) подставить соотношение (4,5).

Следовательно, как и в первом случае, правая часть уравнения движения (9,19) определяется распределением дислокаций, их средними скоростями и ускорениями.

Если мы теперь представим ускорение элемента петли в виде суммы (8,17), то ускорение относительно центра инерции  $\mathbf{w}$  в соответствии с принятой моделью будет иметь только радиальную составляющую:  $\mathbf{w} = \kappa \mathbf{w}$ , где  $w = \dot{v}_m$ ,  $v_m = \dot{r}_m$ .

При описании движения петли, связанного только с изменением ее размеров, мы можем полностью пренебречь неоднородностью упругих полей и записать уравнение (8,9) в виде

$$m \gamma^{\beta} (r_m) w^{\beta} (r_m) = -f_0^{\beta} (r_m) + v_i^{\beta} b_k^{\beta} \sigma_{ik} - S_0^{\beta} (v_m), \quad (9,22)$$

где упругое поле  $\hat{\sigma}$  определяется формулой (9,21) и берется в центре петли.

В уравнении (9,22)  $m (r_m)$  — средняя масса единицы длины круговой дислокации радиуса  $r_m$ . В изотропной среде среднюю массу можно определить формулой, получающейся усреднением (8,10):

$$m (r_m) = \frac{\rho b^2}{4\pi r_m} \oint\limits_{\mathcal{D}} (1 + \gamma^4 \sin^2 \theta) (\tau \tau') G(l, l') dl dl'. \quad (9,23)$$

Величина  $f_0 (r_m)$  определяет постоянное по длине дислокации собственное ее натяжение, приводящее к силе, стремящейся сократить размеры петли (знак соответствующего слагаемого в (9,22) учитывает направление этой силы). Силу  $f_0 (r_m)$  можно получить, вычислив собственную статическую энергию  $E_s (r_m)$  круговой петли радиуса  $r_m$  и воспользовавшись очевидной формулой

$$f_0 (r_m) = \frac{1}{2\pi r_m} \frac{\partial E_s}{\partial r_m}. \quad (9,24)$$

С логарифмической точностью для изотропной среды формула (9,24) дает (если положить коэффициент Пуассона равным нулю)

$$f_0 (r_m) = \frac{\mu b^2}{4\pi r_m} \ln \frac{r_m}{r_0}. \quad (9,25)$$

Скорости  $\mathbf{V}_0 (r)$ ,  $v (r_m)$  и функция  $q (r_m, \mathbf{r})$  связаны уравнением непрерывности в обычном пространстве и в пространстве размеров:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (q \mathbf{V}_0) + \frac{\partial}{\partial r_m} (q v_m) = 0. \quad (9,26)$$

Таким образом, в рассмотренном предельном случае уравнения движения непрерывно распределенных дислокаций фактически являются уравнениями движения своеобразного «газа дислокационных петель», взаимодействующих через посредство своих упругих полей, не испытывающих столкновений, но изменяющих со временем свои размеры.

Проанализированные выше крайние предельные случаи подтверждают высказанное в начале параграфа утверждение о том, что в зависимости от постановки задачи и дислокационных свойств среды существуют разные способы усреднения, и эффективные массы, входящие в усредненные уравнения, имеют разный физический смысл.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. Х. Коттрел, Дислокации и пластическое течение кристаллов, М., Металлургиздат, 1958.
  2. Г. Шек, в сб. Проблемы механики, вып. II, М., 1959, стр. 198.
  3. Дислокации и механические свойства кристаллов. Сб. докладов, М., ИЛ, 1960.
  4. В. Л. Пинденбом, Некоторые вопросы физики пластичности, Итоги науки, вып. 3, 1960, стр. 117.
  5. Ван Бюрен, Дефекты в кристаллах, М., ИЛ, 1962.
  6. В. Л. Пинденбом, А. Н. Орлов, УФН **76**, 557 (1962).
  7. Атомный механизм разрушения. Материалы конференции, М., Металлургиздат, 1963.
  8. E. Kröner, Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Springer, Berlin, 1958.
  9. F. R. Nabarro, Advances Phys. **1**, 269 (1952).
  10. A. Seeger, Handb. Phys., Bd. 7(1), 1955, стр. 383.
  11. J. D. Eshelby, Solid State Phys. **3**, 79 (1956) (см. перевод в книге: Дж. Эшелби, Континуальная теория дислокаций, М., ИЛ, 1963).
  12. B. A. Bilby, Progr. Solid. Mech. **1**, 329 (1960).
  13. R. de Wit, Solid State Phys. **10**, 249 (1960) (см. перевод в книге: Дж. Эшелби, Континуальная теория дислокаций, М., ИЛ, 1963).
  14. А. М. Косевич, ЖЭТФ **42**, 152 (1962).
  15. E. F. Holländer, Чехосл. физ. ж. **B10**, 409, 479, 551 (1960).
  16. E. Kröner, G. Rider, Zs. Phys. **145**, 424 (1956).
  17. А. М. Косевич, В. Д. Наций, ФТТ **6**, 228 (1964).
  18. F. Kropp, Чехосл. физ. ж. **B12**, 191 (1962).
  19. T. Mura, Phil. Mag. **8**, 843, 1963; Int. J. Engng. **1**, 371 (1963).
  20. А. Ляв, Математическая теория упругости, М., Гостехиздат, 1935.
  21. W. Peach, J. S. Köhler, Phys. Rev. **80**, 436 (1950).
  22. А. М. Косевич, ЖЭТФ **43**, 637 (1962).
  23. J. D. Eshelby, Proc. Roy. Soc. **A197**, 396 (1949).
  24. F. R. Nabarro, Proc. Roy. Soc. **A209**, 279 (1951).
  25. Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, Классическая теория поля, М., Гостехиздат, 1949, стр. 188.
  26. F. G. Frank, Proc. Phys. Soc. **A62**, 131 (1949).
  27. J. D. Eshelby, Phys. Rev. **90**, 248 (1953).
  28. А. М. Косевич, В. Д. Наций, ФТТ **7**, 33 (1965).
-

