1963 г. Август *Т. LXXX, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

ЭЛЕКТРОНЫ В МЕТАЛЛАХ *)

(Введение в теорию поверхностей Ферми)

Дж. Займан

Часть V. ПОСТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ

1. ОРБИТЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ И ЦИКЛОТРОННЫЙ РЕЗОНАНС

В § 2 части III мы рассматривали действие магнитного поля на состояние электрона. Мы обнаружили, что вектор **k**, описывающий состояние электрона, изменяется со скоростью

$$\dot{\mathbf{k}} = \frac{e}{ch}[\mathbf{vH}]. \tag{1}$$

Следовательно, движение изображающей точки в **k**-пространстве нормально к направлению магнитного поля, и эта точка будет всегда находиться в одной и той же плоскости **k**-пространства. Кроме того, движение нормально к «локальной» скорости электрона **v**, которая, в свою очередь, параллельна градиенту функции энергии $\mathscr{E}$ (**k**) и, следовательно, нормальна к поверхности постоянной энергии в **k**-пространстве. Это означает, что $\dot{\mathbf{k}}$ расположен в касательной плоскости к поверхности $\mathscr{E}$ (**k**), проведенной в точке **k**. Изображающая точка всегда остается на той же самой поверхности энергии, и мы приходим к следующему простому правилу: *в заданном магнитном поле* **H** *вектор* **k** *электрона, находящегося на поверхности Ферми, описывает «орбиту», определяемую пересечением поверхности Ферми с плоскостью, нормальной к магнитному полю* **H** (рис. 45).

Эта изящная теорема лежит в основе всех методов исследования поверхности Ферми. Магнитное поле не изменяет энергии электрона. Оно попросту отклоняет электрон, придавая ему в обычном пространстве сложное движение по спирали. Но в пространство импульсов это движение отображается в виде орбиты, которую очень легко определить и очень легко себе представить. Такие орбиты могут быть выражены непосредственно через геометрические параметры поверхности Ферми. Нетрудно понять, что эти орбиты имеют значительно более существенный смысл, чем просто математическое построение, определяющее решения дифференциальных или интегральных уравнений.

*) J. M. Ziman, Electrons in Metals: A Short Guide to the Fermi Surface. Part V, Contemporary Physics 4, 81 (1963). Часть I см. УФН **78** (2), 291 (1962), часть II — **78** (4), 679 (1962), часть III — **79** (2), 319 (1963), часть IV — **80** (3), 505 (1963). Перевод В. А. Угарова.

Но для того, чтобы орбиты, о которых идет речь, могли реализоваться, нужно допустить, что уравнение движения (1) справедливо в течение достаточно длительного промежутка времени. Например, изображающая точка пройдет полный замкнутый путь на поверхности Ферми только за время

$$T = \frac{2\pi}{\omega_H} = \frac{ch}{eH} \oint \frac{dk}{v_\perp}, \tag{2}$$

где $v_\perp$ — нормальная к **H** компонента скорости электрона, а интеграл берется по всей замкнутой орбите. Так как после этого **k** примет свое исходное значение, движение является периодическим с указанным периодом T или — как это и отмечено в (2) — с угловой частотой ω_H. Эта частота называется циклотронной частотой орбиты. Нетрудно убедиться в том, что для сферы, соответствующей свободным электронам,

$$\omega_H = \frac{eH}{mc}; \tag{3}$$

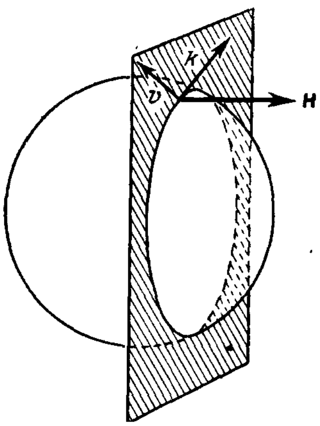

Рис. 45. Орбита в магнитном поле как пересечение поверхности Ферми с плоскостью, нормальной к магнитному полю.

это — хорошо известная формула, полученная в свое время Лармором при подсчете прецессионного движения классической заряженной частицы в магнитном поле.

У обычных металлов при комнатных температурах этот эффект наблюдать невозможно. Время релаксации электрона τ, связанное с его рассеянием на примесях и колебаниях решетки, в этих условиях по порядку величины равно 10^{-14} *сек*. Мы должны были бы приложить баснословно большое магнитное поле, обеспечивающее достижение циклотронной частотой оптических значений, чтобы иметь возможность наблюдать полный цикл между двумя соударениями. Однако можно добиться соблюдения неравенства $\omega_H\tau > 1$ в реально достижимых полях, используя очень чистые образцы и переходя к очень низким температурам. Первые успешные наблюдения циклотронного резонанса на меди удалось осуществить фактически на естественных кристаллах Cu, заимствованных из геологического музея! Проводимость такого образца при температуре жидкого гелия в несколько тысяч раз больше, чем проводимость при комнатных температурах. Но даже и в этом случае требуется магнитное поле порядка десятков тысяч эрстед, а циклотронная частота лежит в микроволновом интервале.

Наиболее наглядным экспериментом является прямое наблюдение циклотронной частоты с помощью резонанса на микроволновых частотах Этот эффект хорошо известен в полупроводниках, где его некоторое время тому назад использовали для исследования структуры полос, эффективных масс носителей и т. д. Однако в металлах возникает характерная трудность. Из-за наличия скин-эффекта микроволновое поле не может проникнуть в металл на достаточную глубину, чтобы оказать влияние на движение электронов. Каждый электрон заэкранирован плотным газом, образованным другими электронами.

Но эту трудность можно обойти. Хитрость состоит в том, что магнитное поле направляется параллельно поверхности металла (этот прием предложен Азбелем и Канером). Как и обычно, электроны будут двигаться по круговым или спиральным траекториям, как это изображено на рис. 46. Бо́льшая часть каждой траектории расположена ниже скин-слоя, и на этой части переменное электрическое поле электроном не ощущается. Но если всякий раз, совершив цикл, электрон оказывается вблизи поверхности в фазе с электрическим полем, он будет довольно быстро черпать энергию от этого поля. Следовательно, у таких электронов можно добиться резонанса на циклотронной частоте. Мало того, резонанс можно осуществить на частотах, кратных ω_H, когда электрическое поле

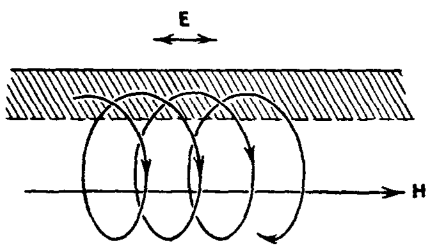

Рис. 46. Циклотронный резонанс в металле; магнитное поле направлено параллельно поверхности образца.

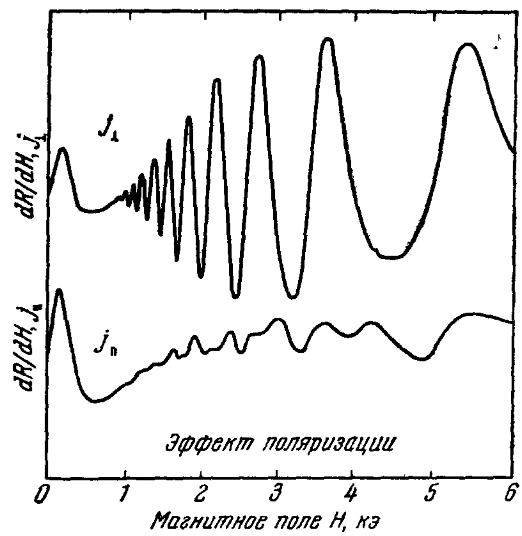

Рис. 47. Циклотронный резонанс в меди (Кип, 1960 г.)

совершает 2, 3, ... и т. д. колебаний за то время, пока электрон находится вдали от поверхности. Практически частоту колебаний оставляют неизменной, а увеличивают магнитное поле. Можно обнаружить отчетливую серию максимумов, отстоящих друг от друга на равных расстояниях относительно переменной $1/H$ (рис. 47).

Интерпретация наблюдаемой периодичности отнюдь не очевидна. В случае сферической (или эллипсоидальной) поверхности все электроны обладают одной и той же циклотронной частотой для определенного направления магнитного поля, и никаких проблем не возникает. Но для поверхности Ферми произвольной формы различным ее сечениям будут соответствовать различные значения ω_H, и результат будет равен сумме вкладов всех частей поверхности. Однако если задуматься о соотношении вкладов различных сечений,

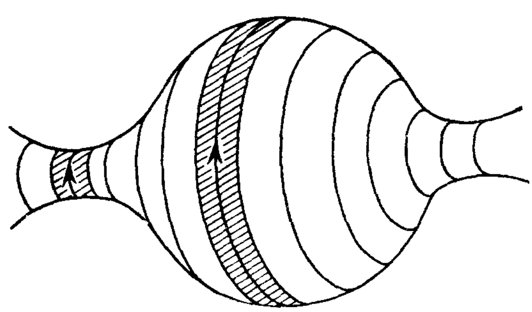

Рис. 48. Экстремальные орбиты.

то станет ясным, что, как правило, значительно больший вклад будет от тех сечений, у которых площадь поперечного сечения поверхности экстремальна. Действительно, циклотронная частота около экстремального сечения будет стационарной, и вблизи него, в широком поясе, циклотронная частота будет почти постоянной (рис. 48). Электроны из этой области будут доминировать в явлении, так что наблюдаемые осцилляции на резонансной кривой можно, как правило, приписать экстремальным орбитам на поверхности Ферми. Например, в случае меди, если поле приложено вдоль направления (1, 0, 0), наблюдается только один резонанс, поскольку экстремальное сечение только одно, но в направлении (1, 1, 1) можно обнаружить как максимальную орбиту, охватывающую «вздутую» часть поверхности, так и минимальную, проведенную вокруг поверхности Ферми в области соприкосновения с границей зоны.

2. СХЕМА ПОВТОРЕННЫХ ЗОН

Рассмотрим теперь несколько особую орбиту в меди. Приложим поле в направлении (1, 1, 0), так что центральное сечение поверхности Ферми будет проходить через область соприкосновения (рис. 49). Рассмотрим электрон, находящийся в начальный момент в точке A. Под действием

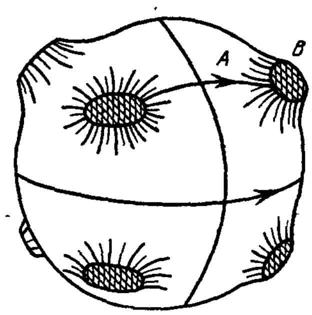

Рис. 49. Орбиты на поверхности Ферми меди.

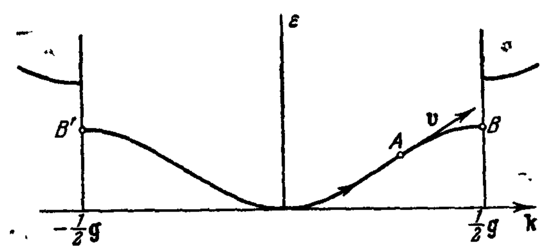

Рис. 50. Одномерная модель (зависимость $\mathscr{E}=\mathscr{E}(k)$).

магнитного поля он будет двигаться по сечению до тех пор, пока не достигнет точки B на границе зоны. Что произойдет дальше? Этот теоретический вопрос имеет фундаментальную важность; ответ на него определяет характер всех явлений в магнитных полях.

Давайте вернемся к нашей одномерной модели. Приложим электрическое поле так, чтобы изображающая точка двигалась с постоянной скоростью по кривой $\mathscr{E}$ (k). Что произойдет, когда она дойдет до границы зоны B (рис. 50)? На границе зоны скорость обращается в нуль, поскольку там $\mathscr{E}$ (k) имеет максимум. Однако ускорение не прекращается. Электрон не может приобрести энергию, достаточную для того, чтобы перескочить в следующую полосу. В каком же тогда состоянии он может оказаться?

Но какому состоянию отвечает точка B? Согласно нашему анализу, проведенному в § 2 части II, этому состоянию соответствует стоячая волна, именно

$$\psi_+\left(\frac{1}{2}g\right)=\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}gx=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\exp\left(\frac{1}{2}igx\right)+\exp\left(-\frac{1}{2}igx\right)\right\}; \qquad (4)$$

состояние ψ_- принадлежит уже следующей полосе. Это состояние представляет собой комбинацию двух плоских волн равной амплитуды; одна из этих волн, волна с $k=\frac{1}{2}g$, принадлежит самой точке B, а другая, с$k=-\frac{1}{2}g$, — «другой» границе зоны. Но рассмотрим теперь состояние электрона в этой же полосе на этой «другой» границе зоны, в B'. Очевидно, изменив знак у $\frac{1}{2}g$, мы немедленно получим

$$\psi_+\left(-\frac{1}{2}g\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\exp\left(-\frac{1}{2}igx\right)+\exp\left(\frac{1}{2}igx\right)\right\}, \qquad (5)$$

т. е. в точности то же самое состояние, что и в B. На нашей диаграмме точки B и B' оказываются эквивалентными. Они соответствуют одному и тому же состоянию. Электрон имеет одинаковую волновую функцию при $k=\frac{1}{2}g$ и при $k=-\frac{1}{2}g$.

Для подсчета состояний это обстоятельство не выдвигает новых проблем. Мы просто условливаемся учитывать все «допустимые» значения k

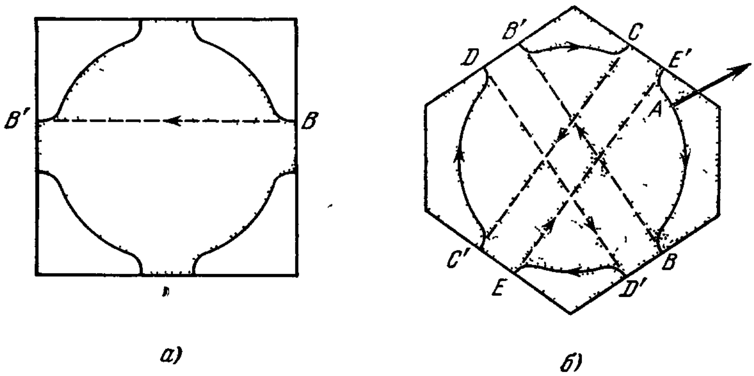

Рис. 51. *а*) Электрон «перескакивает» из точки B в точку B', которые эквивалентны между собой, *б*) полная орбита с учетом перескоков в приведенной зоне

между B и B', а из граничных точек учитываем только одну; однако распределение допустимых точек столь плотно, что даже включение в подсчет обеих точек не вносит существенной ошибки. Но зато мы теперь получили возможность ясно понять, что происходит, когда изображающую точку заставляют приближаться к точке B и проходить через отражающее зеркало. Она перепрыгивает к точке B' и спускается оттуда вниз по кривой $\mathscr{E}(k)$. Ее скорость проходит через нуль, становясь отрицательной, так что все выглядит так, как если бы электрон двигался против электрического поля, которое его «ускоряет». Довольно естественно интерпретировать это явление как брэгговское отражение, возникающее при попытке продвинуть электрон через критическое значение длины волны, т. е. длины волны, для которой удовлетворяется условие Брэгга.

В трехмерном случае при наложении магнитного поля происходит, в сущности, то же самое. В квадратной зоне (рис. 51, *а*) электронное состояние в точке B в точности то же самое, что и в точке B', в точке на границе зоны, которая может быть получена из B с помощью переноса в **k**-пространстве на один вектор взаимной решетки **g**. «Перескок» эквивалентен одному отражению от группы кристаллических плоскостей, нормальных к **g** и определяющих в точке B границу этой зоны.

Для сечения (1, 1, 0) меди (рис. 51, *б*) мы должны ввести целую серию перескоков: от B к B', затем происходит движение по кусочку орбиты к C, затем перескок от C к C', потом — движение вдоль другого куска орбиты и т. д. «Перескоки» происходят мгновенно, так что «орбита» представляет собой в точности четыре сегмента сплошной кривой, проходящей вокруг сечения поверхности Ферми, исключая границы зоны. Последовательность сегментов соответствует алфавитному порядку букв на рис. 51, *б*.

Так выглядит формальное решение поставленной задачи. Однако ему можно придать очень элегантную геометрическую форму. Вместо того, чтобы заставлять нашу изображающую точку всякий раз, как она достигает границы зоны, «перескакивать» обратно на целый вектор взаимной решетки, сместим всю зону, а вместе с ней и поверхность Ферми как целое, на вектор — **g**, так что сразу за границей зоны уже будет находиться та самая область, куда должна перескочить изображающая точка. В одномерном случае мы приходим к простой периодической кривой с плавным

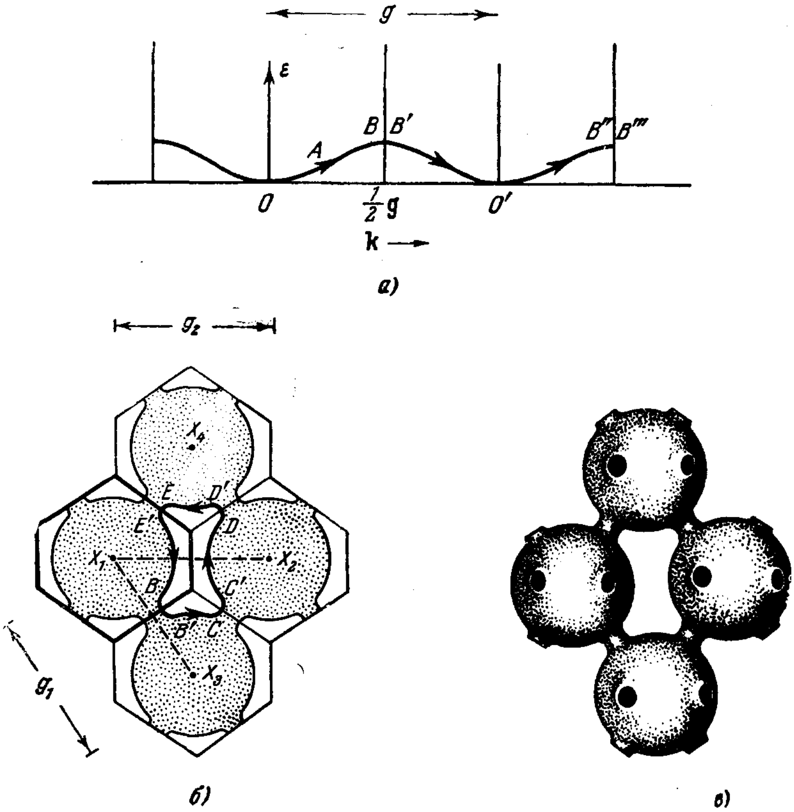

Рис. 52. Непрерывность орбит восстановлена — *а*) в одномерном случае, *б*) в двумерном случае, *в*) в трехмерном случае — за счет использования повторяющейся зонной схемы (ср. рис. 44 части IV).

максимумом на границах зоны и минимумами в «центрах зоны» (рис. 52, *а*). Электрическое поле постепенно смещает k вдоль кривой и плавно переводит ее через граничную точку, которая теперь ничем не выделяется, кроме того, что в ней скорость обращается в нуль. В двумерном случае (т. е. для сечения трехмерной зоны) мы должны сочетать B с B', затем снова повторить построение, присоединив C к C' и т. д. Результат изображен на рис. 52, *б*; в полученной геометрической фигуре орбита представляет собой уже замкнутую кривую. Эту кривую называют иногда «собачьей костью». Для трехмерного случая эквивалентом этого построения будет сочетание ряда тел, подобных тем, которые были изображены на рис. 44. Эти тела присоединяются друг к другу по границам зоны. Такого рода сложный геометрический объект (рис. 52, *в*), с его более или менее сферическими «вздутиями», соединяющимися восьмью шейками по диагонали куба,— это и есть поверхность Ферми меди в схеме повторенных зон.

Это построение на самом деле означает нечто большее, чем просто геометрическую хитрость, обеспечивающую видимую непрерывность орбит. Дело в том, что зона Бриллюэна представляет собой единичную ячейку взаимной решетки в **k**-пространстве (см. § 2 части IV) и ее вполне возможно чисто автоматически повторять так, чтобы целиком заполнить это пространство. Вектор **k** каждого состояния определяется вовсе не однозначным образом (см. § 5 части IV, а также соотношения (4) и (5) этой части); он определен с точностью до слагаемого, равного любому вектору взаимной решетки. Так, например, состоянию, которому на рис. 52, *б* в «настоящей» зоне соответствует точка X_1, могут соответствовать также эквивалентные точке X_1 точки X_2, X_3 и т. д. в любом повторении этой зоны, полученном ее переносом на один из векторов взаимной решетки $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ и т. д. Можно показать, что функция $\mathscr{E}(\mathbf{k})$ является непрерывной периодической функцией в **k**-пространстве с периодом, равным периоду взаимной решетки, так что переход через границу зоны происходит очень плавно и без каких-либо осложнений. «Вздутия», «шейки» и орбиты типа «собачьей кости» — все эти элементы сохраняются также и в этой схеме. Не имеет ни малейшего значения то, что первые элементы относятся к внутренней части зоны, вторые лежат в плоскости границы зоны, а последние входят в четыре различные последовательно расположенные зоны. С математической точки зрения наша многосвязная поверхность Ферми представляет собой непрерывный объект, повторяемый бесконечное число раз вплоть до бесконечности, без искусственных соединений или разрывов.

Циклотронный резонанс позволяет нам увидеть замкнутые орбиты, соответствующие экстремальным сечениям повторенных поверхностей Ферми. К сожалению, значения ω_H для экстремальных орбит оказываются не очень полезными в качестве непосредственной информации о форме поверхности Ферми. Дело в том, что в соотношение (2) входит скорость электрона, которая зависит от взаимного расстояния между поверхностями энергии в **k**-пространстве, а не от геометрических особенностей отдельных поверхностей. Однако в том случае, когда нам известна с большой точностью из других источников форма поверхности Ферми (такой случай имеет место для меди), циклотронные частоты определяют нам производные от $\mathscr{E}(\mathbf{k})$ в **k**-пространстве и предоставляют тем самым возможность экстраполировать эту функцию на некоторое расстояние от поверхности Ферми. Опять-таки расчет структуры полос позволяет определить значения ω_H, которые можно детально сравнить с экспериментальными данными.

3. МАГНЕТОСОПРОТИВЛЕНИЕ

Рассматривая циклотронный резонанс, мы интересовались только замкнутыми орбитами, подобными тем, которые окружают «вздутия» поверхности Ферми у меди, или орбитами типа «собачьей кости», которые представляют собой «дырочные» орбиты, охватывая пустые области **k**-пространства. Однако в случае многосвязной поверхности Ферми чаще всего получаются сечения, контуры которых не являются замкнутыми кривыми. Наглядный пример приводится на рис. 53, *а*, где система срезается вдоль одной из осей (1, 1, 1); изображающая точка движется так, что никогда не возвращается в исходное положение. Существуют значительно более сложные сечения, обладающие тем же самым свойством. Например, можно доказать простым логическим рассуждением топологическую теорему о том, что любое сечение, подобное изображенному на рис. 53, *б*, которое содержит «электронные» орбиты в одной области и «дырочные» орбиты в другой, будет содержать открытые орбиты, разделяющие две эти области.

Прилагая магнитное поле в определенном направлении и измеряя при этом проводимость, соответствующую постоянному току, мы должны учесть вклад всех электронов, находящихся на поверхности Ферми. Это означает, что мы должны рассмотреть все сечения, которые можно сделать нормально к направлению приложенного поля. Весьма вероятно, что в некоторых сечениях окажутся открытые орбиты. Для слабых магнитных

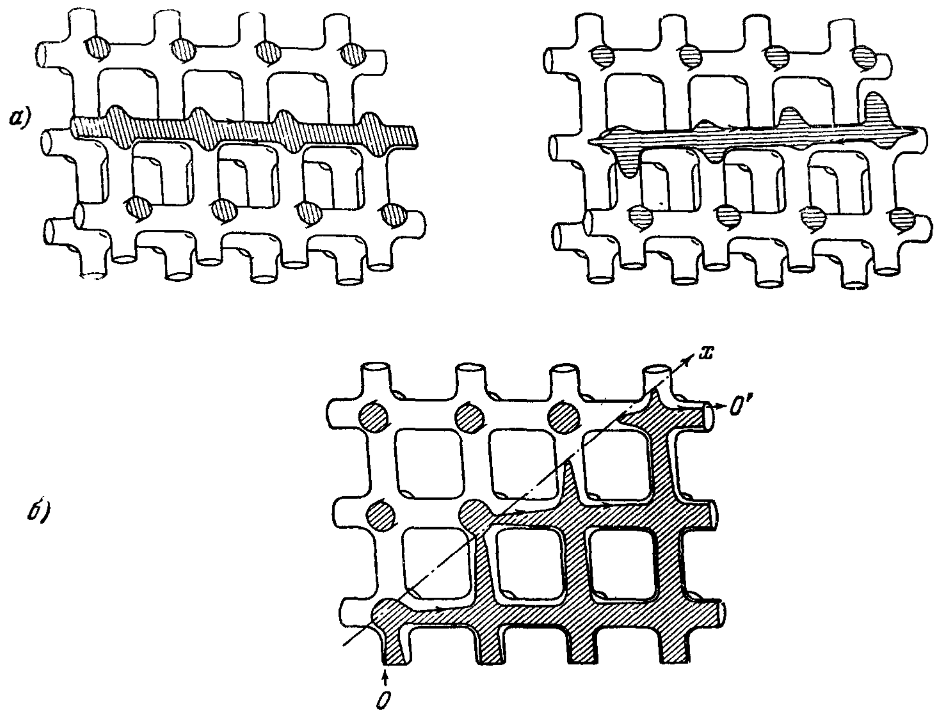

Рис. 53. Иллюстрация к топологическому принципу, утверждающему, что открытая орбита всегда разделяет области «электронных» и «дырочных» орбит. Эти картинки получаются сечением кубической решетки, образованной из трубок, плоскостями различного направления (Чемберс, 1960 г.).

полей это обстоятельство ничего не меняет. На замкнутых орбитах, где соблюдается условие $\omega_H\tau \ll 1$, до того, как электрон рассеется, он всегда сможет пройти лишь некоторую часть орбиты. Таким образом, магнетосопротивление сказывается усредненным по всей поверхности Ферми, по всем ее локальным кривизнам, электронным скоростям — совершенно независимо от того, что представляют собой те небольшие отрезки, проходимые электронами до рассеяния,— кусочки открытых или замкнутых орбит. Мы имели уже случай упомянуть (§ 4, часть IV), что магнетосопротивление в слабых полях открывает доступ к довольно полезной информации, однако это явление требует весьма осторожной интерпретации.

Но когда мы переходим к сильным магнитным полям, то обнаруживаем существенное различие между открытыми и замкнутыми орбитами. В случае замкнутых орбит, если $\omega_H\tau \gg 1$, электрон сделает много оборотов по орбите до того, как он будет рассеян. Когда мы подсчитываем электрическую проводимость, то учитываемая скорость этого электрона — это вовсе не скорость в какой-то отдельной точке поверхности Ферми; напротив, это скорость движения, усредненная по всей орбите. Нетрудно проверить, что компонента средней скорости, нормальная к магнитному полю **H**, при возрастании **H** стремится к нулю. Если направить **H** по оси z, а проводимость измерять в направлении оси x, то можно ожидать, что проводимость будет стремиться к нулю при стремлении **H** к бесконечности. Нетрудно показать, что для замкнутых орбит

$$\sigma_{xx} \to \frac{A}{H^2} \quad \text{при} \quad H \to \infty, \tag{6}$$

где A — константа, зависящая от особенностей процессов рассеяния, геометрии орбит и т. д.

В случае открытых орбит обратимся к сечениям, приведенным на рис. 53. Эти сечения нормальны к направлению магнитного поля,

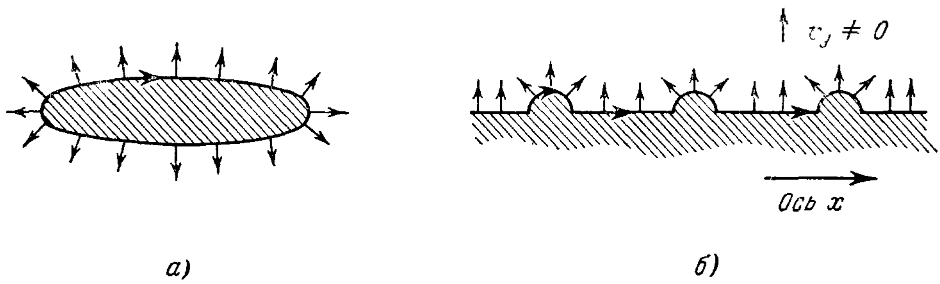

Рис. 54. *а*) На замкнутой орбите средняя проекция скорости на плоскость, нормальную к магнитному полю, равна нулю; *б*) на открытой орбите некоторые компоненты скорости отличны от нуля.

но они не обладают той симметрией, которая могла бы обеспечить обращение в нуль средней скорости электрона в этой плоскости. Если орбиты уходят в бесконечность в направлении оси x, то, очевидно, следует ожидать, что v_y останется конечной даже в самых сильных магнитных полях. Соответствующая компонента проводимости будет в этом случае иметь своим пределом постоянную величину

$$\sigma_{yy} \to B \quad \text{при} \quad H \to \infty. \tag{7}$$

Глядя на две последние формулы, можно было бы думать, что сопротивление металла, поперечное приложенному магнитному полю, будет стремиться к бесконечности, если все орбиты замкнутые, и будет иметь конечный предел, если в соответствующих направлениях окажутся открытые орбиты. К сожалению, на самом деле все происходит как раз наоборот.

Чтобы получить правильный ответ, выпишем тензорную связь между плотностью тока и полем. Для плоскости (x, y) имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \sigma_{xx}E_x + \frac{1}{RH}E_y, \\ J_y &= \left(-\frac{1}{RH}\right)E_y + \sigma_{yy}E_y \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Два члена, расположенные по диагонали и содержащие коэффициент Холла R, соответствуют эффекту Холла (см. § 5 части I и § 4 части IV). Коэффициент Холла R в очень сильных магнитных полях может не совпадать с коэффициентом Холла в слабых магнитных полях, но возникающее электрическое поле все равно направлено под прямым углом к электрическому току и с достаточной точностью пропорционально H.

Чтобы выяснить поведение сопротивления, следует разрешить эти уравнения относительно E_x и E_y, получив их в виде функций J_x и J_y:

$$E_x = \frac{1}{\sigma_{xx} + \frac{1}{R^2H^2\sigma_{yy}}} J_x + \frac{RH}{1 + R^2H^2\sigma_{xx}\sigma_{yy}} J_y. \tag{9}$$

Коэффициент при J_y определяет холл-эффект, который нас сейчас не интересует. Коэффициент при J_x мы должны интерпретировать как удельное сопротивление ϱ_{xx}. Этот коэффициент представляет собой электрическое поле, направленное по оси x, создаваемое током, равным единице, текущим в этом направлении. Это поле, разумеется, перпендикулярно магнитному полю.

Для замкнутых орбит как σ_{xx}, так и σ_{yy} ведут себя по закону A/H^2. Членом σ_{xx} в знаменателе можно пренебречь, и

$$\varrho_{xx} \sim AR^2. \tag{10}$$

Следовательно, поперечное магнетосопротивление в сильных полях стремится к насыщению.

Однако в случае открытой орбиты вдоль оси x величина σ_{xx} стремится к постоянному значению B и оба слагаемых в знаменателе убывают, как $1/H^2$:

$$\varrho_{xx} \sim \frac{1}{\frac{A}{H^2} + \frac{1}{R^2H^2B}} \sim \frac{H^2}{A + \frac{1}{R^2B}}. \tag{11}$$

В этом случае магнетосопротивление неограниченно растет пропорционально H^2.

Но во всем явлении в целом доминирует холл-эффект. Мы измеряем не просто э. д. с., J_x/σ_{xx}, которая необходима в обычных условиях, чтобы создать ток J_x. Ток J_x вызывает э. д. с. Холла, равную RHJ_x, в направлении оси y. Эта э. д. с. вызывает, в свою очередь, ток $RHJ_x\sigma_{yy}$, текущий в направлении оси y. Но поле Холла этого тока будет иметь величину $RH(RHJ_x\sigma_{yy}) = R^2H^2\sigma_{yy}J_x$ и будет проявляться снова как э. д. с. в направлении оси x. Мы измеряем именно это электрическое поле и интерпретируем его как э. д. с., связанную с протеканием тока J_x через сопротивление.

Если мы приступим к изучению поперечного магнетосопротивления монокристалла в очень сильном магнитном поле, то обнаружим, что существуют такие направления магнитного поля $\mathbf{H}$, в которых $\varrho_\perp$ достигает насыщения; однако существуют и такие направления, в которых $\varrho_\perp$ неограниченно растет с увеличением магнитного поля H. Совершенно ясно, что насыщение достигается в тех направлениях, в которых все сечения поверхности Ферми представляют собой замкнутые орбиты; вместе с тем те направления, для которых $\varrho_\perp \sim H^2$, соответствуют направлениям, для которых в некоторых сечениях образуются открытые орбиты. Это обстоятельство сразу указывает нам на многосвязность поверхности Ферми. Например, на рис. 55, *а* приведена зависимость магнетосопротивления золота от направления магнитного поля; она оказывается чрезвычайно сложной. Однако если на стереограмме отметить все телесные углы, под которыми магнетосопротивление не обнаруживает насыщения, то мы обнаружим сравнительно простую сетку. Так как золото имеет ту же самую кристаллическую структуру, что и медь, мы можем указать возможные открытые и замкнутые орбиты для многосвязной поверхности, подобной изображенной на рис. 52, *а*, для каждого заданного направления. Если проделать эту операцию, то получим картину, качественно совпадающую с той, которая изображена на рис. 55, *б*. Таким образом, оказывается, что поверхность Ферми у золота весьма сходна с поверхностью Ферми меди. Изучая форму и размеры областей стереограммы, где не

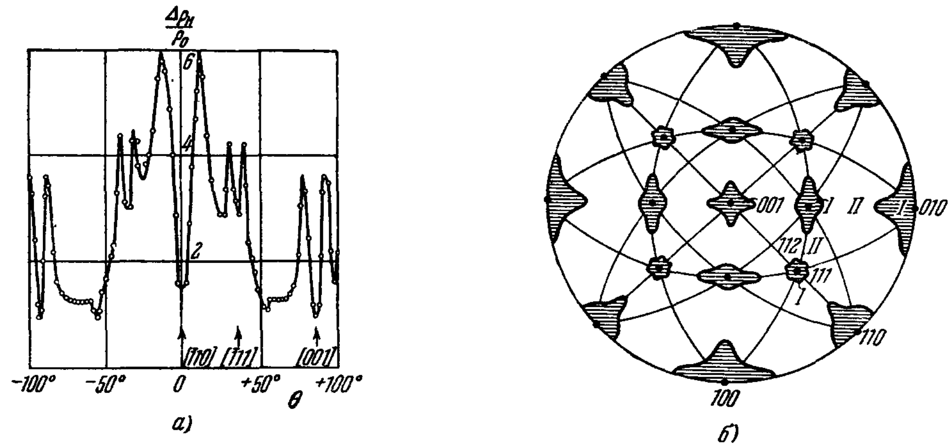

Рис. 55. *а*) Магнетосопротивление монокристалла золота в сильных магнитных полях (Гайдуков, 1959 г.); *б*) стереограмма направлений магнитного поля, для которых поперечное магнетосопротивление оказывается пропорциональным H^2.

наблюдается насыщение, можно даже определить приблизительные размеры «шеек».

Из сказанного ясно, что магнетосопротивление в сильных магнитных полях оказывается замечательно интересным явлением, чрезвычайно полезным для выявления и анализа многосвязных поверхностей Ферми, а также для установления их общих топологических свойств.

4. КВАНТОВАНИЕ ОРБИТ. ЭФФЕКТ ДЕ-ГААЗА — ВАН-АЛЬФЕНА

Замкнутые орбиты обладают четко определенной циклотронной частотой ω_H. Хорошо известно, что энергия любых систем, обладающих периодическим по времени движением, может быть проквантована в единицах $\hbar\omega_H$. Примем и мы, что допустимые уровни энергии — это циклотронные уровни

$$\mathscr{E}_n = (n + \varphi)\,\hbar\omega_H, \tag{12}$$

где n — целые числа, а φ — фазовая константа, равная, быть может, $^1/_2$. Попробуем выяснить, что это будет означать.

У нас уже была выписана формула (2), определяющая циклотронную частоту:

$$\omega_H = \frac{2\pi eH}{ch}\left(\oint \frac{dk}{v_\perp}\right)^{-1}. \tag{13}$$

Вспомним также, что скорость v пропорциональна градиенту функции $\mathscr{E}(\mathbf{k})$ в $\mathbf{k}$-пространстве. Следовательно, при малых изменениях энергии $\Delta\mathscr{E}$ мы смещаемся в $\mathbf{k}$-пространстве на расстояние

$$\Delta k_\perp = \frac{\Delta\mathscr{E}}{\hbar v_\perp} \tag{14}$$

в сторону возрастания $\mathbf{k}$ на новую орбиту с энергией $\mathscr{E} + d\mathscr{E}$ в плоскости $k_z = \mathrm{const}$. Интеграл, входящий в выражение (13), который берется по всей орбите, оказывается, следовательно, пропорциональным выражению

$$\oint \Delta k_{\perp}\, dk = \Delta A, \tag{15}$$

которое равно площади, заключенной между двумя орбитами, расположенными в плоскости $k_z = \text{const}$. Из соотношений (13), (14) и (15) следует

$$\Delta A = \frac{2\pi eH}{ch^2} \frac{\Delta \mathscr{E}}{\omega_H}. \tag{16}$$

Последний результат позволяет придать удобную форму выражению для циклотронной частоты:

$$\omega_H = \frac{2\pi eH}{ch^2} \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial A} \right). \tag{17}$$

Однако из этого выражения сразу следует, что если $\mathscr{E}$ квантуется в единицах $\hbar\omega_H$, как это принято в (12), площадь орбиты квантуется в единицах $2\pi eH/ch$ и мы получаем для полной площади с энергией $\mathscr{E}_n$

$$A = (n + \varphi) \frac{2\pi eH}{ch}. \tag{18}$$

Фактически наше утверждение состоит в том, что приложенное магнитное поле автоматически расстраивает основную схему квантования рассматриваемого электронного газа. За исключением одной лишь компоненты k_z, измеряемой вдоль магнитного поля, компоненты импульса $\hbar\mathbf{k}$ уже не являются «хорошими квантовыми числами». Вместе с тем наложение магнитного поля ведет к появлению новых интегралов движения, в частности момента импульса относительно направления магнитного поля. Можно без особого труда показать, что момент импульса пропорционален «площади орбиты в k-пространстве» и квантуется соответствующим образом. Таким образом, полученный нами результат (18) представляет собой не что иное, как старую формулу Бора для фазового интеграла

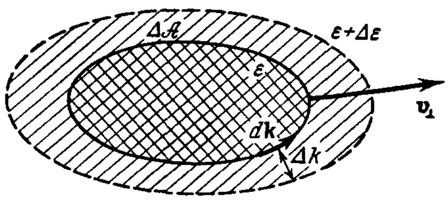

Рис. 56. Геометрическая интерпретация квантования орбит.

$$\oint p\, dq = (n + \varphi)\, h. \tag{19}$$

В отсутствие магнитного поля функция $\mathscr{E}(\mathbf{k})$ представляет собой простую непрерывную функцию $\mathbf{k}$; точки $\mathbf{k}$ однородно распределены на сетке «допустимых состояний» в $\mathbf{k}$-пространстве. Магнитное поле разбивает $\mathbf{k}$-пространство на «трубки» с постоянной площадью сечения, соответствующие состояниям с определенным магнитным квантовым числом. Каждое состояние слегка изменяет свою энергию, уменьшая или увеличивая ее, с тем чтобы все состояния стягивались на поверхности ближайшей «трубки». В среднем этот процесс очень мало изменяет полную энергию системы, так как увеличение энергии у одной части состояний компенсируется уменьшением энергии у другой части. Но рассмотрим теперь поверхность Ферми с выступами, подобную изображенной на рис. 57, *г*. С увеличением магнитного поля трубки начинают перемещаться наружу, потому что площадь каждой из них пропорциональна H. Время от времени трубка будет отрываться от поверхности Ферми, от сечения с максимальной площадью. Это очень важный эффект; как только трубка уходит от соприкосновения, энергия состояний в этой области возрастает, так как эти уровни все еще стремятся концентрироваться на этой трубке. Когда затем следующая трубка подходит к поверхности изнутри, вместе с ней подходит достаточное количество уровней, и энергия уменьшается до значения ниже среднего Другими словами, появятся колебания энергии электронного газа, периодические по квантовым числам трубки

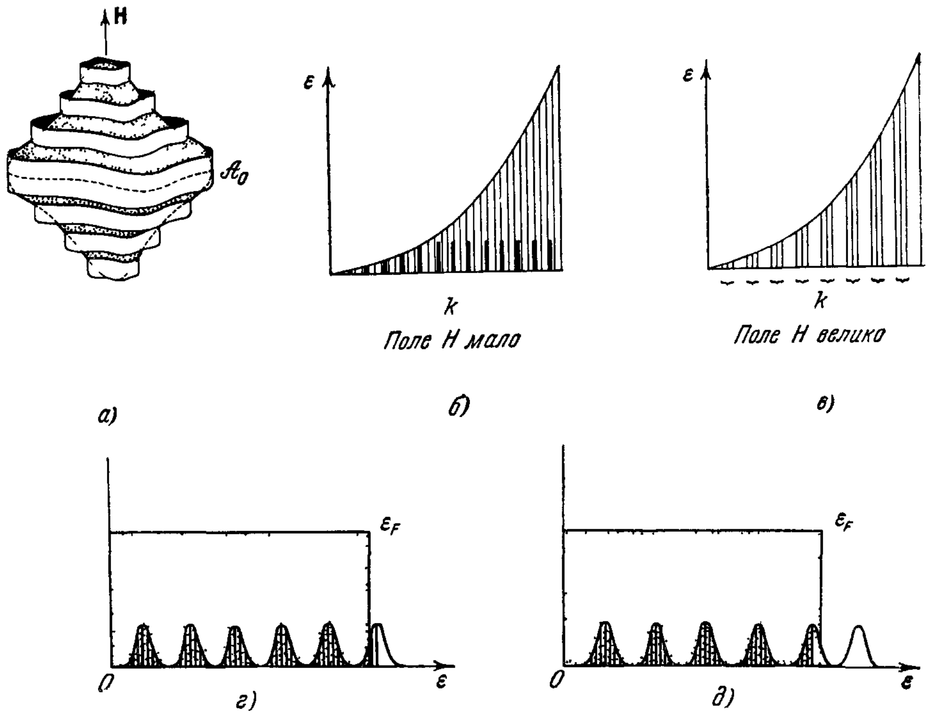

Рис 57 *а*) Цилиндрики уровней энергии в магнитном поле, пересекающие поверхность Ферми, *б*) в слабом магнитном поле уровни энергии расположены более тесно, чем «допустимые состояния», *в*) в сильных магнитных полях допустимые состояния собираются в группы внутри уровней энергии, *г*) состояния, выталкиваемые за пределы энергии Ферми, проявляются как уровни энергии в магнитном поле, возникающие из поверхности Ферми, *д*) если слегка увеличить магнитное поле, уровни энергии в магнитном поле могут снизить энергию состояний вблизи поверхности Ферми.

с площадью A_0, касающейся максимального сечения поверхности Ферми. Период осцилляций может быть выражен через значения магнитного поля в следующей форме:

$$\Delta\left(\frac{1}{H}\right)=\frac{2\pi e}{\hbar c A_0}. \qquad (20)$$

Совершенно аналогичные осцилляции можно наблюдать и в том случае, если A_0 — минимальная площадь поперечного сечения.

Такие осцилляторные изменения энергии могут быть обнаружены по ходу магнитной восприимчивости. Они дают свой вклад в диамагнетизм электронного газа, поскольку обусловлены «орбитальным» движением электронов. Это явление известно под названием эффекта де-Гааза — ван-Альфена. Квантование сказывается также и на других свойствах металла, таких, например, как электрическое сопротивление (эффект Шубникова — де-Гааза), но теория этих явлений гораздо сложнее, а сами явления обнаруживаются значительно труднее. Общие условия для возможности обнаружения эффекта де-Гааза — ван-Альфена состоят просто в том, что $\omega_H\tau > 1$ (это означает, что соударения не должны нарушать сами орбиты и их квантование), а $\hbar\omega_H > kT$ (это означает, что промежуток между каждой трубкой и поверхностью Ферми не должен смазываться за счет появления в верхней части распределения Ферми уровней теплового возбуждения). Этим условиям сравнительно легко можно удовлетворить, в особенности потому, что сам эффект может быть обнаружен в наиболее ясном виде в сильных импульсных магнитных полях, порядка 10^5 эрстед.

Как техника картирования поверхности Ферми эффект де-Гааза — ван-Альфена является очень полезным и очень сильным методом. Период осцилляций непосредственно дает простые геометрические параметры

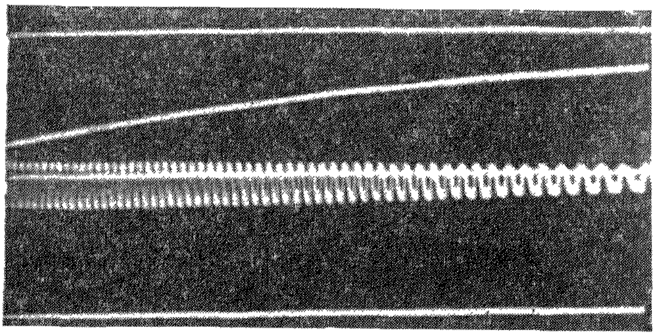

Рис. 58. Осцилляции в эффекте де-Гааза — ван-Альфена в меди. Изменения магнитного поля показаны плавной кривой в верхней части фотографии (Шёнберг, 1960 г.).

поверхности — максимальные или минимальные площади сечений поверхности Ферми, нормальные к направлению магнитного поля. Производя измерения для всевозможных ориентаций кристалла относительно магнитного поля, можно реконструировать почти в точности всю поверхность Ферми. Так, например, измерения Шёнберга, выполненные на серебре, укладываются на многосвязную поверхность, аналогичную поверхности, построенной для меди и золота, с точностью до 1/1000 для радиуса-вектора этой поверхности в любом направлении. Более того, определение A_0 является абсолютным; можно на самом деле проверить, что поверхность Ферми содержит один электрон на атом. А этот пункт является чрезвычайно существенным, поскольку он дает экспериментальное подтверждение утверждению (см. § 8 части III) о том, что каждое возбуждение электронного газа обладает зарядом — зарядом e отдельного изолированного электрона.

5. ПОЛИВАЛЕНТНЫЕ МЕТАЛЛЫ

В эффекте де-Гааза — ван-Альфена вклад различных частей поверхности Ферми отчетливо различается по различным периодам осцилляций относительно $1/H$. Это обстоятельство чрезвычайно важно, когда нужно исследовать поливалентные металлы. Дело не только в том, что здесь возникают эффекты от «дырочных» орбит, подобных орбитам типа «собачьей кости» в меди; в случае поливалентных металлов вклад могут вносить сразу несколько полос. Процедура построения поверхности Ферми в этих случаях требует особого рассмотрения.

Давайте рассмотрим, например, гипотетический простой кубический металл, содержащий по два электрона на атом, с перекрытиями на гранях зоны (рис. 59, *а*). Согласно правилам зонной теории можно повторять эту фигуру до бесконечности. Таким образом, мы придем к фигуре, изображенной на рис. 59, *б*. На этом рисунке можно различить две «ветви» поверхности Ферми, не связанные между собой никакими орбитами: в исходной зоне были пустые «кармашки», которые, слившись, образовали замкнутую поверхность, почти что сферу, «дырок». Кроме того, были еще электроны во второй полосе, которые рассыпались около энергетической щели в центре каждой грани. Эти электроны можно скомбинировать в другие замкнутые поверхности — две сферы «электронов». Удобно

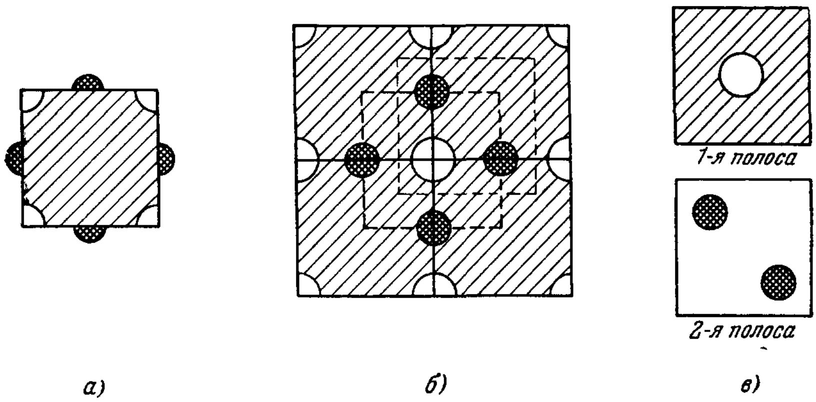

Рис. 59. Схематическое изображение поверхности Ферми для двухвалентного металла. *а*) Расширенная зонная схема; *б*) схема повторенных зон; *в*) приведенные зоны, показывающие полосу «дырок» и полосу «электронов».

говорить, что поверхность Ферми состоит из сферы дырок в первой полосе и из двух сфер электронов во второй полосе. Каждая из этих поверхностей дает свой отдельный вклад в эффект де-Гааза — ван-Альфена. Часто изображают эти полосы по отдельности, как это сделано на рис. 59, *в*; каждая из полос заключена в единичную приведенную зону. Совершенно несущественно, каким образом мы выделяем эту зону из схемы повторенных зон, изображенных на рис. 59, *б*, поскольку фигура в целом воспроизводится до бесконечности.

Эти рассуждения приводят к довольно занимательной геометрической игре. Допустим, что нас интересует металл, такой, например, как алюминий или свинец, содержащий три или четыре электрона на атом и обладающий сложной многогранной зоной — в данном случае совпадающей с зоной меди. Форма поверхности Ферми нам неизвестна. Допустим, заведомо несправедливо, что электроны абсолютно свободны. Тогда поверхностью Ферми будет сфера. Нарисуем эту сферу, поместив ее центр зоны так, чтобы ее объем имел нужное значение; она вся расположится вне многогранника зоны. Это означает, что первая зона будет целиком заполнена.

Рассмотрим теперь сегменты сферы вне этой первой зоны. Эти сегменты будут пересекаться границами зоны — продолжениями плоскостей, образующих грани первой зоны,— как это изображено на рис. 60, *а*. Если электроны не являются абсолютно свободными, возникнут энергетические щели вдоль всех этих плоскостей. Наша исходная сфера окажется разрезанной на отдельные части, и уже нельзя считать, что орбиты в магнитном поле будут иметь ту же самую связность, какую они имели в случае свободных электронов.

Можно легко разобраться в возникшей топологии, повторяя зону. Построим последовательно несколько зон во взаимной решетке; в каждой зоне строится соответствующая сфера с центром внутри зоны (рис. 60, *б*).

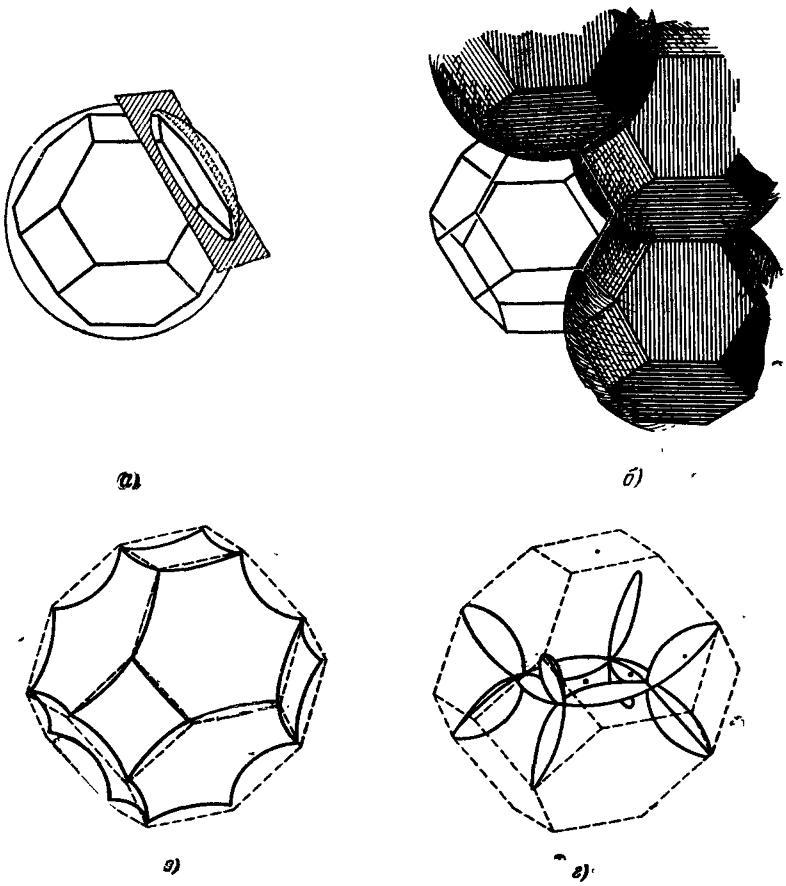

Рис. 60. Разбиение сферы свободных электронов на «зоны». Сегменты срезаются со сферы (*а*) плоскостями, ограничивающими зону, которая заключает в себе «заполненную полосу электронов». Чтобы соединить эти сегменты, мы мысленно (*б*) окружаем соответствующей сферой каждую соседнюю зону во взаимной решетке: объем, остающийся в центральной зоне (*в*), образует «полосу дырок». Однако есть еще участки сферической поверхности, которые никуда не вошли; они соответствуют тем областям в *б*), где две сферы заходят одна за другую. Эти участки также можно объединить и, сдвинув в центр зоны, получить *г*) «уродец» (monster) из электронов в третьей зоне.

Посмотрим теперь, что происходит внутри любой ячейки. Сферы, центры которых находятся в других ячейках, будут вдаваться в рассматриваемую ячейку — и отдельные кусочки этих поверхностей можно соединить в односвязную поверхность. Например, располагая тремя электронами на атом, можно построить объект, подобный изображенному на рис. 60, *в* — замкнутую поверхность «дырок» во второй полосе.

Однако еще остаются некоторые части исходной сферы, которые не представлены ни в одной из двух первых зон. Эти части можно объединить в еще одну особую поверхность внутри зоны. Мы получим многосвязную поверхность электронов, получаемую утолщением кромок многогранника зоны. На рис. 60, *г* изображен полученный объект со своей зоной, несколько смещенной с его обычного места; это не имеет значения, поскольку мы можем изобразить ячейку бесконечно повторяемой взаимной решетки в любом месте **k**-пространства. Имеются также еще перекрытия, как раз по углам исходной зоны, которые можно объединить, образовав небольшие кармашки электронов в четвертой полосе, подобные сферам на рисунке 59, *в*.

Для газа совершенно свободных электронов это построение можно произвести совершенно строго, но оно не представляет интереса, так как в этом случае нет энергетических щелей. В реальных металлах появляются энергетические щели, которые деформируют сферу и разделяют полосы. Но щели могут возникнуть только на плоскостях граней зоны, так что непрерывность функции, определяющей энергию, в зоне каждой из полос, изображенной на рис. 60, сохраняется. «Краешки» (limbs) «уродца» (monster) на рис. 60, *г*, например, могут быть сглажены или несколько сжаты за счет того, что электроны перейдут в другие полосы, однако расщепляться они уже больше не будут. Изучив связность каждой фигуры, мы сможем идентифицировать орбиты, определяющие те или иные периоды в явлении де-Гааза — ван-Альфена, или обнаружить открытые орбиты, позволяющие объяснить особенности магнетосопротивления. До сих пор не произведено анализа поверхности Ферми поливалентных металлов, сравнимого по своей надежности и точности с теми подробными данными, которые получены для благородных металлов. Однако такая задача поставлена, и ее реализация в настоящее время осуществляется весьма успешно.

6. МАГНИТОАКУСТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

Мы еще не перечислили всех явлений, которые могут быть использованы для экспериментального изучения поверхности Ферми. Подвергая образец металла более сложным воздействием, можно наблюдать более сложные явления. Например, можно послать через кристалл высокочастотные упругие волны. Электроны в металле более или менее рассеивают ультразвуковые волны, поскольку последние являются «фононами». Из-за ограничений, накладываемых при рассеянии на энергию и кристаллический импульс (§ 5 части IV), лишь определенные области поверхности Ферми вносят свой вклад в *поглощение ультразвука*. Изменяя направление распространения и поляризацию фононов, можно, по крайней мере в принципе, исследовать форму поверхности Ферми.

К сожалению, эта программа практически непригодна. Теория, описывающая электрон-фононное взаимодействие, содержит неизвестные величины, которые могут весьма существенно меняться на поверхности Ферми. Нельзя указать простых явлений, которые можно было бы легко интерпретировать через наблюдаемые величины.

Но если усложнить ситуацию, наложив магнитное поле, то возникает очень интересное явление: коэффициент поглощения ультразвуковых волн начинает периодически осциллировать при изменении магнитного поля, если его рассматривать в функции от $1/H$. Объяснение этого явления состоит в следующем.

В **k**-пространстве орбитам движущегося в магнитном поле электрона соответствуют замкнутые или спиральные траектории электрона в реальном пространстве. Для свободных электронов проекция такой траектории на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, является окружностью. В общем случае уравнение движения имеет вид

$$\dot{\mathbf{k}} = \frac{e\hbar}{c}\,[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{H}]. \tag{21}$$

Этим же уравнением определяется скорость изменения радиуса-вектора $\mathbf{r}$ в реальном пространстве. Отсюда совершенно непосредственно, после элементарного интегрирования по времени, следует, что траектория в реальном пространстве, спроектированная на плоскость, перпендикулярную магнитному полю $\mathbf{H}$, имеет ту же самую форму, что и «орбита» в $\mathbf{k}$-пространстве, с той лишь разницей, что она «умножается» на множитель $\hbar c/eH$ и поворачивается на угол $\pi/2$ вокруг направления $\mathbf{H}$.

Допустим, что мы пропускаем ультразвуковую волну через кристалл. Пусть, например, магнитное поле направлено по оси z, а в направлении оси x распространяется волна, поперечно поляризованная по оси y. Решетка будет испытывать локальные напряжения, возникнут локальные

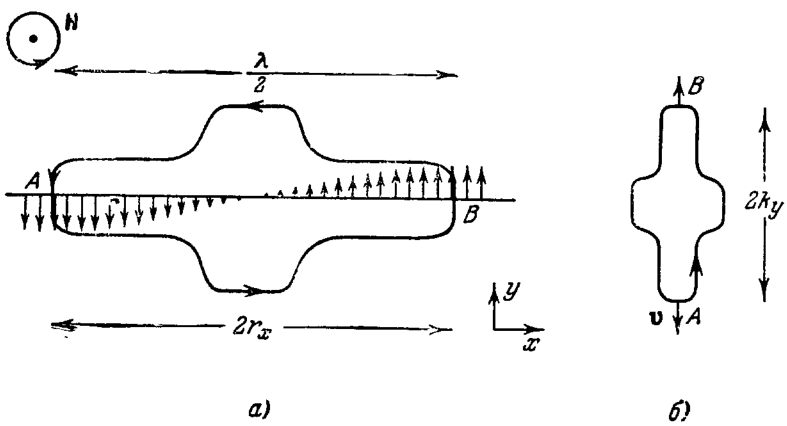

Рис. 61. *а*) Траектории электронов в магнитном поле в реальном пространстве; *б*) орбиты электронов на поверхности Ферми.

силы и поля, действующие на электроны. Предположим, что в точке A (рис. 61) такое поле параллельно скорости электрона на поверхности Ферми. Такой электрон будет получать энергию от ультразвуковой волны.

Если магнитное поле достаточно велико, период циклотронного обращения может быть сделан значительно меньше, чем время релаксации для рассеяния на примесях и период колебаний ультразвуковой волны. Электрон успеет совершить достаточное число обращений до того, как он рассеется, и при этих обращениях будет испытывать действие электрических полей, создаваемых упругими напряжениями, причем эти поля будут для него статическими. Количество энергии, которое получит электрон, будет зависеть от длины волны ультразвуковых колебаний. Из рис. 61, *а* можно понять, что если на диаметре траектории укладывается нечетное число полуволн, то электрическое поле, достигая своего максимума, в обоих случаях ускоряет электрон и, следовательно, в этом случае будет значительное поглощение энергии. Если на диаметре укладывается четное число полуволн, действие поля на противоположных концах траектории взаимно компенсируется. Таким образом, возникает условие

$$2r_x = \frac{\hbar c}{eH}\cdot 2k_y = \left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda \tag{22}$$

для максимумов поглощения, с минимумами для промежуточных длин волн. Значит, если изменять магнитное поле H, мы должны обнаружить осцилляции, которые следует интерпретировать как следствие связи между длиной λ ультразвуковой волны и диаметром $2k_y$ поверхности Ферми в направлении, перпендикулярном как направлению H, так и направлению распространения волны.

Чтобы полностью описать этот эффект, нам необходимо подсчитать вклады от всех различных положений в пространстве, всех сечений, нормальных к полю H, и т. д. Учет этих обстоятельств приводит к тому, что осцилляции притупляются и несколько смещаются. Однако затухание

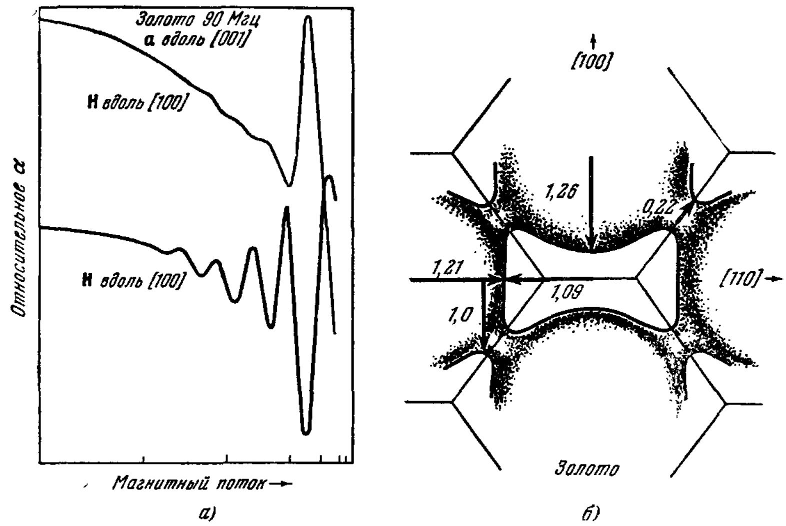

Рис. 62. *а*) Магнитоакустические осцилляции в золоте (Морс, 1960 г.); *б*) размеры поверхности Ферми, полученные из данных по магнитоакустическому эффекту.

все равно остается периодическим относительно $1/H$ и определяется экстремальным диаметром поверхности Ферми в хорошо определенном направлении. Такие осцилляции в действительности выражены очень отчетливо (рис. 62) как для продольно, так и для поперечно поляризованных ультразвуковых волн, и их интерпретация в случае благородных металлов вполне соответствует соотношению (22). Можно, например, исследовать размеры орбит типа «собачьей кости» в меди и установить, насколько близко подходит поверхность Ферми к граням (1, 0, 0) зоны.

Излагаемая техника, как мы видим, потенциально очень могущественна, она предлагает нам два кронциркуля для промера поверхности Ферми и выдает наиболее непосредственную информацию относительно ее формы. Однако здесь нужно быть все-таки осторожным, поскольку с физической точки зрения ситуация в этом случае куда сложнее, чем в случае эффекта де-Гааза—ван-Альфена; в рассматриваемое явление входит много факторов (таких, к примеру, как «сила» электронно-фононного взаимодействия), которые столь сильно меняются на протяжении поверхности Ферми, что способны нарушить все числовые соотношения между «резонансным» полем и экстремальным поперечным сечением.

Методики, о которых я рассказал, за последние пять лет развивались столь бурно, что можно ожидать, что существуют другие еще более сильные и еще более удобные методы, которые еще ждут, чтобы их изобрели, развили и использовали. Сейчас уже можно уверенно сказать, что мы можем поставить эксперименты, непосредственно устанавливающие вид поверхности Ферми для данного металла; тем самым мы получаем наиболее существенные сведения об электронной структуре этого металла. Программой (или, если хотите, соревнованием) в международном масштабе, осуществляемой в настоящее время полным ходом, является расширение наших знаний от одновалентных металлов на всю периодическую систему.

Вместе с тем в этой области есть вопросы, которые полностью остаются в тени. В частности, совершенно неясна электронная структура сплавов. Геометрическая техника в этом случае бессильна, потому что рассеяние электронов слишком сильно. Не исключено, что, полностью разобравшись в структуре чистых, элементарных монокристаллов, мы в конце концов найдем заслуживающей внимания и эту значительно более сложную загадку природы.

Этим завершается публикация серии статей Дж. Займана под общим названием «Электроны в металлах. Введение в теорию поверхностей Ферми». Были опубликованы следующие статьи:

I. Электронный газ, **78**, 291 (1962).
II. Полосы и зоны, **78**, 679 (1962).
III. Динамика блоховских электронов и расчет структуры полос, **79**, 319 (1963).
IV. Свойства реальных металлов, **80**, 505 (1963).
V. Построение поверхности Ферми, **80**, 665 (1963).

Еще раз приводим список литературы.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Brillouin, Wave Propagation in Periodic Structures, New York, McGraw Hill, 1946 (см. перевод с французского издания: Л. Бриллюэн и М. Пароди, Распространение волн в периодических структурах, М., ИЛ, 1959).
2. W. A. Harrison and M. B. Webb, Eds., The Fermi Surface, New York, J. Wiley, 1960; H. Jones, Theory of Brillouin Zones, Amsterdam, North-Holland, 1960.
3. C. Kittel, An Introduction to Solid State Physics, 2nd Edition, New York, J. Willey, 1956 (см. перевод: Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела, М., Физматгиз, 1963).
4. N. F. Mott and H. Jones, Theory of the Properties of Metals and Alloys, Oxford, Clarendon Press, 1936.
5. R. Peierls, Quantum Theory of Solids, Oxford, Clarendon Press, 1955 (см. перевод: Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, М., ИЛ, 1956).
6. A. B. Pippard, Experimental Analysis of the Electronic Structure of Metals, Repts. Progr. Phys. (Lnd., Phys. Soc.) **23**, 176 (1960).
7. F. Seitz, Modern Theory of Solids, New York, McGraw Hill, 1940 (см. перевод: Ф. Зейтц, Современная теория твердого тела, М., Гостехиздат, 1949).
8. T. C. Slater, Quantum Theory of Matter, New York, McGraw Hill, 1951.
9. T. C. Slater, The Electronic Structure of Solids, Handb. d. Phys., Bd. 19, Brl., Springer, 1956.
10. G. H. Wannier, Elements of Solids State Theory, Cambridge Univ. Press, 1959.
11. A. H. Wilson, Theory of Metals, 2nd Edition, Cambridge Univ. Press, 1953 (см. перевод издания 1936 г.: А. Вильсон, Квантовая теория металлов, М.—Л., 1941).
12. J. M. Ziman, Electrons and Phonons, Oxford, Clarendon Press, 1960 (см. перевод: Дж. Займан, Электроны и фононы, ИЛ, 1962).

Дополнение переводчика:

1. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, Некоторые вопросы электронной теории металлов. Часть I. Классическая и квантовая механика электронов в металлах, УФН **69**(3), 419 (1959).
2. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, Некоторые вопросы электронной теории металлов. Часть II. Статистическая механика и термодинамика электронов в металлах, УФН **78**(3), 411 (1962).
3. А. Кип, Циклотронный резонанс в твердых телах, УФН **74**(2), 355 (1961).
4. Я. И. Френкель, Введение в теорию металлов, М., Гостехиздат, 1950.
5. Р. Пайерлс, Электронная теория металлов, М., ИЛ, 1947.
6. Г. Бете, А. Зоммерфельд, Электронная теория металлов, М., ОНТИ, 1938.