1963 г. Июль *Т. LXXX, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

О ВОЗМОЖНОСТИ МИРА С ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ ПРОСТРАНСТВА*)

А. А. Фридман

§ 1. 1. В заметке «О кривизне пространства»[1] мы рассмотрели те решения космологических уравнений Эйнштейна, которые приводят к типам мира, обладающим в качестве общего признака постоянной положительной кривизной; при этом мы обсудили все возможные случаи. Однако возможность получить из космологических уравнений мир постоянной положительной кривизны находится в тесной связи с вопросом о конечности пространства. Поэтому представляет интерес посмотреть, можно ли получить из тех же уравнений мир с постоянной отрицательной кривизной, о конечности которого едва ли можно говорить даже при некоторых дополнительных предположениях.

В настоящей заметке будет показано, что из космологических уравнений Эйнштейна действительно можно получить мир с постоянной отрицательной кривизной. Как в упомянутой работе, так и здесь мы должны различать два случая, а именно: 1) случай стационарного мира, кривизна которого постоянна во времени, и 2) случай нестационарного мира, кривизна которого хотя и постоянна в пространстве, но меняется со временем. Между стационарными мирами с постоянной отрицательной и с постоянной положительной кривизной имеется существенное различие. Именно миры с отрицательной стационарной кривизной не допускают положительной плотности вещества; она должна быть или отрицательной, или нулевой. В соответствии с этим аналогом физически возможных стационарных миров (т. е. миров с неотрицательной плотностью вещества) является не мир Эйнштейна, а мир Де-Ситтера**).

В заключение этой заметки мы коснемся вопроса о том, можно ли вообще судить о конечности или бесконечности пространства по его кривизне.

2. Обратимся к общим предположениям, которые мы будем разделять на те же два класса, что и в упомянутой работе; при этом мы сохраним наши старые обозначения. Предположения первого класса заключаются в том, что в качестве космологических уравнений Эйнштейна мы возьмем за основу уравнения (A), (B), (C) упомянутой работы. Второй класс предположений будет теперь отличаться от старого. Предположив, что одну из мировых координат x_4 можно рассматривать как временну́ю координату, мы можем придать (для рассматриваемого случая мира с отрицательной постоянной кривизной пространства) второму классу гипотез

*) А. Фридман, Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes, Zs. Phys. **21**, 326 (1924). Перевод А. А. Сазыкина, под редакцией В. А. Фока.

**) На то, что возможность мира с отрицательной кривизной пространства требует особого исследования, мне указал мой друг проф. Я. Д. Тамаркин.

следующую формулировку: интервал ds^2 должен иметь вид

$$ds^2 = \frac{R^2 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{x_3^2} + M^2 dx_4^2, \tag{D'}$$

где R есть функция времени, а M — функция от всех четырех мировых координат. Постоянная отрицательная кривизна пространства в нашем мире при этом пропорциональна — $\frac{1}{R^2}$ *).

Учитывая, что для нашего мира ds^2 образует неопределенную форму, можно, изменив обозначения, записать формулу (D') в следующем виде:

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}\frac{(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{x_3^2} + M^2 dx_4^2. \tag{D''}$$

Разумеется, пространственная кривизна нашего мира остается отрицательной и пропорциональной — $\frac{1}{R^2}$.

Наша задача состоит в том, чтобы найти две функции R и M, удовлетворяющие космологическим уравнениям Эйнштейна, т. е. уравнениям (A), (B) и (C) упомянутой заметки.

Полагая в (A) $i = 1, 2, 3$, $k = 4$, получим следующие три уравнения:

$$R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_1} = R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_2} = R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_3} = 0.$$

Эти уравнения показывают, что рассматриваемые миры могут принадлежать одному из двух типов:

1-й т и п. Стационарные миры, $R' = 0$, R не зависит от времени.

2-й т и п. Нестационарные миры, $R' \neq 0$, M зависит только от времени.

Рассмотрим сперва случай стационарного мира; решение для нестационарного мира отрицательной кривизны имеет большое сходство с решением для нестационарного мира постоянной положительной пространственной кривизны; поэтому мы коснемся нестационарного случая совсем кратко.

§ 2. 1. Уравнения (A) для индексов i, $k = 1, 2, 3$ дают

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{1}{x_3}\frac{\partial M}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{1}{x_3}\frac{\partial M}{\partial x_1} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$M = \frac{P(x_1, x_4) + Q(x_2, x_4)}{x_3} + L(x_3, x_4), \tag{1}$$

где P, Q, L — произвольные пока функции своих аргументов.

Для определения P, Q и L воспользуемся уравнениями (A), полагая i, $k = 1, 2, 3$.

Вычисление дает

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_3^2}\right) &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}, \\
-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_3^2}\right) &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}, \\
-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2}\right) + \frac{2}{x_3}\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial x_3} &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

*) Относительно линейного элемента см., например,[2].

Вычитая первое уравнение этой системы из второго, получаем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2}.$$

Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} P&=n(x_4)\,x_1^2+a_1(x_4)\,x_1+b_1(x_4),\\ Q&=n(x_4)\,x_2^2+a_2(x_4)\,x_2+b_2(x_4). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Учитывая (1) и (3), можно записать последнее из уравнений (2) в виде

$$-\frac{3-\lambda R^2}{x_3^2}(P+Q)=\frac{4n}{x_3}+\frac{1-\lambda R^2}{x_3^2}-\frac{2}{x_3}\frac{\partial L}{\partial x_3}. \tag{4}$$

Итак, если $P+Q$ действительно содержит одну из величин x_1 или x_2, т. е. если один из коэффициентов n, a_1, a_2 отличен от нуля, то вследствие того, что правая сторона этого уравнения не зависит ни от x_1, ни от x_2, множитель при $P+Q$ в уравнении (4) должен обращаться в нуль. Случай, когда обращаются в нуль все три величины n, a_1, a_2, следует рассматривать особо.

Таким образом, в случае, когда не все величины n, a_1, a_2 равны нулю, между λ и кривизной пространства существует соотношение

$$\lambda R^3=3. \tag{5}$$

С учетом (5) уравнения (2) сводятся к одному-единственному уравнению, определяющему функцию L, а именно

$$\frac{\partial L}{\partial x_3}+\frac{L}{x_3}=2n. \tag{6}$$

2. Ниже мы должны различать два случая: 1) $n\neq 0$ и 2) $n=0$. В первом случае, как показывают формулы (D′), (1), (3), можно без ограничения общности принять величину n равной 1; именно, применяя подстановку $x_4'=\varphi(x_4)$, всегда можно сделать $n=1$. Учитывая это, получаем из (6)

$$L=\frac{L_0(x_4)}{x_3}+x_3. \tag{7}$$

Чтобы определить ϱ, положим в уравнениях (А) $i=k=4$; простое вычисление показывает, что в нашем случае ϱ становится равным нулю. Следовательно, первый случай характеризуется нулевой плотностью вещества и интервалом

$$ds^2=\frac{R^2}{x_3^2}(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)+$$
$$+\left(\frac{x_1^2+x_2^2+a_1(x_4)\,x_1+a_2(x_4)\,x_2+a_3(x_4)+x_3^2}{x_3}\right)^2 dx_4^2. \tag{D$_1'$}$$

Переходя ко второму случаю ($n=0$), находим для L уравнение

$$L=\frac{L_0(x_4)}{x_3}. \tag{8}$$

И в этом случае вычисление дает для ϱ нулевое значение. Таким образом, второй случай также характеризуется нулевой плотностью вещества и интервалом

$$ds^2 = \frac{R}{x_3^2}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) + \left[\frac{a_1(x_4)\,x_1 + a_2(x_4)\,x_2 + a_3(x_4)}{x_3}\right]^2 dx_4^2. \qquad (\mathrm{D}_2')$$

Наконец, рассмотрим случай, когда все три коэффициента n, a_1, a_2 обращаются в нуль, так что M не зависит от x_1 и x_2.

Интегрируя (2), мы снова приходим к двум случаям:

$$1)\ \lambda R^2 = 3, \qquad M = \frac{M_0(x_4)}{x_3},$$

$$2)\ \lambda R^2 = 1, \qquad M = M(x_4),$$

где M_0 и M — произвольные функции своих аргументов. Интервал для первого случая есть частный случай формулы (D_2'); предыдущее вычисление показывает, что плотность вещества здесь равна нулю.

Второй случай *) приводит, как нетрудно убедиться, к плотности вещества, отличной от нуля. Чтобы решить, будет ли при этом плотность положительной или отрицательной, необходимо использовать тот вид интервала, который соответствует индефинитной квадратичной форме и выражается формулой (D″). Проводя вычисления с гравитационными потенциалами формулы (D″), убеждаемся, что в рассматриваемом случае M является функцией только x_4; следовательно, можно, не нарушая общности, положить $M = 1$ (для этого нужно лишь ввести вместо x_4 координату $x_4' = \varphi(x_4)$). Вычисляя в этом предположении плотность ϱ, находим

$$\lambda = -\frac{c^2}{R^2}, \qquad \varrho = -\frac{2}{\varkappa R^2},$$

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}\,\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2} + dx_4^2. \qquad (\mathrm{D}_3'')$$

Таким образом, этот случай дает отрицательное значение ϱ.

Резюмируя, можно сказать, что *стационарный мир с постоянной отрицательной кривизной пространства возможен только при нулевой или отрицательной плотности вещества; интервал, соответствующий этому миру, выражается приведенными выше формулами* (D_1'), (D_2') и (D_3'').

3. Обратимся теперь к случаю нестационарного мира. Заметим прежде всего, что M здесь есть функция только от x_4; соображения, не раз проводившиеся ранее, показывают, что M можно приравнять единице. При этих предпосылках мы без труда находим, что уравнения (A) для $i = 1, 2, 3$, $k = 4$ и для $i \neq k$; $i, k = 1, 2, 3$ удовлетворяются сами собой. Полагая в них $i = k = 1, 2, 3$, мы получаем дифференциальное уравнение второго порядка, определяющее функцию $R(x_4)$, а именно

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{1}{R^2} - \lambda = 0. \qquad (9)$$

Это уравнение совершенно аналогично нашему прежнему уравнению (уравнение (4) цитированной работы); последнее переходит точно в (9), если положить $c = 1$. Следовательно, всю дискуссию уравнения (4) можно перенести на только что написанное уравнение. Поэтому мы не будем приводить подробностей, а вычислим лишь плотность вещества ϱ для нестационарного мира.

---

*) На возможность этого случая мне указал В. Фок.

Записывая для случая нестационарного мира интервал в виде (D″), мы получаем для R дифференциальное уравнение

$$\frac{R'^2}{R^2}+\frac{2RR''}{R^2}-\frac{c^2}{R^2}-\lambda=0.$$

Интегрирование этого уравнения дает нам соотношение

$$\frac{R'^2}{c^2}=\frac{A+R+\frac{\lambda}{3c^2}R^3}{R},$$

где A — произвольная постоянная. Вычисляя плотность вещества, получаем

$$\varrho=\frac{3A}{\varkappa R^3}. \tag{10}$$

Формула (10) показывает, что при положительной постоянной A плотность вещества также положительна.

Отсюда следует *возможность нестационарных миров с постоянной отрицательной кривизной пространства и с положительной плотностью вещества.*

§ 3. 1. Обратимся к обсуждению физического смысла результата, полученного в предшествующих параграфах. Мы убедились, что космологические уравнения Эйнштейна обладают решениями, соответствующими миру с постоянной отрицательной кривизной пространства. Этот факт указывает на то, что одних только космологических уравнений еще недостаточно, чтобы решить вопрос о конечности нашего мира. Знание кривизны пространства еще не дает нам непосредственных указаний на его конечность или бесконечность. Чтобы прийти к определенному заключению о конечности пространства, необходимо сделать некоторые дополнительные уточнения. В самом деле, мы называем пространство конечным, если расстояние между двумя произвольными несовпадающими точками не превышает некоторого положительного постоянного числа, какова бы ни была эта пара точек. Следовательно, прежде чем рассматривать проблему конечности пространства, мы должны еще условиться, какие точки этого пространства следует считать разными. Например, если мы будем рассматривать шар как поверхность трехмерного евклидова пространства, то точки, лежащие на одной параллели с разностью долгот в 360°, мы сочтем совпадающими; напротив, если бы мы рассматривали эти точки как различные, то получили бы многолистную сферическую поверхность в евклидовом пространстве. Расстояние между двумя произвольными точками на сфере не превосходит некоторого конечного числа; если же эту сферу понимать как бесконечно многолистную поверхность, то это расстояние можно сделать как угодно большим (сопоставляя соответствующим образом точки разным листам). Отсюда ясно, что, прежде чем приступать к рассуждениям о конечности мира, необходимо уточнить, какие точки следует считать совпадающими и какие — различными.

2. В качестве критерия для несовпадения точек может служить наряду с прочими принцип «боязни привидений». Под этим мы подразумеваем аксиому: между двумя разными точками можно провести одну и только одну прямую (геодезическую) линию. Принимая этот принцип, уже нельзя считать разными две точки, соединяемые более чем одной прямой линией. Например, вследствие этого принципа два конца одного диаметра сферы не будут отличаться друг от друга. Разумеется, этот принцип исключает возможность привидений, так как привидение появляется в той же точке, что и производящий его прообраз.

Только что рассмотренная формулировка понятия совпадающих и несовпадающих точек приводит к представлению о том, что пространства с положительной постоянной кривизной являются конечными. Однако упомянутый критерий не позволяет сделать вывод о конечности пространств отрицательной постоянной кривизны. Это дает основание утверждать, что, по нашему мнению, одних только космологических уравнений Эйнштейна, без дополнительных предположений, еще недостаточно для того, чтобы сделать вывод о конечности нашего мира.

Петроград,
ноябрь 1923 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. Фридман, Zs. Phys. **10** (6), 377 (1922); то же на русском языке: ЖРФХО, часть физ. **56** (1), **59** (1924) и первая статья А. А. Фридмана в этом выпуске УФН, стр. 439.
2. B. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, vol. 1, стр. 345.