1963 г. Июль *Т. LXXX, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

О КРИВИЗНЕ ПРОСТРАНСТВА*)

А. А. Фридман

От редакции. Публикуемые ниже две статьи А. А. Фридмана и две заметки А. Эйнштейна представляют большой интерес для истории современной физики.

В работе, опубликованной в 1922 г. в «Zeitschrift für Physik» и на русском языке в 1924 г. в «Журн. Русск. физ.-хим. о-ва», Фридман показал, что существует решение уравнений тяготения без космологической постоянной. Эти решения оказались нестационарными и предсказывали явление разбегания галактик, открытое экспериментально лишь 5 лет спустя Хэбблом.

Во второй работе Фридман сообщает о другом типе решения — модели с постоянной отрицательной кривизной, известной теперь под названием «модели Фридмана». В этой работе впервые было показано, что из уравнений тяготения нельзя сделать вывод о замкнутости мира — свойстве, характерном для статических решений Эйнштейна и Де-Ситтера.

Эйнштейн сначала не поверил в возможность нестационарных решений, но потом признал правильность идей Фридмана.

После работ Фридмана стало очевидным, что космологический член в уравнении тяготения не вытекает из каких-либо физических требований, а его появление связано с неверным анализом уравнений тяготения.

Эти две работы Фридмана принадлежат к числу классических работ советских физиков.

§ 1

1. В своих известных работах, посвященных общим космологическим вопросам, Эйнштейн **) и Де-Ситтер ***) приходят к двум мыслимым типам вселенной; Эйнштейн получает так называемый ц и л и н д р и ч е с к и й м и р, в котором пространство ****) обладает постоянной, не меняющейся с течением времени кривизной, причем радиус кривизны связывается с общей массой материи, расположенной в пространстве; Де-Ситтер получает ш а р о в о й м и р, в котором уже не только пространство, но и весь мир обладает до известной степени характером мира постоянной

---

*) Журн. Русск. физ.-хим. о-ва, часть физ. 56 (1), 59 (1924). Работа впервые опубликована на нем. языке в Zs. Phys. 11, 377 (1922).

**) A. E i n s t e i n, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzber. Berl. Akad. (1917) (см. перевод в сб. «Принцип относительности». М.—Л., ОНТИ,1935, стр. 315).

***) D e S i t t e r, On Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences, Month. Not. Roy. Astron. Soc. (1916—1917).

****) Под пространством будем подразумевать пространство, описываемое многообразием трех измерений, относя термин «мир» к пространству, описываемому многообразием четырех измерений.

кривизны*). При этом и Эйнштейн, и Де-Ситтер предполагают определенный характер тензора материи, отвечающий гипотезе несвязанности материи и ее относительному покою, иначе говоря, достаточной малости скоростей материи по сравнению с фундаментальной скоростью**), т. е. со скоростью света.

Настоящая заметка имеет своею целью, во-первых, получить цилиндрический и сферический мир как частные типы, вытекающие из некоторых общих положений, а затем указать возможность получения особого мира, кривизна пространства которого, постоянная относительно трех принятых за пространственные координат, меняется с течением времени, т. е. зависит от четвертой, принятой за временну́ю координаты: этот новый тип вселенной в остальных своих свойствах напоминает цилиндрический мир Эйнштейна.

2. Предположения, которые мы положим в основу наших соображений, распадаются на два класса. К первому классу относятся предположения, одинаковые с теми, которые делают Эйнштейн и Де-Ситтер и которые относятся к уравнениям, управляющим гравитационными потенциалами, и к характеру состояния и движения материи в пространстве. Ко второму классу относятся предположения об общем, так сказать, геометрическом характере нашего мира; из принятой нами гипотезы в виде частных случаев могут быть получены как цилиндрический мир Эйнштейна, так и шаровой мир Де-Ситтера.

Предположения первого класса следующие:

1) Гравитационные потенциалы удовлетворяют системе уравнений Эйнштейна с так называемым «космологическим» членом, который может быть, в частности, равен нулю:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \pm \lambda g_{ik} = -\varkappa T_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4), \tag{A}$$

где g_{ik} — гравитационные потенциалы, T_{ik} — тензор материи, $\varkappa$ — некоторая постоянная, $R = g^{ik} R_{ik}$, а тензор R_{ik} определяется равенствами

$$R_{ik} = \frac{\partial^2 g\sqrt{g}}{\partial x_i\, \partial x_k} - \frac{\partial g\sqrt{g}}{\partial x_\sigma} \left\{ {ik \atop \sigma} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ {ik \atop \sigma} \right\} + \left\{ {ia \atop \sigma} \right\} \left\{ {k\sigma \atop a} \right\}, \tag{B}$$

причем x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) суть мировые координаты, а $\left\{ {ik \atop \sigma} \right\}$ — символ Кристоффеля второго рода***).

2) Материя находится в несвязанном состоянии и обладает взаимно относительным покоем; говоря менее строго, относительные скорости материи ничтожны сравнительно со скоростью света. При таких предположениях тензор материи T_{ik} определится равенствами

$$\begin{aligned} &T_{ik} = 0, \text{ если } i \text{ и } k \text{ одновременно не равны } 4, \\ &T_{44} = c^2 \varrho g_{44}, \end{aligned} \tag{C}$$

где ϱ — плотность материи и c — фундаментальная скорость; при этом, конечно, мировые координаты разделены на две группы, x_1, x_2, x_3 названы пространственными, а x_4 — временно́й координатой.

---

*) См. F. Klein, Ueber die Integralform der Erhaltungessätze und die Theorie der räumlich-geschlossenen Welt, Götting. Nachr. (1918).

**) См. этот термин у Eddington'а в книге «Espace, Temps et Gravitation», 2 Partie, Paris, 1921, стр. 10 (см. перевод: «Пространство, время, тяготение», Одесса, 1923).

***) Знак R_{ik} и скалярной кривизны R изменен на обратный сравнительно с обычными обозначениями этой величины.

3. Предположения второго класса сводятся к следующему:

1) По выделении из четырех мировых координат трех пространственных (x_1, x_2, x_3) мы будем иметь пространство постоянной кривизны, могущей, однако, меняться с течением четвертой временно́й координаты x_4. Интервал ds*), определяемый равенством $ds^2 = g_{ik}dx_i dx_k$, может быть написан при помощи соответствующего изменения пространственных координат в следующем виде:

$$ds^2 = R^2(dx_1^2 + \sin^2 x_1 \, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 \, dx_3^2) + \\ + 2g_{14}\, dx_1\, dx_4 + 2g_{24}\, dx_2\, dx_4 + g_{44}\, dx_4^2,$$

где R есть функция только от x_4; R является пропорциональным радиусу кривизны пространства; таким образом, радиус кривизны пространства может меняться с течением времени.

2) В выражении интервала g_{14}, g_{24}, g_{34} обращаются в нуль при соответствующем выборе временно́й координаты, иначе, кратко выражаясь, время ортогонально пространству. Это второе предположение не имеет, как мне кажется, в основе своей каких-либо физических или философских соображений и вводится исключительно в целях упрощения вычислений. Необходимо заметить, что миры Эйнштейна и Де-Ситтера являются частными случаями рассматриваемого предположения.

Предположения 1) и 2) дают нам возможность написать ds^2 в виде:

$$ds^2 = R^2(dx_1^2 + \sin^2 x_1 \, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 \, dx_3^2) + M^2 dx_4^2, \qquad (D)$$

где R зависит только от x_4, а M является, вообще говоря, функцией всех четырех мировых координат. Вселенная Эйнштейна является частным случаем, получаемым из формулы (D), заменой R^2 на $-R^2/c^2$ и M на 1, где R — постоянный (не зависящий и от x_4!) радиус кривизны пространства. Вселенная Де-Ситтера получается, когда в формуле (D) заменим R^2 на $-R^2/c^2$, а M на $\cos x_4$:

$$d\tau^2 = -\frac{R}{c^2}(dx_1^2 + \sin^2 x_1 \, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 \, dx_3^2) + dx_4^2, \qquad (D_1)$$

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}(dx_1^2 + \sin^2 x_1 \, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 \, dx_3^2) + \cos^2 x_1 \, dx_4^2 \;**). \qquad (D_2)$$

4. Необходимо сказать еще несколько слов о тех интервалах, в которых заключены мировые координаты; иначе говоря, необходимо условиться, какие точки многообразия четырех измерений мы будем считать за различные; не входя в более подробные пояснения, условимся пространственные координаты изменять в следующих интервалах: x_1 — в интервале $(0, \pi)$, x_2 — в интервале $(0, \pi)$ и x_3 — в интервале $(0, 2\pi)$, что же касается до временно́й координаты, то вопрос об интервале изменения ее оставим открытым, вернувшись к нему в дальнейшем.

§ 2

1. Пользуясь уравнениями (A) и (C) в предположении, что гравитационные потенциалы определяются равенством (D), и полагая $i = 1, 2, 3$, $k = 4$ в уравнениях (A), найдем

$$R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_1} = R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_2} = R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_3} = 0,$$

*) См., например, A. E d d i n g t o n, Espace, Temps et Gravitation, 2 Partie Paris, 1921.

**) Придавая интервалу ds размер времени, мы обозначим его через $d\tau$; в этом случае постоянная $\varkappa$ будет иметь размерностью длину, деленную на массу, и в CGS-единицах будет равна $1{,}87 \cdot 10^{-27}$; см. M. L a u e, Die Relativitätstheorie, Bd. 2, Braunschweig, 1921, стр. 185.

каковые равенства дают два случая: I) $R'(x_4) = 0$, R не зависит от x_4 и является постоянной — назовем этот случай стационарным миром, и II) $R'(x_4)$ не равно 0, M зависит только от x_4— назовем этот случай нестационарным миром.

Обращаясь сначала к стационарному миру, выпишем уравнения (A) для i, $k=1,2,3$ в предположении различных индексов; уравнения эти дадут нам такую систему формул:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1\, \partial x_2} - \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1\, \partial x_3} - \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_2\, \partial x_3} = \operatorname{ctg} x_2 \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0;$$

интегрируя эти уравнения, найдем

$$M = A(x_3, x_4) \sin x_1 \sin x_2 + B(x_2, x_4) \sin x_1 + C(x_1, x_4), \tag{1}$$

где A, B, C — произвольные функции своих аргументов. Разрешая обычными приемами уравнения (A) относительно тензора R_{ik}, исключая из полученных и неиспользованных еще уравнений неизвестную плотность ϱ*) и подставляя выражение (1) для M в эти уравнения, мы после довольно длинных, но совершенно элементарных вычислений найдем, что для M возможны следующие два выражения:

$$M = M_0 = \text{const}, \tag{2}$$

$$M = (A_0 x_4 + B_0) \cos x_1, \tag{3}$$

где M_0, A_0, B_0 — постоянные величины.

В случае, когда M равно постоянному, мы имеем для стационарного мира случай цилиндрического мира. В этом случае удобнее оперировать с гравитационными потенциалами, получаемыми из формулы (D); определяя плотность и величину λ, мы получим известный результат Эйнштейна

$$\lambda = \frac{c^2}{R^2}, \quad \varrho = \frac{2}{\varkappa R^2}, \quad M = \frac{4\pi^2}{\varkappa} R_1,$$

где M — общая масса всего пространства.

В другом возможном случае, когда M определяется из формулы (3), мы с помощью рационального изменения x_4**) приходим к шаровому миру Де-Ситтера, в котором $M = \cos x_1$; пользуясь формулой (D_2), найдем следующие соотношения Де-Ситтера:

$$\lambda = \frac{3c^2}{R^2}, \quad \varrho = 0, \quad M = 0.$$

Таким образом, стационарный мир может быть или цилиндрическим миром Эйнштейна, или сферическим миром Де-Ситтера.

2. Обратимся теперь к изучению другого возможного мира — нестационарного. В этом случае M есть функция только x_4; соответственно изменяя x_4, мы можем без ограничения общности положить $M = 1$; имея в виду большие удобства наших обычных представлений, напишем ds^2

---

*) Плотность ϱ является у нас неизвестной функцией мировых координат x_1, x_2, x_3, x_4.

**) Указанное изменение производится с помощью формулы

$$dx_4 = \sqrt{A_0 x_4 + B_0}\, dx_4.$$

в форме, аналогичной (D_1) и (D_2):

$$ds^2 = -\frac{R^2(x_4)}{c^2}(dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2) + dx_4^2. \qquad (D_3)$$

Нашей задачей явится определение R и ϱ из уравнений (А). Очевидно, что уравнения (А), в которых значки различны, ничего не дадут; уравнения (А), в которых $i = k = 1, 2, 3$, дадут одно соотношение

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0, \qquad (4)$$

а уравнение (А), в котором $i = k = 4$, даст равенство

$$\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \varkappa c^2 \varrho, \qquad (5)$$

причем

$$R' = \frac{dR}{dx_4}, \quad R'' = \frac{d^2R}{dx_4^2}.$$

Так как R' не равно нулю, то интеграция уравнения (4) после замены в целях удобства письма x_4 на t даст нам следующее уравнение:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{A - R + \frac{\lambda}{3c^3}R^3}{R}, \qquad (6)$$

где A — произвольная постоянная; из этого уравнения R получится путем обращения некоторого эллиптического интеграла, т. е. путем решения относительно R уравнения

$$t = \frac{1}{c}\int_a^R \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3}x^3}}\, dx + B, \qquad (7)$$

где B и a — постоянные; при этом, конечно, должно помнить об обычных условиях изменения знака у квадратного корня.

Уравнение (5) дает нам возможность определить ϱ:

$$\varrho = \frac{3A}{\varkappa R^3} \qquad (8)$$

через всю массу M пространства; постоянная A выразится следующим равенством:

$$A = \frac{\varkappa M}{6\pi^2}, \qquad (9)$$

принимая, что масса M — величина положительная, мы и для A получим положительное значение.

3. Изучение нестационарного мира основано на изучении уравнения (6) или (7); при этом, конечно, величина λ не определяется сама собой, и мы при изучении уравнений (6) и (7) будем предполагать, что λ может принимать любое значение. Определим те значения переменной x, при которых квадратный корень, входящий в формулу (7), может изменить свой знак. Ограничиваясь случаем положительного радиуса кривизны, нам достаточно рассмотреть значения для x, при которых подкоренное количество обращается в нуль или бесконечность в интервале $(0, \infty)$ для x, т. е. для положительных x.

Одно из значений x, при котором квадратный корень в формуле (7) обращается в нуль, есть значение $x = 0$; другие значения x, при которых квадратный корень в формуле (7) может изменять свой знак, найдутся, изучая положительные корни уравнения

$$A - x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3 = 0;$$

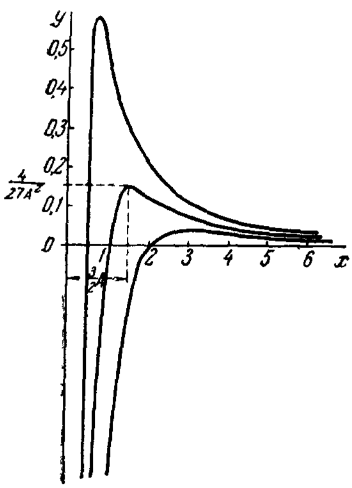
обозначая $\lambda/3c^3$ через y, построим семейство кривых третьего порядка в плоскости (x, y), определяемое уравнением

$$yx^3 - x + A = 0, \tag{10}$$

где A — параметр семейства, меняющийся в интервале $(0, \infty)$. Кривые нашего семейства (см. рисунок) пересекают ось x в точке $x = A$, $y = 0$ и имеют максимум в точке

$$x = \frac{3A}{2}, \quad y = \frac{4}{27A^2}.$$

Рассмотрение рисунка показывает, что при отрицательных λ уравнение $A - x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3 = 0$ имеет один положительный корень x_0, лежащий в интервале $(0, A)$; рассматривая x_0 как функцию λ и A:



$$x_0 = \Theta(\lambda, A),$$

найдем, что Θ — возрастающая функция от λ и возрастающая функция от A. Далее, если λ лежит в интервале $\left(0, \frac{4}{9}\frac{c^2}{A^2}\right)$ то уравнение наше будет иметь два положительных корня $x_0 = \Theta(\lambda, A)$ и $x_0' = \vartheta(\lambda, A)$, причем x_0 лежит в интервале $\left(A, \frac{3A}{2}\right)$, а x_0' — в интервале $\left(\frac{3A}{2}, \infty\right)$; $\Theta(\lambda, A)$ будет возрастающей функцией как от λ, так и от A, $\vartheta(\lambda, A)$ будет убывающей функцией от λ и от A. Наконец, если λ больше $\frac{4}{9}\frac{c^2}{A^2}$, то наше уравнение вовсе не будет иметь положительных корней.

Приступая к исследованию формулы (7), сделаем одно замечание: в начальный момент, т. е. при $t = t_0$, пусть радиус кривизны будет равен R_0; в этот начальный момент квадратный корень, стоящий в формуле (7), будет иметь знак плюс или минус, смотря по тому, возрастает ли радиус кривизны с течением времени при $t = t_0$ или нет; изменяя время t на $-t$, мы всегда можем приписать этому квадратному корню знак плюс, иначе говоря, без ограничения общности, можем время выбрать так, чтобы радиус кривизны в рассматриваемый начальный момент $t = t_0$ возрастал с течением времени.

4. Рассмотрим случай, когда $\lambda > \frac{4}{9}\frac{c^2}{A^2}$, когда, следовательно, уравнение $A - x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3 = 0$ не имеет положительных корней. В этом случае уравнение (7) перепишется следующим образом:

$$t - t_0 = \frac{1}{c} \int_{R_0}^{R} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3}}\, dx, \tag{11}$$

причем, согласно замечанию, сделанному в конце предыдущего пункта, квадратный корень будет всегда положителен. Отсюда следует, что R

будет возрастающей функцией от t; на начальное значение радиуса кривизны R_0 никаких в этом случае ограничений не налагается.

Так как радиус кривизны не может быть меньше нуля, то, уменьшаясь от R_0 с уменьшением t, согласно формуле (11), радиус кривизны через некоторый промежуток времени t' дойдет до нуля. Пользуясь очевидной аналогией, будем называть промежуток времени, понадобившийся, чтобы радиус кривизны от нуля дошел до R_0, временем, прошедшим от сотворения мира*); этот промежуток t' определяется равенством

$$t' = \frac{1}{c} \int_0^{R_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3}}\, dx. \tag{12}$$

Условимся в дальнейшем рассматриваемый мир называть монотонным миром первого рода.

Время, прошедшее от сотворения монотонного мира первого рода, рассматриваемое как функция R_0, A, λ, обладает следующими свойствами: 1) оно возрастает с увеличением R_0; 2) оно убывает с увеличением A, т. е. с увеличением массы материи пространства, и 3) оно убывает с увеличением λ. Если $A > \frac{2}{3} R_0$, то при любых λ время, протекшее от сотворения мира, конечно, если $A \leqslant \frac{2}{3} R_0$, то всегда найдется такое характеристическое значение $\lambda = \lambda_1 = \frac{4c^2}{9A^2}$, что с приближением λ к этой величине время, прошедшее от сотворения мира, будет беспредельно возрастать.

5. Положим далее, что λ заключено в интервале $\left(0, \frac{4c^2}{9A^2}\right)$; тогда начальное значение радиуса криизны R_0 может лежать в одном из трех интервалов: $(0, x_0)$, (x_0, x'_0), (x'_0, ∞). Если R_0 лежит в интервале (x_0, x'_0), то квадратный корень в формуле (7) имеет мнимое значение и пространство с такой начальной кривизной не может существовать. Случай, когда R_0 лежит в интервале $(0, x_0)$, мы рассмотрим в следующем пункте, теперь же остановимся на третьем случае, когда $R_0 > x'_0$ или $R_0 > \vartheta\ (\lambda, A)$; в этом случае рассуждениями, аналогичными приведенным в предыдущем пункте, можно показать, что R будет возрастающей функцией времени, причем R может меняться, начиная с $x'_0 = \vartheta\ (\lambda, A)$; промежуток времени, прошедший с момента, когда $R = x_0$, до момента, когда $R = R_0$, назовем временем, протекшим от сотворения мира, и обозначим через t':

$$t' = \frac{1}{c} \int_{x'_0}^{R_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3}}\, dx. \tag{13}$$

Условимся рассматриваемый мир называть монотонным миром второго рода.

6. Рассмотрим, наконец, случай, когда λ заключено в интервале $(-\infty, 0)$. В этом случае, если $R_0 > x_0 = \theta\ (\lambda, A)$, то квадратный корень в формуле (7) становится мнимым и, следовательно, пространство с указанным радиусом кривизны не может существовать. Если $R_0 < x_0$, то

*) Время, прошедшее от сотворения мира, характеризует время, прошедшее от момента, когда пространство было точкой ($R=0$), до нынешнего его состояния ($R=R_0$); это время может быть бесконечным.

рассматриваемый случай будет совершенно одинаков со случаем, опущенным при рассмотрении в предыдущем пункте; итак, положим, что λ лежит в интервале $\left(-\infty, \frac{4c^2}{9A^2}\right)$, а $R_0 < x_0$; обычными рассуждениями*) можно в этом случае показать, что R будет периодической функцией от t с периодом $t_п$, который мы назовем периодом мира и который будет определен равенством

$$t_п = \frac{3}{c}\int_0^{x_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3}x^3}}\,dx, \tag{14}$$

причем радиус кривизны будет меняться от нуля до x_0. Условимся такого рода мир называть периодическим. Период периодического мира возрастает с возрастанием λ, стремясь к бесконечности, когда λ стремится к $\lambda_1 = \frac{4c^2}{9A^2}$.

При малых λ период $t_п$ определяется приблизительной формулой

$$t_п = \frac{\pi A}{c}. \tag{15}$$

На периодический мир можно смотреть с двух точек зрения: если считать два явления совпадающими, коль скоро совпадают пространственные координаты, а временны́е отличаются на целое число периодов, то радиус кривизны мира, увеличиваясь сначала от нуля до x_0, будет затем уменьшаться до нуля; тогда время существования мира будет конечным.

С другой стороны, если изменять время от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. если считать два явления совпадающими, коль скоро совпадают не только их пространственные координаты, но и их временны́е координаты, то мы придем к действительной периодичности кривизны пространства.

7. Данные, которыми мы располагаем, совершенно недостаточны для каких-либо численных подсчетов и для решения вопроса о том, каким миром является наша Вселенная; быть может, проблема причинности и проблема центробежной силы прольют свет на рассматриваемые здесь вопросы. Следует отметить, что в полученных нами формулах «космологическая» величина λ не определяется, являясь лишней константой задачи; быть может, электродинамические соображения смогут определить эту величину. Полагая $\lambda = 0$ и считая M = массе $5 \cdot 10^{21}$ наших солнц, будем для периода мира иметь величину порядка 10 миллиардов лет.

Эти цифры могут иметь, конечно, лишь иллюстративное значение.

Петроград,
29 мая 1922 г.

---

*) См., например, W. Weierstrass, Ueber eine Gattung der reell periodischer Funktionen, Monatsber. d. Königl. Akad. d. Wiss. (1866), *а также* «Zur theorie der kleinen endlichen Schwingungen», Zs. Math. und Phys., Bd. 47 (1902); в нашем случае необходимо, конечно, внести некоторые видоизменения в рассуждения цитированных авторов; впрочем, периодичность в нашем случае устанавливается путем элементарного рассмотрения.