1963 г. Июль *Т. LXXX, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ПРОБЛЕМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КОСМОЛОГИИ

Е. М. Лифшиц и И. М. Халатников

СОДЕРЖАНИЕ

I. ОСОБЕННОСТИ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИИ

§ 1. Введение

Принципиально новые возможности, которые открывает общая теория относительности при применении к вопросу о свойствах мира как целого, были впервые указаны Эйнштейном в 1919 г. Дальнейшие успехи релятивистской космологии связаны главным образом с решением гравитационных уравнений Эйнштейна, впервые найденным А. А. Фридманом в 1922 г.

Как известно, это решение основано на предположении о полной однородности и изотропии распределения материи в пространстве («изотропная космологическая модель»); при этом возможны два случая, соответствующие пространству постоянной положительной кривизны (так называемая «закрытая модель») или пространству постоянной отрицательной кривизны («открытая модель»). Основным свойством этих решений является их нестационарность. Вытекающее отсюда представление о расширяющейся Вселенной нашло, как известно, блестящее подтверждение в открытом Э. Хэбблом эффекте красного смещения, и в настоящее время можно считать, что изотропная модель дает, в общих чертах, адекватное описание современного состояния Вселенной.

В то же время ясно, что в реальном мире предположение об однородности мира может оправдываться в лучшем случае лишь приближенным образом. Если даже и можно говорить об однородности распределения плотности материи, усредненной по расстояниям, большим по сравнению с межгалактическими, эта однородность во всяком случае исчезает при переходе к меньшим масштабам. С другой стороны, это предположение является очень далеко идущим в математическом отношении. Связанная с ним высокая симметрия решения вполне может привести к появлению специфических свойств, исчезающих при переходе к более общему случаю.

В связи с этим возникает вопрос о том, насколько общий характер имеет другое важное свойство изотропной модели — наличие в ней особой точки пространственно-временной метрики по отношению ко времени. Присутствие такой особой точки означает ограниченность времени. В открытой изотропной модели имеется, как известно, одна особая точка и время ограничено в ней лишь с одной стороны, а закрытая модель имеет две особые точки и время ограничено в обоих своих направлениях.

Естественно, что для всей космологии существен вопрос о степени общности этого важного свойства: является ли наличие особенности общим свойством космологических решений, не связанным ни с какими специфическими предположениями о характере распределения материи и гравитационного поля, которые лежат в основе того или иного частного решения уравнений гравитации?

К настоящему времени известно, помимо изотропного решения, также и довольно большое число других точных (т. е. справедливых во всем пространстве в течение всего времени) решений уравнений гравитации. Нахождение таких решений может, конечно, представить существенный интерес с точки зрения выяснения различных свойств такой чрезвычайно сложной системы нелинейных дифференциальных уравнений, которой являются гравитационные уравнения Эйнштейна. Однако накопление точных решений не может само по себе дать ответ на поставленный выше вопрос. Каждое из таких частных решений связано с теми или другими весьма специфическими предположениями об их виде, и из факта наличия или отсутствия в нем особой точки нельзя сделать никаких заключений о поведении решения в наиболее общем случае *). К тому же эти специальные предположения неизбежно оказываются весьма далеко идущими и обычно подчинены лишь требованию сделать возможным точное решение уравнений; они имеют поэтому обычно чисто математический характер (ограничение числа независимых переменных, разделение переменных, диагональность метрического тензора и т. п.) и лишены какого-либо прямого физического смысла.

Более точная формулировка интересующей нас задачи заключается в вопросе: обладает ли особенностью общее решение уравнений гравитации, т. е. такое решение, которое допускает совершенно произвольное задание условий (распределения материи и гравитационного поля) в какой-либо момент времени, выбираемый в качестве начального.

Критерием общности решения является число содержащихся в нем произвольных функций пространственных координат. При этом, однако, надо иметь в виду, что среди произвольных функций, содержащихся в том

*) Кстати сказать, подавляющее большинство известных точных решений обладает особенностями.

или ином решении уравнений гравитации, имеются, вообще говоря, такие, произвольность которых связана просто с допускаемым уравнениями произволом в выборе системы отсчета *). Нас же должно, очевидно, интересовать лишь число «физически произвольных» функций, которое не может быть уменьшено никаким выбором системы отсчета. Число таких функций для общего случая легко установить уже из физических соображений. Произвольные начальные условия должны задавать начальные пространственные распределения плотности материи, трех компонент ее скорости, а также еще четырех величин, определяющих свободное (т. е. не связанное с материей) гравитационное поле. К последнему числу можно прийти, рассматривая, например, слабые гравитационные волны: в силу их поперечности их поле определяется двумя независимыми величинами (компонентами метрического тензора); эти величины удовлетворяют уравнению второго порядка (волновому уравнению), а потому начальные условия для них должны задаваться четырьмя функциями. Таким образом, общее решение уравнений гравитации должно содержать восемь различных физически произвольных функций пространственных координат **).

Нахождение общего решения в точном виде — задача, разумеется, неразрешимая. В этом, однако, при решении интересующего нас вопроса нет необходимости. Достаточно исследовать вид решения вблизи особенности.

Таким образом, мы приходим к следующей постановке задачи: предполагая особенность существующей, надо найти вблизи нее вид наиболее широкого класса решений уравнений гравитации, с тем чтобы по числу содержащихся в нем произвольных функций координат судить о том, является ли это решение общим.

Проведению этой программы были посвящены работы авторов[2-4]; в § 2—5 дано подробное изложение этих исследований. Чтобы не загромождать изложение вычислениями, значительная их часть, а также некоторые второстепенные вопросы вынесены в приложения.

Все исследование производится на основе уравнений Эйнштейна в их классической форме, в которой они логически следуют из общих оснований теории относительности, без «космологического члена», для введения которого не существует в настоящее время каких бы то ни было теоретических или астрономических оснований.

§ 2. Общее решение с фиктивной особенностью

Первостепенное значение при исследовании вопросов, связанных с общей теорией относительности, имеет удачный выбор системы отсчета, адекватный рассматриваемой задаче.

Мы увидим в дальнейшем, что наиболее общие свойства космологических решений в отношении их особенностей не зависят от наличия или отсутствия материи. В связи с этим при исследовании этих свойств не следует пользоваться часто применяемой в космологии так называемой «сопутствующей» системой отсчета, т. е. системой, движущейся в каждой точке вместе с находящейся в ней материей.

*) Наибольшее возможное число произвольных функций в решении уравнений гравитации в произвольной системе отсчета равно 20 (см. [1], § 95).

**) Формальное математическое доказательство этого утверждения см. приложение А.

Естественным выбором системы отсчета оказывается в данном случае система, подчиненная условиям *)

$$g_{0\alpha}=0, \quad g_{00}=-1. \tag{2,1}$$

Как известно (см., например, [1], § 98а), равенство нулю компонент $g_{0\alpha}$ метрического тензора есть условие, допускающее синхронизацию хода часов в различных точках пространства. Если, кроме того, $g_{00}=-1$, то временна́я координата $x^0=t$ представляет собой собственное время в каждой точке пространства. Систему отсчета, удовлетворяющую этим условиям, мы будем называть синхронной. Элемент интервала в такой системе дается выражением

$$-ds^2=-dt^2+dl^2, \quad dl^2=g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta. \tag{2,2}$$

Трехмерный тензор $g_{\alpha\beta}$ определяет здесь пространственную метрику.

Уравнения гравитационного поля в синхронной системе отсчета имеют следующий вид (см. [1], § 99):

$$R_0^0=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_\alpha^\alpha+\frac{1}{4}\varkappa_\alpha^\beta\varkappa_\beta^\alpha=T_0^0-\frac{1}{2}T, \tag{2,3}$$

$$R_\alpha^0=\frac{1}{2}(\varkappa_{\beta;\,\alpha}^\beta-\varkappa_{\alpha;\,\beta}^\beta)=T_\alpha^0, \tag{2,4}$$

$$R_\alpha^\beta=P_\alpha^\beta+\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{-g}\,\varkappa_\alpha^\beta\right)=T_\alpha^\beta-\frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta T. \tag{2,5}$$

Здесь $\varkappa_{\alpha\beta}$ обозначает трехмерный тензор

$$\varkappa_{\alpha\beta}=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}, \tag{2,6}$$

а все дальнейшие операции поднятия и опускания индексов и ковариантного дифференцирования производятся в трехмерном пространстве с метрикой $g_{\alpha\beta}$; отметим, что

$$\varkappa_\alpha^\alpha=g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\ln(-g), \tag{2,7}$$

где g — определитель тензора g_{ik} (отличающийся от определителя $|g_{\alpha\beta}|$ множителем $g_{00}=-1$). Тензор $P_{\alpha\beta}$ в уравнении (2,5) есть трехмерный тензор Риччи, выражающийся через трехмерный метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ так же, как R_{ik} выражается через g_{ik}; он содержит лишь пространственные (но не временны́е) производные от $g_{\alpha\beta}$.

Л. Д. Ландау уже давно было указано, что определитель g метрического тензора в синхронной системе отсчета должен обратиться в нуль в течение конечного времени, вне зависимости от каких бы то ни было предположений о распределении, движении или уравнении состояния материи или о характере гравитационного поля (в последние годы это обстоятельство было отмечено также Комаром [5] **).

К этому заключению можно легко прийти с помощью уравнения (2, 3), заметив, что выражение в его правой части при любом распределении материи отрицательно (или, в случае пустого пространства, — равно

*) Мы следуем везде обозначениям, принятым в книге [1]. В частности, латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а греческие — три пространственных значения 1, 2, 3. Квадрат элемента интервала пишется как — $ds^2=g_{ik}\,dx^i\,dx^k$, так что матрица величин g_{ik} имеет сигнатуру $-+++$.

Кроме того, мы будем пользоваться везде системой единиц, в которой равны единице скорость света и эйнштейновская гравитационная постоянная.

**) Аналогичный результат был получен также Райчаудхури [6] для случая «пылевидной» материи (уравнение состояния $p=0$), движущейся без вращения, — ограничения, которые в действительности отнюдь не обязательны.

нулю*)). Поэтому

$$R_0^0 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{4}\varkappa_\alpha^\beta\varkappa_\beta^\alpha \leqslant 0.$$

В силу алгебраического неравенства **)

$$\varkappa_\alpha^\beta\varkappa_\beta^\alpha \geqslant \frac{1}{3}(\varkappa_\alpha^\alpha)^2,$$

имеем отсюда

$$\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{6}(\varkappa_\alpha^\alpha)^2 \leqslant 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\varkappa_\alpha^\alpha} \geqslant \frac{1}{6}. \tag{2,8}$$

Пусть, например, в некоторый момент времени $\varkappa_\alpha^\alpha > 0$. Тогда при уменьшении t величина $1/\varkappa_\alpha^\alpha$ убывает, имея всегда конечную (не равную нулю) производную, и потому должна обратиться в нуль (с положительной стороны) в течение конечного времени. Другими словами, $\varkappa_\alpha^\alpha$ обращается в $+\infty$, а в силу (2,7) это значит, что определитель g обращается в нуль (причем, согласно неравенству (2,8), не быстрее чем t^6). Если же в начальный момент $\varkappa_\alpha^\alpha < 0$, то же самое получится для возрастающего времени.

Этот результат, однако, еще ни в какой мере не доказывает неизбежности существования истинной, физической особенности в метрике. Физической особенностью является лишь такая, которая свойственна пространству-времени как таковому и не связана с характером выбранной системы отсчета. Такая особенность характеризуется обращением в бесконечность скалярных величин — плотности материи, инвариантов тензора кривизны ***).

Между тем особенность в синхронной системе отсчета, неизбежность которой мы доказали, может оказаться фиктивной, исчезающей при переходе к другой системе отсчета. Возможность такой ситуации явствует уже из того, что изложенное доказательство сохраняет свою силу и в случае, если негалилеевость метрики происходит просто от использования криволинейных координат в плоском пространстве-времени, когда фиктивность особенности метрики заранее очевидна.

Простые геометрические соображения показывают, что эта неизбежная в синхронной системе особенность в общем случае действительно оказывается фиктивной. Для этого обратим внимание на геометрические свойства синхронной системы отсчета.

В синхронной системе отсчета линии времени являются геодезическими линиями в 4-пространстве. Действительно, 4-вектор $u^i = dx^i/ds$

---

*) Действительно, для тензора энергии-импульса материи

$$T_{ik} = (p+\varepsilon)\,u_i u_k + p g_{ik}$$

имеем

$$T_0^0 - \frac{1}{2}T = -\frac{1}{2}(\varepsilon + 3p) - (p+\varepsilon)\,u_\alpha u^\alpha,$$

откуда очевидна отрицательность этой величины (p — давление, ε — плотность энергии материи).

**) В его справедливости легко убедиться, приведя тензор $\varkappa_\alpha^\beta$ (в любой заданный момент времени) к диагональному виду.

***) Инварианты тензора кривизны R_{iklm} получаются, как известно, путем его приведения к канонической форме Петрова.

касательной к мировой линии $x^1, x^2, x^3=\text{const}$ имеет составляющие $u^\alpha=0$, $u^0=1$ и автоматически удовлетворяет геодезическим уравнениям

$$\frac{du^i}{ds}=\Gamma^i_{kl}u^k u^l=\Gamma^i_{00}=0,$$

поскольку при условиях (2,1) символы Кристоффеля Γ^α_{00}, Γ^0_{00} равны нулю тождественно.

Легко также видеть, что эти линии нормальны к гиперповерхностям $t=\text{const}$. Действительно, 4-вектор нормали к такой гиперповерхности $n_i=-\partial t/\partial x^i$ имеет ковариантные составляющие $n_\alpha=0$, $n_0=-1$. Соответствующие контравариантные компоненты при условиях (2,1) равны $n^\alpha=0$, $n^0=1$, т. е. совпадают с компонентами 4-вектора u_i касательных к линиям времени.

Обратно, этими свойствами можно воспользоваться для геометрического построения синхронной системы отсчета в любом пространстве-времени. Для этого выбираем в качестве исходной какую-либо пространственноподобную гиперповерхность, т. е. гиперповерхность, нормаль к которой в каждой ее точке имеет временно́е направление (лежит внутри светового конуса с вершиной в той же точке); все элементы интервала на такой гиперповерхности пространственноподобны *). Если теперь выбрать эти линии в качестве координатных линий времени, причем определить временну́ю координату t как длину геодезической линии, отсчитываемую от исходной гиперповерхности, мы получим синхронную систему отсчета.

Ясно, что такое построение, а тем самым и выбор синхронной системы отсчета, в принципе возможны всегда. Более того, этот выбор еще и не однозначен: метрика вида (2,2) допускает любые преобразования трех пространственных координат, не затрагивающие времени, и, кроме того, преобразование, соответствующее произволу в выборе исходной гиперповерхности в указанном геометрическом построении **).

Но геодезические линии произвольного семейства, вообще говоря, пересекаются друг с другом на некоторых огибающих гиперповерхностях — четырехмерных аналогах каустических поверхностей геометрической оптики. Пересечение же координатных линий дает, разумеется, особенность в метрике в данной координатной системе. Таким образом, имеется геометрическая причина для появления особенности, очевидным образом связанной со специфическими свойствами синхронной системы и потому не имеющей физического характера.

Произвольная метрика 4-пространства допускает, вообще говоря, существование также и непересекающихся семейств времениподобных геодезических линий. Неизбежность же обращения в нуль определителя g в синхронной системе означает, что допускаемые уравнениями гравитации свойства кривизны реального пространства-времени (выражаемые неравенством $R^0_0\leqslant 0$) исключают возможность существования таких семейств, так что линии времени во всякой синхронной системе отсчета непременно пересекаются друг с другом ***).

С аналитической точки зрения это значит, что уравнения гравитации в синхронной системе отсчета имеют общее решение с фиктивной особен-

---

*) Если же направления нормалей к гиперповерхности лежат вне световых конусов, то элементы интервала в ней могут быть как времени-, так и пространственноподобными. Мы будем условно говорить о таких гиперповерхностях, как об имеющих временно́й характер, хотя такая терминология в этом случае и не вполне адекватна.

**) Допустимость последнего преобразования аналитически особенно ясно видна в инфинитезимальном случае (см. конец приложения И).

***) Мы отвлекаемся, конечно, от тривиального исключения — пучков параллельных прямых в плоском 4-пространстве.

ностью по времени; в произвольной синхронной системе отсчета такое решение должно содержать 12 произвольных функций координат: помимо 8 «физически произвольных» функций, еще 4 произвольные функции, связанные с отмеченной выше неоднозначностью выбора синхронной системы отсчета.

Характер фиктивной особенности метрики заранее ясен из геометрических соображений. Прежде всего, каустическая гиперповерхность должна иметь временно́й характер, поскольку она, во всяком случае, заключает в себе времениподобные интервалы — элементы длины геодезических линий в точках их касания с каустикой.

Далее, на каустике обращается в нуль одно из главных значений метрического тензора соответственно тому, что обращается в нуль расстояние между двумя соседними геодезическими, пересекающимися друг с другом в точке их касания с каустикой (соответствующее главное направление лежит, очевидно, вдоль нормали к каустике). Обращение в нуль этого расстояния происходит пропорционально первой степени расстояния до точки пересечения. Поэтому главное значение метрического тензора, а с ним и весь определитель g, обращается в нуль как квадрат указанного расстояния.

Можно показать, что при соответствующем выборе пространственных координат первые члены разложения пространственной метрики вблизи особенности могут быть представлены в виде

$$dl^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = a_{ab}\, dx^a\, dx^b + (t-\varphi)^2 a_{33}\, dx_3^2 + 2\,(t-\varphi)\, a_{a3}\, dx^a\, dx^3 \quad (2,9)$$

(индексы a, b пробегают значения 1, 2; величины a_{ab}, a_{a3}, a_{33}, φ — функции всех трех координат *)).

Особенность в метрике (2,9) является не одновременной— различные пространственные точки достигают ее в различные моменты времени $t = \varphi$. Легко, однако, видеть, что всегда можно построить и такую синхронную систему отсчета, в которой особенность (фиктивная) будет достигаться одновременно во всем пространстве. Ясно, что такая особенность не может быть расположена на гиперповерхности, касающейся линий времени в точках их пересечения, так как существование в ней времениподобных интервалов заведомо исключало бы одновременность особенности. Поэтому линии времени должны пересекаться на «многообразии точек», имеющем меньшее число измерений, чем гиперповерхность, т. е. являющемся некоторой двумерной поверхностью в 4-пространстве; ее можно назвать фокальной поверхностью соответствующего семейства геодезических линий. Выбрав произвольно фокальную поверхность, построив от каждой ее точки все возможные направления нормалей к ней (все направления в двумерной плоскости, нормальной к фокальной поверхности) и проведя в этих направлениях геодезические линии, мы тем самым построим синхронную систему отсчета, обладающую требуемым свойством.

---

*) Полное аналитическое построение общего решения с фиктивной особенностью для пустого пространства дано в [3].

Пространственная метрика (2,9) допускает еще произвольное преобразование $x^{3\prime} = x^{3\prime}(x^1, x^2, x^3)$, сводящееся к переобозначению величин a_{03}, a_{33} и старших членов разложения компонент g_{ab}. Этим преобразованием можно воспользоваться для того, чтобы функция φ, дающая форму каустической гиперповерхности, обратилась в $\varphi = x^3$. После этого останутся допустимыми лишь преобразования двух координат x^1, x^2 друг через друга. После такого выбора координат решение должно содержать всего 5 произвольных функций (трех координат): 4 функции, необходимые для задания начальных условий для поля в пустоте и одна функция, связанная с оставшимся произволом в выборе синхронной системы отсчета (выбор исходной гиперповерхности, от которой отсчитывается временна́я координата). Эти пять произвольных функций заключены в шести величинах a_{ab}, a_{a3}, a_{33}, связанных между собой, как оказывается, одним соотношением.

Таким образом, общее решение уравнений гравитации может быть представлено (путем соответствующего выбора синхронной системы отсчета) также и в виде, в котором особенность оказывается одновременной для всего пространства. В таком виде оно, разумеется, содержит те же восемь физически произвольных функций (трех пространственных координат), которых достаточно для задания произвольных начальных условий. По сравнению же с решением в виде (2,9) оно содержит на одну произвольную функцию меньше: если строить синхронную систему отсчета, начиная от некоторой исходной гиперповерхности, то отнюдь не произвольная гиперповерхность может привести к фокусировке построенных по нормалям к ней геодезических линий *).

Как уже указывалось, фиктивность особенности в рассматриваемом решении очевидна уже из способа его построения. Особенность может быть устранена путем преобразования систем отсчета, но лишь ценой отказа от ее синхронности.

По той же причине очевидно, что качественный характер этого решения не зависит от наличия или отсутствия материи, а плотность последней не имеет никакой особенности и остается конечной. Это становится в особенности ясным, если заметить, что материя движется (в синхронной системе отсчета) по мировым линиям, не совпадающим с линиями времени и даже не являющимся геодезическими.

Последнее обстоятельство означает, что система отсчета не может быть, вообще говоря, выбрана так, чтобы быть синхронной и в то же время сопутствующей, в которой мировые линии материи совпадают с линиями времени. Исключение может представить лишь случай «пылевидной» материи (давление $p=0$). Такая материя движется по геодезическим линиям. Поэтому в этом случае условие «сопутствия» системы отсчета материи не противоречит условию ее «синхронности». Этого, однако, еще недостаточно — не всякое семейство времениподобных геодезических линий обладает свойством быть нормальным пространственноподобной гиперповерхности, что необходимо для осуществления синхронности системы отсчета. Это условие выполняется, если материя движется «без вращения», т. е. если ротор ее скорости везде равен нулю **). В «синхронно-сопутствующей» системе отсчета, которую в этом случае можно построить, плотность материи обратится на каустике в бесконечность, — просто как результат пересечения траекторий частиц. Ясно, однако, что эта особенность плотности тоже не имеет физического характера и устраняется уже введением сколь угодно малого, но отличного от нуля, давления материи.

---

*) В известном смысле это решение соответствует равной нулю функции φ в решении (2,9); при этом на особенности ($t=0$) квадрат интервала — $ds^2=-dt^2+dl^2$ сводится к квадратичной форме — $ds^2=a_{ab}dx^a dx^b$ всего двух дифференциалов. Подчеркнем, однако, что разложение метрики вблизи такой особенности отнюдь нельзя получить, просто положив $\varphi=0$ в формулах, относящихся к решению вида (2,9). Укажем также, что такая система не охватывает собой всего пространства-времени. Это ясно из того, что все точки каждой гиперповерхности $t=\mathrm{const}$ лежат в ней на одинаковом временно́м расстоянии от пространственной фокальной поверхности, т. е. эти гиперповерхности целиком расположены в области абсолютного будущего или абсолютного прошлого по отношению к фокальной поверхности.

**) Необходимость этого условия очевидна из следующих соображений. В сопутствующей системе отсчета контравариантные компоненты 4-скорости $u^\alpha=0$, $u^0=1$. Если система отсчета также и синхронна, то и ковариантные компоненты $u_\alpha=0$, $u_0=-1$, а потому ее 4-ротор

$$u_{i;k}-u_{k;i}\equiv u_{i,k}-u_{k,i}=0.$$

Но это тензорное равенство должно тогда быть справедливым и в любой другой системе отсчета. Так, в синхронной, но не сопутствующей системе получим отсюда условие $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=0$ для трехмерной скорости.

Таким образом, особенность в общем решении уравнений гравитации, необходимость существования которой в синхронной системе отсчета следует из неравенства $R_0^0 \leqslant 0$, оказывается не физической. Тем самым отпадают какие-либо основания для существования еще и особенности другого типа, которая была бы истинной, и в то же время была бы тоже свойственна общему решению. Эти результаты, однако, не исключают возможности существования более узких классов космологических решений уравнений гравитации, обладающих истинной особенностью. Их нахождению посвящены § 3—4. Помимо самостоятельного интереса, который может иметь исследование возможных типов особенностей решений уравнений гравитации, построением этих решений и выяснением степени их общности подкрепляется заключение об отсутствии истинной особенности в общем решении.

§ 3. Анизотропное решение с особенностью

Решения уравнений гравитации могут иметь особенность (истинную) на гиперповерхности $t = \varphi\ (x^\alpha)$, которая может быть как пространственноподобной, так и непространственноподобной *). В первом случае всегда можно выбрать систему, отсчета, не нарушая условия ее синхронности, таким образом, чтобы превратить эту гиперповерхность в «гиперплоскость» $t = \mathrm{const}$; другими словами, в этом случае существует синхронная система отсчета, в которой особенность «наступает» одновременно во всем пространстве. О такой особенности можно сказать, что она имеет временно́й характер. Напротив, во втором случае никаким выбором системы отсчета особенность не может быть приведена к одновременности во всем пространстве; можно сказать, что она имеет пространственный характер.

В космологических аспектах интерес представляют прежде всего особенности временно́го характера. В частности, при поисках общего решения с истинной особенностью было бы естественно думать, что если бы возникновение особенности оказалось неизбежным, это должна была бы быть особенность именно такого типа. Ниже мы будем рассматривать особенности временно́го характера **).

Будем считать, то путем надлежащего выбора системы отсчета особенность приведена во всем пространстве к одинаковому моменту времени, который выберем в качесте момента $t = 0$. Этим условием вместе с условиями синхронности выбор временно́й координаты полностью фиксируется, так что неоднозначность синхронной системы отсчета сводится после этого лишь к допустимости произвольных преобразований трех пространственных координат друг через друга.

Уравнения гравитационного поля в пустом пространстве имеют простое частное точное решение

$$-ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1}dx^2 + t^{2p_2}dy^2 + t^{2p_3}dz^2, \tag{3,1}$$

*) Поскольку метрика при $t=\varphi$ становится особой, то, строго говоря, определяемое этим уравнением многообразие не является гиперповерхностью (оно может, в частности, сводиться к многообразию меньшего числа измерений). Говоря о том или ином ее характере, надо подразумевать характер гиперповерхности, сколь угодно близкой к особой, но не совпадающей с ней.

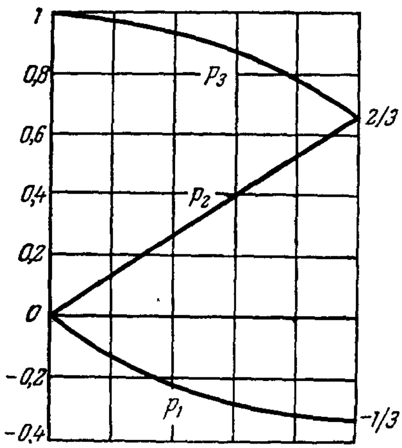
**) Наряду с рассматриваемым ниже в этом параграфе решением с особенностью временно́го характера существуют также решения с аналогичной особенностью пространственного характера. Кроме того, допустимы также особенности пространственного характера, не существующие для временно́го случая (см. приложение Б). Существенно, однако, что и такие особенности приводят к решениям менее широким, чем это требуется для общего решения.

где p_1, p_2, p_3 — любые три числа, связанные друг с другом двумя соотношениями:

$$p_1+p_2+p_3=p_1^2+p_2^2+p_3^2=1 \tag{3,2}$$

(это решение было, по-видимому, впервые указано Казнером[7]).

Числа, связанные соотношениями (3,2), играют ниже существенную роль; поэтому укажем здесь некоторые их свойства. Поскольку три числа p_1, p_2, p_3 связаны двумя соотношениями, лишь одно из них является независимым. При этом числа p_1, p_2, p_3 никогда не имеют одинаковых значений, а равенство двух из них имеет место лишь в тройках значений 0,0,1 и $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ *). Во всех других случаях эти числа различны, причем одно из них отрицательно, а два других положительны; мы будем располагать их в порядке



$$p_1<p_2<p_3. \tag{3,3}$$

Числа p_1, p_2, p_3 пробегают значения в интервалах

$$-\frac{1}{3}\leqslant p_1\leqslant 0, \quad 0\leqslant p_2\leqslant\frac{2}{3},$$

$$\frac{2}{3}\leqslant p_3\leqslant 1. \tag{3,4}$$

Они могут быть представлены в параметрическом виде

$$p_1=\frac{-s}{1+s+s^2}, \quad p_2=\frac{s(1+s)}{1+s+s^2},$$

$$p_3=\frac{1+s}{1+s+s^2}, \tag{3,5}$$

причем параметр s пробегает значения от 0 до 1. На рисунке изображены кривые, определяющие любые два из чисел p_1, p_2, p_3 по заданному значению третьего (три значения, лежащие на одной вертикали).

Хотя решение (3, 1) само по себе является очень частным, оно имеет простой и ясный физический характер, соответствуя полностью однородному (но анизотропному) пространству. Естественно ожидать, что такое решение должно содержаться как частный случай в некотором широком классе решений.

Будем искать пространственную метрику вблизи особенности в первом приближении (главные члены разложения по степеням t) в виде

$$g_{\alpha\beta}=t^{2p_1}l_\alpha l_\beta+t^{2p_2}m_\alpha m_\beta+t^{2p_3}n_\alpha n_\beta, \tag{3,6}$$

где $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — трехмерные векторы, являющиеся функциями координат; показатели степени p_1, p_2, p_3, связанные друг с другом соотношениями (3,2), тоже являются теперь функциями координат.

Определитель тензора (3,6) равен

$$-g=(\mathbf{l}[\mathbf{mn}])^2t^2. \tag{3,7}$$

Тензор $g^{\alpha\beta}$, обратный тензору (3,6), можно представить в виде

$$g^{\alpha\beta}=t^{-2p_1}l^\alpha l^\beta+t^{-2p_2}m^\alpha m^\beta+t^{-2p_3}n^\alpha n^\beta. \tag{3,8}$$

*) При $(p_1, p_2, p_3)=(0, 0, 1)$ метрика (3,1) преобразованием $t\,\mathrm{sh}\,z=\zeta$, $t\,\mathrm{ch}\,z=\tau$ приводится к галилеевой, т. е. мы имеем в действительности дело с плоским пространством-временем.

Буквами l^α, m^α, n^α с верхними индексами мы обозначаем здесь компоненты векторов *)

$$\tilde{\mathbf{l}}=\frac{[\mathbf{mn}]}{(\mathbf{l}[\mathbf{mn}])}, \quad \tilde{\mathbf{m}}=\frac{[\mathbf{nl}]}{(\mathbf{l}[\mathbf{mn}])}, \quad \tilde{\mathbf{n}}=\frac{[\mathbf{lm}]}{(\mathbf{l}[\mathbf{mn}])}, \tag{3,9}$$

«обратных» векторам $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, так что

$$l_\alpha l^\alpha = 1, \quad l_\alpha m^\alpha = l_\alpha n^\alpha = 0, \ \ldots \tag{3,10}$$

Дифференцируя тензор (3,6) по времени, получим

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \sum 2p_1 t^{2p_1-1} l_\alpha l_\beta \tag{3,11}$$

и, поднимая затем индексы, найдем

$$\varkappa_\alpha^\beta = \frac{1}{t}\sum 2p_1 l_\alpha l^\beta; \tag{3,12}$$

здесь и ниже знак суммы обозначает суммирование по циклическим перестановкам векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ и чисел p_1, p_2, p_3.

Представление $g_{\alpha\beta}$ в виде (3,6) соответствует тому, что изменение со временем линейных расстояний происходит по различным законам по трем различным направлениям (определяемым векторами $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$) в каждой точке пространства.

Необходимо, однако, подчеркнуть, что векторы $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ не могут, вообще говоря, быть выбраны в качестве репера пространственной системы координат. Для того чтобы направление, скажем, вектора $\mathbf{l}$ (x^1, x^2, x^3) (заданного своими ковариантными составляющими l_α) могло быть выбрано в каждой точке пространства в качестве направления одной из координатных линий $(x^{1'})$, необходимо, чтобы сумма $l_\alpha dx^\alpha$ была пропорциональна полному дифференциалу: $l_\alpha dx^\alpha = \psi d\varphi$ (ψ, φ — две скалярные функции); тогда поверхности $\varphi = \mathrm{const}$ будут поверхностями $x^{1'} = \mathrm{const}$. Таким образом, выбор координатных линий вдоль направлений $\mathbf{l}$ возможен лишь для вектора вида $\mathbf{l} = \psi\nabla\varphi$, сводящегося всего к двум (вместо трех) независимым функциям.

Нетрудно убедиться в том, что особенность, которую имеет метрика (3,6), действительно является истинной особенностью при всех значениях показателей степеней, за исключением лишь значений (0, 0, 1); при $t = 0$ инварианты тензора кривизны этой метрики обращаются в бесконечность. Что касается значений (0,0,1), то для них особенность метрики оказывается фиктивной и может быть устранена преобразованием системы отсчета (ср. примечание на стр. 400); мы исключаем из дальнейшего рассмотрения эти значения.

а) Случай пустого пространства. Мы рассмотрим сначала случай пустого пространства. Тогда уравнения гравитации (2, 3)—(2,5) будут:

$$R_0^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{4}\varkappa_\alpha^\beta\varkappa_\beta^\alpha = 0, \tag{3,13}$$

$$R_\alpha^0 = \frac{1}{2}(\varkappa_{\beta;\alpha}^\beta - \varkappa_{\alpha;\beta}^\beta) = 0, \tag{3,14}$$

$$R_\alpha^\beta = P_\alpha^\beta + \frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{-g}\,\varkappa_\alpha^\beta) = 0. \tag{3,15}$$

*) Здесь и ниже все символы векторных операций (векторные произведения, операции rot, grad и т. п.) надо понимать чисто формальным образом, как операции над компонентами (ковариантными) векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, — такие, как если бы координаты x^1, x^2, x^3 были декартовыми.

При подстановке (3,12) уравнение (3,13) удовлетворяется автоматически в силу соотношения $p_1+p_2+p_3=p_1^2+p_2^2+p_3^2$. В уравнении же (3,15) тождественно обращается в нуль второй член, поскольку величина $\varkappa_\alpha^\beta \sim 1/t$, а $\sqrt{-g} \sim t$. Этот член «потенциально» порядка t^{-2}. Поэтому для соблюдения (в своих главных членах) уравнения (3,15) остается потребовать, чтобы тензор P_α^β не содержал членов порядка t^{-2} или бóльших. Выясним условия, обеспечивающие отсутствие таких членов.

Поскольку существенно различная зависимость метрики от времени имеет место вдоль направлений $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, удобно «проецировать» все тензоры на эти направления. Обозначая соответствующие проекции индексами l, m, n, определим их следующим образом:

$$P_{ll}=P_{\alpha\beta}l^\alpha l^\beta, \quad P_{lm}=P_{\alpha\beta}l^\alpha m^\beta, \ \ldots \tag{3,16}$$

В таких обозначениях имеем, в частности,

$$g_{ll}=t^{2p_1}, \quad g_{mm}=t^{2p_2}, \quad g_{nn}=t^{2p_3}. \tag{3,17}$$

«Смешанные» компоненты тензора определим соответственно как

$$P_l^l=\frac{P_{ll}}{g_{ll}}=t^{-2p_1}P_{ll}, \quad P_l^m=\frac{P_{lm}}{g_{mm}}=t^{-2p_2}P_{lm}, \ \ldots \tag{3,18}$$

Общие формулы для определенных таким образом компонент тензора $P_{\alpha\beta}$ даны в приложении В. Из этих формул видно, что член наибольшего порядка в диагональных компонентах тензора есть

$$P_l^l=-P_m^m=-P_n^n=\frac{(\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l})^2}{2\,(\mathbf{l}\,[\mathbf{mn}])^2}\,t^{-2(p_2+p_3-p_1)}. \tag{3,19}$$

Поскольку $p_1<0$, то $2(p_2+p_3-p_1)=2\,(1-2p_1)>2$, так что этот член имеет порядок, больший чем t^{-2}, и потому для соблюдения уравнений (3,15), во всяком случае, необходимо, чтобы он отсутствовал, т. е. должно быть

$$\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l}=0. \tag{3,20}$$

Согласно сказанному выше это условие (эквивалентное равенству $l=\psi-\varphi$) означает, геометрически, что направление вектора $\mathbf{l}$ в каждой точке пространства может быть выбрано в качестве направления одной из координатных линий.

При выполнении условия (3,20) главные члены в компонентах тензора $P_{\alpha\beta}$ оказываются имеющими порядки величины

$$P_l^l \sim P_m^m \sim P_n^n \sim t^{-2p_3}(\ln t)^2, \qquad P_{lm} \sim t^{2(p_2-p_3)}\ln t, \qquad P_{ln} \sim P_{mn} \sim (\ln t)^2$$

и не отражаются в главном порядке на уравнениях (3,15) *).

Остается удовлетворить уравнениям (3,14). Наибольшие члены в этих уравнениях могли бы иметь порядок $t^{-1}\ln t$: такие члены появляются при дифференцировании показателей степеней в производных от $g_{\beta\gamma}$ по координатам, фигурирующих в выражении

$$\varkappa^\beta_{\alpha;\beta}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\sqrt{-g}\,\varkappa_\alpha^\beta\right)-\frac{1}{2}\varkappa^{\beta\gamma}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}. \tag{3,21}$$

---

*) При учете следующих членов разложения вектора $l=l^{(0)}+l^{(1)}+\ldots$ произведение $\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l}$ перестает быть равным нулю, но возникающие при этом из (3,19) поправочные члены меньшего порядка, чем t^{-2p_3}, и потому малы по сравнению с написанными (см. конец приложения Г).

Вычисляя эти члены, находим

$$\varkappa^{\beta\gamma}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \approx 4\sum p_1 t^{-2p_1-1} l^{\beta} l^{\gamma} \sum t^{2p_1}\ln t\,\frac{\partial p_1}{\partial x^{\alpha}}\, l_{\beta} l_{\gamma} =$$

$$= 4\,\frac{\ln t}{t}\sum p_1\frac{\partial p_1}{\partial x^{\alpha}} = 2\,\frac{\ln t}{t}\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\sum p_1^2, \qquad (3,22)$$

и в силу (3,2) эти члены тождественно сокращаются.

Таким образом, главными членами в уравнениях (3,14) оказываются члены $\sim 1/t$. Поскольку $\varkappa_{\beta}^{\beta} \approx 2/t$ и не зависит от координат, то в этом приближении $\varkappa^{\beta}_{\beta;\,\alpha} = 0$. Для вычисления же выражения (3,21) пишем

$$\varkappa^{\beta}_{\alpha;\,\beta} = \frac{2}{t\,(\mathbf{l}\,[\mathbf{mn}])}\sum\left\{\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(p_1 l_{\alpha}\,[\mathbf{mn}]_{\beta}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{p_1\,[\mathbf{mn}]_{\beta}\,[\mathbf{mn}]_{\gamma}}{(\mathbf{l}\,[\mathbf{mn}])}\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\, l_{\beta} l_{\gamma}\right\} =$$

$$= \frac{2}{t\,(\mathbf{l}\,[\mathbf{mn}])}\sum\left\{l_{\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(p_1\,[\mathbf{mn}]_{\beta}\right) + p_1\,[\mathbf{mn}]_{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\, l_{\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\, l_{\beta}\right)\right\} =$$

$$= \frac{2}{t\,(\mathbf{l}\,[\mathbf{mn}])}\sum\left\{l_{\alpha}\left([\mathbf{mn}]\,\nabla p_1\right) + l_{\alpha} p_1 \operatorname{div}[\mathbf{mn}] - p_1\,[[\mathbf{mn}]\operatorname{rot}\mathbf{l}]_{\alpha}\right\}.$$

Раскрывая входящие сюда векторные выражения и производя перегруппировку членов в сумме, получим уравнение

$$R^{0}_{\alpha} = -\frac{1}{2}\,\varkappa^{\beta}_{\alpha;\,\beta} = -\frac{1}{t\,(\mathbf{l}\,[\mathbf{mn}])}\sum l_{\alpha}\left\{[\mathbf{mn}]\,\nabla p_1 + (p_3 - p_1)\,\mathbf{m}\operatorname{rot}\mathbf{n} + \right.$$

$$\left. + (p_1 - p_2)\,\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{m}\right\} = 0. \qquad (3,23)$$

Проецируя это уравнение на направления $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, получим три соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathbf{l}\,[\mathbf{mn}])\,p_{1,\,l} + (p_3 - p_1)\,\mathbf{m}\operatorname{rot}\mathbf{n} + (p_1 - p_2)\,\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{m} = 0,\\
&(\mathbf{l}\,[\mathbf{mn}])\,p_{2,\,m} + (p_1 - p_2)\,\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{l} + (p_2 - p_3)\,\mathbf{l}\operatorname{rot}\mathbf{n} = 0,\\
&(\mathbf{l}\,[\mathbf{mn}])\,p_{3,\,n} + (p_2 - p_3)\,\mathbf{l}\operatorname{rot}\mathbf{m} + (p_3 - p_1)\,\mathbf{m}\operatorname{rot}\mathbf{l} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3,24)$$

(буквы l, m, n в индексах после запятой означают дифференцирования вдоль соответствующих направлений согласно определению (В, 3)).

Следующие (после (3,6)) члены разложения метрического тензора выражаются через фигурирующие в (3,6) величины; соответствующие вычисления приведены в приложении Г.

В выражение (3,6) входит всего 10 различных функций координат: по три компоненты трех векторов $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ и одна функция в показателях степеней t (какая-либо из трех функций p_1, p_2, p_3, связанных друг с другом соотношениями (3,2)). Между этими десятью функциями имеется четыре соотношения (3,20) и (3,24). Кроме того, используемая нами система отсчета допускает еще произвольные преобразования трех пространственных координат друг через друга. Поэтому полученное решение содержит всего 10—4—3 = 3 физически произвольные функции трех пространственных координат. Это число на 1 меньше, чем требуется для задания произвольных начальных условий для гравитационного поля в пустоте *).

Тем или иным специфическим выбором пространственных координат можно придать метрике (3,6) различные более простые формы, например:

$$dl^2 = l^2 t^{2p_1}\,dx^2 + m_2^2 t^{2p_2}\,dy^2 + n_3^2 t^{2p_3}\,dz^2 +$$

$$+ 2m_1 m_2 t^{2p_2}\,dx\,dy + 2n_1 n_3 t^{2p_3}\,dx\,dz. \qquad (3,25)$$

*) В приложении Д изложены соображения, разъясняющие более наглядно причины «потери» в этом решении одной произвольной функции.

Пять величин l_1, m_1, m_2, n_1, n_3 (и показатели степеней p_1, p_2, p_3) связаны тремя соотношениями, которые легко получить из (3,24); условие же (3,20) уже использовано выбором l в качестве направлений координатных линий x. В (3,25) координаты y, z могут быть еще подвергнуты преобразованиям вида $y \to f(x, y)$, $z \to g(x, z)$; такие преобразования не отражаются на виде главных членов разложения метрики, представляемых формой (3,25).

Отметим, что рассмотренное решение принципиально анизотропно: показатели p_1, p_2, p_3, определяющие закон изменения линейных расстояний по трем различным направлениям в пространстве, не могут быть одинаковыми. Обратим также внимание на математическое своеобразие этого решения — одна из произвольных функций в нем входит в показатели степени у времени.

б) Решение в пространстве, заполненном материей. Покажем теперь, что наличие материи не меняет характера полученного «анизотропного» решения, причем начальные условия для распределения и движения материи могут задаваться вполне произвольным образом.

Рассматривая решение уравнений гравитации вблизи особой точки, в которой давление p и плотность энергии ε материи обращаются в бесконечность, надо, естественно, в качестве ее уравнения состояния пользоваться ультрарелятивистским соотношением

$$p = \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{3,26}$$

Тогда тензор энергии-импульса материи

$$T_{ik} = (p+\varepsilon)\, u_i u_k + p g_{ik} = \frac{\varepsilon}{3}\,(4u_i u_k + g_{ik}), \quad T_i^i = 0. \tag{3,27}$$

Уравнения гравитации (2,3) — (2,5) принимают вид

$$R_0^0 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{4}\varkappa_\alpha^\beta \varkappa_\beta^\alpha = \frac{\varepsilon}{3}\,(4u_0 u^0 + 1), \tag{3,28}$$

$$R_\alpha^0 = \frac{1}{2}\,(\varkappa_{\beta;\,\alpha}^\beta - \varkappa_{\alpha;\,\beta}^\beta) = \frac{4\varepsilon}{3}\, u_\alpha u^0, \tag{3,29}$$

$$R_\alpha^\beta = P_\alpha^\beta + \frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{-g}\,\varkappa_\alpha^\beta\right) = \frac{\varepsilon}{3}\,(4u_\alpha u^\beta + \delta_\alpha^\beta). \tag{3,30}$$

Для ориентации в порядках величины плотности и скорости материи удобно воспользоваться гидродинамическими уравнениями движения материи, содержащимися, как известно, в уравнениях гравитации (уравнения $T_{i;\,k}^k = 0$):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,\sigma u^i\right) = 0, \tag{3,31}$$

$$(p+\varepsilon)\, u^k \left\{\frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\, u^l \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right\} = -\frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} \tag{3,32}$$

(см., например, [8], § 125). Здесь σ — плотность энтропии; для ультрарелятивистского уравнения состояния (3,26) энтропия $\sigma \sim \varepsilon^{3/4}$.

Сделаем предположение, подтверждаемое результатом, что главными в уравнениях (3,31)—(3,32) являются члены, содержащие производные по времени. Тогда уравнение (3,31) и пространственные компоненты уравнения (3,32) (временна́я компонента не дает ничего нового) дают

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{-g}\,u_0 \varepsilon^{3/4}\right) = 0, \quad 4\varepsilon\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0,$$

откуда

$$tu_0\varepsilon^{3/4}=\mathrm{const},\quad u_\alpha\varepsilon^{1/4}=\mathrm{const},$$

где const означают не зависящие от времени величины. Кроме того, из тождества $u_iu^i=-1$ имеем (учитывая, что все ковариантные составляющие u_α одинакового порядка)

$$u_0^2\approx u_nu^n=u_n^2t^{-2p_3};$$

мы снова пользуемся составляющими вдоль направлений $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, т. е. представляем трехмерный вектор $\mathbf{u}$ в виде

$$\mathbf{u}=u_l\mathbf{l}+u_m\mathbf{m}+u_n\mathbf{n},$$

причем $u_l=\mathbf{u}\tilde{\mathbf{l}},\ldots$

Из написанных соотношений находим

$$\varepsilon\sim t^{-2(1-p_3)},\quad u_0^2\sim t^{-(3p_3-1)},\quad u_\alpha\sim t^{(1-p_3)/2},\tag{3,33}$$

после чего легко проверить, что отброшенные в уравнениях (3,31) — (3,32) члены действительно малы по сравнению с оставленными.

Оценим теперь компоненты тензора энергии-импульса, стоящие в правых частях уравнений (3,28) — (3,30). В уравнении (3,28) имеем

$$T_0^0\sim\varepsilon u_0^2\sim t^{-(1+p_3)}.$$

Поскольку $p_3<1$, эта величина имеет более низкий порядок по $1/t$, чем главные члены в левой части уравнения ($\sim t^{-2}$). То же самое относится к уравнениям (3,30): пространственные компоненты тензора T_i^k, «спроецированные» на направления $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, имеют порядки величины

$$T_l^l\sim\varepsilon\sim t^{-2(1-p_3)},\quad T_m^m\sim\varepsilon u_mu^m\sim t^{-(1+2p_2-p_3)},\quad T_n^n\sim\varepsilon u_nu^n\sim t^{-(1+p_3)},\tag{3,34}$$

которые все меньше, чем t^{-2}.

В уравнении же (3,29) имеем

$$T_\alpha^0\sim\varepsilon u_\alpha u^0\sim\frac{1}{t},$$

т. е. тот же порядок величины, что и в левой стороне равенства. Это обстоятельство, однако, тоже не изменит характера решения. Действительно, в соответствии с (3,33) напишем

$$\varepsilon=\varepsilon^{(0)}t^{-2(1-p_3)},\quad u_\alpha=u_\alpha^{(0)}t^{(1-p_3)/2}$$

для первых членов разложения этих величин; при этом

$$u_0^2\approx u_n^{(0)2}t^{-(3p_3-1)}.$$

Приравнивая выражение (3,23) для R_α^0 величине $T_\alpha^0=4\varepsilon u_\alpha u^0/3$, найдем в результате вместо уравнений (3,24) уравнения

$$(\mathbf{l}[\mathbf{mn}])p_{1,l}+(p_3-p_1)\,\mathbf{m}\operatorname{rot}\mathbf{n}+(p_1-p_2)\,\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{m}=-\frac{4}{3}\varepsilon^{(0)}u_l^{(0)}u_0^{(0)},\ldots\tag{3,35}$$

Таким образом, меняется лишь связь между фигурирующими в (3,6) функциями, причем в эту связь входят теперь также и новые функции $\varepsilon^{(0)},\mathbf{u}^{(0)}$.

Меняется также и вид следующих членов разложения метрического тензора, причем первыми следующими за (3,6) членами оказываются именно члены, связанные с наличием материи (см. приложение Г).

Таким образом, найденное анизотропное решение уравнений гравитации представляет собой очень широкий класс решений, обладающих особенностью. Оно содержит семь произвольных функций координат: помимо трех функций, фигурировавших уже в отсутствие материи, в него входят еще функция $\varepsilon^{(0)}$ и три функции $u_\alpha^{(0)}$. Это число, однако, на 1 меньше, чем требовалось бы для общего случая, так что это решение не является общим *).

Характер изменения метрики вблизи особенности ($t \to 0$) в рассмотренном решении не зависит от наличия или отсутствия материи (а тем самым и от ее уравнения состояния). Он таков, что в каждой точке пространства линейные расстояния по двум направлениям убывают (как t^{p_2} и t^{p_3}), а по третьему — возрастают (как $t^{-|p_1|}$); объемы при этом убывают пропорционально t. Законы этих изменений (т. е. значения p_1, p_2, p_3) меняются вдоль пространства, определяясь заданием начальных условий.

Плотность материи обращается в каждой точке пространства в бесконечность по закону $\varepsilon \sim t^{-2(1-p_3)}$. Уже это обстоятельство само по себе является очевидным указанием на физический (не фиктивный) характер особенности.

Скорость движения материи в этом решении (в рассматриваемой системе отсчета) стремится при $t \to 0$ к скорости света. Действительно, трехмерный скаляр $u^\alpha u_\alpha \approx u_n u^n$ стремится при $t \to 0$ к бесконечности как $t^{-(3p_3-1)}$. Это значит, что материя движется в каждой точке в основном вдоль направления **n**, причем абсолютная величина ее обычной трехмерной скорости **v** ($v^2 = v_\alpha v^\alpha$) стремится к единице по закону

$$\sqrt{1-v^2} \sim t^{(3p_3-1)/2}. \qquad (3,36)$$

Собственное время τ движущейся материи связано со временем t посредством $d\tau = dt\sqrt{1-v^2}$. Поэтому

$$\tau \sim t^{(3p_3+1)/2}. \qquad (3,37)$$

В сопутствующей системе отсчета плотность энергии обращается, следовательно, в бесконечность по закону

$$\varepsilon \sim \tau^{-\frac{4(1-p_3)}{3p_3+1}}. \qquad (3,38)$$

§ 4. Квазиизотропное решение

Рассмотренное в предыдущем параграфе решение принципиально анизотропно: поскольку показатели степеней p_1, p_2, p_3 не могут иметь в нем одинаковых значений, «сжатие» пространства происходит анизотропным образом.

Естественно поэтому, что в этом решении не содержится изотропное (фридмановское) решение. Покажем, что последнее является в действительности частным случаем другого класса решений, в котором сжатие пространства происходит «квазиизотропным» образом — линейные расстояния по всем направлениям меняются в нем с одинаковой степенью

*) В частном случае, когда $(p_1, p_2, p_3) = (-1/3, 2/3, 2/3)$, материя может быть «вписана» в метрику (3,6) еще и другим способом, при котором ее скорость стремится к нулю при $t \to 0$. При этом, однако, материя привносит с собой лишь две, а не четыре произвольные функции, т. е. начальные условия для нее должны иметь некоторый частный характер. Получающийся, таким образом, класс решений см. в работе [2]. К этому классу относится, в частности, общее решение для центрально-симметрического коллапса материи.

времени. Как и в полностью изотропном случае, это решение существует лишь для пространства, заполненного материей *).

Изотропная модель, как известно, формулируется наиболее естественным образом в сопутствующей системе отсчета. В этой системе в явном виде проявляются изотропия и однородность пространства, в силу чего автоматически обращаются в нуль величины $g_{0\alpha}$ (так что система отсчета является в то же время и синхронной), а особенность имеет место одновременно во всем пространстве. Конкретный закон зависимости метрики от времени в этом решении зависит от уравнения состояния материи. При ультрарелятивистском уравнении $p=\varepsilon/3$ метрика при $t\to 0$ имеет вид $g_{\alpha\beta}\approx a_{\alpha\beta}t$, где $a_{\alpha\beta}$ — вполне определенные функции координат, соответствующие постоянной пространственной кривизне. Как функции времени $g_{\alpha\beta}$ разлагаются по целым степеням t.

Квазиизотропное решение мы будем формулировать в синхронной системе, которая, однако, при этом уже не является строго сопутствующей. Пространственную метрику будем искать в виде

$$g_{\alpha\beta}=ta_{\alpha\beta}+t^2b_{\alpha\beta}+\ldots, \tag{4,1}$$

где теперь $a_{\alpha\beta}$ — произвольные функции координат. Тензор, обратный (4, 1), есть

$$g^{\alpha\beta}=t^{-1}a^{\alpha\beta}-b^{\alpha\beta}, \tag{4,2}$$

где тензор $a^{\alpha\beta}$ обратен $a_{\alpha\beta}$; все операции опускания и поднимания индексов и ковариантного дифференцирования над другими тензорами везде в этом параграфе производятся с независимой от времени метрикой $a_{\alpha\beta}$ (например, $b_\alpha^\beta=a^{\beta\gamma}b_{\alpha\gamma}$ и т. п.).

Вычисляя левые стороны уравнений (3,28) и (3,29) соответственно с точностью до двух и до одного главного порядка по $1/t$, получим

$$-\frac{3}{4t^2}+\frac{1}{2t}\,b=\frac{\varepsilon}{3}\,(-4u_0^2-1), \tag{4,3}$$

$$\frac{1}{2}\,(b_{,\alpha}-b^\beta_{\alpha,\,\beta})=-\frac{4\varepsilon}{3}\,u_\alpha u_0, \tag{4,4}$$

где $b=b_\alpha^\alpha$. Если сравнивать правые стороны этих уравнений и учитывать при этом тождество

$$-1=u_iu^i\approx -u_0^2+\frac{1}{t}\,u_\alpha u_\beta a^{\alpha\beta},$$

легко видеть, что $\varepsilon\sim t^{-2}$, $u_\alpha\sim t^2$; при этом в силу указанного тождества $u_0^2-1\sim t^3$. Из уравнения (4,3) находим теперь первые два члена

---

*) В пустоте уравнения гравитации могут быть удовлетворены квазиизотропной метрикой вида $g_{\alpha\beta}=t^2a_{\alpha\beta}$, где $a_{\alpha\beta}$ — функции координат.

Уравнение (3,13) при этом удовлетворяется тождественно $\left(\varkappa_\alpha^\beta=2\delta_\alpha^\beta/t\right)$, а уравнение (3,15) дает $P_\alpha^\beta=-2\delta_\alpha^\beta$, где тензор $P_{\alpha\beta}$ вычислен по метрике просто $a_{\alpha\beta}$; но такая форма $P_{\alpha\beta}$ означает, что пространство обладает постоянной отрицательной кривизной. Соответствующая пространственно-временнáя метрика может быть написана с помощью четырехмерных сферических координат χ, θ, φ в виде

$$-ds^2=-dt^2+t^2\,[d\chi^2+\mathrm{sh}^2\,\chi\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)],$$

но преобразованием

$$r=t\,\mathrm{sh}\,\chi,\quad \tau=t\,\mathrm{ch}\,\chi$$

такая метрика приводится к галилеевой

$$-ds^2=-d\tau^2+dr^2+r^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2).$$

разложения плотности энергии

$$\varepsilon = \frac{3}{4t^2} - \frac{b}{2t}, \tag{4,5}$$

а из (4,4) — первый член разложения скорости

$$u_\alpha = \frac{t^2}{2}\,(b_{;\,\alpha} - b^\beta_{\alpha;\,\beta}). \tag{4,6}$$

Трехмерные символы Кристоффеля, а с ними и тензор $P_{\alpha\beta}$, в первом по $1/t$ приближении не зависят от времени; при этом $P_{\alpha\beta}$ совпадает с выражением, получающимся при вычислении с не зависящей от времени метрикой $a_{\alpha\beta}$. Учитывая это обстоятельство, найдем теперь, что в уравнении (3,30) члены порядка t^{-2} автоматически сокращаются, а члены $\sim t^{-1}$ дают

$$P^{\,\beta}_{\,\alpha} + \frac{3}{4}\,b^\beta_\alpha + \frac{5}{12}\,\delta^\beta_\alpha b = 0.$$

Отсюда

$$b^\beta_\alpha = -\frac{4}{3}\,P^\beta_\alpha + \frac{5}{18}\,\delta^\beta_\alpha P. \tag{4,7}$$

Мы видим, что, действительно, шесть функций $a_{\alpha\beta}$ остаются вполне произвольными. По заданным $a_{\alpha\beta}$ формулой (4,7) определяются коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ следующего члена разложения, а с ними и коэффициенты первых членов разложений (4,5) и (4,6) плотности материи и скорости. Отметим, что при $t \to 0$ распределение материи гомогенизируется, ее плотность стремится к не зависящей от координат величине. Что касается распределения скорости (4,6), то его можно преобразовать, учтя соотношение

$$b^\beta_{\alpha;\,\beta} = \frac{7}{9}\,b_{;\,\alpha},$$

являющееся следствием соотношения

$$P^\beta_{\alpha;\,\beta} - \frac{1}{2}\,P_{;\,\alpha} = 0,$$

которому удовлетворяет, как известно, всякий тензор Риччи. Имеем тогда

$$u_\alpha = \frac{t^2}{9}\,b_{;\,\alpha}, \tag{4,8}$$

т. е. в этом приближении скорость является градиентом некоторой функции и ее ротор равен нулю (отличный от нуля ротор, однако, появляется в следующих членах разложения).

Метрика (4,1) допускает еще возможность произвольных преобразований трех пространственных координат (выбор же времени полностью определяется условием $t = 0$ в особой точке); этими преобразованиями можно воспользоваться, например, для приведения тензора $a_{\alpha\beta}$ к диагональному виду. Поэтому найденное решение содержит всего 6—3, т. е. три различные физически произвольные функции координат.

Изотропной модели соответствует частный случай вполне определенных функций $a_{\alpha\beta}$ — тех, которые соответствуют пространству постоянной кривизны (при этом $P^\beta_\alpha = \mathrm{const}\cdot\delta^\beta_\alpha$).

§ 5. Общие заключения об особенностях космологических решений

Изложенные результаты позволяют сделать основное заключение о том, что наличие особенности по времени не является обязательным свойством космологических моделей общей теории относительности и что общий случай произвольного распределения материи и гравитационного поля не приводит к появлению особенности.

Решения же, имеющие физическую особенность, обладают степенью общности, недостаточной для учета произвольных начальных условий, задаваемых в какой-либо момент времени. Наиболее широким из таких решений является анизотропное решение, содержащее семь произвольных функций координат. Хотя это число всего на единицу меньше максимально возможного, этого достаточно, разумеется, для того чтобы допускаемые этим решением начальные условия обладали «мерой нуль» по сравнению со всем многообразием возможных начальных условий.

Недостаточная степень общности решения означает, что описываемый им режим является неустойчивым: существуют такие типы малых возмущений, наложение которых приводит к разрушению решения и тем самым к исчезновению особенности. Не ограничивая общности, можно всегда подчинить произвольное возмущение таким условиям, чтобы оно не нарушило синхронности системы отсчета. Поскольку в синхронной системе отсчета особенность не может вообще исчезнуть, это значит, что в результате возмущения она должна перейти в фиктивную особенность.

Изложенные в § 2 соображения о фиктивном характере неизбежной в синхронной системе отсчета особенности в равной степени относятся к пустому пространству и к пространству, заполненному материей с любым уравнением состояния. Мы видели также в § 3, что наличие материи не меняет качественных свойств анизотропного решения с истинной особенностью. Все это свидетельствует о том, что наиболее общие свойства космологических решений в отношении их временны́х особенностей проявляются уже в случае пустого пространства, а материя не меняет этих свойств качественным образом. Этот результат представляется естественным, если заметить, что гравитационные свойства «волновых пакетов», составленных из коротковолновых гравитационных волн, могут имитировать гравитационные свойства материи (с уравнением состояния $p = \varepsilon/3$).

Исключительное положение в этом смысле занимает изотропная модель, как и обобщающее ее квазиизотропное решение (§ 4),— эти решения существуют только для пространства, заполненного материей. Эта исключительность, однако, находит простое объяснение, лишь подтверждающее общее правило. Она связана именно со свойственной этому решению высокой симметрией (однородностью) распределения материи, которая не может быть имитирована никакой совокупностью поперечных гравитационных волн.

В литературе неоднократно высказывалось предположение о том, что временна́я особенность обязательна при отсутствии «вращения» заполняющей пространство материи, но может исчезнуть в моделях, учитывающих вращение *). Из сказанного выше становится ясным, что в действительности характер движения материи вообще не имеет прямого отношения к вопросу о временны́х особенностях космологических решений.

Мы везде говорили о направлении приближения к особенности как о направлении уменьшения времени. В действительности, ввиду симметрии уравнений гравитации по отношению к изменению знака времени, с тем же успехом могла бы идти речь и о приближении к особенности в направлении увеличения времени. Физически, однако, ввиду физической неэквивалентности будущего и прошедшего, между этими двумя случаями имеется существенное отличие в отношении самой постановки вопроса.

*) Основание для этого предположения заключалось в том, что член связанный с вращением (в несинхронной системе отсчета) входит в 00-компоненту уравнений гравитации с таким знаком, что он как бы замедляет убывание определителя.

Особенность в будущем может иметь физический смысл, лишь если она допустима при совершенно произвольных условиях, задаваемых в какой-либо предшествующий момент времени; ясно, что нет никаких оснований для того, чтобы распределение материи и поля, достигаемое в какой-либо момент в процессе эволюции Вселенной, соответствовало бы специфическим условиям, требуемым для осуществления частного решения уравнений гравитации, обладающего истинной особенностью. Более того, если даже допустить осуществление по каким-либо причинам такого распределения в какой-либо момент времени, оно неизбежно разрушится в дальнейшем, уже хотя бы благодаря неизбежным термодинамическим (и квантовым) флуктуациям. Поэтому изложенные результаты исключают возможность существования особенности в будущем и означают, что сжатие мира (если оно вообще должно наступить) должно будет в конце концов снова смениться его расширением.

На вопрос же о существовании особенности в прошлом исследование, основанное на одних лишь уравнениях гравитации, вообще не может дать определенного ответа. Требование, чтобы особенность имела место для произвольного распределения материи и поля, в этом случае a priori не обязательно. В таком виде оно было бы эквивалентно явно неприемлемому предположению, что реальная Вселенная описывается некоторым чисто случайным решением уравнений гравитации.

В действительности несомненно, что отбор решения, отвечающего реальному миру, на самом деле однозначен и связан с какими-то глубокими физическими требованиями, установление которых на основании одной лишь существующей теории тяготения невозможно и которые смогут быть выяснены лишь в результате дальнейшего синтеза физических теорий. Лишь после установления этих требований могло бы быть однозначно выяснено, имеет ли особенность удовлетворяющее им специфическое решение уравнений гравитации.

Может возникнуть сомнение в том, насколько вообще законно рассмотрение вопроса об «особом состоянии» мира на основе существующей теории гравитации, поскольку неизвестно, в какой мере применимы ее уравнения при сколь угодно большой плотности материи. По этому поводу следует прежде всего сказать, что хотя физическая применимость этих уравнений в указанных условиях сможет быть выяснена лишь в будущей теории, существенно, что сама по себе теория гравитации не теряет логической связности (т. е. ее уравнения не приводят ни к каким внутренним противоречиям) ни при каких плотностях материи. Другими словами, эта теория не ограничена, как таковая, никакими следующими из нее самой условиями, которые могли бы сделать логически незаконным и противоречивым ее применение при любых плотностях; ограничения смогут возникнуть в дальнейшем синтезе физических теорий как результат факторов, «посторонних» по отношению к самой теории гравитации. Это обстоятельство делает формально законным рассмотрение вопроса об особенностях в теории гравитации. Что же касается физического истолкования получающихся при этом результатов, то оно определяется тем, что хотя уравнения смогут в действительности сказаться неприменимыми при сколь угодно больших плотностях, но, во всяком случае, нет никаких оснований сомневаться в их применимости даже для плотностей порядка ядерной плотности, т. е. колоссально больших по сравнению с современной средней плотностью материи во Вселенной. Поэтому, например, если бы уравнения гравитации приводили к результату о возникновении особенности при сжатии мира, то хотя это и не обязательно означало бы обращение плотности в бесконечность, но, во всяком случае означало бы сжатие до плотностей порядка ядерной. С физической точки зрения уже такое состояние мира являлось бы в достаточной мере «особым». С этой точки зрения рассмотрение вопроса об особенностях решений уравнений гравитации вполне имеет также и физический смысл.

Наконец, остановимся на чисто математическом аспекте полученных результатов. В этом аспекте может представить интерес вопрос о классификации всех возможных типов истинных особенностей космологических решений уравнений гравитации вне зависимости от степени широты этих решений. Выяснение этого вопроса путем систематического перебора всех возможностей было бы очень громоздким *). Однако производившиеся нами обширные поиски решений с особенностями дают нам основание полагать, что их типы исчерпываются теми, к которым мы естественным образом приходим путем, изложенным в § 3—4 и приложениях Б и Е. В эти типы укладываются, в частности, особенности, которые имеют все известные точные решения уравнений гравитации (см. приложение Ж).

II. ГРАВИТАЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ИЗОТРОПНОГО МИРА

§ 6. Исходная модель и уравнения малых возмущений

Фридмановское решение занимает особое положение в релятивистской космологии в силу физической ясности и естественности своих предпосылок. Есть все основания считать, что оно дает адекватное описание современного состояния мира, рассматриваемого в больших масштабах. В то же время исключительность однородного распределения материи дает априорные основания ожидать, что именно это решение может оказаться тем исключительным решением, которое должно описывать начальные стадии расширения реального мира (однородность плотности на этой стадии имела бы при этом место и в микроскопических масштабах).

В связи с этим представляет существенный интерес вопрос о поведении малых возмущений в изотропной модели, т. е. о ее гравитационной устойчивости; ниже излагается общее исследование этого вопроса **). Явления гравитационной неустойчивости могут играть роль в процессе эволюции мира — распадении материи на галактики и звезды и т. п.; этого аспекта проблемы мы, однако, здесь не будем касаться вовсе ***).

Для удобства изложения выпишем здесь некоторые известные формулы, относящиеся к изотропной модели (см., например,[1], § 104—107).

Метрика изотропного мира определяется выражением

$$-ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,dl^2, \qquad (6,1)$$

где $a(t)$ — «радиус кривизны» пространства, а dl — элемент пространственного расстояния, измеренного в единицах a. В случае пространства постоянной положительной кривизны (закрытая модель)

$$dl^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi\,(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2), \qquad (6,2а)$$

а для пространства постоянной отрицательной кривизны (открытая модель)

$$dl^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\,(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2), \qquad (6,2б)$$

*) Мы руководствуемся положением, высказанным Ландау по другому поводу: «Ввиду краткости нашей жизни мы не можем позволить себе роскошь заниматься вопросами, не обещающими новых результатов»[9].

**) Содержание этой части основано на работе Лифшица[10].

***) Ряд идей по этим вопросам был высказан недавно Зельдовичем[12].

где χ, φ, θ — «сферические» пространственные координаты. Выражение (6,2а) соответствует, математически, геометрии на поверхности гиперсферы (единичного радиуса) в четырехмерном евклидовом пространстве, а выражение (6,2б) — геометрии на поверхности четырехмерной «псевдосферы» мнимого радиуса.

Вместо времени t удобно пользоваться вспомогательной переменной η, определяемой соотношением

$$dt = a\, d\eta, \tag{6,3}$$

Тогда ds^2 запишется в виде

$$-ds^2 = a^2(\eta)\,(-d\eta^2 + dl^2). \tag{6,4}$$

Ниже мы будем подразумевать под временно́й координатой x^0 именно эту переменную η.

В случае «пылевидной» материи, давлением которой можно пренебречь ($p = 0$), зависимость $a(t)$ определяется параметрическими уравнениями

$$a = a_0(1 - \cos\eta), \qquad t = a_0(\eta - \sin\eta), \tag{6,5а}$$

$$a = a_0(\operatorname{ch}\eta - 1), \qquad t = a_0(\operatorname{sh}\eta - \eta). \tag{6,5б}$$

где a_0 — постоянная (формулы (6,5а) относятся к закрытой модели, а формулы (6,5б) — к открытой). Зависимость плотности ε от времени определяется равенством

$$\varepsilon = \frac{6a_0}{a^3}. \tag{6,6}$$

На ранних же стадиях (при малых временах t, т. е. малых η) мы имеем дело с обратным предельным случаем весьма плотной материи с ультрарелятивистским уравнением состояния $p = \varepsilon/3$. При этом

$$a = b_0 \sin\eta \approx b_0\eta, \quad t = b_0(1 - \cos\eta) \approx \frac{1}{2} b_0\eta^2, \tag{6,7а}$$

$$a = b_0 \operatorname{sh}\eta \approx b_0\eta, \quad t = b_0(\operatorname{ch}\eta - 1) \approx \frac{1}{2} b_0\eta^2 \tag{6,7б}$$

(b_0 — другая постоянная), а зависимость $\varepsilon(t)$ определяется формулой

$$\varepsilon = \frac{3b_0^2}{a^4}. \tag{6,8}$$

Отметим, что метрики закрытой и открытой моделей переходят друг в друга при замене

$$\eta \to i\eta, \quad \chi \to i\chi, \quad a \to ia. \tag{6,9}$$

Поэтому и все уравнения для одной модели могут быть получены из уравнений для другой модели посредством этой же замены.

Поскольку система отсчета, в которой имеет место изотропия модели, является сопутствующей, компоненты 4-скорости материи

$$u^\alpha = 0, \quad u^0 = \frac{1}{a}. \tag{6,10}$$

Произвольное малое возмущение изотропной модели описывается изменениями метрического тензора δg_{ik} (которое мы будем обозначать посредством h_{ik} — см. приложение И), 4-скорости материи δu^i и плотности энергии $\delta\varepsilon$. Без ограничения общности наложим на величины h_{ik} четыре дополнительных условия

$$h_{00} = 0, \qquad h_{0\alpha} = 0, \tag{6,11}$$

т. е. пользуемся по-прежнему синхронной системой отсчета. Она, однако, уже не будет (как до возмущения) сопутствующей, т. е. δu^α отличны от нуля.

В линейном приближении малые возмущения удовлетворяют уравнениям

$$\delta R_i^k - \frac{1}{2}\delta_k^i \delta R = \delta T_i^k, \tag{6,12}$$

где δR_i^k определяются полученными в приложении И формулами, а возмущение тензора энергии-импульса

$$\delta T_i^k = (p+\varepsilon)(u_i \delta u^k + u^k \delta u_i) + (\delta p + \delta\varepsilon) u_i u^k + \delta_i^k \delta p.$$

Компоненты возмущения 4-скорости δu^i связаны друг с другом соотношением

$$h_{ik} u^i u^k + g_{ik}(u^i \delta u^k + u^k \delta u^i) = 0,$$

получающимся путем варьирования тождества $g_{ik} u^i u^k = -1$. Имея в виду невозмущенные значения скорости (6,10), получим отсюда при условиях (6,11)

$$\delta u^0 = 0. \tag{6,13}$$

Поэтому компоненты δT_i^k равны

$$\delta T_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta \delta p,\ \delta T_0^\alpha = -a(p+\varepsilon)\delta u^\alpha, \quad \delta T_0^0 = -\delta\varepsilon. \tag{6,14}$$

Ввиду малости δp и $\delta\varepsilon$ можно написать $\delta p = (dp/d\varepsilon)\delta\varepsilon$, и мы получаем соотношения

$$\delta T_\alpha^\beta = -\delta_\alpha^\beta \frac{dp}{d\varepsilon} \delta T_0^0. \tag{6,15}$$

В дальнейшем исследовании мы ограничимся рассмотрением возмущений лишь в сравнительно небольших областях пространства — областях с линейными размерами, малыми по сравнению с радиусом кривизны a. Такое предположение очень упрощает все вычисления, и в то же время учет возмущений в областях сравнимых с a размеров, как оказывается, не вносит ничего принципиально нового в характер поведения возмущений.

В каждой небольшой области пространства метрика может быть принята в первом приближении евклидовой. В соответствии с этим пространственная метрика (6,2) заменится метрикой

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{6,16}$$

где x, y, z — декартовы координаты в данной области пространства, измеренные в единицах радиуса a.

Выражения для δR_i^k могут быть получены, как уже указывалось, с помощью формул (И,10) — (И,12). При этом надо иметь в виду, что дифференцирование (обозначаемое точкой) в этих формулах есть дифференцирование по t; оно связано с дифференцированием по η (которое мы обозначаем здесь штрихом) посредством $\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{a\,\partial\eta}$. В частности, имеем

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \dot{g}_{\alpha\beta} = \frac{2a'}{a^2} g_{\alpha\beta}, \quad \varkappa_\alpha^\beta = \frac{2a'}{a^2}\delta_\alpha^\beta,$$

в чем легко убедиться, заметив, что зависимость компонент $g_{\alpha\beta}$ от времени заключена в множителе a^2. При евклидовой пространственной метрике (6,16) все ковариантные дифференцирования в формулах (И,10) — (И, 12) сводятся к простым производным по координатам x^α (контравариантные же дифференцирования — еще и к делению на a^2). Наконец, трехмерный тензор P_α^β для метрики (6,16) обращается в нуль. Имея все это в виду, получим после простого вычисления следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} \delta R_\alpha^\beta &= \frac{1}{2a^2}\left(h_{\alpha,\ \gamma}^{\gamma,\ \beta} + h_{\gamma,\ \alpha}^{\beta,\ \gamma} - h_{\alpha,\ \gamma}^{\beta,\ \gamma} - h_{,\ \alpha}^{;\ \beta}\right) + \frac{1}{2a^2} h_\alpha^{\beta''} + \frac{a'}{a^3} h_\alpha^{\beta'} + \frac{a'}{2a^3} h' \delta_\alpha^\beta, \\ \delta R_0^0 &= \frac{1}{2a^2} h'' + \frac{a'}{2a^3} h', \\ \delta R_\alpha^0 &= \frac{1}{2a^2}\left(h'_{,\alpha} - h_{\alpha,\beta}^{\beta'}\right), \\ \delta R &= \frac{1}{a^2}\left(h_{\alpha,\ \beta}^{\beta,\ \alpha} - h_{,\ \alpha}^{;\ \alpha}\right) + \frac{1}{a^2} h'' + \frac{3a'}{a^3} h'. \end{aligned}\right\} \qquad (6,17)$$

Здесь как нижние, так и верхние индексы после запятой означают простые дифференцирования по соответствующим координатам в пространстве с метрикой (6,16) (для единообразия обозначений мы продолжаем писать верхние и нижние индексы, хотя при евклидовом dl^2 между ними нет разницы).

Окончательные уравнения для возмущения h_α^β метрического тензора мы получим, подставив в (6,15) компоненты δT_i^k, выраженные через δR_i^k согласно (6,12). В качестве этих уравнений удобно выбрать уравнения, получающиеся из (6,15) при $\alpha \neq \beta$ и при упрощении по индексам α, β; они гласят:

$$\left(h_{\alpha,\ \gamma}^{\gamma,\ \beta} + h_{\gamma,\ \alpha}^{\beta,\ \gamma} - h_{,\ \alpha}^{;\ \beta} - h_{\alpha,\ \gamma}^{\beta,\ \gamma}\right) + h_\alpha^{\beta''} + 2\frac{a'}{a} h_\alpha^{\beta'} = 0, \ \alpha \neq \beta, \qquad (6,18)$$

$$\frac{1}{2}\left(h_{\gamma,\ \delta}^{\delta,\ \gamma} - h_{,\ \gamma}^{;\ \gamma}\right)\left(1 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) + h'' + h'\frac{a'}{a}\left(2 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) = 0. \qquad (6,19)$$

Возмущения плотности и скорости материи могут быть определены по известным h_α^β с помощью формул

$$\left.\begin{aligned} \delta\varepsilon &= -\delta T_0^0 = -\delta R_0^0 + \frac{1}{2}\delta R, \\ a\delta u^\alpha &= -\frac{1}{p+\varepsilon}\delta T_0^\alpha = -\frac{1}{p+\varepsilon}\delta R_0^\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (6,20)$$

При малых скоростях компоненты u^α 4-скорости совпадают с компонентами трехмерной скорости. Но при нашем выборе пространственных координат x, y, z элементам длины соответствуют не сами дифференциалы dx^α, а произведения adx^α. Поэтому обычной трехмерной скорости δv^α, возникающей при возмущении, соответствуют не сами δu^α, а произведения $a\delta u^\alpha$.

Подставив в (6,20) выражения (6,17), получим для относительного изменения плотности

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon a^2}\left(h_{\alpha,\ \beta}^{\beta,\ \alpha} - h_{,\alpha}^{;\alpha} + \frac{2a'}{a} h'\right) \qquad (6,21)$$

и для возмущения скорости

$$\delta v^\alpha = \frac{1}{2(\varepsilon + p)a^2}\left(h^{,\alpha} - h_\beta^{\alpha,\ \beta}\right)'. \qquad (6,22)$$

Среди решений уравнений (6,18) — (6,19) есть такие, которые могут быть исключены простым преобразованием системы отсчета (совместимым с условиями (6,11)) и поэтому не представляют собой реального физического изменения метрики. Вид таких решений может быть заранее установлен с помощью выведенных в приложении И формул (И,13) — (И,14) (снова напомним, что в этих формулах индекс 0 относится к временно́й координате t, а не η). Учитывая, что временна́я зависимость невозмущенного метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ сводится к множителю a^2, легко получить из указанных формул следующее выражение для фиктивных возмущений метрики:

$$h_\alpha^\beta = f_{0,\alpha}^{;\beta} \int \frac{d\eta}{a} + \frac{a'}{a^2} f_0 \delta_\beta^\alpha + (f_\alpha{}^{,\beta} + f^\beta{}_{,\alpha}), \tag{6,23}$$

где f_0, f_α — произвольные (малые) функции координат.

§ 7. Разложение по плоским волнам

Поскольку метрика в рассматриваемых нами небольших областях пространства предполагается евклидовой, то произвольное возмущение в каждой такой области может быть разложено по плоским волнам *). Понимая под x, y, z декартовы координаты, измеренные в единицах радиуса a, мы можем написать пространственный периодический множитель плоских волн в виде $\exp(i\mathbf{nr})$, где $\mathbf{n}$ — безразмерный вектор, представляющий собой волновой вектор, измеренный в единицах $1/a$ (волновой вектор $\mathbf{k} = \mathbf{n}/a$). Если мы имеем возмущение в участке пространства с размерами $\sim l$, то в его разложение войдут в основном волны с длинами $\lambda = \frac{2\pi a}{n} \sim l$. Ограничиваясь возмущениями в областях с размерами $l \ll a$, мы тем самым предполагаем число n достаточно большим ($n \gg 2\pi$).

Гравитационные возмущения можно разделить на три типа. Эта классификация сводится к определению возможных типов плоских волн, в виде которых может быть представлен симметрический тензор второго ранга $h_{\alpha\beta}$. Таким образом, получим следующую классификацию:

1. С помощью скалярной функции

$$Q = e^{i\mathbf{nr}} \tag{7,1}$$

можно составить тензоры

$$Q_\alpha^\beta = \frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta Q, \quad P_\alpha^\beta = \left(\frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta - \frac{n_\alpha n^\beta}{n^2}\right) Q \tag{7,2}$$

(эти тензоры определены так, что $Q_\alpha^\alpha = 1$, $P_\alpha^\alpha = 0$). С помощью той же функции Q можно составить вектор

$$P_\alpha = \frac{n_\alpha}{n} Q. \tag{7,3}$$

Таким плоским волнам соответствуют возмущения, в которых наряду с гравитационным полем испытывают изменения также и скорость и плотность материи, т. е. мы имеем дело с возмущениями, сопровождающимися возникновением сгущений или разрежений материи. Возмущение h_α^β выражается при этом через тензоры Q_α^β и P_α^β, возмущение скорости δv^α — через вектор P^α, а возмущение плотности $\delta\varepsilon$ — через скаляр Q.

2. С помощью поперечной векторной волны

$$S_\alpha = s_\alpha e^{i\mathbf{nr}}, \quad s_\alpha n^\alpha = 0 \tag{7,4}$$

можно составить тензор

$$S_\alpha^\beta = \frac{1}{n}(n^\beta S_\alpha + n_\alpha S^\beta); \tag{7,5}$$

соответствующего же скаляра не существует, поскольку $S_\alpha n^\alpha = 0$. Этим волнам соответствуют возмущения, в которых наряду с гравитационным полем испытывает изменение также и скорость, но не плотность материи.

*) В общем же случае возмущений в областях любого размера, в том числе сравнимого с a, разложение возмущений должно вестись по четырехмерным сферическим функциям. Такое исследование дано в [10]; в несколько более подробном виде эти вычисления изложены в [11].

Возмущение h_α^β выражается при этом через тензор S_α^β, а возмущение δv^α — через вектор S^α.

3. Поперечная тензорная волна:

$$G_\alpha^\beta = \gamma_\alpha^\beta e^{i\mathbf{nr}}, \quad \gamma_{\alpha\beta} n^\beta = 0. \tag{7,6}$$

С ее помощью нельзя составить ни вектора, ни скаляра (поскольку $G_\alpha^\beta n_\beta = 0$, $G_\alpha^\beta n^\alpha n_\beta = 0$). Этим волнам соответствуют возмущения гравитационного поля, при которых материя остается неподвижной и однородно распределенной в пространстве. Другими словами, это — гравитационные волны в изотропном мире.

Ниже мы рассмотрим возмущения каждого из перечисленных трех типов. При этом мы будем для определенности писать все формулы для открытой модели. Мы уже указывали, что переход к закрытой модели осуществляется заменой (6,9). В евклидовой метрике (6,16) замене $\chi \to i\chi$ соответствует замена x, y, $z \to ix, iy$, iz. Для сохранения волнового характера введенных выше функций одновременно с этой заменой координат надо также заменить n на in. Поэтому переход к закрытой модели в рассматриваемых ниже формулах осуществляется заменой

$$a \to ia, \quad \eta \to i\eta, \quad n \to in. \tag{7,7}$$

§ 8. Возмущения с изменением плотности материи

Начинаем с возмущений первого типа и полагаем

$$h_\alpha^\beta = \lambda(\eta) P_\alpha^\beta + \mu(\eta) Q_\alpha^\beta, \quad h = \mu Q. \tag{8,1}$$

Из формул (6,21)—(6,22) получим для относительного изменения плотности

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{3\varepsilon a^2}\left[n^2(\lambda+\mu) + 3\frac{a'}{a}\mu'\right] Q \tag{8,2}$$

и для скорости —

$$\delta v^\alpha = \frac{in}{3a^2(p+\varepsilon)}(\mu' + \lambda') P^\alpha. \tag{8,3}$$

Уравнения же, определяющие функции λ и μ, получаются подстановкой (8,1) в (6,18) — (6,19):

$$\lambda'' + 2\frac{a'}{a}\lambda - \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu) = 0, \tag{8,4}$$

$$\mu'' + \mu'\frac{a'}{a}\left(2 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) + \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu)\left(1 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) = 0.$$

Эти уравнения имеют, прежде всего, следующие два частных интеграла, соответствующих тем фиктивным изменениям метрики (6,23), которые могут быть исключены преобразованием системы отсчета:

$$\lambda = -\mu = \text{const}, \tag{8,5}$$

$$\lambda = -n^2\int\frac{d\eta}{a} \equiv \lambda_0, \quad \mu = n^2\int\frac{d\eta}{a} - \frac{3a'}{a^2} \equiv \mu_0 \tag{8,6}$$

(первый из них получается из (6,23) выбором $f_0 = 0$, $f_\alpha = P_\alpha$, второй — выбором $f_0 = Q$, $f_\alpha = 0$). С помощью этих интегралов можно понизить порядок уравнений (8,4). Для этого берем сумму и разность этих уравнений и делаем в них подстановку

$$\left.\begin{aligned} \lambda+\mu &= (\lambda_0+\mu_0)\int \xi\, d\eta, \\ \lambda'-\mu' &= (\lambda_0'-\mu_0')\int \xi\, d\eta + \frac{\zeta}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{8,7}$$

После простых преобразований получим в результате следующую систему уравнений для новых неизвестных функций $\xi(\eta)$ и $\zeta(\eta)$:

$$\xi'+\xi\left[\frac{2a''}{a'}+\frac{a'}{a}\left(-2+\frac{3}{2}\frac{dp}{d\varepsilon}\right)\right]+\frac{1}{2}\frac{dp}{d\varepsilon}\zeta=0, \tag{8,8}$$

$$\zeta'+\zeta\frac{a'}{a}\left(1+\frac{3}{2}\frac{dp}{d\varepsilon}\right)+\xi\left(-2n^2+\frac{3a''}{a}-\frac{6a'^2}{a^2}+\frac{9}{2}\frac{a'^2}{a^2}\frac{dp}{d\varepsilon}\right)=0. \tag{8,9}$$

Произвол в выборе двух постоянных интегрирования при определении λ и μ по формулам (8,7) соответствует произволу в выборе системы отсчета.

Начнем с наиболее ранних стадий расширения мира, когда материя описывается уравнением состояния $p=\varepsilon/3$. Поскольку такое сжатие имеет смысл рассматривать только при очень малых временах t, достаточно ограничиться исследованием уравнений при $\eta \ll 1$. Для радиуса кривизны имеем при этом $a=b_0\,\mathrm{sh}\,\eta \approx b_0\eta$ (6,7).

Главные члены в уравнении (8,8) дают

$$\zeta=-6\xi'+\frac{9}{\eta}\xi, \tag{8,10}$$

а из (8,9) получаем

$$\zeta'+\frac{3}{2\eta}\zeta-\xi\left(2n^2+\frac{9}{2\eta^2}\right)=0.$$

Подставив в последнее уравнение ζ из (8,10), получим следующее простое уравнение для ξ:

$$\xi''+\frac{n^2}{3}\xi=0,$$

откуда

$$\xi=\mathrm{const}\cdot\exp\left(\frac{in}{\sqrt{3}}\eta\right), \tag{8,11}$$

где const — комплексная постоянная.

Дальнейшее исследование удобно производить раздельно для двух предельных случаев в зависимости от взаимного соотношения между двумя большими величинами n и $1/\eta$.

Предположим сначала, что число n не слишком велико (или η достаточно мало), так что $n\eta \ll 1$. Разлагая выражение (8,11) по степеням $n\eta$ и разделяя вещественную и мнимую части, получим ξ в виде

$$\xi=-C_1b_0\left(1-\frac{n^2}{6}\eta^2\right)-\frac{4}{3}C_2b_0\eta\left(1-\frac{n^2}{18}\eta^2\right),$$

где C_1, C_2 — вещественные постоянные; ζ вычисляется затем по формуле (8,10), а λ и μ — по формулам (8,7). Произвольные постоянные интегрирования при вычислении λ и μ следует при этом выбрать так, чтобы по возможности обратить в нуль главные члены разложения (в данном случае обращаются в нуль член $\sim\eta^{-2}$ в μ и член $\sim\mathrm{const}$ в $\lambda-\mu$). В результате простого вычисления получим

$$\lambda=\frac{3C_1}{\eta}+C_2\left(1+\frac{n^2}{9}\eta^2\right), \quad \mu=-\frac{2n^2}{3}C_1\eta+C_2\left(1-\frac{n^2}{6}\eta^2\right)$$

(здесь выписаны те члены разложений λ и μ, которые нужны для вычисления $\delta\varepsilon/\varepsilon$ и δv^{α} согласно формулам (8,2) — (8,3)). Окончательные выражения для главных членов разложения в возмущениях метрики, плотности и скорости:

$$p=\frac{\varepsilon}{3}, \quad \eta \ll 1/n \qquad \left\{ \begin{array}{l} h_{\alpha}^{\beta}=\frac{3C_1}{\eta} P_{\alpha}^{\beta}+C_2 (Q_{\alpha}^{\beta}+P_{\alpha}^{\beta}), \\ \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{n^2}{9}(C_1\eta+C_2\eta^2)\,Q, \quad \delta v^{\alpha}=-\frac{in}{12}\left(3C_1+C_2\frac{n^2}{9}\eta^3\right). \end{array}\right. \tag{8,12}$$

Постоянные C_1, C_2 должны удовлетворять определенным условиям, выражающим малость возмущения в момент t_0 его возникновения. Смешанные компоненты возмущения h_{α}^{β} метрического тензора надо сравнивать с невозмущенными значениями $g_{\alpha}^{\beta}=\delta_{\alpha}^{\beta}$; отсюда получаются условия $\lambda \ll 1$, $\mu \ll 1$. Кроме того, должно быть $\delta\varepsilon/\varepsilon \ll 1$ и $\delta v^{\alpha} \ll 1$. В применении к возмущениям (8,12) эти условия приводят к неравенствам $C_1 \ll \eta_0$, $C_2 \ll 1$, где η_0 ($\eta_0 \ll 1$) — значение η, соответствующее моменту времени t_0.

В выражениях (8,12) имеются члены, возрастающие в расширяющемся мире, как различные степени радиуса кривизны $a \approx b_0\eta$. Однако это возрастание не приводит к тому, чтобы возмущение могло стать большим, т. е. к потере устойчивости: если применить формулы (8,12) по порядку величины при $\eta \sim 1/n$, то мы увидим, что (в силу полученных выше неравенств для C_1, C_2) возмущения остаются малыми даже на верхнем пределе действия этих формул.

Отметим также, что существование решения $\lambda=\mu=C_2$, в котором возмущение метрики остается постоянным во времени, как раз соответствует той возможности обобщения фридмановского решения, которое было указано в § 4. Относительное изменение плотности энергии в этом решении пропорционально $\eta^2 \sim t$, в соответствии с выражением (4,5).

Пусть теперь число n настолько велико, что $n\eta \gg 1$. С помощью выражения (8,11) по формулам (8,10) и (8,7) найдем теперь, что главные члены в λ и μ *) имеют вид

$$\lambda=-\frac{\mu}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{inb_0\eta^2}\,\xi$$

(постоянные интегрирования в (8,7) выбраны так, чтобы в λ и μ отсутствовали члены без периодического множителя). Вычисляя также возмущения плотности и скорости, получим следующие окончательные выражения:

$$p=\frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{n} \ll \eta \ll 1 \qquad \left\{ \begin{array}{l} h_{\alpha}^{\beta}=\frac{C}{n^2\eta^2}(P_{\alpha}^{\beta}-2Q_{\alpha}^{\beta})\,e^{in\eta/\sqrt{3}}, \\ \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}=-\frac{C}{9}e^{in\eta/\sqrt{3}}\,Q, \quad \delta v^{\alpha}=\frac{C}{12\sqrt{3}}e^{in\eta/\sqrt{3}}\,P^{\alpha}, \end{array}\right. \tag{8,13}$$

где C — комплексная постоянная, удовлетворяющая условию $|C| \ll 1$. Наличие периодического множителя в этих выражениях вполне естественно. При больших n мы имеем дело с возмущением, пространственная периодичность которого определяется большим волновым вектором $k = n/a$. Такие возмущения должны распространяться, как звуковые волны, со скоростью $u=\sqrt{dp/d\varepsilon}=1/\sqrt{3}$; соответственно временна́я часть фазы определяется, как полагается в геометрической акустике, большим

*) Здесь исправлена допущенная в [10] (в формулах (4,10)) ошибка — лишние члены $\pm 2\eta$ в λ и μ.

интегралом $\int ku\, dt = n\eta/\sqrt{3}$. Амплитуда относительного изменения плотности остается, как мы видим, постоянной, амплитуды же возмущений метрики при расширении мира убывают как a^{-2}.

Далее рассмотрим более поздние стадии расширения мира, когда материя разрежена уже настолько, что можно пренебречь ее давлением ($p = 0$); вместо плотности энергии ε в этом случае более естественно говорить о совпадающей с ней плотности массы ϱ.

Уравнения (8,8) — (8,9) с $p = 0$, $a = a_0(\operatorname{ch}\eta - 1)$ полностью интегрируются в элементарных функциях; из первого определяем ξ, а затем из второго вычисляется ζ:

$$\xi = -C_1 a_0 \operatorname{th}^2\frac{\eta}{2},$$

$$\zeta = -\frac{2n^2C_1a_0}{\operatorname{ch}\eta - 1}\left(\operatorname{sh}\eta - 3\eta + 4\operatorname{th}\frac{\eta}{2}\right) - \frac{4n^2C_2a_0}{\operatorname{ch}\eta-1}.$$

Вычисление с помощью формул (8,7), (8,2), (8,3) дает затем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda + \mu &= -C_1(\varphi - 1) - A\psi,\\
\lambda - \mu &= \frac{2n^2}{3}C_1\varphi - 2n^2C_2\left(\operatorname{cth}\frac{\eta}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{cth}^3\frac{\eta}{2}\right) + \\
&\qquad + A\psi + \frac{4n^2}{3}A\operatorname{cth}\frac{\eta}{2} + B,\\
\frac{\delta\varrho}{\varrho} &= \frac{n^2}{6}(C_1\varphi + C_2\psi)Q + \frac{A}{2}\psi Q,\\
\delta v^\alpha &= \frac{in}{6}(A - C_2)\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{\eta}{2}}P^\alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (8,14)$$

Здесь введены функции

$$\varphi(\eta) = \frac{3}{\operatorname{sh}^2\frac{\eta}{2}}\left(1 - \frac{\eta}{2}\operatorname{cth}\frac{\eta}{2}\right) + 1, \quad \psi(\eta) = \frac{\operatorname{ch}\frac{\eta}{2}}{\operatorname{sh}^3\frac{\eta}{2}}; \qquad (8,15)$$

A и B — постоянные интегрирования, произвольность которых связана с произволом в выборе системы отсчета.

В конце § 2 было отмечено, что в случае «пылевидной» материи ($p = 0$) система отсчета может быть выбрана так, чтобы быть одновременно синхронной и сопутствующей. Из (8,14) видно, что можно действительно обратить δv^α в нуль надлежащим выбором постоянной A ($A = C_2$). Такой выбор системы отсчета наиболее естествен, а возмущение $\delta\varrho$ относится при этом к собственной плотности вещества. Положив также $B = 0$, получим окончательно

$$p = 0\left\{\begin{aligned}
\lambda + \mu &= -C_1(\varphi - 1) - C_2\psi,\\
\lambda - \mu &= \frac{2n^2}{3}(C_1\varphi + C_2\psi),\\
\frac{\delta\varrho}{\varrho} &= \frac{n^2}{6}(C_1\varphi + C_2\psi)Q, \quad \delta v^\alpha = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (8,16)$$

Для исследования этих выражений рассмотрим их в двух предельных случаях — малых и больших η. Малые η ($\eta \ll 1$) соответствуют той стадии расширения мира, когда радиус кривизны еще очень мал по сравнению с его современным значением, но все же материя уже настолько разрежена, что ее давлением можно пренебречь *). Значения же $\eta \gg 1$ соответствуют поздним стадиям расширения, когда метрика приближается к галилеевой.

Члены с постоянной C_2 в (8,16) дают **)

$$\left.\begin{array}{l} p=0, \\ \eta \ll 1 \end{array}\right\} \quad h_\alpha^\beta = \frac{8n^2C_2}{3\eta^3}(P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta), \quad \frac{\delta\varrho}{\varrho} = \frac{4n^2C_2}{3\eta^3}Q, \tag{8,17}$$

$$\left.\begin{array}{l} p=0, \\ \eta \gg 1 \end{array}\right\} \quad h_\alpha^\beta = \frac{4C_2}{3}e^{-\eta}(P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta), \quad \frac{\delta\varrho}{\varrho} = \frac{n^2C_2}{3}e^{-\eta}Q. \tag{8,18}$$

При $\eta \ll 1$ имеем $a \approx a_0\eta^2/2$, $t \approx a_0\eta^3/6$, а при $\eta \gg 1$: $a \approx a_0e^\eta/2$, $t \approx a_0e^\eta/2$. Поэтому мы видим, что эти возмущения затухают при расширении мира — сначала как $a^{-3/2}$, а затем как $1/a$; по времени оба эти закона соответствуют $1/t$.

В членах же с постоянной C_1 различаем (при $\eta \ll 1$) случаи $n\eta \ll 1$ и $n\eta \gg 1$. В первом случае получаем

$$\left.\begin{array}{l} p=0, \\ \eta \ll \dfrac{1}{n} \end{array}\right\} \quad h_\alpha^\beta = \frac{C_1}{2}(P_\alpha^\beta + Q_\alpha^\beta), \quad \frac{\delta\varrho}{\varrho} = \frac{n^2C_1}{60}\eta^2 Q. \tag{8,19}$$

Хотя относительное изменение плотности и растет, однако оно не становится здесь большим даже при $\eta \sim 1/n$ в силу условия $C_1 \ll 1$. В случае же $n\eta \gg 1$ находим

$$\left.\begin{array}{l} p=0, \\ \dfrac{1}{n} \ll \eta \ll 1 \end{array}\right\} \quad h_\alpha^\beta = \frac{C_1n^2}{30}(P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta), \quad \frac{\delta\varrho}{\varrho} = \frac{C_1n^2}{60}\eta^2 Q. \tag{8,20}$$

Эти возмущения обнаруживают истинную неустойчивость. При $\eta \sim 1$ относительное изменение плотности становится порядка C_1n^2, между тем как малость начального возмущения требует лишь, чтобы было $C_1n^2\eta_0^2 \ll 1$. Таким образом, хотя возрастание возмущений происходит и медленно (пропорционально a, т. е. $t^{2/3}$), но общее увеличение может быть значительным и в результате возмущение может стать сравнительно большим ***).

При $\eta \gg 1$ имеем

$$\left.\begin{array}{l} p=0, \\ \eta \gg 1 \end{array}\right\} \quad h_\alpha^\beta = C_1n^2\left(\frac{1}{3} - 2\eta e^{-\eta}\right)(P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta), \quad \frac{\delta\varrho}{\varrho} = \frac{n^2}{6}C_1 Q. \tag{8,21}$$

Мы видим, что возрастающее относительное возмущение плотности стремится к постоянному пределу. Постоянный член в возмущении метрики (в котором $\lambda = -\mu = \mathrm{const}$) может быть исключен преобразованием си-

---

*) Современное значение η можно было бы получить из современных значений средней плотности материи ϱ и постоянной Хэббла h (для открытой модели $\operatorname{ch}\dfrac{\eta}{2} = h\sqrt{\dfrac{3}{8\pi G\varrho}}$ (где G — гравитационная постоянная). Такое определение, однако, может быть сделано в настоящее время лишь весьма ориентировочно ввиду большой неопределенности значений h и в особенности ϱ. Положив $h = 0{,}25\cdot10^{-17}$ *сек*$^{-1}$ (25 *км/сек* на 10^6 световых лет) и приняв для ϱ оценку Оорта $\varrho = 3\cdot10^{-31}$ *г/см*^{3} [13], получим $\eta = 5{,}0$. Если положить $\varrho = 10^{-30}$ *г/см*^{3}, то $\eta = 6{,}1$.

**) При $\eta \ll 1$ имеем

$$\varphi \approx \frac{\eta^2}{10}, \quad \psi \approx \frac{8}{\eta^3}.$$

***) Так для расширения, при котором средняя плотность материи меняется от ядерной плотности ($\sim 10^{14}$ *г/см*^{3}) до современного значения ($\sim 10^{-30}$), $a(\eta)$ возрастает в $(10^{14}/10^{-30})^{1/3} = 5\cdot10^{14}$ раз.

стемы отсчета (не затрагивающим плотности); второй же член в h_α^β затухает пропорционально $\ln a/a$.

Наконец, рассмотрим случай уравнения состояния, промежуточного между $p = 0$ и $p = \varepsilon/3$. Именно, рассмотрим стадию расширения, на которой производная $dp/d\varepsilon$ мала, но все же не может быть положена равной нулю. Величина

$$u = \sqrt{\frac{dp}{d\varepsilon}}$$

представляет собой «скорость звука» в заполняющей мир материи (измеренную в единицах скорости света); мы предполагаем, следовательно, что эта величина мала: $u \ll 1$. Обратным влиянием конечности давления на закон расширения мира можно при этом пренебречь, т. е. в качестве функции $a(\eta)$ можно пользоваться той, которая имеет место при $p = 0$, причем мы будем считать, что еще $\eta \ll 1$, так что $a \approx a_0\eta^2/2$.

Поведение возмущений в этом случае существенно зависит от величины $nu\eta$. При $nu\eta \ll 1$ оценка членов в уравнениях (8,8)—(8,9) показывает, что все члены, содержащие u, могут быть опущены, так что мы возвращаемся к исследованному уже случаю $p = 0$.

Напротив, при $nu\eta \gg 1$ содержащие u члены становятся существенными. Уравнения (8,8)—(8,9) принимают вид

$$\xi' - \frac{2}{\eta}\xi + \frac{1}{2}u^2\zeta = 0, \quad \zeta' + \frac{2}{\eta}\zeta - 2n^2\xi = 0.$$

Исключая из них ζ, найдем с той же точностью уравнение

$$\xi'' - \frac{2u'}{u}\xi' + n^2u^2\xi = 0,$$

откуда

$$\zeta = \text{const}\,\sqrt{u}\,\Phi, \quad \Phi = \exp\left(in\int u\,d\eta\right); \tag{8,22}$$

ниже положим $\text{const} = 3a_0C/in$. Далее с помощью первой из формул (8,7) находим

$$\lambda + \mu = \frac{36C}{n^2\eta^3\sqrt{u}}\Phi.$$

Согласно второй формуле

$$\lambda' - \mu' \approx -\frac{2n^2}{a}\int \xi\,d\eta + \frac{\zeta}{a} = -\frac{2n^2}{a}\int \xi\,d\eta - \frac{2}{au^2}\xi' + \frac{4\xi}{au^2\eta}.$$

Подставив сюда (8,22) и проинтегрировав в первом члене дважды по частям, а затем проинтегрировав все выражение по $d\xi$ (что сводится к делению на inu), получим

$$\lambda - \mu = \frac{12C}{n^2\eta^2u^{5/2}}\left(\frac{u'}{u} - \frac{2}{\eta}\right)\Phi.$$

Наконец, вычислив также $\delta\varrho/\varrho$ и δv^α согласно (8,2)—(8,3), получим следующие окончательные выражения, в которых мы сохраняем лишь главные члены:

$$\left.\begin{aligned} nu\eta &\gg 1,\\ u &\ll 1,\\ \eta &\ll 1 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &h_\alpha^\beta = \frac{6C}{n^2\eta^2u^{5/2}}\left(\frac{u'}{u} - \frac{2}{\eta}\right)\Phi\,(P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta),\\ &\frac{\delta\varrho}{\varrho} = \frac{C}{\eta\sqrt{u}}\Phi Q, \quad \delta v^\alpha = -\frac{C\sqrt{u}}{\eta}\Phi P^\alpha. \end{aligned} \tag{8,23}$$

Постоянная C должна удовлетворять неравенству $\dfrac{|C|}{\eta_0\sqrt{u_0}} \ll 1$.

Выражения (8,23) соответствуют звуковым волнам, распространяющимся со скоростью u, причем мы находимся в области применимости «геометрической акустики» (фаза $\int nu\, d\eta$ велика). Скорость u при расширении мира убывает и этим тормозит убывание амплитуды волны. Тем не менее амплитуда относительного изменения плотности, вообще говоря, не возрастает. Если оценить зависимость u от времени, рассматривая материю как адиабатически расширяющийся одноатомный идеальный газ, то $p \sim \varrho^{5/3}$ и $u \sim \varrho^{1/3}$; поскольку $\varrho \sim a^{-3} \sim \eta^{-6}$, то $u \sim \eta^{-2}$. При этом $\eta\sqrt{u} = \text{const}$, так что амплитуда $\delta\varrho/\varrho$ остается постоянной. При более медленных законах убывания u амплитуда $\delta\varrho/\varrho$ затухает со временем.

Все изложенные результаты, которые мы формулировали для открытой модели, непосредственно переносятся на закрытую модель путем преобразования (7,7) $\eta \to i\eta$, $n \to in$. Это преобразование вообще не меняет всех заключений о характере изменения возмущений со временем на тех стадиях расширения мира, когда еще $\eta \ll 1$. При $\eta \sim 1$, когда в закрытой модели расширение замедляется, заменяясь в конце концов сжатием, формулы, естественно, меняются (случай же $\eta \gg 1$ вообще не существует). Они получаются из (8,15) — (8,16) путем указанного преобразования и некоторой перегруппировки членов (с переобозначением постоянных):

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda + \mu = C_1(\varphi + 1) + C_2\psi, \\
&\lambda - \mu = \frac{2n^2}{3}(C_1\varphi + C_2\psi), \\
&\frac{\delta\varrho}{\varrho} = \frac{n^2}{6}(C_1\varphi + C_2\psi), \quad \delta v^\alpha = 0, \\
&\varphi = \frac{3}{\sin^2\frac{\eta}{2}}\left(1 - \frac{\eta - \pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\eta}{2}\right) - 1, \quad \psi = \frac{\cos\frac{\eta}{2}}{\sin^3\frac{\eta}{2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{8,24}$$

Отметим, что в представленной здесь форме временной ход возмущений оказывается представленным в виде суммы двух функций, из которых одна (с постоянной C_1) четна, а другая (с постоянной C_2) нечетна относительно момента $\eta = \pi$, т. е. по отношению к замене $\eta \to 2\pi - \eta$. Момент $\eta = \pi$ соответствует максимуму радиуса $a(\eta)$ в закрытой модели, так что указанное свойство означает, что каждая из двух частей возмущений на стадии сжатия повторяет (с точностью до знака) в обратном порядке ход изменения на стадии расширения.

Суммируя полученные результаты, можно сказать, что расширение мира оказывает стабилизирующее влияние на развитие возмущений. В длинноволновых ($un\eta \ll 1$) возмущениях изменение плотности материи возрастает со временем. На ранних стадиях расширения мира (при ультрарелятивистском уравнении состояния $p = \varepsilon/3$, $u^2 = 1/3$) это возрастание не может привести к тому, чтобы возмущение стало большим. Это может, однако, произойти на более поздних стадиях расширения, когда давление материи становится пренебрежимо малым; но и здесь нарастание возмущения плотности происходит по медленному закону ($\sim t^{2/3}$). Коротковолновые же возмущения ($un\eta \gg 1$) представляют собой гидродинамические звуковые волны и амплитуда возмущения плотности в них затухает со временем.

Сжимающийся же мир, напротив, был бы существенно неустойчив, и возмущения в нем неизбежно становятся в конце концов большими. Дальнейшее поведение модели не может быть, конечно, прослежено с помощью теории возмущений. Но общие заключения, сделанные в гл. I этой статьи, означают, что нарастание возмущений должно привести в конце концов к прекращению общего сжатия мира и переходу его к расширению. Представляется разумным попытаться оценить достигаемое при этом максимальное сжатие, предположив, что оно определяется моментом, когда возмущение $\delta\varrho/\varrho$ становится порядка единицы. Пусть в замкнутой модели в некоторый момент $\eta_0 \sim 1 < \pi$ (на стадии расширения) имеется возмущение $\delta\varrho/\varrho = \Delta$. Поскольку $\delta\varrho/\varrho$ есть сумма четной и нечетной функций от $\eta - \pi$, то к моменту $\eta = 2\pi - \eta_0$ (на стадии сжатия) снова будет $\delta\varrho/\varrho \sim \Delta$. По мере дальнейшего сжатия мира $\delta\varrho/\varrho$ будет возрастать — по закону $(2\pi-\eta)^{-3}$ при малых $2\pi - \eta$; значение $\delta\varrho/\varrho \sim 1$ будет достигнуто при $\eta = \eta_1$, где $2\pi - \eta_1 \sim \eta_0\Delta^{1/3}$. Поскольку средняя плотность материи в сжимающемся мире возрастает как $a^{-3} \propto (2\pi - \eta)^{-6}$, то к моменту η_1 максимального сжатия она достигает величины

$$\varrho_1 \sim \varrho_0\Delta^{-2}, \tag{8,25}$$

где ϱ_0 — плотность в момент η_0 начального возмущения.

Во всем произведенном в этом параграфе исследовании молчаливо предполагалось, что возмущения являются адиабатическими, т. е. происходят при постоянной энтропии, и пренебрегалось всеми диссипативными процессами. Хотя роль этих процессов для самого расширения мира и совершенно ничтожна, но a priori не могла бы быть исключена возможность того, что эти малые эффекты могут привести к появлению какой-либо новой неустойчивости. Исследование этого вопроса требует рассмотрения неадиабатических возмущений, в которых испытывает изменение также и энтропия материи, причем надо принять во внимание процессы теплопроводности и вязкости (нужные для этого общие уравнения см.[8], § 126). Мы не станем приводить здесь соответствующие вычисления и укажем лишь, что они приводят к результату об отсутствии какого-либо существенного влияния диссипативных процессов на свойства устойчивости расширяющегося мира.

В заключение укажем, что Боннором [14] был предложен изящный метод, с помощью которого некоторые из изложенных выше результатов могут быть получены на основании ньютоновской теории тяготения. Этот метод применим к возмущениям в областях, линейные размеры которых достаточно малы по сравнению с радиусом кривизны мира ($n \gg 1$); его идея состоит в следующем.

Если выделить в изотропном мире (заполненном пылевидной материей) небольшую сферическую часть, то окружающая ее материя не будет оказывать на нее гравитационное воздействие, а движение материи внутри этой части можно будет рассматривать с помощью ньютоновской теории тяготения. Ясно поэтому, что закон расширения изотропной модели общей теории относительности должен совпадать с законом расширения однородной гравитирующей сферы в ньютоновской теории (это обстоятельство было впервые отмечено Милном и Мак-Кри). Отсюда, в свою очередь, следует, что поведение возмущений в малых участках изотропного мира должно совпадать с их поведением в расширяющейся ньютоновской сфере, и их можно при этом рассматривать с помощью обычных классических гидродинамических уравнений с ньютоновским тяготением в качестве объемных сил *). Нулевым приближением в решении гидродинамических уравнений является при этом радиальное движение в однородно расширяющейся сфере; накладываемое на него малое возмущение (с длиной волны, малой по сравнению с радиусом сферы) можно искать в виде плоской волны.

---

*) Этот метод можно, вероятно, распространить и на случай ультрарелятивистского уравнения состояния $\varrho = \varepsilon/3$, если учесть должным образом в гидродинамических уравнениях релятивистский гравитационный эффект давления.

При таком гидродинамическом подходе характерной величиной, определяющей поведение возмущений, естественным образом оказывается отношение длины возмущения λ к длине $u/\sqrt{\varrho G}$, составленной из плотности материи ϱ и скорости звука в ней u (и гравитационной постоянной G); эти величины понимаются при этом как функции времени, меняющиеся в соответствии с общим расширением среды. Легко видеть, что этот критерий $(u/\lambda\sqrt{\varrho G})$ совпадает с критерием $n\eta u/c$, который фигурировал в изложенных выше вычислениях *).

§ 9. Вращательные возмущения

Перейдем к рассмотрению возмущений второго из перечисленных в § 7 типов. В этих возмущениях испытывает изменение, наряду с метрикой, скорость, но не плотность материи; возникает движение материи, имеющее вращательный характер.

Положим

$$h_\alpha^\beta = \sigma(\eta)\, S_\alpha^\beta. \tag{9,1}$$

Уравнение (6,19) удовлетворяется тождественно, поскольку $h = 0$. Уравнение же (6,18) дает после подстановки (9,1) следующее простое уравнение для функции $\sigma(\eta)$:

$$\sigma'' + 2\frac{a'}{a}\sigma' = 0; \tag{9,2}$$

отметим, что оно не содержит волнового вектора n. Отсюда

$$\sigma = \mathrm{const}\int\frac{d\eta}{a^2}. \tag{9,3}$$

Постоянная часть этого решения (постоянная интегрирования) соответствует фиктивному изменению метрики, исключаемому преобразованием координат (оно получается из (6,23) выбором $f_0 = 0$, $f_\alpha = S_\alpha$). Для возмущения скорости вычисление по формуле (6,22) дает

$$\delta v^\alpha = -\frac{in\sigma'}{2(\varepsilon+p)a^2}S^\alpha. \tag{9,4}$$

На ранней стадии расширения ($\eta \ll 1$) при уравнении состояния $p = \varepsilon/3$ формулы (9,3) — (9,4) дают

$$\sigma = -\frac{C}{\eta}, \quad \delta v^\alpha = -\frac{inC}{8}S^\alpha. \tag{9,5}$$

Для «пылевидной» материи ($p = 0$) получаем

$$\sigma = C\left(\mathrm{cth}\frac{\eta}{2} - \frac{1}{3}\mathrm{cth}^3\frac{\eta}{2} - \frac{2}{3}\right), \quad \delta v^\alpha = -\frac{inC}{12(\mathrm{ch}\,\eta - 1)}S^\alpha. \tag{9,6}$$

---

*) Для этого надо воспользоваться следующими оценками (в обычных единицах): закон расширения, соответствующий пылевидной материи, $a \sim a_0\eta^2$; плотность материи $\varrho \sim a_0c^2/Ga^3$; длина волны $\lambda \sim a/n$.

Такое же соотношение между критериями имеет место и в случае ультрарелятивистского уравнения состояния ($p = \varepsilon/3$, $u = c/\sqrt{3}$). В этом случае закон расширения $a \sim b_0\eta$, а плотность энергии меняется по закону $\varepsilon \sim b_0^2c^4/Ga^4$. Отсюда легко найти, что

$$\frac{u}{\lambda\sqrt{G\varepsilon/c^2}} \sim n\eta,$$

т. е. мы снова возвращаемся к характерной величине $n\eta$, фигурировавшей выше при рассмотрении этого случая.

В двух предельных случаях:

$$\eta \ll 1: \quad \sigma = -\frac{8C}{3\eta^3}; \qquad \eta \gg 1: \quad \sigma = -4Ce^{-\eta}. \tag{9,7}$$

Таким образом, возмущения метрики во всех случаях затухают со временем. Возмущения же скорости остаются постоянными (в (9,5)) или убывают как $1/a$ (в (9,6)) *).

§ 10. Гравитационные волны

Наконец, в возмущениях третьего типа, в которых

$$h_\alpha^\beta = \nu(\eta)\, G_\alpha^\beta, \tag{10,1}$$

изменяется только метрика; материя остается неподвижной ($\delta v^\alpha = 0$) и однородно распределенной в пространстве ($\delta\varepsilon = 0$).

Для $\nu(\eta)$ получаем из (6,18) следующее уравнение:

$$\nu'' + 2\frac{a'}{a}\nu' + n^2\nu = 0. \tag{10,2}$$

Оба решения этого уравнения соответствуют реальным изменениям метрики, не могущим быть исключенным преобразованием координат (поскольку в рассматриваемом случае не существует ни скаляра, ни вектора, которые могли бы быть подставлены в (6,23) в качестве f_0 и f_α).

С должной точностью решение уравнения (10,2) есть

$$\nu = C\frac{e^{in\eta}}{a}, \tag{10,3}$$

где C — комплексная постоянная. Периодический множитель здесь соответствует гравитационным волнам, распространяющимся со скоростью света (волновой вектор $k = n/a$, так что временнáя часть фазы $\int k\,dt = n\eta$). Амплитуда гравитационных волн затухает как $1/a$. При этом плотность энергии этих волн ($\sim k^2(h_\alpha^\beta)^2$) убывает пропорционально a^{-4}, как и должно было быть.

На протяжении всех этапов изложенных исследований мы имели постоянную поддержку со стороны нашего учителя и друга Л. Д. Ландау, дискуссии с которым оказали нам неоценимую помощь. Мы хотели бы выразить здесь ему нашу глубокую благодарность.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИИ ВБЛИЗИ РЕГУЛЯРНОЙ ТОЧКИ

Рассмотрим разложение решения уравнений гравитационного поля в пустоте в синхронной системе отсчета вблизи не особой, регулярной точки по времени **).

Выбрав условно рассматриваемую точку в качестве начала отсчета времени, будем иметь метрический тензор в виде

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + tb_{\alpha\beta} + t^2c_{\alpha\beta} + \ldots, \tag{A,1}$$

где $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$ — функции пространственных координат. В том же приближении

*) Указанный закон изменения возмущения скорости непосредственно связан (как было отмечено Я. Б. Зельдовичем) с сохранением момента. Момент небольшого участка вещества, в котором произошло вращательное возмущение, по порядку величины равен $\varepsilon l^3 \cdot l \cdot v$, где l — линейные размеры участка. При расширении мира l растет пропорционально a, а ε убывает как a^{-3} (в случае $p=0$) или как a^{-4} (при $p=\varepsilon/3$); в первом случае получим $v \sim 1/a$, а во втором $v \sim \text{const}$.

**) Этот вопрос рассмотрен также в книге Петрова [15], § 40.

обратный тензор есть

$$g^{\alpha\beta}=a^{\alpha\beta}-tb^{\alpha\beta}+t^2(b^{\alpha\gamma}b^{\beta}_{\gamma}-c^{\alpha\beta}),$$

где $a^{\alpha\beta}$ — тензор, обратный $a_{\alpha\beta}$, а поднятие индексов у остальных тензоров производится с помощью $a^{\alpha\beta}$. Далее имеем

$$\varkappa_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}+2tc_{\alpha\beta},$$

$$\varkappa^{\beta}_{\alpha}=b^{\beta}_{\alpha}+t\,(2c^{\beta}_{\alpha}-b_{\alpha\gamma}\,b^{\beta\gamma}).$$

Уравнения поля (3,13)—(3,15) приводят к следующим соотношениям:

$$R^0_0=c-\frac{1}{4}\,b^{\beta}_{\alpha}\,b^{\alpha}_{\beta}=0, \tag{А,2}$$

$$R^0_{\alpha}=\frac{1}{2}(b_{;\,\alpha}-b^{\beta}_{\alpha;\beta})+t\left[c_{;\,\alpha}-\frac{3}{8}\,(b^{\gamma}_{\beta}\,b^{\beta}_{\gamma})_{;\,\alpha}-c^{\beta}_{\alpha;\,\beta})-\frac{1}{4}\,b^{\beta}_{\alpha}\,b_{;\,\beta}+\frac{1}{2}\,(b^{\gamma}_{\alpha}\,b^{\beta}_{\gamma})_{;\,\beta}\right]=0, \tag{А,3}$$

$$R^{\beta}_{\alpha}=P^{\beta}_{\alpha}+\frac{1}{4}\,b^{\beta}_{\alpha}\,b-\frac{1}{2}\,b^{\gamma}_{\alpha}\,b^{\beta}_{\gamma}+c^{\beta}_{\alpha}=0 \tag{А,4}$$

($b\equiv b^{\alpha}_{\alpha}$, $c\equiv c^{\alpha}_{\alpha}$, ...). Здесь операции ковариантного дифференцирования производятся в трехмерном пространстве с метрикой $a_{\alpha\beta}$; по этой же метрике определяется тензор $P_{\alpha\beta}$.

Из (А,4) коэффициенты $c_{\alpha\beta}$ полностью определяются по коэффициентам $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$. После этого (А,2) дает соотношение

$$P+\frac{1}{4}\,b^2-\frac{1}{4}\,b^{\beta}_{\alpha}\,b^{\alpha}_{\beta}=0. \tag{А,5}$$

Из членов нулевого порядка в (А,3) имеем

$$b^{\beta}_{\alpha;\,\beta}=b_{;\,\alpha}. \tag{А,6}$$

Члены же $\sim t$ в этом уравнении при использованиия (А,5) и (А,6) (и тождества $P^{\beta}_{\alpha;\beta}=\frac{1}{2}P_{;\alpha}$) обращаются в нуль тождественно.

Мы видим, что 12 величин $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ связаны друг с другом одним соотношением (А,5) и тремя соотношениями (А,6). Всего остается, таким образом, восемь произвольных функций трех пространственных координат в соответствии со сделанным в тексте подсчетом *).

Б. РЕШЕНИЯ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим точные решения гравитационных уравнений в пустоте, в которых (в синхронной системе отсчета) метрика зависит всего от одной переменной. Будем считать сначала, что этой переменной является время.

Для метрики, не зависящей от пространственных координат, уравнение (3,14) удовлетворяется тождественно, а из уравнения (3,15) находим, что

$$\varkappa^{\beta}_{\alpha}=\frac{2}{t}\,\lambda^{\beta}_{\alpha}, \tag{Б,1}$$

где λ^{β}_{α}— постоянные, причем

$$\lambda^{\alpha}_{\alpha}=1 \tag{Б,2}$$

(при этом $\dot{g}/g\equiv\varkappa^{\alpha}_{\alpha}=2/t, -g=\mathrm{const}\cdot t^2$). Подстановка (Б,1) в уравнение (3,13) дает еще одно соотношение

$$\lambda^{\beta}_{\alpha}\,\lambda^{\alpha}_{\beta}=\lambda^{\alpha}_{\alpha}\ , \tag{Б,3}$$

связывающее между собой постоянные λ^{β}_{α}.

Опустив индекс β в равенствах (Б,1), перепишем их в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений для $g_{\alpha\beta}$:

$$\dot{g}_{\alpha\beta}=\frac{2}{t}\,\lambda^{\gamma}_{\alpha}\,g_{\gamma\beta}. \tag{Б,4}$$

*) В силу дифференциальности соотношений (А,6) в решении могут появиться также произвольные функции от меньшего числа переменных. Мы оставляем в стороне вопрос о геометрическом происхождении этих функций.

Здесь могут представиться различные случаи в зависимости от того, какие корни имеет характеристическое уравнение матрицы коэффициентов λ_α^β (уравнение $|\lambda_\alpha^\beta-\lambda\delta_\alpha^\beta|=0$).

а) Характеристическое уравнение имеет три различных вещественных корня (p_1, p_2, p_3); в силу (Б,2) и (Б,3) они связаны соотношениями

$$p_1+p_2+p_3=p_1^2+p_2^2+p_3^2=1. \tag{Б,5}$$

Соответствующим линейным преобразованием величин $g_{1\beta}$, $g_{2\beta}$, $g_{3\beta}$ (или, что эквивалентно, координат x^1, x^2, x^3) матрица λ_α^β приводится в этом случае к диагональному виду, и мы получаем указанное уже в § 3 решение (3,1)

$$-ds^2=-dt^2+t^{2p_1}dx^2+t^{2p_2}dy^2+t^{2p_3}dz^2. \tag{Б,6}$$

б) Характеристическое уравнение имеет одно вещественное (p_3) и два комплексных ($p_{1,2}=p'\pm ip''$) корня; числа p_1, p_2, p_3 по-прежнему удовлетворяют соотношениям (Б,5), причем либо $p_3<-\frac{1}{3}$, либо $p_3>1$. После приведения матрицы λ_α^β к диагональному виду, для придания метрике вещественной формы, вводим новые координаты согласно $x^{1,2}=x\pm iy$ и находим решение в виде

$$-ds^2=-dt^2+t^{2p'}\cos\left(2p''\ln\frac{t}{\alpha}\right)(dx^2-dy^2)+t^{2p_3}dz^2+$$
$$+2t^{2p'}\sin\left(2p''\ln\frac{t}{\alpha}\right)dx\,dy \tag{Б,7}$$

(α — постоянная). Однако определитель метрического тензора $g=g_{00}\,|g_{\alpha\beta}|=t^2$ не удовлетворяет необходимому условию $g<0$, так что метрика (Б,7) не может отвечать физическому пространству-времени.

в) Два из корней характеристического уравнения совпадают ($p_2=p_3$) *); при этом пара чисел p_1, p_2 может иметь значения 1,0 или $-1/3$, $2/3$.

Как известно из общей теории линейных дифференциальных уравнений, в этом случае матрица λ_α^β может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & \lambda & p_2 \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda=0$, мы возвращаемся к решению (Б,6). Если же $\lambda\neq 0$, то решение уравнений (Б,4) (с учетом условий симметрии $g_{23}=g_{32}$) приводит к метрике

$$-ds^2=-dt^2+t^{2p_1}dx^2+2t^{2p_2}dy\,dz\pm t^{2p_2}\ln\frac{t}{\alpha}dz^2. \tag{Б,8}$$

И в этом случае определитель $g=t^2$ не удовлетворяет условию $g<0$.

Таким образом, (Б,6) является единственным решением, в котором метрика зависит только от времени. Если же одной переменной, от которой зависит метрика, является пространственная координата (x), то оказываются возможными решения всех трех типов. Переход к этому случаю совершается путем соответствующего изменения знаков в полученных решениях:

$$-ds^2=-x^{2p_1}dt^2+dx^2+x^{2p_2}dy^2+x^{2p_3}dz^2, \tag{Б,9}$$

$$-ds^2=dx^2+x^{2p'}\cos\left(2p''\ln\frac{x}{\alpha}\right)(d\xi^2-d\eta^2)+2x^{2p'}\sin\left(2p''\ln\frac{x}{\alpha}\right)d\xi\,d\eta+$$
$$+x^{2p_3}dz^2, \tag{Б,10}$$

$$-ds^2=dx^2+2x^{2p_2}d\xi\,d\eta\pm x^{2p_2}\ln\frac{x}{\alpha}d\eta^2+x^{2p_1}dz^2. \tag{Б,11}$$

Все эти метрики удовлетворяют условию $g<0$. Значение $x=0$ является особой точкой этих решений, за исключением случая (p_1, p_2, p_3)=(0, 0,1) в метрике (Б,9) (приводящейся при этом к галилеевой) и случая (p_1, p_2)=(1,0) в метрике (Б,11), в котором особенность оказывается фиктивной.

Возвращаясь снова к решению (Б,6), укажем, что оно может быть преобразовано также и к виду

$$-ds^2=2d\eta\,d\zeta+\eta^{2s_1}dx^2+\eta^{2s_2}dy^2+\lambda\eta^{2s_3}d\zeta^2, \tag{Б,12}$$

*) Совпадение всех трех корней исключается условиями (Б,2), (Б,3).

где числа s_1, s_2, s_3 связаны соотношениями

$$s_1+s_2=s_1^2+s_2^2,\quad s_3=\frac{1}{2}(1-s_1-s_2); \tag{Б,13}$$

λ есть произвольная постоянная, которая (если она отлична от нуля) может быть устранена соответствующим изменением масштаба координат. После этого преобразование метрики (Б,12) к виду (Б,6) осуществляется подстановкой

$$\eta=\frac{1}{1+p_3}t^{1+p_3},\quad \zeta=z-\frac{t^{1-p_3}}{1-p_3}, \tag{Б,14}$$

причем числа p_1, p_2, p_3 связаны с числами s_1, s_2, s_3 посредством

$$s_1=\frac{p_1}{1+p_3},\quad s_2=\frac{p_2}{1+p_3},\quad s_3=\frac{p_3}{1+p_3} \tag{Б,15}$$

(порядок следования чисел p_1, p_2, p_3 по их величине здесь нигде не предопределяется).

Если же в (Б,12) положить $\lambda=0$, то мы получим решение

$$-ds^2=2d\eta\, d\zeta+\eta^{2s_1}dx^2+\eta^{2s_2}dy^2. \tag{Б,16}$$

Эта метрика преобразуется к синхронному виду преобразованием

$$\eta=\frac{t}{z\sqrt{2}},\quad \zeta=-\frac{zt}{\sqrt{2}},$$

$$-ds^2=-dt^2+\left(\frac{t}{z}\right)^{2s_1}dx^2+\left(\frac{t}{z}\right)^{2s_2}dy^2+\left(\frac{t}{z}\right)^2dz^2, \tag{Б,17}$$

но оказывается при этом зависимой уже не только от t, но и от одной из пространственных координат.

Таким образом, форма (Б,12) оказывается более широкой, чем (Б,6); она содержит в себе в качестве частного случая метрику (Б,17), не содержащуюся в (Б,6). Более общие аспекты этого обстоятельства рассмотрены в приложении E.

В. ТРЕХМЕРНЫЙ ТЕНЗОР РИЧЧИ $P_{\alpha\beta}$

Приведем здесь общие выражения для компонент трехмерного тензора Риччи $P_{\alpha\beta}$, вычисленных по метрике вида

$$g_{\alpha\beta}=a^2l_\alpha l_\beta+b^2m_\alpha m_\beta+c^2n_\alpha n_\beta, \tag{В,1}$$

где как векторы $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, так и скаляры a, b, c могут быть функциями координат.

Мы пишем выражения для компонент вдоль направлений векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ в соответствии с определениями (3,16)—(3,18) (в которых надо писать a, b, c вместо t^{p_1}, t^{p_2}, t^{p_3}):

$$\begin{aligned}
P_{ll}=\frac{a^2}{\Delta^2}\Big\{&\frac{1}{2}(a\mathbf{l}\operatorname{rot}a\mathbf{l})^2-\frac{1}{2}(b\mathbf{m}\operatorname{rot}b\mathbf{m})^2-\frac{1}{2}(c\mathbf{n}\operatorname{rot}c\mathbf{n})^2-(c\mathbf{n}\operatorname{rot}b\mathbf{m})^2-\\
&-(b\mathbf{m}\operatorname{rot}c\mathbf{n})^2-(b\mathbf{m}\operatorname{rot}a\mathbf{l})^2-(c\mathbf{n}\operatorname{rot}a\mathbf{l})^2+\\
&+(c\mathbf{n}\operatorname{rot}c\mathbf{n})(b\mathbf{m}\operatorname{rot}b\mathbf{m})+(c\mathbf{n}\operatorname{rot}a\mathbf{l})(a\mathbf{l}\operatorname{rot}c\mathbf{n})+\\
&+(a\mathbf{l}\operatorname{rot}b\mathbf{m})(b\mathbf{m}\operatorname{rot}a\mathbf{l})\Big\}+a^2\Big\{\frac{1}{b}\left(\frac{c\mathbf{n}\operatorname{rot}a\mathbf{l}}{\Delta}\right)_{,m}-\\
&-\frac{1}{a}\left(\frac{c\mathbf{n}\operatorname{rot}b\mathbf{m}}{\Delta}\right)_{,l}+\frac{1}{a}\left(\frac{l\mathbf{m}\operatorname{rot}c\mathbf{n}}{\Delta}\right)_{,l}-\frac{1}{c}\left(\frac{b\mathbf{m}\operatorname{rot}a\mathbf{l}}{\Delta}\right)_{,n}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{lm}=\frac{ab}{\Delta^2}\Big\{&(a\mathbf{l}\operatorname{rot}a\mathbf{l})(b\mathbf{m}\operatorname{rot}a\mathbf{l})+(b\mathbf{m}\operatorname{rot}b\mathbf{m})(a\mathbf{l}\operatorname{rot}b\mathbf{m})+\\
&+(a\mathbf{l}\operatorname{rot}c\mathbf{n})(b\mathbf{m}\operatorname{rot}c\mathbf{n})-\frac{1}{2}(c\mathbf{n}\operatorname{rot}c\mathbf{n})[(a\mathbf{l}\operatorname{rot}b\mathbf{m})+\\
&+(b\mathbf{m}\operatorname{rot}a\mathbf{l})]+\frac{1}{2}(b\mathbf{m}\operatorname{rot}c\mathbf{n})(c\mathbf{n}\operatorname{rot}a\mathbf{l})+\\
&+\frac{1}{2}(a\mathbf{l}\operatorname{rot}c\mathbf{n})(c\mathbf{n}\operatorname{rot}b\mathbf{m})\Big\}+\frac{ab}{2}\Big\{\frac{1}{b}\left(\frac{b\mathbf{m}\operatorname{rot}c\mathbf{n}}{\Delta}\right)_{,m}-\\
&-\frac{1}{a}\left(\frac{a\mathbf{l}\operatorname{rot}c\mathbf{n}}{\Delta}\right)_{,l}-\frac{1}{c}\left(\frac{b\mathbf{m}\operatorname{rot}b\mathbf{m}}{\Delta}\right)_{,n}+\frac{1}{c}\left(\frac{a\mathbf{l}\operatorname{rot}a\mathbf{l}}{\Delta}\right)_{,n}\Big\}.
\end{aligned} \tag{В,2}$$

Здесь обозначено

$$\Delta = \sqrt{-g} = abc\,(\mathbf{l}\,[\mathbf{mn}]),$$

а буквы l, m, n в индексах после запятой обозначают дифференцирование в соответствующих направлениях согласно определению

$$f_{,\,l} = l^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}, \ldots \tag{В,3}$$

Отметим также, что в произведениях, которые мы пишем для симметрии в виде ($a\mathbf{l}$rot $a\mathbf{l}$) (с двумя одинаковыми векторами), скаляры a, ... могут, разумеется, быть вынесены из-под знака rot: ($a\mathbf{l}$, rot $a\mathbf{l}$)$=a^2$($\mathbf{l}$rot$\mathbf{l}$).

Остальные компоненты получаются из написанных циклической перестановкой букв $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ и a, b, c.

Г. ДАЛЬНЕЙШИЕ ЧЛЕНЫ РАЗЛОЖЕНИЯ АНИЗОТРОПНОГО РЕШЕНИЯ

Дальнейшие члены разложения по степеням t полученного в § 3 анизотропного решения можно было бы представить в виде разложения векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$. Проще, однако, искать их непосредственно как малые поправки $h_{\alpha\beta}$ в метрическом тензоре

$$g_{\alpha\beta} = g^{(0)}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \tag{Г,1}$$

где $g^{(0)}_{\alpha\beta}$ дается формулой (3,6) с постоянными (не зависимыми от времени) векторами $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$.

Поправочные члены в уравнениях гравитации вычисляются с помощью выражений (И,10)—(И,12) для изменений δR_i^k. При этом следует заметить, что величины $\varkappa^{(0)}{}_{\alpha}^{\beta}$ пропорциональны $1/t$ и $\varkappa^{(0)\gamma}_{\gamma} = 2/t$. В $\delta R_{\alpha}^{\beta}$ можно пренебречь вкладом от $\delta P_{\alpha}^{\beta}$, так как самые большие члены в нем $\sim t^{-2p_3} h_{\alpha}^{\beta}$, т. е. малы по сравнению с членами $\sim t^{-2} h_{\alpha}^{\beta}$. Опуская, в соответствии с обозначениями приложения И, индекс 0 у величин нулевого приближения, получим для поправок первого приближения следующие уравнения:

$$\frac{1}{2}\,(\ddot{h} + \varkappa_{\alpha}^{\beta}\,\dot{h}_{\beta}^{\alpha}) = T_0^0, \tag{Г,2}$$

$$\frac{1}{2}\,(\ddot{h}_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{t}\,\dot{h}_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{2}\varkappa_{\alpha}^{\beta}\,\dot{h} - \varkappa_{\alpha}^{\gamma}\,\dot{h}_{\alpha}^{\gamma} + \varkappa_{\gamma}^{\beta}\,\dot{h}_{\alpha}^{\gamma}) = -P_{\alpha}^{\beta} + T_{\alpha}^{\beta}. \tag{Г,3}$$

В правых частях этих уравнений стоят компоненты тензора энергии-импульса и тензора P_{α}^{β}, вычисленные по метрике нулевого приближения (см. также замечание в конце этого раздела).

Поскольку уравнения содержат производные от h_{α}^{β} лишь по времени (но не по координатам), можно непосредственно перейти в них к проекциям на направления $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$. Учитывая, что отличны от нуля лишь «диагональные» компоненты

$$\varkappa_l^l = \frac{2p_1}{t}, \quad \varkappa_m^m = \frac{2p_2}{t}, \quad \varkappa_n^n = \frac{2p_3}{t},$$

получим следующие уравнения:

$$\frac{1}{2}\,\ddot{h} + \frac{1}{t}\,(p_1\dot{h}_l^l + p_2\dot{h}_m^m + p_3\dot{h}_n^n) = T_0^0, \tag{Г,4}$$

$$\frac{1}{2}\left(\ddot{h}_l^l + \frac{1}{t}\,\dot{h}_l^l + \frac{p_1}{t}\,\dot{h}\right) = -P_l^l + T_l^l, \tag{Г,5}$$

$$\frac{1}{2}\left(\ddot{h}_l^m + \frac{1+2p_2-2p_1}{t}\,\dot{h}_l^m\right) = -P_l^m + T_l^m, \ldots \tag{Г,6}$$

(не выписанные уравнения получаются из написанных циклической перестановкой букв l, m, n и p_1, p_2, p_3).

В случае пустого пространства тензор энергии-импульса отсутствует, и в правой стороне уравнений (Г,5)—(Г,6) остаются только P_{α}^{β}. С помощью формул (В,2) находим, что члены наибольшего порядка в этом тензоре, остающиеся после того, как члены (3,19) обращены в нуль условием (3,20), таковы:

$$P_l^l=\frac{1}{2}\,p_{1,\,n}\,p_{3,\,n}\,t^{-2p_3}\ln^2 t,\quad P_m^m=\frac{1}{2}\,p_{2,\,n}\,p_{3,\,n}\,t^{-2p_3}\ln^2 t,$$

$$P_n^n=-\frac{1}{4}\,(p_{1,n}^2+p_{2,n}^2+p_{3,n}^2)\,t^{-2p_3}\ln^2 t,$$

$$P_l^n=\frac{1}{2}\,(p_{3,\,l}\,p_{2,\,n}+p_{1,\,n}\,p_{2,\,l}-p_{2,\,n}\,p_{2,\,l})\,t^{-2p_3}\ln^2 t,$$

$$P_m^n=\frac{1}{2}\,(p_{2,\,n}\,p_{1,\,m}+p_{3,\,m}\,p_{1,\,n}-p_{1,\,m}\,p_{1,\,n})\,t^{-2p_3}\ln^2 t.$$

Мы не станем выписывать здесь получающиеся выражения для компонент h_α^β. Укажем лишь, что они имеют следующие порядки величин:

$$h_l^l\sim h_m^m\sim h_n^n\sim h_l^n\sim h_m^n\sim t^{2\,(1-p_3)}\ln^2 t \tag{Г,7}$$

(компонента же h_{lm} оказывается величиной относительно более высокого порядка малости и в этом смысле входит уже в следующее приближение).

При наличии материи главной величиной в правых сторонах «диагональных» уравнений (Г,5) является компонента тензора энергии-импульса

$$T_n^n=\frac{4}{3}\,\varepsilon u_n u^n\sim t^{-(1+p_3)},$$

содержащая наиболее высокую степень $1/t$. По сравнению с ней можно пренебречь T_l^l и T_m^m, а также всеми P_l^l, P_m^m, P_n^n. В «недиагональных» же уравнениях (Г,6) можно опустить P_l^n, ... по сравнению с T_l^n,... В результате получим

$$\left.\begin{aligned}
&h_l^l=-\frac{p_1}{1-p_3}\,h,\quad h_m^m=-\frac{p_2}{1-p_3}\,h,\quad h_n^n=2h,\\
&h=\frac{8\varepsilon^{(0)}\,u_n^{(0)\,2}}{3\,(1-p_3)\,(2-p_3)}\,t^{1-p_3},\\
&h_l^n=\frac{8\varepsilon^{(0)}\,u_l^{(0)}u_n^{(0)}}{3\,(1-p_3)\,(1+p_3-2p_1)}\,t^{1-p_3},\quad h_m^n=\frac{8\varepsilon^{(0)}\,u_m^{(0)}\,u_n^{(0)}}{3\,(1-p_3)\,(1+p_3-2p_2)}\,t^{1-p_3}
\end{aligned}\right\} \tag{Г,8}$$

(компонента же $h_{lm}\sim t^{1+p_3}$ снова оказывается относительно более высокого порядка малости).

Уравнение (Г,4) удовлетворяется выражениями (Г,8) тождественно. Не выписанные же нами уравнения $R_\alpha^0=T_\alpha^0$ нужны были бы лишь при определении следующих членов разложения энергии и скорости.

Наконец, для завершения обоснования произведенных вычислений надо сделать еще следующее замечание. В уравнении (Г,3) опущены члены, возникающие из тензора $P_{\alpha\beta}$ за счет поправок $h_{\alpha\beta}$ к метрическому тензору; надо убедиться в том, что эти члены действительно достаточно малы. Именно, это должно быть проверено для поправочных членов, возникающих из «больших» членов в $P_{\alpha\beta}$, «нулевая» часть которых обращена в нуль условием $\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l}=0$.

Это — члены (3,19) в диагональных компонентах P_l^l, ... и члены

$$P_{lm}=2\,\frac{(\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l})\,p_{1,\,n}}{(\mathbf{l}\,[\mathbf{mn}])}\ln t\cdot t^{2\,(p_1-p_3)},$$

$$P_{ln}=-2\,\frac{(\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l})\,p_{1,\,m}}{(\mathbf{l}\,[\mathbf{mn}])}\ln t\cdot t^{2\,(p_1-p_2)}$$

в недиагональных компонентах. Написав $\mathbf{l}=\mathbf{l}^{(0)}+\boldsymbol{\lambda}$, найдем, что поправкам (Г,8) в метрическом тензоре соответствуют поправки следующих порядков в векторе $\mathbf{l}$:

$$\lambda_l\sim t^{1-p_3},\quad \lambda_m\sim\lambda_n\sim t^{1+p_3-2p_1}. \tag{Г,9}$$

Поэтому

$$\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l}\sim t^{1+p_3-2p_1} \tag{Г,10}$$

и легко проверить, что отброшенные члены действительно малы по сравнению с членами, составленными в уравнениях (Г,5), (Г,6).

Д. УСТОЙЧИВОСТЬ АНИЗОТРОПНОГО РЕШЕНИЯ

Как уже было указано в § 3, метрика

$$dl^2 = t^{2p_1}\,dx^2 + t^{2p_2}\,dy^2 + t^{2p_3}\,dz^2 \tag{Д,1}$$

(с постоянными числами $p_1 < p_2 < p_3$) является точным решением уравнений гравитации в пустоте. Рассмотрим поведение произвольных малых возмущений гравитационного поля в этом однородном, но анизотропном пространстве. Такое исследование делает более наглядным происхождение «потери» одной произвольной функции при переходе к общему анизотропному решению (3,6).

Уравнения малых возмущений получаются приравниванием нулю выражений (И,10)—(И,12) для изменений δR_i^k. Поскольку пространственная метрика(Д,1) в каждый данный момент времени является евклидовой, трехмерные ковариантные производные в этих уравнениях сводятся к обычным производным. Невозмущенный же тензор $\varkappa_\alpha^\beta$ диагонален, причем $\varkappa_1^1 = 2p_1/t$.

Ввиду однородности пространства можно разложить произвольное малое возмущение в пространственный интеграл Фурье и рассматривать отдельную компоненту разложения. Тогда все $h_\alpha^\beta \sim e^{i\mathbf{kr}}$, и мы получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta R_0^0 = \frac{1}{2}\sum_\alpha\left(\ddot h_\alpha^\alpha + \frac{1}{t}\,2p_\alpha \dot h_\alpha^\alpha\right) = 0,\\
&\delta R_\alpha = \frac{\dot h k}{2}\left\{\dot h k_\alpha + \sum_\beta\left[-\dot h_\alpha^\beta k_\beta - \frac{1}{t}k_\alpha(p_\alpha - p_\beta)\,h_\beta^\beta + \frac{2}{t}(p_\alpha - p_\beta)\,h_\alpha^\beta k_\beta\right]\right\},\\
&\delta R_\alpha^\alpha = \frac{1}{2}\left\{\ddot h_\alpha^\alpha + \frac{1}{t}\,\dot h_\alpha^\alpha + \frac{p_\alpha}{t}\,\dot h + t^{-2p_\alpha}\left[hk_\alpha^2 - 2k_\alpha\sum_\gamma h_\alpha^\gamma k_\gamma\right] + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + h_\alpha^\alpha\sum t^{-2p_\gamma}k_\gamma^2\right\} = 0,\\
&\delta R_\alpha^\beta = \frac{1}{2}\left\{\ddot h_\alpha^\beta + \frac{1}{t}\,\dot h_\alpha^\beta + \frac{2}{t}(p_\beta - p_\alpha)\,\dot h_\alpha^\beta + \right.\\
&\quad\left. + t^{-2p_\beta}\left[hk_\alpha k_\beta - \sum_\gamma(h_\alpha^\gamma k_\beta k_\gamma + h_\beta^\gamma k_\alpha k_\gamma)\right] + h_\alpha^\beta\sum_\gamma t^{-2p_\gamma}k_\gamma^2\right\} = 0, \quad \alpha \neq \beta
\end{aligned}\right\} \tag{Д,2}$$

(здесь и ниже суммирование по повторяющимся индексам не подразумевается).

Среди решений этих уравнений имеются такие изменения метрики h_α^β, которые могут быть исключены преобразованием системы отсчета. Согласно формулам (И,13)—(И,14) найдем, что общий вид таких «фиктивных» возмущений

$$\left.\begin{aligned}
&h_\alpha^\alpha = 2k_\alpha C_\alpha + 2C_0\left(\frac{k_\alpha^2}{1-2p_\alpha}\,t^{1-2p_\alpha} - \frac{2p_\alpha}{t}\right),\\
&h_{\alpha\beta} = t^{2p_\alpha}k_\beta C_\alpha + t^{2p_\beta}k_\alpha C_\beta + C_0\frac{2k_\alpha k_\beta(1-p_\alpha-p_\beta)}{(1-2p_\alpha)(1-2p_\beta)}\,t, \qquad \alpha \neq \beta,
\end{aligned}\right\} \tag{Д,3}$$

где C_α, C_0 — постоянные (здесь и ниже множитель $e^{i\mathbf{kr}}$ для краткости опускаем).

Общее решение уравнений (Д,2) может быть представлено в виде ряда по возрастающим степеням t. Первые члены этих разложений следующие:

$$\left.\begin{aligned}
&h_\alpha^\alpha = A_\alpha + B_\alpha \ln t,\\
&h_{12} = t^{2p_1}\left[C_{12} + \frac{k_3(k_2C_{13} - k_3C_{12})}{8p_1(p_2+p_3)}\,t^{2(p_1+p_2)}\right] + t^{2p_2}C_{21},\\
&h_{13} = t^{2p_1}\left[C_{13} + \frac{k_2(k_3C_{12} - k_2C_{13})}{8p_1(p_2+p_3)}\,t^{2(p_1+p_3)}\right] + t^{2p_3}C_{31},\\
&h_{23} = t^{2p_2}C_{23} + t^{2p_3}C_{32},
\end{aligned}\right\} \tag{Д,4}$$

причем постоянные A_α, B_α, $C_{\alpha\beta}$ ($C_{\alpha\beta} \neq C_{\beta\alpha}$) связаны соотношениями

$$\sum_\alpha B_\alpha = \sum p_\alpha B_\alpha = 0, \tag{Д,5}$$

$$k_\alpha \left[B_\alpha + \sum_\beta (p_\alpha - p_\beta) A_\beta\right] + 2 \sum_\beta k_\beta C_{\beta\alpha} (p_\beta - p_\alpha) = 0. \tag{Д,6}$$

В (Д,4) уже опущены члены, которые можно было бы исключить преобразованием координат, соответствующим коэффициенту C_0 в (Д,3). Все остальные опущенные члены разложения — те, которые заведомо не могут стать большими при $t \to 0$, а коэффициенты в них выражаются через фигурирующие в (Д,4) постоянные. При этом критерием малости возмущений являются условия

$$h_\alpha^\alpha \ll 1, \qquad h_{\alpha\beta} \ll \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta}}. \tag{Д,7}$$

Тремя произвольными постоянными C_α в (Д,3) распорядимся так, чтобы, по возможности, исключить наибольшие члены в (Д,4). Именно положим

$$C_{12} = C_{31} = C_{23} = 0. \tag{Д,8}$$

После этого h_{23} будет удовлетворять условию (Д,7), но в h_{12} и h_{13} остаются члены, не удовлетворяющие этому условию при $t \to 0$. Другими словами, эти возмущения относительно возрастают, т. е. решение (Д,1) неустойчиво по отношению к ним. Для устранения этой неустойчивости достаточно дополнительно положить

$$k_3 C_{12} - k_2 C_{13} = 0, \tag{Д,9}$$

после чего координатное преобразование, обращающее в нуль C_{12}, обратит в нуль также и C_{13}. Что касается логарифмических членов в диагональных компонентах h_α^α, их возрастание при $t \to 0$ есть лишь кажущаяся неустойчивость. Эти члены соответствуют в действительности просто малому изменению показателей степеней в метрике (Д,1): числа p_α заменяются на $p_\alpha + B_\alpha$, причем в силу условий (Д,5) сохраняются прежние соотношения между ними.

Произвольная постоянная в компоненте Фурье возмущения означает наличие произвольной функции (трех пространственных координат) в самом возмущении. Наличие же произвольных функций в возмущениях, не приводящих к неустойчивости основного решения, означает возможность расширения последнего. Всего в (Д,4) три независимых произвольных параметра (12 параметров $C_{\alpha\beta}$, A_α, B_α связаны 9 условиями (Д,5) — (Д,9)). Они соответствуют трем произвольным функциям в анизотропном решении (3,6).

Мы видим, что для обеспечения устойчивости метрики (Д,1) приходится наложить на произвольное возмущение одно дополнительное условие (Д,9). Это условие как раз соответствует дополнительному условию $\mathbf{l} \operatorname{rot} \mathbf{l} = 0$ (3,20), повлекшему за собой «потерю» одной произвольной функции в анизотропном решении.

Е. О ПРОИСХОЖДЕНИИ ДРУГИХ ТИПОВ ОСОБЕННОСТЕЙ

В § 2 было описано геометрическое построение, позволяющее сконструировать синхронную систему отсчета. Это построение начинается с произвольной пространственноподобной гиперповерхности, выбираемой в качестве исходной.

Если же в качестве исходной выбрать «нулевую» гиперповерхность (т. е. гиперповерхность, нормали к которой являются нулевыми векторами), то таким же построением мы получим систему отсчета, в которой метрика имеет следующий вид (см. [15], § 7)*):

$$-ds^2 = 2d\eta\, d\zeta + g_{ab}\, dx^a\, dx^b + 2g_{a3}\, dx^a\, d\zeta + g_{33}\, d\zeta^2, \tag{Е,1}$$

т. е. $g_{00} = g_{0\alpha} = 0$, $g_{03} = 1$ (индексы a, b пробегают значения 1,2, причем индексы 0, 1, 2, 3 соответствуют четырем координатам η, x, y, ζ).

Указанное в приложении Б решение (Б,12) относится как раз к такой системе отсчета. Сделанное в конце этого приложения замечание наводит на мысль о том, что при формулировке полученного в § 3 анизотропного решения в синхронной системе отсчета из него могут ускользнуть некоторые частные случаи, которые содержатся в решении, сформулированном в форме метрики вида (Е,1). Покажем кратко, каким образом строится это решение (в пустоте).

Ищем компоненты метрического тензора вблизи особой точки $\eta = 0$ в виде

$$g_{ab} = \eta^{2s_1} l_a l_b + \eta^{2s_2} m_a m_b, \quad g_{a3} = \eta^{2s_3} n_a, \quad g_{33} = \eta^{2s_3} g, \tag{Е,2}$$

*) В книге Петрова [15] эта система называется изотропной полугеодезической, в отличие от синхронной системы, называемой просто полугеодезической.

причем

$$s_1^2+s_2^2=s_1+s_2, \qquad s_3=\frac{1}{2}(1-s_1-s_2). \tag{E,3}$$

Двумерные векторы l_a, m_a, n_a, скаляр q и числа s_1, s_2, s_3 — функции координат x, y, ζ. Компоненты обратного тензора

$$\left.\begin{aligned} &g^{ab}=\eta^{-2s_1}l^al^b+\eta^{-2s_2}m^am^b, \quad g^{a0}=-g_{b3}g^{ab}, \quad g^{a3}=0,\\ &g^{00}=-g_{33}+g^{ab}g_{a3}g_{b3}, \quad g^{03}=1, \quad g^{33}=0;\end{aligned}\right\} \tag{E,4}$$

здесь l^a, m^a — компоненты двумерных векторов, связанных с l_a, m_a соотношениями $l_al^a=m_am^a=1$, $l_am^a=0$. Метрический определитель

$$-g=|g_{ab}|=\eta^{2(s_1+s_2)}(l_1m_2-l_2m_1)^2. \tag{E,5}$$

Условимся считать, что $s_2>s_1$. Относительная же величина чисел s_3 и s_1, s_2 неопределенна. Будем считать сначала, что $s_3>s_2$ (легко видеть, что при этом $1/5<s_1<$ <0, $0<s_2<{}^2/_5$, ${}^2/_5<s_3<{}^1/_2$). При оценке в этом случае различных членов в уравнениях гравитации существенно, что выражение

$$g_{a3}g_{b3}g^{ab}=\eta^{4s_3}n_an_b(\eta^{-2s_1}l^al^b+\eta^{-2s_2}m^am^b) \tag{E,6}$$

содержит более высокие степени η, чем $g_{33}\sim\eta^{2s_3}$.

Покажем, каким образом можно удовлетворить метрикой вида (E,2) уравнениям гравитации в их главных членах. Этими членами являются следующие:

$$R_0^3=-\frac{1}{2}\varkappa^a_{a,0}-\frac{1}{4}\varkappa^b_a\varkappa^a_b=0, \tag{E,7}$$

$$R_a^3=\frac{1}{2\sqrt{-g}}[\sqrt{-g}(g_{a3,0}-g_{b3}\varkappa^b_a)]_{,0}=0, \tag{E,8}$$

$$R_a^b=\frac{1}{2\sqrt{-g}}[\sqrt{-g}g_{33}\varkappa^b_a]_{,0}-\frac{1}{2\sqrt{-g}}[\lambda^b_a\sqrt{-g}]_{,0}=0, \tag{E,9}$$

$$R_3^3=\frac{1}{2\sqrt{-g}}[\sqrt{-g}g_{33,0}]_{,0}-\frac{1}{4}\varkappa^b_a\lambda^a_b=0, \tag{E,10}$$

$$R_a^0=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}[(g_{a3,0}-g_{b3}\varkappa^b_a)\sqrt{-g}]_{,3}-\frac{1}{2}(g_{33}\varkappa^b_a)_{;b}+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{-g}}[g_{33,a}\sqrt{-g}]_{,0}+\frac{1}{2}g_{33}\varkappa^b_{b;a}=0, \tag{E,11}$$

$$R_3^0=\frac{1}{2\sqrt{-g}}[(g_{33,3}\sqrt{-g})_{,0}-(g_{33,0}\sqrt{-g})_{,3}]+\frac{1}{4}g_{33}\varkappa^a_b\lambda^b_a+\frac{1}{2}g_{33}\varkappa^b_{b,3}=0. \tag{E,12}$$

Здесь индексы, 0 и, 3 обозначают простые дифференцирования соответственно по η и ζ, а индексы; a — ковариантное дифференцирование в двумерном пространстве с метрикой g_{ab}. Посредством $\varkappa_{ab}$ и λ_{ab} обозначены двумерные тензоры

$$\varkappa_{ab}=g_{ab,0}, \quad \lambda_{ab}=g_{ab,3},$$
$$\varkappa^b_a=\varkappa_{ac}g^{bc}, \quad \lambda^b_a=\lambda_{ac}g^{bc}.$$

Уравнения (E,7) и (E,8) удовлетворяются метрикой (E,2) тождественно. В уравнениях же (E,9) и (E,10) обращаются в нуль лишь первые члены. Между тем вторые члены потенциально являются главными — они содержат степень $(1/\eta)^{1+2s_2-2s_1}$, более высокую, чем степень $(1/\eta)^{2-2s_3}$, которой формально пропорциональны в первые члены. Поэтому для выполнения этих уравнений надо наложить на метрику дополнительное условие, запрещающее появление таких больших членов. Легко видеть, что таковым является условие

$$l_{a,3}m^a=0 \tag{E,13}$$

(обращающее в нуль члены $\sim\eta^{2(s_1-s_2)}$ в величинах λ^b_a). Наконец, в уравнениях (E,11)—(E,12) подстановка метрики (E,2) с условием (E,13) приводит к появлению членов порядков $\eta^{2s_3-1}\ln\eta$ и η^{2s_3-1}. Из них первые тождественно сокращаются в силу соотношений (E,3) между числами s_1, s_2, s_3. Члены же $\sim\eta^{2s_3-1}$ в этих уравнениях дают три (по числу уравнений) соотношения, связывающие между собой фигурирующие в (E,2) функции координат x, y, ζ.

Вместе с (Е,13) мы имеем, следовательно, четыре соотношения между восемью функциями (q, по две компоненты векторов l_a, m_a, n_a, одно из чисел s_1, s_2, s_3). Кроме того, метрика (Е,1)—(Е,2) допускает еще одно преобразование (содержащее одну произвольную функцию координат x, y, z), оставляющее неизменной ее форму; при этом подразумевается, что допустимое преобразование должно сохранять ситуацию, в которой особенность метрики находится при $\eta=0$, а g_{33} содержит более высокую (чем в g_{ab}) степень. Этим преобразованием можно, например, обратить в единицу коэффициент q в g_{33}. Таким образом, метрика (Е,1)—(Е,2) содержит всего три физически независимые функции координат x, y, ζ.

Исследование случаев, когда s_3 не является наибольшим из трех чисел s_1, s_2, s_3, приводится к произведенному выше. Пусть $s_1<s_3<s_2$. Метрика (Е,1) — (Е,2) в таком случае тоже допускает одно произвольное преобразование. Им нельзя теперь обратить q в единицу, но можно добиться, чтобы вектор m_a (стоящий в виде коэффициента при старшей степени η в (Е,2)) стал «перпендикулярен» вектору n^a, т. е. чтобы было $n_a m^a=0$. Тогда выражение (Е,6) по-прежнему окажется малым по сравнению с g_{33} и главные члены в уравнениях гравитации останутся теми же, что в (Е,7)—(Е,12).

Полученное решение в общем случае эквивалентно анизотропному решению (3,6), в которое оно может быть преобразовано путем перехода к синхронной системе отсчета. При этом показатели степеней p_1, p_2, p_3 связаны с показателями s_1, s_2, s_3 равенствами (Б,15), а «лишнему» условию (Е,13) соответствует дополнительное условие $\mathbf{l}\operatorname{rot}\mathbf{l}=0$ (3,20), которое должно было быть наложено на коэффициенты решения (3,6).

Но поиск решений в системе отсчета (Е,1) естественным образом приводит к решениям с особенностью также и такого типа, который не содержится в решении (3,6). Этот тип возникает в специальном случае, когда в (Е,2) коэффициент $q=0$, так что решение (вблизи особенности) имеет вид

$$-ds^2=2d\eta\, d\zeta+(l_a l_b \eta^{2s_1}+m_a m_b \eta^{2s_2})\, dx^a\, dx^b+2n_a t^{2s_3}\, dx^a\, d\zeta, \tag{Е,14}$$

причем $s_1+s_2=s_1^2+s_2^2$. В синхронной системе отсчета это решение характеризовалось бы показателями степени переменной t, равными (s_1, s_2, 1) и не содержащимися в наборе чисел (p_1, p_2, p_3); такое представление этого решения представляется, однако, менее естественным для исследования его свойств, чем представление в виде (Е,14) (ср. (Б,16) и (Б,17)).

Решение типа (Е,14) содержит, по-видимому, менее трех физически произвольных функций трех переменных x, y, ζ. Установление этого числа и выяснение ограничений, которые должны быть наложены на фигурирующие в (Е,14) величины, требует, однако, специального исследования с учетом членов следующих (после выписанных в (Е,7), (Е,12)) порядков в уравнениях гравитации и, возможно, следующих (после (Е,14)) членов разложения компонент метрического тензора.

Ж. ПРИМЕРЫ ОСОБЕННОСТЕЙ В ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ

Приведем несколько примеров из числа известных точных решений уравнений гравитации в пустоте, продемонстрировав на них особенности различных типов.

1. Метрика

$$-ds^2=-z^{\frac{12}{7}}\, dt^2+t^{-\frac{2}{3}} z^{-\frac{4}{7}} dx^2+t^{\frac{4}{3}} z^{\frac{6}{7}}\, dy^2+t^{\frac{4}{3}}\, dz^2 \tag{Ж,1}$$

получается путем очевидных преобразований из одного из найденных Гаррисоном [16] точных решений (решение I-A-1 в его обозначениях).

Преобразование к синхронной системе отсчета вблизи особой точки $t=0$ удобно произвести следующим итерационным способом. Заменой $\sqrt{-g_{00}(x^\alpha)}\,dt\to dt$ обращаем новое $-g_{00}$ в единицу, но зато появляются отличные от нуля компоненты $g_{0\alpha}$ вида $g_{0\alpha}=tf_\alpha\,(x^1, x^2, x^3)$. Они исключаются преобразованием $x^\alpha\to x^\alpha+t^{2-2p_\alpha}\varphi^\alpha\,(x^1, x^2, x^3)$ с должным образом подобранными функциями φ^α (t^{2p_α}— временно́й множитель, входящий в $g_{\alpha\alpha}$). При этом появляется малая ($\sim t^{2-2p_\alpha}$) добавка к g_{00}, которая исключается следующим преобразованием, и т. д.; с переходом к членам более высокого порядка вид преобразований, естественно, усложняется. В результате можно отодвинуть отклонение от синхронности до малых величин сколь угодно высокого порядка; компоненты $g_{\alpha\beta}$ получаются при этом в виде разложений по t *).

---

*) Точное же преобразование к синхронной системе отсчета (которое можно произвести, например, способом, указанным в [1], § 98а) связано обычно с очень громоздкими вычислениями.

Таким образом, найдем, что вблизи особой точки $t=0$ метрика (Ж,1) эквивалентна метрике, первые члены разложения которой

$$-ds^2 \approx -dt^2 + t^{-\frac{2}{3}} dx^2 + t^{\frac{4}{3}} z^{-\frac{1}{2}} (dy^2 + dz^2), \qquad (Ж,1а)$$

т. е. мы имеем особенность типа $(p_1, p_2, p_3) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Изменив в (Ж,1) комплексным преобразованием временну́ю переменную, получим метрику

$$-ds^2 = -z^{\frac{4}{3}} dt^2 + t^{-\frac{4}{7}} z^{-\frac{2}{3}} dx^2 + t^{\frac{6}{7}} z^{\frac{4}{3}} dy^2 + t^{\frac{12}{7}} dz^2. \qquad (Ж,2)$$

Вблизи $t=0$ она эквивалентна метрике

$$-ds^2 \approx -dt^2 + t^{-\frac{4}{7}} z^{-\frac{2}{7}} dx^2 + t^{\frac{6}{7}} z^{\frac{16}{21}} dy^2 + t^{\frac{12}{7}} z^{-\frac{24}{21}} dz^2, \qquad (Ж,2а)$$

т. е. мы имеем особенность типа $\left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

2. Метрика

$$-ds^2 = \xi^{\frac{4}{3}} du\, d\zeta + \xi^{-\frac{2}{3}} u^{-\frac{2}{5}} dx^2 + u^{\frac{6}{5}} d\xi^2 \qquad (Ж,3)$$

(решение III-2 Гаррисона) подстановкой $u = \eta y^{-\frac{20}{3}}$, $\xi = y^5$ (и некоторым изменением масштаба координат) преобразуется к виду

$$-ds^2 = 2d\eta\, d\zeta + \eta^{-\frac{2}{5}} y^{-\frac{2}{3}} dx^2 + \eta^{\frac{6}{5}} dy^2 - \frac{40}{3} \frac{\eta}{y} dy\, d\zeta, \qquad (Ж,3а)$$

т. е. мы имеем решение типа (Е,14) со значениями чисел $(s_1, s_2) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

3. Метрика

$$-ds^2 = -(x-t)^{1+\sqrt{2}} t^{7-5\sqrt{2}} z^2 dt^2 + (x-t)^{1+\sqrt{2}} t^{3-\sqrt{2}} z^{\sqrt{2}} dx^2 +$$
$$+ (x-t)^{-\sqrt{2}} t^{-2+\sqrt{2}} z^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} dy^2 + \frac{1}{8} (x-t)^{2+\sqrt{2}} t^{8-5\sqrt{2}} dz^2 \qquad (Ж,4)$$

(решение I-B-3 Гаррисона) имеет особые точки при $t=0$ и при $t=x$.

Вблизи точки $t \to 0$ подстановкой $t^{\frac{9-5\sqrt{2}}{2}} \to t$ приводим g_{00} к виду, зависимому (в первом приближении) только от пространственных координат, после чего поступаем, как в примере 1. Не выписывая вида метрики вблизи особенности, укажем лишь, что последняя относится к типу

$$(p_1, p_2, p_3) = \left(-\frac{2-\sqrt{2}}{9-5\sqrt{2}}, \frac{8-5\sqrt{2}}{9-5\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{2}}{9-5\sqrt{2}}\right).$$

Вблизи особенности $t=x$ приведение метрики к стандартному виду осуществляется следующей последовательностью преобразований. Заменяем $t-x \to t$, затем преобразованием вида $t^s \to t$ исключаем t из g_{00}. При этом появляется отличное от нуля g_{01}, которое исключается преобразованием вида $x \to x + \varphi(x, z, t)$ с надлежащим образом выбранной функцией φ; дальше продолжаем, как в примере 1. В результате получим метрику с особенностью типа

$$(p_1, p_2, p_3) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}, \frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}, \frac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right).$$

С помощью комплексного преобразования можно получить из (Ж,4) решение

$$-ds^2 = -\frac{1}{8} (z-y)^{2+\sqrt{2}} z^{8-5\sqrt{2}} dt^2 + (z-y)^{-\sqrt{2}} z^{-2+\sqrt{2}} t^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} dx^2 +$$
$$+ (z-y)^{1+\sqrt{2}} z^{3-\sqrt{2}} t^{\sqrt{2}} dy^2 + (z-y)^{1+\sqrt{2}} z^{7-5\sqrt{2}} t^2 dz^2. \qquad (Ж,5)$$

Для выяснения типа особенности, которую эта метрика имеет при $t=0$, будем считать, с целью упрощения вычислений, что $z \gg y$; тогда

$$-ds^2 \approx t^2 z^{10-4\sqrt{2}}\left(\frac{dz^2}{z^2}-\frac{dt^2}{8t^2}\right)+z^{-2}t^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}dx^2+z^4 t^{\sqrt{2}}dy^2.$$

Делаем сначала подстановку

$$u=zt^{-\frac{1}{2\sqrt{2}}},\quad v=zt^{\frac{1}{2\sqrt{2}}},$$

а затем $v^5=\eta$, $u^{5-4\sqrt{2}}=\zeta$ и некоторое изменение масштаба координат. Окончательно получаем

$$-ds^2=2d\eta\, d\zeta+\eta^{-\frac{2}{5}}dx^2+\eta^{\frac{4}{5}}dy^2, \tag{Ж,5а}$$

т. е. особенность типа (Е,14) с $(s_1, s_2)=\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

4. Решение

$$-ds^2=-\gamma_1^2\gamma_2\, dt^2+\gamma_1\, dx^2+(\gamma_1\sin^2 x+\gamma_2\cos^2 x)\,dy^2+$$
$$+2\gamma_2\cos x\, dy\, dz+\gamma_2\, dz^2,\quad \gamma_1=\operatorname{ch} t/4\operatorname{ch}^2\frac{t}{2},\quad \gamma_2=\frac{1}{\operatorname{ch} t} \tag{Ж,6}$$

(найденное Таубом[17]) имеет особенность при $t\to\infty$. Вблизи особенности подстановкой $e^{-\frac{t}{2}}\to t$ эта метрика приводится к виду

$$-ds^2\cong -dt^2+\frac{1}{2}\,dx^2+\frac{1}{2}\sin^2 x\, dy^2+2t^2(dz^2+2\cos x\, dy\, dz), \tag{Ж,6а}$$

т. е. особенность типа $(p_1, p_2, p_3)=(0, 0, 1)$. Но этот тип особенностей фиктивен, так что никакой физической особенности метрика (Ж,6) в действительности не имеет.

И. УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Пусть метрика $\overset{(0)}{g}_{ik}$ представляет собой некоторое решение уравнений гравитации, на которое накладывается малое возмущение δg_{ik}. Вычислим величины, необходимые при составлении уравнений для этих возмущений.

Введем обозначение $\delta g_{ik}=h_{ik}$ для возмущения ковариантных компонент метрического тензора, а невозмущенную метрику будем для упрощения записи формул обозначать просто как g_{ik}, опуская индекс (0).

Тензор h_{ik} рассматриваем ниже как тензор в пространстве невозмущенной метрики g_{ik}, так что все дальнейшие операции поднимания индексов у h_{ik}, а также все операции ковариантного дифференцирования производятся с помощью метрики g_{ik}. Тогда, с точностью до малых величин первого порядка, $\delta g^{ik}=-h^{ik}$. Таким образом, мы должны произвести в уравнениях гравитации замену

$$g_{ik}\to g_{ik}+h_{ik},\quad g^{ik}\to g^{ik}-h^{ik}. \tag{И,1}$$

При этом изменение определителя $\delta g=gg^{ik}h_{ik}=gh$, где $h\equiv h_i^i$, так что

$$g\to g(1+h). \tag{И,2}$$

Поправки к символам Кристоффеля выражаются через h^{ik} посредством

$$\delta\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}\left(h^i_{k;\,l}+h^i_{l;\,k}-h_{kl}{}^{;\,i}\right), \tag{И,3}$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой. С их помощью можно получить для возмущения тензора кривизны

$$\delta R^i_{klm}=\frac{1}{2}\left(h^i_{k;\,m;\,l}+h^i_{m;\,k;\,l}-h_{km}{}^{;\,i}{}_{;\,l}-h^i_{k;\,l;\,m}-h^i_{l;\,k;\,m}+h_{kl}{}^{;\,i}{}_{;m}\right), \tag{И,4}$$

откуда для поправок к тензору Риччи получается

$$\delta R_{ik}=\delta R^l_{ilk}=\frac{1}{2}\left(h^l_{i;\,k;\,l}+h^l_{k;\,i;\,l}-h_{ik;}{}^{l}{}_{l}-h_{;\,i;\,k}\right). \tag{И,5}$$

Из соотношения

$$R^k_i+\delta R^k_i=(R_{il}+\delta R_{il})\,(g^{kl}+\delta g^{kl})$$

находим для изменения смешанных компонент R_i^k:

$$\delta R_i^k = g^{kl}\delta R_{il} - h^{kl} R_{il}. \tag{И,6}$$

Если невозмущенная метрика задана в синхронной системе отсчета и возмущение не нарушает синхронности (чего можно всегда добиться надлежащим малым преобразованием координат), то

$$h_{00}=0, \quad h_{0\alpha}=0. \tag{И,7}$$

Изменения δR_i^k удобно в таком случае вычислять, производя варьирование величин в выражениях (2,3)—(2,5), воспользовавшись при этом формулами (И,5)—(И,6) для определения изменения δP_α^β. Очевидно, что изменение трехмерного тензора Риччи P_α^β определяется формулами того же вида, что и для четырехмерного тензора R_i^k, причем все тензорные операции производятся в трехмерном пространстве с невозмущенной метрикой $g_{\alpha\beta}$:

$$\delta P_\alpha^\beta = \frac{1}{2}\left(h_\alpha^{\gamma\ ;\beta}{}_{;\gamma} + h_{\gamma\ ;\alpha}^{\beta\ \ ;\gamma} - h_{\alpha;\gamma}^{\beta;\gamma} - h_{;\alpha}^{;\beta}\right) - h_\gamma^\beta P_\alpha^\gamma. \tag{И,8}$$

Для изменения тензора $\varkappa_{\alpha\beta}$ имеем

$$\delta\varkappa_{\alpha\beta} = \dot h_{\alpha\beta}, \quad \delta\varkappa_\alpha^\beta = \dot h_\alpha^\beta - \varkappa_\alpha^\gamma h_\gamma^\beta + \varkappa_\gamma^\beta h_\alpha^\gamma, \tag{И,9}$$

где точка означает дифференцирование по t (эта операция, разумеется, не коммутативна с операциями поднимания или опускания индексов).

Окончательные формулы для изменений δR_i^k имеют следующий вид:

$$\delta R_0^0 = \frac{1}{2}\left(\ddot h + \varkappa_\alpha^\beta \dot h_\beta^\alpha\right), \tag{И,10}$$

$$\delta R_\alpha^0 = \frac{1}{2}\dot h_{;\alpha} - \frac{1}{2}\left(\dot h_\alpha^\beta + h_\alpha^\gamma\varkappa_\gamma^\beta - h_\gamma^\beta\varkappa_\alpha^\gamma\right)_{;\beta} + \frac{1}{4}\left(\varkappa_\gamma^\beta h_{\beta\cdot\alpha}^\gamma - \varkappa_\alpha^\beta h_{;\beta}\right); \tag{И,11}$$

$$\delta R_\alpha^\beta = \delta P_\alpha^\beta + \frac{1}{2}\Big\{\ddot h_\alpha^\beta + \frac{1}{2}\varkappa_\alpha^\beta \dot h - \varkappa_\alpha^\gamma h_\gamma^\beta + \varkappa_\gamma^\beta \dot h_\alpha^\gamma + \dot\varkappa_\gamma^\beta h_\alpha^\gamma - $$
$$- \dot\varkappa_\alpha^\gamma h_\gamma^\beta + \frac{1}{2}\varkappa\left(\dot h_\alpha^\beta - \varkappa_\alpha^\gamma h_\gamma^\beta + \varkappa_\gamma^\beta h_\alpha^\gamma\right)\Big\}. \tag{И,12}$$

При решении уравнений малых возмущений всегда надо иметь в виду, что среди получающихся решений есть такие, которые могут быть исключены преобразованием системы отсчета и поэтому не представляют собой реального физического изменения метрики. Дело в том, что условия (И,7) еще не определяют выбора системы отсчета однозначным образом. Действительно, при преобразовании $x^i \to x^i + \xi^i$ (где ξ^i — малые величины) тензор g_{ik} получает приращение $h_{ik} = \xi_{i,k} + \xi_{k,i}$, или, раскрывая ковариантные производные:

$$h_{00} = 2\dot\xi_0, \quad h_{0\alpha} = \frac{\partial\xi_0}{\partial x^\alpha} + \dot\xi_\alpha - \varkappa_\alpha^\beta\xi_\beta = -\frac{\partial\xi^0}{\partial x^\alpha} + \dot\xi^\beta g_{\alpha\beta}, \tag{И,13}$$

$$h_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} - \varkappa_{\alpha\beta}\xi_0.$$

Условия (И,7) дают систему четырех уравнений для допустимых величин ξ_0, ξ_α. Общее решение этих уравнений есть

$$\xi^0 = f^0(x^1, x^2, x^3), \quad \xi^\alpha = \frac{\partial f^0}{\partial x^\beta}\int g^{\alpha\beta}\,dt + f^\alpha(x^1, x^2, x^3). \tag{И,14}$$

Оно содержит, как и следовало, четыре произвольные (малые) функции пространственных координат f^0, f^α (ср. примечание на стр. 240).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. 4-е, М., Физматгиз, 1962.
2. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, ЖЭТФ **39**, 149 (1960).
3. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, ЖЭТФ **39**, 800 (1960).
4. Е. М. Лифшиц, В. В. Судаков, И. М. Халатников, ЖЭТФ **40**, 1847 (1961); Phys. Rev. Letts. **6**, 311 (1961).

5. A. K o m a r, Phys. Rev. **104**, 544 (1956).
6. A. R a y c h a u d h u r i, Phys. Rev. **98**, 1123 (1955); **106**, 172 (1957).
7. E. K a s n e r, Amer. J. Math. **43** (1921).
8. Л. Д. Л а н д а у, Е. М. Л и ф ш и ц, Механика сплошных сред, изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1954.
9. Л. Д. Л а н д а у, Фундаментальные проблемы, в сб. «Теоретическая физика 20 века» (в память В. Паули). М., ИЛ, 1962.
10. Е. М. Л и ф ш и ц, ЖЭТФ **16**, 587 (1946).
11. E. M. L i f s h i t z, I. M. K h a l a t n i k o v, Advances Phys. (1963) (в печати).
12. Я. Б. З е л ь д о в и ч, ЖЭТФ **43**, 1982 (1962).
13. J. H. O o r t, Доклад на 11 Сольвеевской конференции, Bruxelles, 1958.
14. W. B. B o n n o r, Month. Not. RAS **117**, 104 (1957).
15. А. З. П е т р о в, Пространства Эйнштейна. М., Физматгиз, 1961.
16. B. K. H a r r i s o n, Phys. Rev. **116**, 1285 (1959).
17. A. T a u b, Ann. Math. **53**, 472 (1951).