1963 г. Апрель *Т. LXXIX, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ИНДУЦИРОВАННЫЕ РАДИАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В КВАНТОВОЙ И КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИЯХ

И. И. Собельман, И. В. Тютин

1. ВВЕДЕНИЕ

Существование индуцированного излучения впервые было постулировано Эйнштейном[1] на основании термодинамических соображений еще до создания квантовой теории радиационных процессов. Однако наиболее простое и естественное объяснение этого эффекта и его основных особенностей дала квантовая теория. Согласно этой теории вероятность перехода атома из состояния a с энергией E_a в состояние b с энергией E_b, сопровождающегося излучением фотона частоты $\omega = \frac{1}{\hbar}(E_a - E_b)$, поляризованного по направлению $\mathbf{e}_\varrho$, в элемент телесного угла dO определяется выражением

$$dW_{ab} = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} |\mathbf{e}_\varrho \mathbf{d}_{ab}|^2 \left(1 + \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} I_{\varrho\mathbf{k}}\right) dO. \tag{1,1}$$

Вероятность обратного перехода $b \to a$, при котором имеет место поглощение, равна

$$dW_{ba} = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^2} |\mathbf{e}_\varrho \mathbf{d}_{ab}|^2 \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} I_{\varrho\mathbf{k}}\, dO. \tag{1,2}$$

В формулах (1,1), (1,2) $\mathbf{d}_{ab}$ — матричный элемент дипольного момента атома *); $I_{\varrho\mathbf{k}}$ — спектральная интенсивность излучения с поляризацией $\mathbf{e}_\varrho$ и волновым вектором $\mathbf{k}$. Последняя величина определена таким образом, что $I_{\varrho\mathbf{k}}\, d\omega\, dO$ есть энергия, приходящая из телесного угла dO на 1 *см*^{2} в 1 *сек*. Следовательно, $I_{\varrho\mathbf{k}}$ имеет размерность *эрг·см*$^{-2}$*·стер*$^{-1}$.

Согласно (1,1) вероятность излучения складывается из двух частей. Первая не зависит от интенсивности радиации, падающей на атом, и связана со спонтанным излучением. Если $I_{\varrho\mathbf{k}} \neq 0$, то к вероятности спонтанного излучения добавляется член, пропорциональный $I_{\varrho\mathbf{k}}$, соответствующий индуцированному излучению. Из (1,1) следует важная особенность индуцированного излучения: оно происходит с той же частотой, в том же направлении и с той же поляризацией, что и у падающей радиации.

В случае естественно-поляризованного и изотропного излучения, для которого $I_{1\mathbf{k}} = I_{2\mathbf{k}} = \frac{1}{2} I(\omega)$, в формулах (1,1)—(1,2) можно выполнить суммирование по направлениям поляризации и интегрирование

*) Здесь и ниже мы для простоты ограничимся рассмотрением электрического дипольного излучения.

по углам. После этого выражения для вероятностей спонтанного излучения $W_{ab}^{\text{сп}}$, индуцированного излучения $W_{ab}^{\text{инд}}$ и поглощения $W_{ba}^{\text{погл}}$ принимают вид

$$\left.\begin{aligned} W_{ab}^{\text{инд}} &= W_{ba}^{\text{погл}} = W_{ab}^{\text{сп}} \frac{4\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} I(\omega), \\ W_{ab}^{\text{сп}} &= \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\mathbf{d}_{ab}|^2. \end{aligned}\right\} \tag{1,3}$$

Для переходов между уровнями γ, γ', вырожденными с кратностью g, g', имеем

$$W_{\gamma\gamma'}^{\text{инд}} = \frac{g'}{g} W_{\gamma'\gamma}^{\text{погл}} = W_{\gamma\gamma'}^{\text{сп}} \frac{4\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} I(\omega), \quad W_{\gamma\gamma'}^{\text{сп}} = \frac{1}{g} \sum_{a,\,b} W_{ab}^{\text{сп}}, \tag{1,4}$$

где индексами a, b пронумерованы состояния, относящиеся к уровням γ, γ'. Если концентрация атомов на уровнях γ, γ' равна N_γ, $N_{\gamma'}$, то число переходов $\gamma \to \gamma'$ и $\gamma' \to \gamma$ в 1 *см*^{3} в 1 *сек* равно соответственно

$$N_\gamma (W_{\gamma\gamma'}^{\text{сп}} + W_{\gamma\gamma'}^{\text{инд}}) = N_\gamma \left(W_{\gamma\gamma'}^{\text{сп}} + \frac{4\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} I(\omega) W_{\gamma\gamma'}^{\text{сп}} \right), \tag{1,5}$$

$$N_{\gamma'} W_{\gamma'\gamma}^{\text{погл}} = N_{\gamma'} \frac{g}{g'} \frac{4\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} I(\omega) W_{\gamma\gamma'}^{\text{сп}}. \tag{1,6}$$

В условиях термодинамического равновесия число переходов $\gamma \to \gamma'$ равно числу переходов $\gamma' \to \gamma$ и, кроме того,

$$\frac{N_\gamma}{N_{\gamma'}} = \frac{g}{g'} e^{-\frac{E_\gamma - E_{\gamma'}}{kT}} = \frac{g}{g'} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}. \tag{1,7}$$

Приравнивая (1,5), (1,6) и используя (1,7), получим

$$I(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}, \quad U(\omega) = \frac{4\pi}{c} I(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}, \tag{1,8}$$

т. е. формулу Планка для спектральной плотности энергии излучения черного тела.

Очевидно, что формула Планка следует из равенства числа переходов $\gamma \to \gamma'$ и $\gamma' \to \gamma$ при термодинамическом равновесии только при условии существования индуцированного излучения. Именно из этих соображений Эйнштейн постулировал соотношения (1,4) между $W_{\gamma\gamma'}^{\text{сп}}$, $W_{\gamma\gamma'}^{\text{инд}}$ и $W_{\gamma'\gamma}^{\text{погл}}$. При малых частотах, $\hbar\omega \ll kT$, (1,8) переходит в классическую формулу Рэлея — Джинса, не содержащую постоянной Планка $\hbar$:

$$I(\omega) = \frac{\omega^2 kT}{4\pi^3 c^2}, \quad U(\omega) \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^3}. \tag{1,9}$$

Нетрудно видеть, что эта формула также не могла бы быть получена из (1,5)—(1,7), если бы индуцированное излучение отсутствовало. (В этом последнем случае формула Планка, как известно, переходит в формулу Вина.) Из этого обстоятельства следует, что индуцированное излучение не может быть чисто квантовым эффектом и обязано присутствовать в классической теории радиационных процессов. Однако переход от квантовых формул к квазиклассическому пределу, как будет показано ниже, осуществляется весьма своеобразно. В частности, величины

$$S^{\text{инд}} = \hbar\omega N_\gamma W_{\gamma\gamma'}^{\text{инд}}, \quad S^{\text{погл}} = \hbar\omega N_{\gamma'} W_{\gamma'\gamma}^{\text{погл}}, \tag{1,10}$$

определяющие мощность индуцированного излучения и поглощения, непосредственно классического аналога не имеют.

Надо отметить, что классическая теория радиационных процессов строится обычно на примере модели гармонического осциллятора. Эта модель наиболее проста, но вместе с тем весьма ограниченна. Ряд эффектов во взаимодействии осцилляторов с полем при переходе к этой модели исчезает. В частности, модель гармонического осциллятора совершенно не годится при рассмотрении индуцированных полем радиационных процессов. Причиной этого является специфическая для гармонического осциллятора эквидистантность энергетических уровней. Вместе с тем взаимодействие с полем излучения нелинейных осцилляторов (частота которых зависит от энергии) в рамках классической теории в общем виде почти не рассматривалось. По этой причине, а также в связи с тем интересом, который в последнее время вызывает проблема квантовых генераторов, основанных на использовании индуцированного излучения, представляется оправданным специальное рассмотрение вопроса о роли индуцированного излучения в классической теории.

В разделах 2—6 развивается классическая теория радиационных процессов и выясняются некоторые специфические особенности в поведении классических систем по сравнению с квантовыми. В разделе 7 проводится детальное сопоставление классической и квантовой теорий. В этом разделе, а также в разделе 8 показывается, что классические системы при определенных условиях могут не поглощать, а усиливать падающую радиацию.

2. РАДИАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим взаимодействие с электромагнитным полем классического осциллятора. Ниже под осциллятором в общем случае будет пониматься любая система, способная излучать и поглощать электромагнитные волны: например, гармонический осциллятор, ангармонический осциллятор, ротатор и т. д. Пусть для определенности осциллятор представляет собой частицу с зарядом e и массой m в потенциальной яме $U(\mathbf{r})$. Взаимодействие такого осциллятора с электромагнитным полем описывается уравнением движения заряда в поле и уравнениями Максвелла для поля, содержащими в правой части ток, создаваемый движением заряда. При выводе этой системы уравнений, а также для всего дальнейшего рассмотрения удобно основываться на уравнениях Гамильтона.

Функция Гамильтона для осциллятора и электромагнитного поля с учетом их взаимодействия может быть записана в виде

$$H = H_{\text{осц}} + H_{\text{п}} + H', \tag{2,1}$$

где $H_{\text{осц}}$, $H_{\text{п}}$ — функции Гамильтона для свободного осциллятора и поля, H' — взаимодействие осциллятора с полем. Ограничимся нерелятивистским приближением. Функция Гамильтона свободного осциллятора имеет вид

$$H_{\text{осц}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}). \tag{2,2}$$

Пусть поле сосредоточено в некотором конечном объеме V, а осциллятор находится в точке $\mathbf{R} = 0$ и его размеры малы по сравнению с длинами волн излучения. Тогда (см., например, [2, 4])

$$H_{\text{п}} = \sum_{\mu} H_{\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\mu}(P_{\mu}^2 + \omega_{\mu}^2 Q_{\mu}^2) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},\,\varrho=1,\,2}(P_{\mathbf{k},\varrho}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k},\varrho}^2), \tag{2,3}$$

$$H' = -2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\frac{e}{m}\sum_{\mu} Q_{\mu}\mathbf{e}_{\mu}\mathbf{p} = -2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\frac{e}{m}\sum_{\mathbf{k},\,\varrho=1,\,2} Q_{\mathbf{k},\varrho}\mathbf{e}_{\mathbf{k},\varrho}\mathbf{p}, \tag{2,4}$$

где Q_μ, P_μ — «канонически сопряженные» переменные поля; индексом μ задается волновой вектор $\mathbf{k}$ и направление поляризации $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\varrho}$; $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\varrho}$ — единичный вектор поляризации. Вектор-потенциал поля $\mathbf{A}$ и напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ выражаются через Q_μ и P_μ следующим образом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 2\sqrt{\frac{\pi}{V}} \sum_{\mathbf{k},\varrho=1,2} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\varrho}\left(cQ_{\mathbf{k},\varrho}\cos\mathbf{kR} - \frac{1}{k}P_{\mathbf{k},\varrho}\sin\mathbf{kR}\right), \quad (2,5)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -2\sqrt{\frac{\pi}{V}} \sum_{\mathbf{k},\varrho=1,2} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\varrho}(ckQ_{\mathbf{k},\varrho}\sin\mathbf{kR} + P_{\mathbf{k},\varrho}\cos\mathbf{kR}). \quad (2,6)$$

Используя уравнения Гамильтона

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m} - 2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\frac{e}{m}\sum_\mu Q_\mu \mathbf{e}_\mu, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \end{aligned}\right\} \quad (2,7)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{Q}_\mu &= \frac{\partial H}{\partial P_\mu} = P_\mu, \\ \dot{P}_\mu &= -\frac{\partial H}{\partial Q_\mu} = -\omega_\mu^2 Q_\mu + 2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\frac{e}{m}\mathbf{e}_\mu \mathbf{p}, \end{aligned}\right\} \quad (2,8)$$

получим

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{1}{m}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} = -2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\frac{e}{m}\sum_\mu \dot{Q}_\mu \mathbf{e}_\mu, \quad (2,9)$$

$$\ddot{Q}_\mu + \omega_\mu^2 Q_\mu = 2e\sqrt{\frac{\pi}{V}}\mathbf{e}_\mu \dot{\mathbf{r}}. \quad (2,10)$$

(В соответствии с используемым ниже приближением в правой части уравнения (2,10) опущен член $2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\frac{e^2}{m}\sum_\mu Q_\mu \mathbf{e}_\mu$, пропорциональный e^2.) Уравнения движения (2,9), (2,10) совместно с первым из уравнений (2,8) позволяют найти поле в объеме V. Определим также приращение в единицу времени энергии μ-составляющей поля $\dot{H}_\mu$ вследствие взаимодействия с осциллятором. Величина $\dot{H}_\mu$ выражается через скобку Пуассона:

$$\dot{H}_\mu = \frac{\partial H_\mu}{\partial Q_\mu}\frac{\partial H}{\partial P_\mu} - \frac{\partial H_\mu}{\partial P_\mu}\frac{\partial H}{\partial Q_\mu} = 2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\frac{e}{m}P_\mu \mathbf{e}_\mu \mathbf{p}. \quad (2,11)$$

Аналогичным образом для приращения в единицу времени энергии осциллятора $H_{\text{осц}}$ из-за взаимодействия с полем легко получить

$$\dot{H}_{\text{осц}} = -2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\frac{e}{m}\sum_\mu P_\mu \mathbf{e}_\mu \mathbf{p} = -\sum_\mu \dot{H}_\mu. \quad (2,12)$$

Выражения (2,11), (2,12) можно выразить через напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ или вектор-потенциал $\mathbf{A}$ в точке $\mathbf{R}=0$. Для среднего за период поля приращения энергии осциллятора $\overline{\dot{H}}_{\text{осц}}$ получим

$$\overline{\dot{H}}_{\text{осц}} = -\sum_\mu \overline{\dot{H}}_\mu = e\sum_\mu \overline{\dot{\mathbf{r}}\mathbf{E}_\mu} = -\frac{e}{c}\sum_\mu \overline{\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{A}}_\mu}. \quad (2,13)$$

Уравнения движения (2,9), (2,10) также можно записать через величины $\mathbf{A}_\mu$, входящие в (2,13):

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{1}{m}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{e}{mc}\sum_\mu \dot{\mathbf{A}}_\mu, \tag{2,14}$$

$$\ddot{\mathbf{A}}_\mu + \omega_\mu^2 \mathbf{A}_\mu = \frac{4\pi}{V} ec\,(\mathbf{e}_\mu \dot{\mathbf{r}})\,\mathbf{e}_\mu. \tag{2,15}$$

Это и есть искомая система уравнений, позволяющая вычислить $\dot{\mathbf{r}}$, $\dot{\mathbf{A}}_\mu$, а следовательно, и $\overline{\dot{H}}_{\text{осц}}$.

Пусть взаимодействие между осциллятором и полем включается в момент $t=0$. До этого момента имелись лишь свободные колебания осциллятора $\mathbf{r}^{(0)}$ и поля $\mathbf{A}_\mu^{(0)}$. Будем решать уравнения (2,14), (2,15) методом последовательных приближений, т. е. в виде рядов $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{r}^{(1)} + \ldots$, $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{A}_\mu^{(0)} + \mathbf{A}_\mu^{(1)} + \ldots$, причем ограничимся учетом членов, пропорциональных e, а в (2,13) сохраним члены, пропорциональные e^2. Это эквивалентно первому приближению теории возмущений, используемому при выводе формул (1,1), (1,2) в квантовой теории. Нетрудно показать, что формулы (1,1), (1,2) можно также получить, усредняя оператор $\frac{e}{c}\sum_\mu \dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}_\mu$ по волновым функциям системы (атом + поле излучения), вычисленным в первом приближении теории возмущений. Таким образом, мы вправе ожидать, что выбранное приближение приведет к тем же результатам, что и предельный переход к квазиклассике в квантовой теории. Итак, в соответствии с (2,13)

$$\overline{\dot{H}}_\mu = \frac{e}{c}\overline{\dot{\mathbf{r}}^{(0)}\dot{\mathbf{A}}_\mu^{(0)}} + \frac{e}{c}\overline{\dot{\mathbf{r}}^{(1)}\dot{\mathbf{A}}_\mu^{(0)}} + \frac{e}{c}\overline{\dot{\mathbf{r}}^{(0)}\dot{\mathbf{A}}_\mu^{(1)}}, \quad \overline{\dot{H}}_{\text{осц}} = -\sum_\mu \overline{\dot{H}}_\mu. \tag{2,16}$$

Свободные колебания осциллятора $\mathbf{r}^{(0)}$ в общем случае можно записать в виде ряда Фурье

$$\mathbf{r}^{(0)} = \sum_l \mathbf{b}_l \cos(\omega_l t + \delta_l), \tag{2,17}$$

где $\omega_l = \omega_0 l = \frac{2\pi}{T} l$, T — период, $l = 1, 2, \ldots$

Свободные колебания поля $\mathbf{A}_\mu^{(0)}$ имеют вид

$$\mathbf{A}_\mu^{(0)} = \mathbf{a}_\mu \cos(\omega_\mu t + \varphi_\mu), \tag{2,18}$$

$\mathbf{a}_\mu$ направлено по $\mathbf{e}_\mu$: $\mathbf{a}_\mu = a_\mu \mathbf{e}_\mu$.

Подставляя (2,17), (2,18) в правые части (2,14), (2,15), можно найти $\mathbf{r}^{(1)}$, $\mathbf{A}_\mu^{(1)}$ и затем вычислить $\overline{\dot{H}}_{\text{осц}}$.

3. СПОНТАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Начнем с рассмотрения третьего члена в (2,16), единственного не обращающегося в нуль в случае, когда свободные колебания поля отсутствуют, т. е. $\mathbf{A}_\mu = 0$.

Подставляя (2,17) в правую часть (2,15), получим

$$\mathbf{A}_\mu^{(1)} = -\frac{4\pi}{V} ec \sum_l (\mathbf{e}_\mu \mathbf{b}_l)\,\mathbf{e}_\mu \frac{\omega_l}{\omega_\mu^2 - \omega_l^2} \times$$
$$\times \left[\sin(\omega_l t + \delta_l) - \sin\delta_l \cos\omega_\mu t - \frac{\omega_l}{\omega_\mu}\cos\delta_l \sin\omega_\mu t\right]. \tag{3,1}$$

Поскольку (3,1) содержит резонансный множитель $\omega_l/(\omega_\mu^2-\omega_l^2)$, в квадратных скобках в (3,1) можно положить

$$\frac{\omega_l}{\omega_\mu}\approx 1$$

и

$$\frac{\omega_l}{\omega_\mu^2-\omega_l^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\omega_\mu-\omega_l}\,.$$

После этого получим

$$\frac{e}{c}\overline{\dot{\mathbf{r}}^{(0)}\dot{\mathbf{A}}_\mu^{(1)}}=\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau\frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}}^{(0)}\dot{\mathbf{A}}_\mu^{(1)}dt=\frac{\pi e^2}{V}\sum_l\omega_l^2\,|\,\mathbf{e}_\mu\mathbf{b}_l\,|^2\,\frac{1-\cos(\omega_\mu-\omega_l)\,\tau}{\tau\,(\omega_\mu-\omega_l)^2}\,. \qquad (3,2)$$

Просуммируем (3,2) по μ, т. е. по $\mathbf{k}$ и направлениям поляризации $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\varrho}$. Суммирование по $\mathbf{k}$ можно заменить интегрированием (при $V\to\infty$), причем

$$\sum_{\mathbf{k}}\to V\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,.$$

При $\tau\to\infty$ множитель

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{1-\cos(\omega_\mu-\omega_l)\,\tau}{\tau\,(\omega_\mu-\omega_l)^2} \qquad (3,3)$$

обладает свойством δ-функции $\delta(\omega_\mu-\omega_l)$. Поэтому

$$\frac{e}{c}\sum_\mu\overline{\dot{\mathbf{r}}^{(0)}\dot{\mathbf{A}}_\mu^{(1)}}=\sum_l\pi^2e^2\omega_l\sum_{\varrho=1,\,2}\int|\,\mathbf{e}_{\mathbf{k},\varrho}\mathbf{b}_l\,|^2\,dO_{\mathbf{k}}\int\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_l)\,\frac{\omega_{\mathbf{k}}^2d\omega_{\mathbf{k}}}{(2\pi c)^3}\,.$$

Поскольку

$$\sum_{\varrho=1,\,2}\int|\,\mathbf{e}_{\mathbf{k},\varrho}\mathbf{b}_l\,|^2\,dO_{\mathbf{k}}=\mathbf{b}_l^2\,\frac{8\pi}{3}\,,$$

окончательно получим

$$\frac{e}{c}\sum_\mu\overline{\dot{\mathbf{r}}^{(0)}\dot{\mathbf{A}}_\mu^{(1)}}=\sum_l\frac{e^2\omega_l^4}{3c^3}\,\mathbf{b}_l^2=\sum_l\frac{\omega_l^4}{3c^3}\,\mathbf{d}_l^2. \qquad (3,4)$$

Как известно, квадрат модуля матричного элемента $|\,f_{ab}\,|^2$ некоторого оператора f, соответствующего физической величине

$$f=\sum_\omega f_\omega\cos(\omega t+\alpha_\omega),$$

в классическом пределе переходит в $\frac{1}{4}f_\omega^2$, где $\omega=\frac{1}{\hbar}(E_a-E_b)$. В этом состоит так называемый принцип соответствия. Поэтому из сравнения (3,4) и (1,3) следует, что каждый член суммы (3,4) есть классический предел выражения $S^{\text{сп}}=\hbar\omega_{ab}W_{ab}^{\text{сп}}$, где $\omega_{ab}=\omega_l$.

4. ИНДУЦИРОВАННЫЕ РАДИАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Если для каких-либо значений μ $\mathbf{A}_\mu^{(0)}\neq 0$, то к спонтанному излучению добавляются радиационные процессы, индуцированные полем. Эти процессы описываются первым и вторым членами в (2,16). Надо отметить, что уже на этом этапе проявляется некоторое отличие классического описания поглощения и вынужденного излучения от квантовомеханического. В квантовой теории можно совершенно естественно разделить оба эти эффекта и рассматривать их независимо, так как из общих наглядных представлений следует, что переход вниз ($\gamma\to\gamma''$,

$E_\gamma > E_{\gamma'}$) ответствен за вынужденное излучение, а переход вверх ($\gamma \to \gamma'$, $E_\gamma < E_{\gamma'}$) — за поглощение. В классической теории ситуация другая, поскольку нет никаких оснований выделять из первых двух членов выражения (2,16) какие-либо части, ответственные только за поглощение или только за вынужденное излучение. Таким образом, поглощение и вынужденное излучение приходится рассматривать совместно. По этой причине мы будем называть процессы, описываемые первым и вторым членами выражения (2,16), индуцированными радиационными процессами. Легко видеть, что для этих процессов имеют место такие же свойства когерентности с падающим полем, как и в квантовой теории (для тех составляющих невозмущенного поля $\mu(\mathbf{k}, \mathbf{e}_{\mathbf{k},\varrho})$, для которых $\mathbf{A}_\mu^{(0)} = 0$, первые два члена в (2,16) равны нулю).

Рассмотрим сначала первый член в (2,16). Учитывая, что при $V \to \infty$

$$\sum_\mu \mathbf{a}_\mu \cos(\omega_\mu t + \varphi_\mu) \to \int \mathbf{A}(\omega) \cos(\omega t + \varphi_\omega)\, d\omega,$$

запишем этот член в виде

$$\frac{e}{c} \sum_\mu \overline{\dot{\mathbf{r}}^{(0)} \dot{\mathbf{A}}_\mu^{(0)}} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \frac{e}{c} \sum_l \mathbf{b}_l \omega_l \sin(\omega_l t + \delta_l) \int d\omega \omega \mathbf{A}(\omega) \sin(\omega t + \varphi_\omega) =$$

$$= \frac{1}{\tau} \frac{e}{c} \sum_l \omega_l \mathbf{b}_l \int d\omega \omega \mathbf{A}(\omega) \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\omega_l - \omega)\tau}{\omega_l - \omega} \cos(\delta_l - \varphi_\omega) - \right.$$

$$\left. - \frac{1 - \cos(\omega_l - \omega)\tau}{\omega_l - \omega} \sin(\delta_l - \varphi_\omega) \right]. \quad (4,1)$$

При $\tau \to \infty$ $\frac{\sin(\omega_l - \omega)\tau}{\tau(\omega_l - \omega)}$ и $\frac{1 - \cos(\omega_l - \omega)\tau}{\tau(\omega_l - \omega)}$ можно заменить соответственно на $\frac{\pi}{\tau}\delta(\omega_l - \omega)$ и $\pi(\omega_l - \omega)\delta(\omega_l - \omega)$. Выполнив после этого интегрирование по $d\omega$, получим

$$\frac{e}{c} \sum_\mu \overline{\dot{\mathbf{r}}^{(0)} \dot{\mathbf{A}}_\mu^{(0)}} = \frac{1}{\tau} \frac{\pi}{2} \frac{e}{c} \sum_l \omega_l^2 \mathbf{b}_l \mathbf{A}(\omega_l) \cos(\delta_l - \varphi_{\omega_l}). \quad (4,2)$$

Таким образом, полное приращение энергии поля за большое время τ, обусловленное первым членом в (2,16),

$$\int_0^\tau dt \frac{e}{c} \sum_\mu \dot{\mathbf{r}}^{(0)} \dot{\mathbf{A}}_\mu^{(0)} = \frac{\pi}{2} \frac{e}{c} \sum_l \omega_l^2 \mathbf{b}_l \mathbf{A}(\omega_l) \cos(\delta_l - \varphi_{\omega_l}) \quad (4,3)$$

конечно и не зависит от τ. Из (4,3) видно, что эта величина может иметь любой знак в зависимости от соотношения фаз свободных колебаний осциллятора и поля, т. е. возможна передача энергии от поля к осциллятору и, наоборот, от осциллятора к полю.

Среднее же значение передаваемой энергии, при усреднении по достаточно большому интервалу времени τ, обращается в нуль. Выражения (4,2), (4,3) обращаются также в нуль при усреднении по фазам осцилляторов δ_l. Это показывает, что роль первого члена в (2,16) в индуцированных радиационных процессах существенно зависит от физической постановки задачи. При рассмотрении взаимодействия с полем осцилляторов с фиксированной энергией E и произвольными

фазами первый член в (2,16) равен нулю и все индуцированные радиационные процессы описываются членом

$$\frac{e}{c}\sum_{\mu}\overline{\dot{\mathbf{r}}^{(1)}\dot{\mathbf{A}}_{\mu}^{(0)}}. \tag{4,4}$$

Отметим, что именно такой постановке задачи соответствуют приведенные выше квантовомеханические формулы для $S^{\text{инд}}$ и $S^{\text{погл}}$, так как $S^{\text{инд}}$ есть среднее по ансамблю осцилляторов с энергией E_γ индуцированное излучение (в единицу времени), а $S^{\text{погл}}$ — среднее по ансамблю осцилляторов с энергией E_γ поглощение.

Итак, перейдем к вычислению (4,4). Роль первого члена в (2,16) во взаимодействии осцилляторов с полем и условия, при которых он становится существенным, будут выяснены в разделе 8.

5. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Начнем с рассмотрения наиболее простого случая гармонического осциллятора.

Полагая в (2,14) $\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \omega_0^2\mathbf{r}$, получим

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e\omega_\mu}{mc}\mathbf{a}_\mu \sin(\omega_\mu t + \varphi_\mu). \tag{5,1}$$

В интересующем нас случае $\omega_\mu \approx \omega_0$ (сравните с (3,1), (3,2))

$$\mathbf{r}^{(1)} = \frac{e}{2mc}\frac{\mathbf{a}_\mu}{\omega_0-\omega_\mu}[\sin(\omega_\mu t+\varphi_\mu) - \sin(\omega_0 t+\varphi_\mu)] \tag{5,2}$$

и

$$\frac{e}{c}\overline{\dot{\mathbf{r}}^{(1)}\dot{\mathbf{A}}_{\mu}^{(0)}} = \frac{e^2\omega_0^2}{2mc^2}\frac{|\mathbf{a}_\mu|^2}{\omega_0-\omega_\mu}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sin(\omega_\mu t+\varphi_\mu)\cos(\omega_0 t+\varphi_\mu)\,dt. \tag{5,3}$$

Пусть на осциллятор падает световой пучок $I_{\mathbf{k}}\Delta\omega\Delta O = \sum_{\varrho=1,2} I_{\mathbf{k},\varrho}\Delta\omega\,\Delta O$. Просуммируем (5,2) по значениям $\mu(\mathbf{k}, \varrho)$, соответствующим этому пучку. Заменяя суммирование по $\mathbf{k}$ интегрированием и повторяя те же рассуждения, что и при выводе (3,4), получим

$$c\sum_{\varrho=1,2}\int\frac{V d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{\omega^2}{c^2}\frac{|\mathbf{a}_{\mathbf{k}\varrho}|^2}{8\pi} = \sum_{\varrho=1,2} I_{\mathbf{k},\varrho}\Delta\omega\,\Delta O, \tag{5,4}$$

$$\frac{e}{c}\sum_{\mu}\overline{\dot{\mathbf{r}}^{(1)}\dot{\mathbf{A}}_{\mu}^{(0)}} = -\frac{2\pi^2e^2}{mc}\sum_{\varrho=1,2} I_{\mathbf{k}_0,\varrho}\Delta O = -\frac{2\pi^2e^2}{mc}I_{\mathbf{k}_0}\Delta O. \tag{5,5}$$

Для изотропного излучения

$$\frac{e}{c}\sum_{\mu}\overline{\dot{\mathbf{r}}^{(1)}\dot{\mathbf{A}}_{\mu}^{(0)}} = -\frac{8\pi^3e^2}{mc}I(\omega). \tag{5,6}$$

В отличие от (4,2) знак этого выражения не зависит от соотношения фаз свободных колебаний осциллятора и поля. Из (2,13) следует, что среднее по времени приращение энергии осциллятора, описываемое выражением (5,6), положительно. Другими словами, гармонический осциллятор всегда поглощает радиацию.

Для того чтобы выяснить причину этого обстоятельства, посмотрим, что дает квантовая теория для гармонического осциллятора.

Уровни энергии гармонического осциллятора, определяемые формулой

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{5,7}$$

эквидистантны, т. е. расположены друг от друга через равные интервалы $\hbar\omega_0$. Если осциллятор на уровне n поместить в световой пучок $I_{\mathbf{k}}\Delta\omega\,\Delta O$, то возможны индуцированные радиационные переходы двух типов: переход $n \to n+1$, сопровождаемый поглощением, и переход $n \to n-1$, сопровождаемый индуцированным излучением.

Вероятности этих переходов в соответствии с (1,1), (1,2) равны

$$\left.\begin{aligned} \Delta W_{n,\,n+1} &= \frac{4\pi^2 e^2}{\hbar^2 c} |x_{n,\,n+1}|^2 I_{\mathbf{k}_0}\Delta O, \\ \Delta W_{n,\,n-1} &= \frac{4\pi^2 e^2}{\hbar^2 c} |x_{n,\,n-1}|^2 I_{\mathbf{k}_0}\Delta O, \end{aligned}\right\} \tag{5,8}$$

где

$$|x_{n,\,n+1}|^2 = \frac{(n+1)\hbar}{2m\omega_0}, \quad |x_{n,\,n-1}|^2 = \frac{n\hbar}{2m\omega_0}. \tag{5,9}$$

Очевидно, что реально наблюдаемой величиной является лишь полная энергия, передаваемая осциллятору (в 1 *сек*) в результате обоих процессов. Эта величина равна

$$\hbar\omega_0 (\Delta W_{n,\,n+1} - \Delta W_{n,\,n-1}) = \frac{2\pi^2 e^2}{mc} I_{\mathbf{k}_0}\Delta O. \tag{5,10}$$

Таким образом, квантовая теория приводит к точно такому же результату, что и классическая (ср. (5,10) и (5,6)): гармонический осциллятор всегда поглощает излучение независимо от того, на каком уровне он находится. Это связано со специфической особенностью системы энергетических уровней гармонического осциллятора — их эквидистантностью и тем, что переходам $n \to n+1$ соответствует бо́льшая вероятность, чем переходам $n \to n-1$. Естественно поэтому, что и классическая теория дает для гармонического осциллятора только поглощение.

6. АНГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Для системы с неэквидистантными уровнями переходам $\gamma \to \gamma'$ (вверх) и $\gamma \to \gamma''$ (вниз) в общем случае будут соответствовать разные частоты $\omega' = \dfrac{E_{\gamma'} - E_\gamma}{\hbar}$ и $\omega'' = \dfrac{E_\gamma - E_{\gamma''}}{\hbar}$.

Поэтому из квантовой теории следует, что для такой системы на частотах ω' будет иметь место поглощение, а на частотах ω'' — индуцированное излучение. Интересно поэтому выяснить, что дает классическая теория для ангармонического осциллятора.

Для произвольного ангармонического потенциала $U(\mathbf{r})$ явный вид $\mathbf{r}^{(1)}$ путем интегрирования (2,14) найти нельзя. Поэтому вычисления того же типа, что были проведены выше для гармонического осциллятора, возможны лишь в отдельных специальных случаях. Тем не менее, используя несколько иной путь вычисления (4,4), можно получить общую формулу, справедливую для любой нелинейной системы (см., например, [6, 8]).

Для того чтобы пояснить суть этого метода, полезно обратиться к примеру квантовой механики. Общие формулы для вероятностей радиационных переходов (1,1), (1,2) справедливы во всех случаях, когда применима теория возмущений, независимо от того, интегрируется или нет уравнение Шрёдингера для невозмущенной системы. Вся специфика невозмущенной системы заключена в матричных элементах $\mathbf{d}_{ab}$. В классической

механике также существует метод малых возмущений такого же типа, позволяющий проводить все вычисления в общем виде без конкретизации свойств невозмущенной системы, причем все результаты выражаются через характеристики невозмущенного движения. Этот метод очень широко использовался в атомной физике в годы, предшествующие созданию квантовой механики.

По-существу он является прообразом квантовомеханической теории возмущений (подробное изложение метода можно найти у Борна[6]).

Метод состоит в интегрировании путем последовательных приближений уравнений Гамильтона, записанных относительно переменных действия I и угловых переменных w. Такие канонически сопряженные переменные обладают весьма замечательным свойством: функция Гамильтона, выраженная через I и w, зависит только от I, а угловые переменные являются линейными функциями времени, причем любая однозначная функция координат и импульсов периодична по w.

Именно эти свойства переменных I и w оказываются очень удобными при решении ряда задач методом последовательных приближений.

Перейдем к выводу интересующей нас формулы (см. по этому поводу также [8]). Для простоты ограничимся рассмотрением осциллятора с одной степенью свободы.

Перейдем в функции Гамильтона невозмущенного осциллятора $H_{\text{осц}}$ от переменных $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ к новым канонически сопряженным переменным: переменной действия I и угловой переменной w. Эти переменные обладают тем свойством, что $H_{\text{осц}}$ зависит только от I:

$$\dot{I} = -\frac{\partial H_{\text{осц}}}{\partial w} = 0, \quad I = \text{const} \tag{6,1}$$

и

$$\dot{w} = \frac{\partial H_{\text{осц}}}{\partial I} = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad w = \frac{1}{2\pi}(\omega_0 t + \delta), \tag{6,2}$$

где $\frac{2\pi}{\omega_0} = T$ — период движения. Пусть в момент времени $t = 0$ на осциллятор накладывается возмущение

$$H' = -\frac{e}{mc}\mathbf{pA} = -\frac{e}{mc}\sum_{\mu} a_\mu (\mathbf{e}_\mu \mathbf{p}) \cos(\omega_\mu t + \varphi_\mu); \tag{6,3}$$

переменные I и w для возмущенной системы удовлетворяют уравнениям

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial w}, \quad \dot{w} = \frac{\partial H_{\text{осц}}}{\partial I} + \frac{\partial H'}{\partial I}, \tag{6,4}$$

причем при $t \leqslant 0$ они совпадают с (6,1), (6,2). Эти невозмущенные значения обозначим через $I^{(0)}$, $w^{(0)}$. Ограничимся при решении (6,4) первым приближением по возмущению. В этом случае можем подставить в (6,3) невозмущенное значение $\frac{\mathbf{p}}{m}$

$$\frac{\mathbf{p}^{(0)}}{m} = \dot{\mathbf{r}}^{(0)} = -\sum_{l} \omega_l \mathbf{b}_l \sin 2\pi l w^{(0)} \tag{6,5}$$

и записать H' в виде

$$H' = \frac{e}{c}\sum_{\mu, l} \omega_l (\mathbf{e}_\mu \mathbf{b}_l) a_\mu \sin 2\pi l w^{(0)} \cos(\omega_\mu t + \varphi_\mu) =$$

$$= \frac{e}{2c}\sum_{\mu, l} \omega_l (\mathbf{e}_\mu \mathbf{b}_l) a_\mu \sin[2\pi l w^{(0)} - \omega_\mu t - \varphi_\mu]. \tag{6,6}$$

В (6,6) опущены члены, соответствующие суммарным частотам, которые не дают вклада в окончательное выражение для передаваемой энергии. Подставляя (6,6) в первое из уравнений (6,4), получаем

$$\left.\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\pi e}{c}\sum_{\mu,l} l\omega_l(\mathbf{e}_\mu\mathbf{b}_l)\,a_\mu\cos[(\omega_l-\omega_\mu)t+\delta_l-\varphi_\mu],\\ \Delta I = I - I^{(0)} &= \frac{\pi e}{c}\sum_{\mu,l} l\omega_l(\mathbf{e}_\mu\mathbf{b}_l)\,a_\mu\frac{\sin(\delta_l-\varphi_\mu)-\sin[(\omega_l-\omega_\mu)t+\delta_l-\varphi_\mu]}{\omega_l-\omega_\mu}. \end{aligned}\right\} \quad (6,7)$$

Во втором уравнении (6,4)

$$\frac{\partial H_{\text{осн}}}{\partial I} = \frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{\omega_0}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\omega_0}{\partial I^{(0)}}\Delta I. \quad (6,8)$$

Подставляя (6,6), (6,8) и (6,7) в это уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \Delta w = w - w^{(0)} = \frac{e}{2c}\sum_{\mu,l}\Bigg\{&\frac{\partial\omega_l}{\partial I^{(0)}}\omega_l(\mathbf{e}_\mu\mathbf{b}_l)\,a_\mu\Bigg[\frac{\sin(\delta_l-\varphi_\mu)}{\omega_l-\omega_\mu}t-\\ &-\frac{\cos(\delta_l-\varphi_\mu)-\cos[(\omega_l-\omega_\mu)t+\delta_l-\varphi_\mu]}{(\omega_l-\omega_\mu)^2}\Bigg]+\\ &+\frac{\partial}{\partial I^{(0)}}[\omega_l(\mathbf{e}_\mu\mathbf{b}_l)]\,a_\mu\frac{\cos(\delta_l-\varphi_\mu)-\cos[(\omega_l-\omega_\mu)t+\delta_l-\varphi_\mu]}{\omega_l-\omega_\mu}\Bigg\}. \end{aligned} \quad (6,9)$$

Теперь можно вычислить $\dot{\mathbf{r}}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}^{(1)} &= \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}^{(0)}}{\partial I^{(0)}}\Delta I + \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}^{(0)}}{\partial w^{(0)}}\Delta w =\\ &= -\Delta I\sum_l\frac{\partial}{\partial I^{(0)}}(\omega_l\mathbf{b}_l)\sin(\omega_l t+\delta_l) - \Delta w 2\pi\sum_l l\omega_l\mathbf{b}_l\cos(\omega_l t+\delta_l). \end{aligned} \quad (6,10)$$

Подставляя (6,10) и (6,9) в (4,4) и выполняя усреднение по фазам δ_l, φ_μ, нетрудно получить

$$\begin{aligned} \frac{e}{c}\sum_\mu\dot{\mathbf{r}}^{(1)}\dot{\mathbf{A}}_\mu^{(0)} = &-\frac{\pi e^2}{4c^2}\sum_{\mu,l}\frac{\partial}{\partial I^{(0)}}[\omega_l(\mathbf{e}_\mu\mathbf{b}_l)]\,\omega_\mu a_\mu^2 l\omega_l(\mathbf{e}_\mu\mathbf{b}_l)\frac{\sin(\omega_l-\omega_\mu)t}{\omega_l-\omega_\mu}-\\ &-\frac{\pi e^2}{4c^2}\sum_{\mu,l}\frac{\partial\omega_l}{\partial I^{(0)}}\omega_\mu a_\mu^2 l\omega_l^2|\mathbf{e}_\mu\mathbf{b}_l|^2\left(\frac{t\cos(\omega_l-\omega_\mu)t}{\omega_l-\omega_\mu}-\frac{\sin(\omega_l-\omega_\mu)t}{(\omega_l-\omega_\mu)^2}\right). \end{aligned} \quad (6,11)$$

Используя очевидное соотношение

$$\frac{t\cos(\omega_l-\omega_\mu)t}{\omega_l-\omega_\mu}-\frac{\sin(\omega_l-\omega_\mu)t}{(\omega_l-\omega_\mu)^2} = -\frac{d}{d\omega_\mu}\frac{\sin(\omega_l-\omega_\mu)t}{\omega_l-\omega_\mu}$$

и усредняя затем (6,11) по времени, получаем

$$\begin{aligned} \frac{e}{c}\sum_\mu\overline{\dot{\mathbf{r}}^{(1)}\dot{\mathbf{A}}_\mu^{(0)}} = &-\frac{\pi e^2}{4c^2}\sum_{\mu,l}\frac{\partial}{\partial I^{(0)}}[\omega_l^2|\mathbf{e}_\mu\mathbf{b}_l|^2]\,l\omega_\mu a_\mu^2\frac{1-\cos(\omega_l-\omega_\mu)\tau}{\tau(\omega_l-\omega_\mu)^2}+\\ &+\frac{\pi e^2}{4c^2}\sum_{\mu,l}\frac{\partial\omega_l}{\partial I^{(0)}}l\omega_l^2|\mathbf{e}_\mu\mathbf{b}_l|^2\omega_\mu a_\mu^2\frac{d}{d\omega_\mu}\frac{1-\cos(\omega_l-\omega_\mu)\tau}{\tau(\omega_l-\omega_\mu)^2}. \end{aligned} \quad (6,12)$$

Заменив суммирование по $\mathbf{k}$ интегрированием и используя (3,3), (5,4), получим окончательно

$$\frac{e}{c}\sum_{\mu}\overline{\dot{\mathbf{r}}^{(1)}\dot{\mathbf{A}}_{\mu}^{(0)}} = -\frac{8\pi^4 e^2}{3c}\sum_{l} l\frac{\partial}{\partial I^{(0)}}[\omega_l \mathbf{b}_l^2 I(\omega_l)] =$$

$$= -\frac{4\pi^3 e^2}{3c}\sum_{l}\omega_l\frac{d}{dE}[\omega_l \mathbf{b}_l^2 I(\omega_l)]. \qquad (6,13)$$

В качестве производной интенсивности I по энергии надо понимать

$$\frac{dI}{dE} = \frac{dI}{d\omega}\frac{d\omega}{dE}.$$

В случае гармонического осциллятора (частота не зависит от E и $\mathbf{b}^2 = \frac{2}{m\omega^2}E$) формула (6,13) принимает вид

$$\frac{e}{c}\sum_{\mu}\overline{\dot{\mathbf{r}}^{(1)}\dot{\mathbf{A}}_{\mu}^{(0)}} = -\frac{8\pi^3 e^2}{3mc}I(\omega). \qquad (6,14)$$

Эта формула с точностью до множителя $^1/_3$ совпадает с (5,6). Множитель $^1/_3$ связан с тем, что (6,14) получено для осциллятора с одной степенью свободы, тогда как (5,6) соответствует осциллятору с тремя степенями свободы *).

Если интенсивность не зависит от частоты, $\frac{dI}{dE} = 0$, то формула (6,13) принимает вид

$$\frac{e}{c}\sum_{\mu}\overline{\dot{\mathbf{r}}^{(1)}\dot{\mathbf{A}}_{\mu}^{(0)}} = -\frac{4\pi^3 e^2}{3c}\sum_{l} I(\omega_l)\,\omega_l\frac{d}{dE}(\omega_l \mathbf{b}_l^2). \qquad (6,15)$$

Знак (6,15), очевидно, зависит от знака производной, т. е. от того, возрастают или убывают величины $\omega_l \mathbf{b}_l^2$ при увеличении энергии системы. Нетрудно показать, что для целого ряда нелинейных систем на всех частотах ω_l формула (6,15) дает поглощение, а не вынужденное излучение.

Покажем это на примерах частицы в поле $U(x) = \alpha|x|^q$, где $q > 0$, и жесткого ротатора.

Из определения $\mathbf{b}_l$ следует

$$\omega_l \mathbf{b}_l^2 = \frac{16}{l^2\pi^2}\omega_0\left[\int_0^a \cos l\omega_0 t(x)\,d(x)\right]^2, \qquad (6,16)$$

где

$$t(x) = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}}, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2}\left\{\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(y)]}}\right\}^{-1}; \qquad (6,17)$$

a — точка поворота, определяемая условием $E - U(y) = 0$. Подставив (6,17) в (6,16) и сделав замену переменных

$$z = y\left(\frac{\alpha}{E}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad u = x\left(\frac{\alpha}{E}\right)^{\frac{1}{q}},$$

*) Ниже мы для простоты ограничиваемся рассмотрением осцилляторов с одной степенью свободы.

получим

$$\omega_l \mathbf{b}_l^2 = \frac{8\sqrt{2}}{l^2\pi\sqrt{m}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}} E^{\frac{2+q}{q}} \left[\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^q}}\right]^{-1} \left[\int_0^1 \cos\left(2\pi l \frac{\int_0^u \frac{dz}{\sqrt{1-z^q}}}{\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^q}}}\right) du\right]^2,$$

$$\omega_l \frac{d}{dE}(\omega_l \mathbf{b}_l^2) = \frac{2+q}{mq}\left[\frac{2}{\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^q}}} \int_0^1 \cos\left(2\pi l \frac{\int_0^u \frac{dz}{\sqrt{1-z^q}}}{\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^q}}}\right) du\right]^2. \tag{6,18}$$

При любых значениях l выражение (6,18) положительно. Следовательно, опять согласно формуле (6,15) на всех частотах ω_l энергия поля уменьшается, т. е. возможно только поглощение осциллятором, а не вынужденное излучение.

Вторым, весьма характерным примером является жесткий ротатор. Предположим для простоты, что ротатор представляет собой частицу с зарядом e и массой m, вращающуюся вокруг закрепленной оси на расстоянии R. В этом случае частота вращения связана с энергией соотношением

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{mR^2}{2}\omega^2, \tag{6,19}$$

где I — момент инерции ротатора. Поэтому сумма по l в (6,15) сводится к одному члену, для которого

$$\omega \frac{d}{dE}(\omega \mathbf{b}^2) = 2\omega \frac{d}{dE}(\omega R^2) = R^2 \frac{d}{dE}(\omega^2) = \frac{2}{m},$$

и (6,15) переходит в полученное ранее выражение для поглощения гармоническим осциллятором.

Вместе с тем в квантовой теории уровни энергии такого ротатора определяются формулой

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2I}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{6,20}$$

т. е. неэквидистантны. Переходу $|k| \to |k|-1$ соответствует частота $\omega'' = \frac{\hbar}{2I}(2|k|-1)$, а переходу $|k| \to |k|+1$ — частота $\omega' = \frac{\hbar}{2I}(2|k|+1)$, не равная ω''. Поэтому на частоте ω'' должно иметь место индуцированное излучение, а на частоте ω' — поглощение, причем

$$\left.\begin{aligned} S^{\text{инд}} &= \frac{4\pi^3 e^2}{3mc}(2|k|-1) I(\omega''), \\ S^{\text{погл}} &= \frac{4\pi^3 e^2}{3mc}(2|k|+1) I(\omega'). \end{aligned}\right\} \tag{6,21}$$

Можно привести много примеров других систем, для которых квантовая теория дает на одних частотах поглощение, а на других — вынужденное излучение, тогда как в классической теории в рамках рассмотренной постановки задачи на всех частотах возможно только поглощение. Причина этого обстоятельства, связанная с общими свойствами классического движения, а также условия, при которых классическая система может усиливать радиацию, будут выяснены в следующем разделе.

7. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ОТ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ К КЛАССИЧЕСКОЙ

Как известно (см., например, [5]), движению по траектории в квазиклассическом приближении квантовой механики соответствует волновой пакет, образованный суперпозицией большого числа близких стационарных состояний. Обозначим через n среднее значение квантового числа, нумерующего эти стационарные состояния. Тогда среднее значение некоторого оператора F по такому волновому пакету можно записать в виде (см. [5])

$$\langle F\rangle = \sum_{l>0} \left(F_{n+l,\,n} e^{i\omega_{n+l,\,n} t} + F_{n-l,\,n} e^{-i\omega_{n,\,n-l} t}\right). \tag{7,1}$$

В пределе (7,1) должно совпадать с классической величиной $F(t)$. Поскольку $F(t)$ — величина действительная, из (7,1) следует, что в квазиклассическом пределе

$$F_{n-l,\,n} \to F^*_{n+l,\,n}, \quad \omega_{n,\,n-l} \to \omega_{n+l,\,n} \to \omega_l = \omega_0 l, \tag{7,2}$$

где ω_0 — частота классического движения, $l = 1, 2, \ldots$ — номер гармоники. Но отсюда видно, что в квазиклассическом пределе энергетические уровни любой системы эквидистантны.

К этому же результату можно прийти и другим путем. Уровни энергии в квазиклассическом приближении определяются правилом квантования Бора

$$\oint p\,dx = 2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{7,3}$$

Вычисляя с помощью (7,3) разность уровней энергии $n + \Delta n$ и n, легко получить

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{2\pi}{T}\Delta n\left[1 + \frac{1}{2}\hbar\frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{2\pi}{T}\right)\Delta n\right], \tag{7,4}$$

где

$$T = \oint \frac{\partial p}{\partial E}\,dx = \oint \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} \quad \text{и} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

есть период и частота классического движения. При $\hbar \to 0$

$$\omega \to \frac{2\pi}{T}\Delta n = \omega_0 \Delta n. \tag{7,5}$$

Следовательно, $\omega_{n,\,n-l} \to \omega_0 l$, $\omega_{n+l,\,n} \to \omega_0 l$, а разность $\omega_{n+l,\,n} - \omega_{n,\,n-l}$, пропорциональная $\hbar$, стремится к нулю. Отсюда видно, что в квазиклассическом пределе энергетические уровни любой системы эквидистантны. Согласно (7,4) ω_0 в общем случае является функцией энергии. Поэтому расстояния между соседними уровнями $\hbar\omega_0$ при разных значениях E различны. Однако на каждом сколь угодно малом, но конечном интервале ΔE укладывается очень большое (при $\hbar \to 0$ бесконечное) число уровней, расстояния между которыми с точностью до членов, пропорциональных $\hbar^2$, одинаковы.

Таким образом, возникает та же ситуация, что и в случае гармонического осциллятора. На любой собственной частоте ω_l всегда имеют место переходы $n \to n + l$ (поглощение) и $n \to n - l$ (излучение), и следовательно, наблюдаемой величиной является лишь разность поглощенной и излученной энергий, а не каждая из этих величин по отдельности.

Посмотрим теперь, каким образом ведут себя при предельном переходе к классике формулы квантовой теории для радиационных процессов.

Предположим для определенности, что падающее излучение изотропно и естественно поляризовано. В этом случае формулы (1,4) приводят к следующим выражениям для мощности спонтанного излучения $S^{\text{сп}}$, индуцированного излучения $S^{\text{инд}}$ и поглощения $S^{\text{погл}}$:

$$S^{\text{сп}} = \frac{4e^2\omega_{n,\,n-l}^4}{3c^3}\,|\mathbf{r}_{n,\,n-l}|^2, \tag{7,6}$$

$$S^{\text{инд}} = \frac{16\pi^3 e^2\omega_{n,\,n-l}}{3c\hbar}\,|\mathbf{r}_{n,\,n-l}|^2\, I(\omega_{n,\,n-l}). \tag{7,7}$$

$$S^{\text{погл}} = \frac{16\pi^3 e^2\omega_{n+l,\,n}}{3c\hbar}\,|\mathbf{r}_{n,\,n+l}|^2\, I(\omega_{n+l,\,n}). \tag{7,8}$$

В формулах (7,6)—(7,8) под $|\mathbf{r}_{n,\,n'}|^2$ подразумевается среднее значение по всем переходам между вырожденными состояниями a, a', относящимися к уровням n, n': $|\mathbf{r}_{n,\,n'}|^2 = \frac{1}{g_n}\sum\limits_{a,a'}|\mathbf{r}_{a,\,a'}|^2$.

Для того чтобы в этих формулах перейти к классическому пределу, надо положить $\hbar \to 0$ и заменить $4|\mathbf{r}_{n,\,n\pm l}|^2$ на $|\mathbf{b}_l|^2$ (см. обсуждение формулы (3,4)).

В результате такого предельного перехода формула (7,6) для $S^{\text{сп}}$, не содержащая $\hbar$, переходит в полученную ранее формулу классической теории (3,4). Величины же $S^{\text{погл}}$ и $S^{\text{инд}}$ при $\hbar \to 0$ бесконечно возрастают. Это показывает, что каждая из этих величин по отдельности не имеет физического смысла в классической теории. Вместе с тем разность величин

$$\widetilde{S}_l = S_l^{\text{погл}} - S_l^{\text{инд}} =$$
$$= \frac{16\pi^3 e^2}{3c}\,\frac{1}{\hbar}\,[\omega_{n+l,\,n}\,|\mathbf{r}_{n,\,n+l}|^2 I(\omega_{n+l,\,n}) - \omega_{n,\,n-l}\,|\mathbf{r}_{n,\,n-l}|^2 I(\omega_{n,\,n-l})] \tag{7,9}$$

в соответствии с (7,2) остается конечной. Таким образом, единственными величинами, которые могут входить в классическую теорию и реально наблюдаться, являются $S^{\text{сп}}$ и $\widetilde{S} = S^{\text{погл}} - S^{\text{инд}}$.

Умножив и разделив правую часть (7,9) на ω_l и учитывая, что при $\hbar \to 0$

$$\frac{\omega_{n+l,\,n}\,|\mathbf{r}_{n,\,n+l}|^2 I(\omega_{n+l,\,n}) - \omega_{n,\,n-l}\,|\mathbf{r}_{n,\,n-l}|^2 I(\omega_{n,\,n-l})}{\hbar\omega_l} \to \frac{1}{4}\,\frac{d}{dE}\,[\omega_l \mathbf{b}_l^2 I(\omega_l)],$$

получим

$$\widetilde{S}_l = \frac{4\pi^3 e^2}{3c}\,\omega_l\,\frac{d}{dE}\,[\omega_l \mathbf{b}_l^2 I(\omega_l)]. \tag{7,10}$$

Таким образом, разность $S_l^{\text{погл}} - S_l^{\text{инд}} = \widetilde{S}_l$ в квазиклассическом пределе переходит в формулу классической теории (6,13). Если интенсивность не зависит от частоты, то (7,10) совпадает с (6,15). Последнюю формулу удобно записать в виде

$$\widetilde{S}_l = \frac{8\pi^3 e^2}{3mc}\, I(\omega_l)\, f_l, \tag{7,11}$$

где

$$f_l = \frac{m\omega_l}{2}\,\frac{d}{dE}\,[\omega_l \mathbf{b}_l^2]. \tag{7,12}$$

Эта величина есть не что иное, как классический предел разности

абсолютных величин сил осцилляторов переходов $f_{n,\,n+l}$ и $f_{n,\,n-l}$. Поскольку

$$f_{n,\,n'} = \frac{2m}{\hbar}\,\omega_{n,\,n'}\,|\mathbf{r}_{nn'}|^2, \tag{7,13}$$

в классическом пределе

$$|f_{n,\,n+l}| - |f_{n,\,n-l}| \to f_l. \tag{7,14}$$

Силы осцилляторов переходов $f_{nn'}$ подчиняются правилу сумм

$$\sum_{n'} f_{nn'} = \sum_{l>0} (|f_{n,\,n+l}| - |f_{n,\,n-l}|) = 1. \tag{7,15}$$

Следовательно,

$$\sum_l f_l = 1. \tag{7,16}$$

Согласно (7,16) сумма $\widetilde{S}_l$ по всем частотам, на которых возможны радиационные процессы (т. е. по всем l), больше нуля. Таким образом, интегрально всегда имеет место поглощение. Если система такова, что радиационные процессы возможны только на одной частоте, то опять $\widetilde{S} > 0$. При этом $\widetilde{S}$ определяется такой же формулой, как в случае гармонического осциллятора. Примером систем такого типа является рассмотренный выше жесткий ротатор. Что касается отдельных членов сумм (7,15), (7,16), то в общем случае исследование вопроса об их знаке затруднительно. Условие (7,16) не накладывает каких-либо ограничений на знак отдельных членов суммы. Однако, как это уже отмечалось в предыдущем разделе, рассмотрение ряда весьма различных по своим свойствам конкретных примеров показывает, что для широкого класса систем $\widetilde{S}_l > 0$, т. е. на всех частотах ω_l имеет место поглощение.

Таким образом, по крайней мере для осцилляторов подобного типа квантовая и классическая теории приводят к существенно различным результатам. Квантовомеханический осциллятор на уровне E_γ поглощает радиацию на частотах $\omega_{\gamma'\gamma}$ $(E_{\gamma'} > E_\gamma)$ и вынужденно излучает, т. е. усиливает радиацию, на частотах $\omega_{\gamma\gamma''}$ $(E_{\gamma''} < E_\gamma)$.

В классической теории каждой паре частот $\omega_{\gamma'\gamma}$ и $\omega_{\gamma\gamma''}$ соответствует одна и та же гармоника ω_l, причем осциллятор с $E = E_\gamma$ (энергия свободных колебаний) на всех гармониках ω_l поглощает радиацию.

Из сказанного, однако, не следует, что вынужденное излучение, а значит, и усиление радиации в классической теории вообще невозможны. Дело в том, что полученные выше результаты для осцилляторов с фиксированной энергией нельзя переносить на ансамбль осцилляторов, распределенных по энергиям. В частности, поглощение на l-й гармонике осцилляторами с энергией в интервале E, $E + \Delta E$ в общем случае не равно

$$\int_E^{E+\Delta E} \widetilde{S}_l(E)\,N(E)\,dE. \tag{7,17}$$

Как будет показано ниже, это опять-таки связано со спецификой квазиклассического движения.

Рассмотрим совокупность осцилляторов с квазиклассическим (т. е. почти эквидистантным) энергетическим спектром, распределение которых по уровням энергии задается числами заполнения N_m. Найдем далее мощность поглощения $\Delta Q^{\text{погл}}$, соответствующую переходам $m \to m+1$, и мощность вынужденного излучения $\Delta Q^{\text{инд}}$, соответствующую

переходам $m \to m-1$, в частотном интервале ω, $\omega+\Delta\omega$. Величины $\Delta Q^{\text{погл}}$ и $\Delta Q^{\text{инд}}$ можно найти, просуммировав $N_m S^{\text{погл}}_{m,\,m+1}$ и $N_m S^{\text{инд}}_{m,\,m-1}$ по всем уровням m, для которых $\omega_{m+1,\,m}$ и $\omega_{m,\,m-1}$ заключены в нужном интервале частот. Обозначим индексами k, k' самый нижний и самый верхний уровни, для которых частоты $\omega_{k+1,\,k}$ и $\omega_{k',\,k'-1}$ еще попадают в интервал ω, $\omega+\Delta\omega$ (рис. 1). Тогда полное приращение энергии осцилляторов в единицу времени в результате обоих процессов будет равно

$$\Delta Q = \Delta Q^{\text{погл}} - \Delta Q^{\text{инд}} = \sum_{m=k}^{k'-1} N_m S^{\text{погл}}_{m,\,m+1} - = \sum_{m=k+1}^{k'} N_m S^{\text{инд}}_{m,\,m-1} = - \sum_{m=k+1}^{k'} (N_m - N_{m-1})\, S^{\text{инд}}_{m,\,m-1}.$$

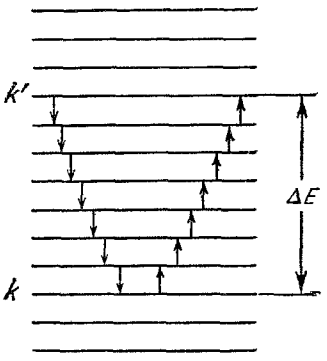

Рис. 1. Схема переходов внутри интервала ΔE.

Подставив в это выражение (7,7) и заменив числа заполнения N_m на $N(E_m)\,\hbar\omega_0(E_m)$, где $N(E)$ — функция распределения осцилляторов по энергиям, получим в квазиклассическом пределе

$$\frac{N_m - N_{m-1}}{E_m - E_{m-1}} \to \hbar \frac{\partial}{\partial E}(\omega_0 N)$$

и

$$\Delta Q = -\int_E^{E+\Delta E} dE \cdot \frac{4\pi^3 e^2}{3c}\,\omega_0 \mathbf{b}^2 \frac{\partial}{\partial E}(\omega_0 N)\, I(\omega_0), \tag{7,18}$$

где

$$\omega_0(E) = \omega, \quad \omega_0(E+\Delta E) = \omega + \Delta\omega.$$

Повторяя те же рассуждения в общем случае переходов $m \to m+l$, $m \to m-l$, можно получить аналогичное выражение и для полного приращения энергии осцилляторов в единицу времени, соответствующее l-й гармонике:

$$\Delta Q_l = -\frac{4\pi^3 e^2}{3c} \int_E^{E+\Delta E} dE \cdot \omega_l \mathbf{b}_l^2 \frac{\partial}{\partial E}(\omega_l N)\, I(\omega_l), \tag{7,19}$$

где

$$\omega_l(E) = \omega, \quad \omega_l(E+\Delta E) = \omega + \Delta\omega.$$

Сравним это выражение с (7,18). Проинтегрируем (7,19) по частям. Используя при этом (7,11), (7,12), получим

$$\Delta Q_l = -\frac{4\pi^3 e^2}{3c} I(\omega_l)\,\omega_l^2 \mathbf{b}_l^2 N \Big|_E^{E+\Delta E} + \int_E^{E+\Delta E} \widetilde{S}_l(E)\, N(E)\, dE. \tag{7,20}$$

Это выражение совпадает с (7,17) только тогда, когда на границах интервала E, $E+\Delta E$ первый член в (7,20) обращается в нуль. В общем случае ΔQ_l не равно (7,17) и, в частности, может иметь другой знак. Как видно из (7,19), знак ΔQ_l определяется знаком производной $\frac{\partial}{\partial E}(\omega_l N)$. Если $\frac{\partial}{\partial E}(\omega_l N) < 0$, то $\Delta Q_l > 0$ и, следовательно, имеет место

поглощение осцилляторами. Если же $\frac{\partial}{\partial E}(\omega_l N) > 0$, то $\Delta Q_l < 0$. Это означает, что осцилляторы теряют энергию, усиливая падающую радиацию. Таким образом, система классических осцилляторов может как поглощать, так и усиливать падающую радиацию в зависимости от знака $\frac{\partial}{\partial E}(\omega_l N)$. Условие $\frac{\partial}{\partial E}(\omega_l N) > 0$ полностью эквивалентно условию инверсной заселенности $N_m > N_{m-l}$ (или $N_{m+l} > N_m$) в квантовой теории, поскольку числам заполнения N_m в квазиклассическом пределе соответствуют величины

$$N(E_m)\hbar\omega_0(E_m) = \frac{\hbar}{l} N(E_m)\,\omega_l(E_m).$$

Если $N(E)$ меняется с изменением E значительно быстрее, чем ω_l, то $\frac{\partial}{\partial E}(\omega_l N)$ можно заменить на $\omega_l \frac{\partial N}{\partial E}$. В этом случае знак ΔQ_l целиком определяется видом функции распределения $N(E)$. При $\frac{\partial N}{\partial E} < 0$ имеет место поглощение, а при $\frac{\partial N}{\partial E} > 0$ — вынужденное излучение.

Сказанное выше наглядно иллюстрируется рис. 2. В частотном интервале $\Delta\omega_1$, которому соответствует интервал энергий ΔE_1, производная $\frac{\partial N}{\partial E} > 0$, $\Delta Q_l < 0$ и, следовательно, падающее излучение усиливается. В частотном интервале $\Delta\omega_2$ (интервал энергий ΔE_2) $\frac{\partial N}{\partial E} < 0$, $\Delta Q_l > 0$, т. е. имеет место поглощение. Наконец, в интервале $\Delta\omega$ (интервал энергии ΔE) представлены как частоты, на которых излучение поглощается, так и частоты, на которых излучение усиливается. Выражение (7,19), совпадающее в этом случае с (7,17), описывает интегральный эффект. Чем меньше ширина распределения $N(E)$, тем меньше интервалы энергий, для которых $\frac{\partial N}{\partial E}$ соответственно больше и меньше нуля, и тем труднее выделить область частот, в которых имеет место вынужденное излучение. В случае δ-образного распределения разделить по частотам области поглощения и вынужденного излучения, очевидно, невозможно. Подставив в (7,19) $N = N_0\,\delta(E - E_0)$ и интегрируя по любому сколь угодно малому интервалу ΔE, содержащему точку E_0, мы получим

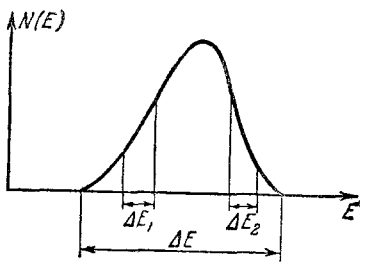

Рис. 2. Пример функции распределения $N(E)$, отдельные участки которой соответствуют вынужденному излучению и поглощению.

$$\Delta Q_l = N_0 \widetilde{S}_l(E_0) > 0.$$

Именно по этой причине при рассмотрении ансамбля осцилляторов с одной и той же энергией мы не получали вынужденного излучения.

Отметим также, что поскольку $\Delta\omega_1 \sim \frac{\partial\omega_l}{\partial E}\Delta E_1$, при заданной функции распределения $N(E)$ интервал частот $\Delta\omega_1$, в котором имеет место вынужденное излучение, тем меньше, чем меньше ангармоничность, т. е. чем слабее частоты ω_l зависят от энергии. Поэтому чем меньше ангармоничность, тем труднее выделить частотный интервал, в котором может наблюдаться вынужденное излучение.

Для гармонического осциллятора единственной наблюдаемой и вычисляемой в теории величиной является интегральный эффект, так как в этом случае частота не зависит от энергии и в формулах (7,19), (7,20) интегрирование распространяется на интервал 0, ∞. При этом первый член в (7,20) обращается в нуль ($b(0) = 0$, $N(\infty) = 0$), и поскольку $\widetilde{S}(E)$ не зависит от E, формула (7,20) дает

$$\Delta Q = \widetilde{S} \int_0^\infty N(E)\, dE = \widetilde{S} N > 0,$$

где N — полное число осцилляторов.

Таким образом, способностью при определенных условиях не поглощать, а усиливать падающую радиацию в одинаковой мере обладают и квантовые и классические системы. Некоторое отличие этого эффекта для случая квантовых и классических систем (например, при δ-образной функции распределения) целиком связано со специфическими особенностями их энергетического спектра.

8. АНСАМБЛЬ ОСЦИЛЛЯТОРОВ, РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПО ЭНЕРГИЯМ, В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Теперь нам остается получить общую формулу (7,19) для приращения энергии ансамбля осцилляторов ΔQ_l не путем предельного перехода от квантовой теории, как это было сделано в предыдущем разделе, а в рамках чисто классического рассмотрения. Рассмотрим поглощение ансамблем осцилляторов на l-й гармонике радиации в частотном интервале ω, $\omega + \Delta\omega$. Очевидно, что поглощение будет определяться осцилляторами с энергией в интервале E, $E + \Delta E$, где $\omega_l(E) = \omega$, $\omega_l(E + \Delta E) = \omega + \Delta\omega$. Изменение энергии осцилляторов в единицу времени за счет поглощения слагается из двух частей. Во-первых, меняется функция распределения внутри интервала ΔE, а во-вторых, некоторое число осцилляторов покидает этот интервал и, следовательно, перестает участвовать в поглощении на частотах ω, $\omega + \Delta\omega$. Энергия осцилляторов, покинувших интервал ΔE через верхнюю границу, в дальнейшем остается равной $E + \Delta E$, через нижнюю — E. Поэтому

$$\Delta Q_l = \int_{\Delta E} \dot{N}(E)\, E\, dE + [E j(E)]\Big|_E^{E+\Delta E}, \tag{8,1}$$

где $j(E)$ — поток в пространстве энергий. Функцию распределения $N(E)$ и поток $j(E)$ в пространстве энергий можно выразить через соответствующие величины в фазовом пространстве $N(g)$ и $j(g)$ (g — фазовый объем):

$$N(E)\, dE = N(g)\, dg, \quad j(E) = j(g). \tag{8,2}$$

Функция распределения $N(g)$ в рассматриваемой задаче удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка*)

$$\dot{N} + \frac{\partial}{\partial g}\left\{\alpha N - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial g}(\beta N)\right\} = 0. \tag{8,3}$$

*) Напомним, что уравнение Фоккера—Планка в общем случае должно быть записано именно в виде (8,3). Лишь в некоторых специальных случаях это уравнение переходит в соответствующее уравнение для $N(E)$

$$\dot{N}(E) + \frac{\partial}{\partial E}\left\{\alpha N(E) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial E}[\beta N(E)]\right\} = 0.$$

Поскольку $N(g)$ и $j(g)$ связаны уравнением непрерывности

$$\dot{N}+\frac{\partial}{\partial g}j=0, \tag{8,4}$$

из (8,3) следует

$$j=\alpha N-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial g}(\beta N). \tag{8,5}$$

В уравнениях (8,3) и (8,5) величины α и β выражаются через среднее приращение g и среднеквадратичное приращение g в единицу времени:

$$\alpha=\langle\delta g\rangle, \quad \beta=\langle\delta g^2\rangle \tag{8,6}$$

Поскольку

$$\delta g=g(E+\delta E)-g(E)=\frac{\partial g}{\partial E}\delta E+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial E^2}\delta E^2+\ldots,$$

вычисление (8,6) сводится к вычислению средних значений передаваемой энергии δE, квадрата передаваемой энергии δE^2 и т. д.

Как известно,

$$\frac{\partial g}{\partial E}=T(E)=\frac{2\pi}{\omega_0}, \tag{8,7}$$

где T — период движения. Величина $\langle\delta E\rangle$ была вычислена выше — формула (6,13).

При вычислении $\langle\delta E^2\rangle$ достаточно учесть лишь первый член в (2,16), так как только он дает вклад $\sim e^2$.

Итак,

$$\langle\delta E^2\rangle=\frac{1}{\tau}\left\langle\left(\int_0^\tau\frac{e}{c}\sum_\mu\dot{\mathbf{r}}^{(0)}\dot{\mathbf{A}}_\mu^{(0)}\,dt\right)^2\right\rangle. \tag{8,8}$$

Выполняя интегрирование по dt и усреднив по фазам свободных колебаний осциллятора и поля, получим

$$\frac{1}{\tau}\frac{e^2\omega_l^2}{4c^2}\sum_\mu(\mathbf{e}_\mu\mathbf{b}_l)^2a_\mu^2\omega_\mu^2\frac{1-\cos(\omega_l-\omega_\mu)\tau}{(\omega_l-\omega_\mu)^2}. \tag{8,9}$$

Повторяя те же рассуждения, что и при выводе (3,4), и используя (5,4), получим в случае изотропного излучения

$$\langle\delta E^2\rangle=\frac{8\pi^3e^2}{3c}\omega_l^2\mathbf{b}_l^2I(\omega_l). \tag{8,10}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{\partial g}{\partial E}\langle\delta E\rangle+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial E^2}\langle\delta E^2\rangle=\\&=\frac{8\pi^4e^2}{3c}\omega_0l^2\frac{d}{dE}[\mathbf{b}_l^2I(\omega_l)]=\\&=\frac{16\pi^5e^2}{3c}l^2\frac{\partial}{\partial g}[\mathbf{b}_l^2I(\omega_l)],\end{aligned} \tag{8,11}$$

$$\beta=\left(\frac{\partial g}{\partial E}\right)^2\langle\delta E^2\rangle=\frac{32\pi^5e^2}{3c}l^2\mathbf{b}_l^2I(\omega_l). \tag{8,12}$$

Из (8,11), (8,12) видно, что α и β удовлетворяют соотношению

$$\alpha-\frac{1}{2}\frac{\partial\beta}{\partial g}=0. \tag{8,13}$$

Поэтому из (8,5) и (8,13) следует

$$j = -\frac{1}{2}\beta\frac{\partial N}{\partial g}. \tag{8,14}$$

Вернемся к выражению (8,1). Используя (8,4), (8,14) и интегрируя (8,1) по частям, получим

$$\Delta Q_l = -(Ej)\Big|_E^{E+\Delta E} + \int\limits_{\Delta g}\frac{\partial E}{\partial g}\,j\,dg + (Ej)\Big|_E^{E+\Delta E} = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Delta g}\beta\frac{\partial E}{\partial g}\frac{\partial N}{\partial g}\,dg. \tag{8,15}$$

Поскольку в соответствии с (8,2) и (8,7)

$$N(g) = \frac{\omega_0}{2\pi}N(E),$$

окончательно (8,15) дает

$$\Delta Q_l = -\frac{4\pi^3 e^2}{3c}\int\limits_E^{E+\Delta E}\omega_l \mathbf{b}_l^2 I(\omega_l)\frac{\partial}{\partial E}(\omega_l N)\,dE. \tag{8,16}$$

Это и есть общая формула для поглощения в частотном интервале $\Delta\omega$, совпадающая с (7,19). Подробное обсуждение этой формулы содержится в предыдущем разделе. Отметим еще раз, что согласно этой формуле система классических осцилляторов может как поглощать, так и усиливать падающую радиацию в зависимости от знака производной $\frac{\partial}{\partial E}(\omega_l N)$.

Из вывода формулы (8,16) видно, что индуцированные процессы в общем случае определяются как средней энергией $\langle\delta E\rangle$, передаваемой одному осциллятору, так и средней квадратичной флуктуацией $\langle\delta E\rangle^2$. Существенно, что вклад в эти процессы дают и первый, и второй член в (2,16).

Отметим, что в квантовой теории радиационных процессов выражений, аналогичных первому члену в (2,16), не содержится. Это связано с тем обстоятельством, что среднее значение оператора $\dot{\mathbf{r}}$ по любому стационарному состоянию равно нулю. Однако, как уже отмечалось ранее, стационарное состояние системы в квазиклассическом приближении квантовой механики отнюдь не дает движения частицы по определенной траектории (см., например, [5]). Движению по траектории в квазиклассическом приближении соответствует суперпозиция большого числа близких стационарных состояний, т. е. волновой пакет $\psi = \sum\limits_n C_n\psi_n$. Среднее же значение $\dot{\mathbf{r}}$ по такому волновому пакету отлично от нуля и имеет как раз такой вид, который необходим для получения выражения $\frac{e}{c}\sum\limits_\mu \dot{\mathbf{r}}^{(0)}\dot{\mathbf{A}}_\mu^{(0)}$.

Покажем в заключение, что формула (8,16) позволяет получить распределение Рэлея—Джинса непосредственно из равенства поглощенной ΔQ_l и излученной

$$\Delta Q_l^{\text{сп}} = \int\limits_E^{E+\Delta E_l} S_l^{\text{сп}}(E)\,N\,dE$$

энергии ансамблем произвольных нелинейных осцилляторов в состоянии термодинамического равновесия.

Поскольку в этом случае

$$N(g) \sim e^{-\frac{E}{kT}}$$

и, следовательно,

$$\omega_0(E) N(E) \sim e^{-\frac{E}{kT}}, \quad \frac{\partial}{\partial E}[\omega_0(E) N(E)] \sim -\frac{1}{kT} e^{-\frac{E}{kT}},$$

из (3,4) и (8,16) следует

$$\int_E^{E+\Delta E} dE \frac{e^2}{3c^3} \omega_l^3 l \mathbf{b}_l^2 e^{-\frac{E}{kT}} = \int_E^{E+\Delta E} dE \cdot \frac{4\pi^3 e^2}{3c} \omega_l l \mathbf{b}_l^2 I(\omega_l) \frac{1}{kT} e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Отсюда

$$I(\omega) = \frac{\omega^2 kT}{4\pi^3 c^2}. \tag{8,17}$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein, Phys. Zs. 18, 121 (1917).
2. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, 2-е изд., М., ИЛ., 1956.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, М., Физматгиз, 1960.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., Физматгиз, 1960.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М., Гостехиздат, 1948.
6. М. Борн, Лекции по атомной механике, М.—Л., ОНТИ, 1934.
7. M. Born, P. Jordan, Zs. Phys. 33, 479 (1925).
8. J. H. Van Vleck, Phys. Rev. 24, 330 (1924).