

ОБ «ОСОБОЙ РОЛИ» ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Е. Л. Файнберг

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Несколько лет назад в статье Аронова и Бома¹ было высказано утверждение, что в квантовой механике потенциалы электромагнитного поля играют особую роль, не свойственную им в классической физике; что, в противоположность классической электродинамике, они здесь должны рассматриваться как «первичные» физические величины, а напряженности полей — как «вторичные», во всех смыслах производные понятия; что благодаря этой их «особой» роли «...в отличие от классической механики, существует воздействие потенциалов на заряженную частицу, даже если в области, где она находится, все поля (и, следовательно, силы, действующие на частицу) исчезают» (работа¹, резюме, стр. 485); что вследствие этого «необходимо дальнейшее развитие теории. Два возможных направления кажутся ясными», пишут авторы. «Во-первых, можно попытаться сформулировать нелокальную теорию, в которой, например, электрон мог бы взаимодействовать с источником на конечном расстоянии... Во-вторых, мы можем сохранить существующую локальную теорию», если будем «рассматривать $A_\mu(x)$ как физическую переменную. Это значит, что мы должны быть способны обнаруживать физическое различие между двумя квантовыми состояниями, которые различаются только калибровкой»¹, стр. 490—491). Правда, на последней, крайней возможности авторы, по-видимому, не склонны настаивать (во второй их статье² высказывания в этом пункте более осторожны). Однако все же очевидно, что речь идет о фундаментальных положениях квантовой механики. Если вопрос о том, что важнее — поле или потенциал, — еще можно считать делом вкуса, то другие утверждения имеют конкретное значение и основываются на анализе двух возможных экспериментов, предложенных авторами. (Второй из них был в действительности указан уже давно Эренбергом и Сидэй³ в связи с анализом проблем электронной микроскопии; однако эти авторы хотя и пришли к заключению, что источник влияет на электрон, находящийся даже в той части пространства, где напряженность поля исчезает и лишь потенциал отличен от нуля, однако не делали столь далеко идущих выводов об основах квантовой электродинамики.) Кроме того, во второй статье² Аронов и Бом разбирают третий физический пример — стационарные состояния электрона в поле соленоида.

Эти утверждения вызвали теоретическую дискуссию^{4,5,14,16} (частично эпистолярную, см. ²). Были поставлены новые и переосмыслены старые эксперименты⁶⁻⁹, причем авторы-экспериментаторы считают, что их данные подтверждают выводы Аронова и Бома (хотя сами Аронов и Бом признают, что ни один из экспериментов не является еще вполне чистым²).

Сочувственную ссылку на эту точку зрения можно найти в статье, посвященной анализу других проблем¹⁰.

Таким образом, вопрос уже «имеет литературу». Стоит в нем разобраться, поскольку все же решительных высказываний ни за, ни против точки зрения Аронова и Бома в теоретических статьях в конце концов нет*).

Мы разберем все три физических примера и попробуем получить ответы на два вопроса.

1. Действительно ли существует экспериментальная возможность найти физический эффект, когда электрон (его волновая функция) целиком находится в области, где напряженность поля источника исчезает, а потенциал отличен от нуля?

2. Существует ли такое особое воздействие потенциала в квантовой механике, отличное от его воздействия в классической физике, которое позволило бы рассматривать потенциал как более фундаментальную величину, чем напряженность поля, и потребовало бы переформулировки основ теории?

Мы увидим, что эти два вопроса не сводятся к одному, как на первый взгляд это могло бы показаться.

§ 2. ДЕЙСТВИЕ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Первый рекомендуемый эксперимент состоит в следующем^{1,4}. Плоская электронная волна, являющаяся в направлении движения пакетом длины L , разделяется в поперечном направлении на две части (например, в результате прохождения через экран с двумя щелями \mathcal{E}_1 ; рис. 1, а). Каждая из этих частей проходит через свою цилиндрическую металлическую трубку (клетку Фарадея) длины $l \gg L$. Когда пакеты полностью втянутся в трубы, на трубы накладывается разность потенциалов Φ , поддерживаемая постоянной в течение времени t (рис. 1, б). Для простоты можно считать, что одна из трубок заземлена и имеет потенциал нуль. Затем, до того как пакеты начинают выходить из трубок, потенциал снимается. По выходе пакеты отклоняются призмами Π и интерферируют, давая на экране \mathcal{E}_2 полосы (рис. 1, в).

Сущность опыта заключается в том, что пакет, подвергшийся действию потенциала Φ , набирает дополнительную фазу $\frac{e}{\hbar} \Phi t$ (где e — заряд электрона), которая должна вызвать искажение интерференционной картины, тем большее, чем больше Φ . Между тем внутри цилиндра потенциал Φ не зависит от координат и потому напряженность поля равна нулю. Таким образом, должен существовать наблюдаемый эффект, хотя электрон не испытывал действия напряженности поля. Это и есть основа для упомянутых выше фундаментальных утверждений.

Изложенное рассуждение кажется несомненным. Действительно¹, для функции ψ можно написать

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\mathcal{H}_0 + e\Phi) \psi,$$

*.) Когда эта статья уже была написана, появилась статья де-Витта¹⁴ и ответ чаине Аронова и Бома¹⁵. Де-Витт, не соглашаясь с точкой зрения о необходимости пересмотра концепции потенциала в квантовой механике, указывает, что потенциал может быть заменен в уравнении Шредингера и во всех других соотношениях через интеграл по линии от напряженности поля. В результате теория может быть сформулирована с одними напряженностями, но за счет введения нелокальности: действие поля в данной точке определяется его значениями в других точках и, вообще говоря, в другой момент времени. Эта критика, по существу, не отвергает тезиса в некотором смысле слова об особой роли потенциалов в квантовой механике. Аронов и Бом в своем ответе считают замену тривиальной. Формулировку квантовой электродинамики без потенциалов дали **Б. И. Огневецкий и И. В. Полубаринов**, (препр. ОИЯИ Е-975, 1962 г.).

где \mathcal{H}_0 — невозмущенный гамильтониан. В отсутствие потенциала решение $\psi = \psi_0$ имеет вид $\psi_0 = \psi_1^0 + \psi_2^0$, причем ψ_1^0 отлично от нуля в первой трубке, ψ_2^0 — во второй трубке.

При наличии потенциала $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, причем φ_1, φ_2 отличны от нуля соответственно только в первой или во второй трубке, решением будет, как легко убедиться постановкой, функция

$$\psi = \psi_1^0 e^{-\frac{iS_1}{\hbar}} + \psi_2^0 e^{-\frac{iS_2}{\hbar}},$$

где

$$S_1 = \int e\varphi_1(t) dt,$$

$$S_2 = \int e\varphi_2(t) dt.$$

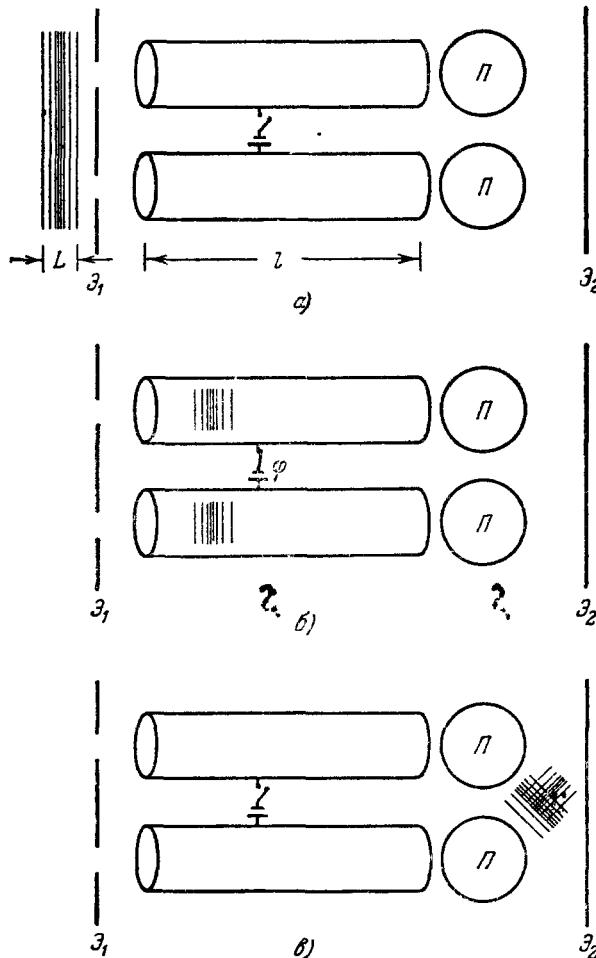


Рис. 1.

Наличие разности фаз $S_1 - S_2$ обуславливает эффект. Квантовый характер этого эффекта сказывается в том, что он зависит от величины \hbar .

Усомниться в результате можно было бы из-за того, что в моменты включения и выключения поля на трубке возникает перераспределение зарядов и потому в трубке временно может возникнуть напряженность поля. Ясно однако, что этот эффект ограничен интервалом времени включения и выключения $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$. Между тем сдвиг фазы $S_1 - S_2$ пропорционален времени t и может быть сделан сколь угодно большим, поэтому сдвигом фазы за время Δt можно пренебречь.

Отсюда следует также, что опыт допустим и в более свободной постановке: можно было бы наложить постоянное поле с самого начала на все пространство так, чтобы до вхождения в трубки и после выхода электрон испытывал действие напряженности поля. Однако схема, описанная в работах ^{1,4}, избавляет от лишних дискуссий по этому поводу.

Фарри и Рамсэй показали ⁴, что если учесть обратное действие заряда электрона на распределение заряда на трубке, то возможно (по изменению потенциала трубки) определить, через какую именно из двух трубок прошел электрон. Но если построить опыт так, чтобы такое определение было осуществлено, то интерференционная картина исчезнет. Так, конечно, и должно быть: если электрон заведомо находится в одной трубке, то его ψ -функция в другой трубке равна нулю и интерферировать нечему. Поэтому Фарри и Рамсэй приходят к убедительному выводу,

что предсказываемый результат эксперимента, несомненно, должен иметь место согласно фундаментальным положениям квантовой механики.

Попробуем, однако, выяснить, действительно ли здесь проявляется свойство потенциала, не известное классической физике.

В основе рассуждения лежит утверждение, что электрон в трубке обладает дополнительной энергией $e\varphi$. Это обстоятельство отнюдь не является специфически квантовым. Если бы мы оперировали с классическим электроном, то после включения потенциала его энергия также увеличилась бы на $e\varphi$. Такой прирост энергии вполне реален. Если мы захотим извлечь электрон из трубки до выключения потенциала, то придется эту дополнительную энергию у него забрать. Следовательно, физически вполне ощущимое «воздействие потенциала на заряженную частицу» в области, где «все поля (и, следовательно силы, действующие на частицу) исчезают», имеет место и в классической электродинамике. В том, что электрон приобретает дополнительную энергию, ничего неклассического нет. Можно даже указать, откуда взялась эта энергия: сообщая трубке постоянный потенциал φ , мы поместили на нее дополнительный заряд. Натекая на трубку, он должен был, в зависимости от знака, преодолевать поле отталкивания электрона в трубке или, наоборот, им притягиваться (ср. расчет в работе ⁴). В общем, $e\varphi$ — чисто классическая энергия взаимодействия электрона с зарядами источника.

Откуда же возникает результирующий эффект, не имеющий аналога в классике? Ответ очевиден: электронной волновой функции свойственна частота, зависящая от полной энергии электрона. Далее, в то время как для движения классической частицы существенны только производные функции действия в данной точке и в данный момент времени, энергия $E = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}$ и импульс $p = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q}$, в квантовой механике частота и возникающая отсюда фаза определяются абсолютной величиной действия S . Если электрон проходит заведомо только через одну трубку, то изменение его частоты вызовет постоянный сдвиг фазы $\frac{1}{\hbar} S_1 = \frac{e}{\hbar} \int \varphi_1(t) dt$. Этот сдвиг ни на чем не скажется (как не сказывается изменение на постоянной величине действия для классического электрона). Если же электрон описывается волновой функцией, в разных частях которой интегральные сдвиги фаз разные, так что разность сдвигов есть $\frac{1}{\hbar} (S_1 - S_2)$, то возникает интерференция.

Таким образом, квантовая особенность эффекта кроется в двух обстоятельствах. Во-первых, в том, что энергия частицы (в данном случае энергия взаимодействия с зарядами трубки) вообще влияет на частоту волновой функции (в классической же электродинамике, хотя эта энергия присутствует вполне реально, она не влияет на характер движения, пока нет зависимости потенциальной энергии от координат); во-вторых, в том, что положение электрона принципиально неопределенно, он «одновременно находится в обеих трубках» и испытывает в разных частях своего пакета воздействие разных потенциалов. Оба эти момента существенно отличают процесс от соответствующего классического случая. Однако в них обоих трудно усмотреть какую-либо новую особую роль потенциала (в частности, уже в простом прохождении частицы через экран с двумя щелями оказывается различие внешнего воздействия в двух частях одного и того же пакета).

Следует заметить, что то или иное несвойственное ньютоновой физике воздействие потенциала можно встретить не только в квантовой механике. Так, в общей теории относительности ход часов зависит именно от

потенциала (гравитационного) в данной точке, а не от его градиента. Атом в поле постоянного потенциала обладает измененной частотой излучения. Это, однако, не дает нам основания считать, что потенциал в теории тяготения имеет особые черты, заставляющие искать, например, нелокальную формулировку теории.

Заметим, что покоящийся на столе в поле тяжести шарик, который удерживается в равновесии двумя равными силами, действующими в противоположные стороны, обладает потенциальной энергией и частота его волновой функции (которой он, в принципе, так же обладает как электрон в описанном выше опыте) тоже зависит от этой энергии.

Таким образом, уже на примере первого из рекомендованных в работе¹ экспериментов видно, каковы могут быть ответы на вопросы, поставленные в конце § 1: на первый вопрос — положительный, на второй — отрицательный. Нам остается убедиться, что подобный же вывод следует и из остальных двух физических примеров.

§ 3. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Второй предлагаемый (и осуществленный⁶) эксперимент, подробно разобранный впервые в работе³, состоит в следующем.

Пусть плоская электронная волна, как и прежде разделенная на два пакета экраном с двумя щелями, как на рис. 1, или бипризмой *БП*

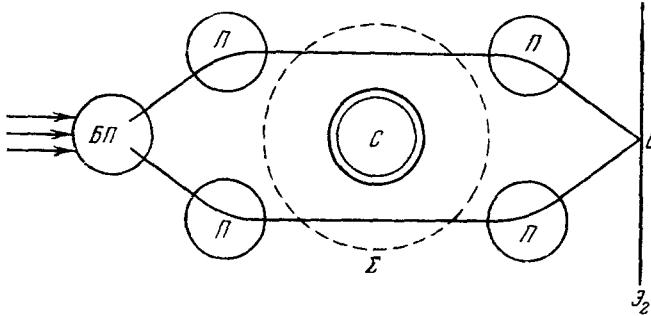


Рис. 2.

и двумя отклоняющими призмами, как на рис. 2, обтекает с двух сторон перпендикулярный (к чертежу) соленоид или намагниченный стержень *C* (рис. 2), имеющий бесконечную длину. Затем части пакета сводятся другими призмами вместе и дают на экране \mathcal{E}_2 интерференционные полосы.

Вне соленоида магнитное поле равно нулю, и потому электрон не испытывает действия сил. Однако векторный потенциал здесь равен нулю быть не может: по теореме Стокса, интеграл по контуру Σ , охватывающему соленоид, должен давать поток индукции сквозь контур

$$\oint_{\Sigma} A_s ds = \int \text{rot}_n A dS = \int H_n dS = \pi a^2 H = \Phi, \quad (1)$$

где a — радиус соленоида, H — напряженность магнитного поля в нем, Φ — поток индукции в соленоиде. Можно, в частности, выбрать такую калибровку потенциалов, что $A = A_{\theta} = \frac{\Phi}{2\pi r}$, где θ — полярный угол, отсчитываемый в плоскости чертежа, r — расстояние до оси соленоида (рис. 3). Этот вектор-потенциал войдет в уравнение Шрёдингера для электрона и может обусловить влияние на электрон даже для такого случая, когда волновая функция электрона нигде не проникает в соленоид.

Чтобы доказать это, Аронов и Бом рассматривают рассеяние плоской волны на соленоиде, радиус a которого стремится к нулю, а напряженность H возрастает так, чтобы поток был конечен. Уравнение Шредингера нужно рассматривать отдельно вне соленоида и внутри него, а результат спичь на поверхности $r=a$. Снаружи мы имеем

$$\frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = E\psi, \quad (2)$$

или, в цилиндрических координатах, r, θ, z , считая, что в условиях опыта от z не зависит,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + ia \right)^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad (3)$$

где важный, основной для дальнейшего, параметр a определяется соотношениями

$$a = -\frac{e\Phi}{ch}, \quad \Phi = \pi a^2 H. \quad (4)$$

Мы убедимся в дальнейшем, что можно вообще не рассматривать внутреннюю область соленоида и просто считать уравнение (3) справедливым во всем пространстве.

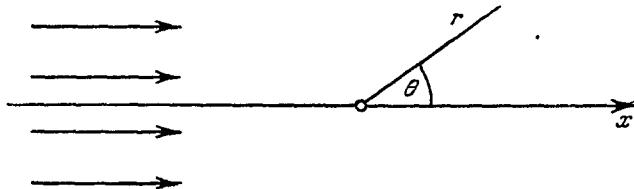


Рис. 3.

Это уравнение можно решать разделением переменных, причем уравнение для радиальной функции решается в бесселевых функциях, например:

$$\psi_n \sim e^{\pm in\theta} J_{n+\alpha}(kr). \quad (5)$$

Из условия однозначности при изменении θ на 2π следует, что n должно быть целочисленным. Плоскую электронную волну, падающую слева (она дает ψ при $r \rightarrow \infty$ одновременно с $\theta \rightarrow \pi$), можно разложить по бесселевым функциям (δ_{p0} — символ Кронекера)

$$\psi_0 = e^{ikx} = \sum_{p=0}^{\infty} (2 - \delta_{p0}) i^p \cos p\theta J_p(kr). \quad (6)$$

Если a — целое число, $n+a=p$, то видно, что функция составлена из точных решений (5) даже при наличии потенциала A_θ . Следовательно, она есть решение уравнения Шредингера и никакого рассеяния падающей волны не будет. Однако только в редких случаях магнитный поток Φ квантован. Это имеет место, например, в сверхпроводниках ¹¹ («квантом потока» здесь является величина $\frac{ch}{2e} \approx 2 \cdot 10^{-7}$ с). Если же a — не целое число, то ψ должно быть суммой ψ_0 и рассеянной волны ψ_1 . В работе ¹ такое ψ_1 отыскивается в виде разложения по частным решениям ψ_n . Оно позволяет определить и сечение рассеяния ¹:

$$d\sigma = \frac{\sin^2 \pi a}{2\pi k} \frac{d\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (7)$$

Можно поступить и проще, если ограничиться случаем, когда a близко к целому числу. Тогда можно нецелую часть рассматривать как возмущение,

$$\alpha_n = a - n, \quad (8)$$

где n — ближайшее целое число, и применить борновское приближение теории возмущений. Ясно, что для решения принципиального вопроса о существовании или несуществовании рассеяния этого достаточно. Тогда, полагая $\psi = \psi_0 + \psi_1$ и ограничиваясь членами первого порядка по α_n , мы имеем в трехмерной формулировке

$$(\nabla^2 + k^2) \psi_1 = -\frac{2i\alpha_n}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}, \quad (9)$$

$$\psi_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{2i\alpha_n}{r'^2} \frac{e^{i\hbar|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|} \frac{\partial}{\partial \theta'} e^{i\hbar x'} d^3 \mathbf{R}'. \quad (9a)$$

Обычным способом, интегрируя по z от $-\infty$ до $+\infty$, получаем при $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{2i\alpha_n}{4\pi} \int i\pi H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}')}{\partial \theta'} \frac{dr' d\theta'}{r'} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{ik\alpha_n}{\sqrt{2\pi kr}} e^{i\hbar r - i\frac{\pi}{4}} \int e^{i(k_0 - k, \mathbf{r}')} \sin \theta' d\theta' dr'. \end{aligned} \quad (10)$$

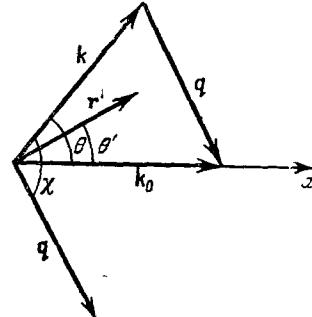


Рис. 4.

Угол χ между $\mathbf{q} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$ и \mathbf{r}' (рис. 4) может быть выражен через θ' и угол рассеяния θ , $\chi = \frac{\pi}{2} + \theta' - \frac{\theta}{2}$, так что после интегрирования по θ' от 0 до 2π и по r' от a до ∞ получаем

$$\psi_{1\text{pacc}} = A(0) i\pi H_0^{(1)}(kr), \quad A(\theta) = \frac{i\alpha_n}{2\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} J_0(ka), \quad (11)$$

и сечение рассеяния (вычисляемое как отношение потока рассеянной волны ψ_1 к падающему потоку) равно, если положить $ka \rightarrow 0$ (см. ниже):

$$d\sigma = \frac{2\pi}{k} |A(\theta)|^2 d\theta = \frac{\pi \alpha_n^2}{2k \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} d\theta. \quad (12)$$

Это выражение несколько отличается от (7), приведенного в работе¹, если в нем положить $a \ll 1$ (лишний фактор $\cos^2 \frac{\theta}{2}$). Дело в том, что найденное в работе¹ решение, строго говоря, неверно: при изменении θ на 2π полная функция изменяется (особенно наглядно это видно из формул (21) и (23) в работе¹). Однако существа дела это не меняет: рассеяние при нецелом a имеет место. Более того, полное сечение бесконечно (за счет малых θ , т. е. далеких пролетов).

В приведенном выше рассуждении мы считали, что $a=0$. Это действительно допустимо, поскольку вероятность найти частицу внутри соленоида может быть сделана исчезающе малой. Как отмечено в¹, мы могли бы окружить соленоид непроницаемым барьером и от этого результат не изменился бы. В самом деле, такой барьер при $ka \ll 1$ означал бы, что в качестве не возмущенной потенциалом A волны вместо $e^{i\hbar x}$ нужно взять¹²

$$\begin{aligned} \psi_0 &= e^{i\hbar x} - i \sum_{p=0}^{\infty} (2 - \delta_{p0}) e^{\frac{1}{2}p\pi i - \delta_p(ka)} \sin \delta_p(ka) H_p^{(1)}(kr) \times \\ &\times \cos p\theta \approx e^{i\hbar x} - \frac{i\pi H_0^{(1)}(kr)}{2 \ln ka} \end{aligned} \quad (13)$$

(где $\delta_p(ka)$ — фазы рассеяния) и соответственно изменить применение теории возмущений. Эффективно дело сводится к тому, что действовать нужно по-прежнему и интегрировать только по области $r > a$, что мы и делали.

Итак, должно иметь место рассеяние, хотя напряженность поля в области, где находится электрон, равна нулю. Заметим, что и этот эффект является квантовым, поскольку σ пропорционально $\frac{1}{k} = \frac{\hbar}{p}$.

Этот вывод был подвергнут экспериментальной проверке. Так, Чэмберс⁶ наблюдал рассеяние в поле железного магнитного волоска («whisker») C (диаметр около 1μ) для электронов, испускаемых источником S (рис. 5; масштаб не соблюден). Электроны проходили через бипризму e и давали интерференционную картину в O . Магнитный волосок находился в тени алюминированной кварцевой нити f диаметром около $1,5 \mu$.

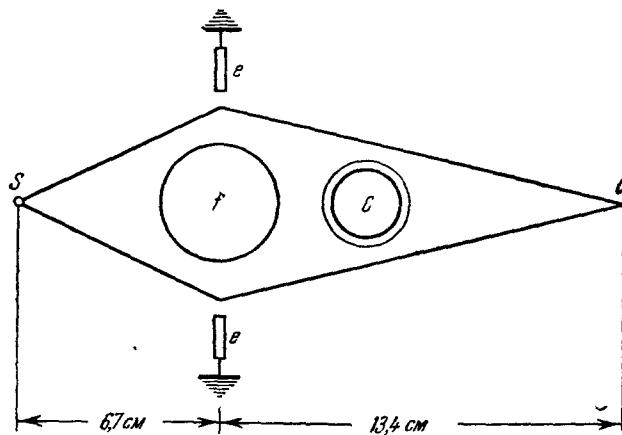


Рис. 5.

Магнитный поток составлял⁷ около $400 \frac{hc}{e}$ и несколько изменялся по длине волоска, примерно на одну единицу $\frac{hc}{e}$ (на один «флюксон») на 1μ . Оказалось, что по координате z , перпендикулярной к чертежу, интерференционные полосы имели наклон, хорошо соответствующий тому, который и следовало ожидать по теории Аронова и Бома: смещение составляло одну полосу при сдвиге по z примерно на 1μ , т. е. как раз при изменении α на единицу.

К сожалению, как показал Прайс (см. ²), неоднородность намагничения создает рассеянное магнитное поле, которое само по себе может обусловить сходное смещение полос. Кроме того, диаметр магнита сравним с шириной полосы в O . Поэтому нельзя считать ka малым. Следовательно, опыт нельзя считать доказательным. Однако сомневаться в положительном результате трудно.

В других экспериментах⁷⁻⁹ только доказывалось, что прямое влияние потенциала необходимо принимать во внимание и тогда, когда магнитное поле отлично от нуля, иначе нельзя объяснить некоторые экспериментальные факты. Тем самым только подтверждается правильность уравнения Шредингера.

Снова, как и в опыте с электрическим потенциалом, ответ на первый из вопросов, сформулированных в конце § 1, может быть только положительным.

Правильно ли, однако, считать, что здесь нет физического воздействия магнитного поля в классическом смысле слова? Действительно, напряженность поля в каждой точке, где вероятность присутствия электрона отлична от нуля, исчезает. Необходимо, однако, учесть, что в *з а и м о д е й с т в и е* электрона с источником поля не исчезает. Электрический ток движущегося электрона создает магнитное поле, которое действует на соленоид и обусловливает *энергию взаимодействия*, представленную членом $-\frac{e}{c} \mathbf{A}$ в выражении для полной энергии $\frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2$. Само это выражение является чисто классическим (не содержит \hbar), и поэтому действие потенциала и в данном случае имеет классическую основу.

В самом деле, при подсчете по теории возмущений в первом приближении по a_n мы имеем для матричного элемента перехода электрона при рассеянии из состояния ψ_0 в состояние ψ_f

$$M \sim \int \psi_f^* (\mathbf{r}') \frac{e}{mc} (\hat{\mathbf{p}} \mathbf{A} (\mathbf{r}')) \psi_0 (\mathbf{r}') d\mathbf{r}' . \quad (14)$$

Но \mathbf{A} создано током \mathbf{j} в соленоиде,

$$\mathbf{A} (\mathbf{r}') = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} (\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} d\mathbf{r}'' .$$

С другой стороны, $\frac{1}{m} \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{v}}$ есть оператор скорости, так что выражение, входящее в (14), $\psi_f^* (\mathbf{r}') \frac{e}{m} \hat{\mathbf{p}} \psi_0 (\mathbf{r}') = \mathbf{j}_{0f} (\mathbf{r}')$, есть плотность тока перехода электрона. Поэтому M принимает симметричную форму взаимодействия токов:

$$M \sim \frac{1}{c^2} \int \frac{\mathbf{j}_{0f} (\mathbf{r}') \mathbf{j} (\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' . \quad (15)$$

Здесь, строго говоря, не принято во внимание изменение состояния источника под влиянием взаимодействия. Чтобы его учесть, нужно вместо $\mathbf{j} (\mathbf{r}'')$ написать плотность тока перехода в источнике $\mathbf{j}_{0f, \text{ист}} (\mathbf{r}'')$. Выражение (15) имеет явно классический вид энергии взаимодействия токов. Впрочем, и без того ясно, что \mathbf{A} в уравнении Шредингера появляется после варьирования выражения для энергии системы и потому представляет взаимодействие электрона с соленоидом или магнитом. Эта энергия, например, затрачивается в виде работы дополнительной электродвижущей силы, которую нужно приложить в соленоиде для поддержания постоянства тока в нем, когда приближающийся электрон вызывает в соленоиде индукционный ток; существенно, что здесь мы все время говорим об энергетических изменениях при постоянном токе в источнике (ср. например ¹³, § 52). Сложный результат этих взаимодействий может быть выражен в том простом факте, что действие для электрона, согласно классической электродинамике, приобретает дополнительное слагаемое $\int \frac{e}{c} \mathbf{A}_s ds$, где интеграл берется вдоль пути электрона. Так как при обходе вокруг соленоида это дало бы прирост действия $\Delta S = \frac{e}{c} \Phi$, то при пролете (без обходов) из $x = -\infty$ в $x = +\infty$, независимо от пути, классический электрон приобретает постоянный прирост действия $+\frac{1}{2} \frac{e}{c} \Phi$ при пролете с одной стороны от соленоида или $-\frac{1}{2} \frac{e}{c} \Phi$ — при пролете с другой стороны. Это никак не сказывается на его движении (в частности, полная работа, совершенная электроном над соленоидом

и источником тока, обращается в нуль). В квантовой механике возникнет прирост фазы $\pm \frac{e}{2c\hbar} \Phi$, одинаковый во всех точках пакета, если весь волновой пакет расположен по одну сторону от соленоида. Если же пакет охватывает соленоид, то в разных его частях сдвиг фазы будет различен и возникнет искажение интерференционной картины, тем большее, чем больше Φ .

Вполне очевидно полное сходство этой картины со случаем скалярного потенциала (§ 2). Снова взаимодействие с источником является в основе классическим. Квантовый характер процесса обусловлен тем, что а) для частоты волновой функции существенно наличие энергии взаимодействия с источником поля; б) положение электрона неопределенно, так что в разных частях пакета сдвиг фазы различен.

Сходство с § 2 может быть сделано еще более наглядным, если рассмотреть процесс в системе, в которой электрон поконится, а соленоид движется. В этой системе отсчета появится электрический потенциал ϕ' , обусловливающий энергию взаимодействия $e\phi'$ электрона с электрической поляризацией $\mathbf{P} = \frac{1}{c} [\mathbf{vM}]$, возникающей в соленоиде, где \mathbf{M} — магнитный момент единицы объема соленоида (поле $\mathbf{E}' = -\nabla\phi' - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}$, действующее на электрон, по-прежнему будет равно нулю).

Вопрос о влиянии на источник подробно рассматривали Аронов и Бом². Однако вся цель их рассмотрения состояла в доказательстве того, что взаимодействие действительно приводит к уравнению (2) для электрона. Это, однако, вряд ли требует доказательств.

§ 4. СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ПОЛЕ СОЛЕНОИДА

Дополнительный пример, разобранный в работе² — стационарные состояния электрона в поле того же, что и в § 3, бесконечно протяженного соленоида. И здесь, например, если предположить, что электрону предоставлено пространство только в кольце (ограниченном бесконечно высокими, непроницаемыми потенциальными стенками), обнимающем соленоид, его энергия зависит от \mathbf{A} , хотя напряженность поля вне соленоида равна нулю. Если рассматривать электрон как плоский ротор радиуса r , то для его волновой функции имеем

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + ia \right)^2 \psi = E\psi. \quad (16)$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi \sim e^{in\theta}, \quad (17)$$

где из требования однозначности следует, что n — целое. Поэтому

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} (n + a)^2. \quad (18)$$

Чтобы показать классическое происхождение этого результата, рассмотрим ток силы I , протекающий по кольцу радиуса r вокруг того же соленоида. На оси z он создает магнитное поле (ср., например, ¹³, § 42)

$$H_1(z) = \frac{2\pi I}{c} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (19)$$

добавляющееся к магнитному полю соленоида H_0 . Энергия системы есть

$$W = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int (H_0^2 + H_1^2 + 2H_0H_1) dV. \quad (20)$$

Первый член здесь дает собственную энергию соленоида, второй — собственную энергию кольцевого тока, последний — энергию взаимодействия. Если радиус соленоида бесконечно мал, то подставляя (19) в (20) и интегрируя по объему соленоида, где H_0 отлично от нуля, получим

$$W_{12} = \frac{I\Phi}{c}. \quad (21)$$

Этот результат, конечно, совпадает с тем, который мы получили бы, интегрируя по объему кольцевого тока выражение $\frac{1}{c} \int (A_j) dV$.

В квантовом случае плоского ротора плотность тока электрона равна, согласно обычным правилам квантовой механики и формуле (17),

$$\begin{aligned} j = j_\theta &= \frac{e\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla_\theta \psi - \psi \nabla_\theta \psi^*) - \frac{e^2}{mc} A_\theta \psi^* \psi = \\ &= \left(\frac{e\hbar}{m} \frac{n}{r} - \frac{e^2}{mc} A_\theta \right) \psi^* \psi = \frac{e\hbar}{mr} (n + \alpha) \psi^* \psi. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь вновь присутствует вектор-потенциал, хотя речь идет об области, где по предположению напряженность магнитного поля отсутствует. Однако и в этом трудно усмотреть «новые», «неклассические» свойства потенциала: и в классической электродинамике, если мы будем выражать плотность тока $j = qv$ (q — плотность заряда, v — его скорость) через обобщенный импульс p , придется заменять v через $p - \frac{e}{c} A$.

Полный ток, если dS — элемент сечения кольца, $dV = 2\pi r dS$ — элемент его объема, есть

$$I = \int j_\theta dS = \frac{e\hbar}{m} \frac{n+\alpha}{2\pi r^2} \int |\psi|^2 dV = \frac{e\hbar}{2\pi mr^2} (n + \alpha), \quad (23)$$

где принята во внимание нормированность ψ -функции.

Подставляя это выражение в (21), мы получаем

$$W_{12} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} (2na + \alpha^2), \quad (24)$$

т. е. те члены, которые должны быть добавлены к энергии электрона в отсутствие поля, $\frac{\hbar^2 n^2}{2mr^2}$, чтобы получилась полная энергия E (18).

Таким образом, энергия взаимодействия и, следовательно, смысл потенциала ничем не отличаются от классического. Квантовый элемент (пропорциональность \hbar) появляется только потому, что положение электрона в пределах кольца принципиально неопределенno, из-за чего он может быть уподоблен току, заполняющему в каждый момент времени все кольцо; сила тока пропорциональна \hbar (23).

§ 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели три физических примера, обнаруживающих действие постоянного в пространстве и времени потенциала на электрически заряженную частицу в рамках нерелятивистской квантовой механики. Во всех случаях в основе лежит обычная классическая энергия взаимодействия

частицы с источником, отличная от нуля, несмотря на то, что напряженность поля в месте расположения частицы равна нулю (заряд в точках, где электрический потенциал постоянен в пространстве и времени; электрический ток, обнимающий соленоид, и т. п.). Эта реальная энергия системы была накоплена в период установления.

Квантовая особенность поведения частицы под действием подобного потенциала возникает лишь потому, что энергия системы прямо связана с частотой волновой функции, и если изменение частоты различно в разных частях пакета, то может возникнуть интерференция. Никакие новые, «нелокальные» свойства самого электромагнитного потенциала, которых не было бы в классической электродинамике, здесь не возникают. Единственная черта, в которой можно усмотреть элемент новой «нелокальности», это размазанность волновой функции частицы, заставляющая так подсчитывать действие внешнего поля, как будто сам электрон размазан и находится одновременно во всех точках пространства с плотностью вероятности, пропорциональной квадрату модуля волновой функции. Однако это связано с принципиальной неопределенностью (в рамках соотношения неопределенностей) положения электрона и не имеет прямого отношения к свойствам электромагнитного потенциала. Пересмотр или «далнейшее развитие» теории, о котором говорится в¹ (см. выше, § 1), по существу, могли бы быть направлены только против концепции потенциала в классической электродинамике или против соотношения неопределенностей. Для этого, однако, никаких оснований нет.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. 115, 485 (1959).
2. Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. 123, 1077 (1961).
3. W. Ehrenberg, R. E. Siday, Proc. Phys. Soc. B62, 8 (1949).
4. W. Furry, N. Ramsey, Phys. Rev. 118, 623 (1960).
5. M. Peshkin, I. Talmi, L. Tassie, Ann. Phys. 12, 426 (1961).
6. R. G. Chambers, Phys. Rev. Lett. 5, 3 (1960).
7. F. G. Werner, D. R. Brill, Phys. Rev. Lett. 4, 344 (1960).
8. H. Boersch, H. Hamisch, D. Wohlleben, K. Grohmann, Z. Phys. 159, 397 (1960).
9. L. Marton, см².
10. N. Byers, C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. 7, 46 (1961).
11. B. S. Deaver Jr., W. M. Fairbank, Phys. Rev. Lett. 7, 46 (1961).
12. Ф. М. Морс и Г. Фещбах, Методы теоретической физики, М., ИЛ, 1956, § 11.2.
13. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, М., Гостехиздат, 1946.
14. Brüse S. De Witt, Phys. Rev. 125, 2189 (1962).
15. Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. 125, 2192 (1962).
16. L. Tassie, M. Peshkin, Ann. Phys. 16, 177 (1961).