

**УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК****ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕХОДНЫХ МЕТАЛЛОВ. II\*)****С. В. Вонсовский, Ю. А. Изюмов****СОДЕРЖАНИЕ**

III. Свойства спиновой системы переходного металла . . . . .	4
§ 6. Гамильтониан электронной системы переходного металла . . . . .	4
§ 7. Спиновая поляризация электронов проводимости . . . . .	6
§ 8. Косвенное обменное взаимодействие электронов спин-ненасыщен- ных слоев через электроны проводимости . . . . .	9
§ 9. Спин-волновая теория ферромагнитного металла . . . . .	11
§ 10. Спин-волновая теория антиферромагнитного металла . . . . .	19
§ 11. Магнитная релаксация и резонанс в ферро- и антиферромагнитных металлах . . . . .	22
§ 12. Магнитное рассеяние медленных нейтронов в ферромагнитном металле . . . . .	29
IV. Система электронов проводимости в переходном металле . . . . .	34
§ 13. Энергия электронов проводимости в переходном ферромагнитном металле . . . . .	34
§ 14. Эффективное взаимодействие электронов проводимости через спи- новые волны и влияние его на сверхпроводящее состояние . . . . .	35
§ 15. Условие существования сверхпроводящего состояния в ферромаг- нитном металле . . . . .	39
§ 16. Аномальное электросопротивление ферромагнитного металла . . . .	42
V. Заключение . . . . .	47
Цитированная литература. II . . . . .	50

В первой части обзора был проведен анализ основных экспериментальных фактов, относящихся к свойствам электронной системы переходных металлов, и было показано, что вся специфика их физико-химических свойств связана с наличием у атомов этих элементов незаполненных электронных оболочек ( $d$  или  $f$ ) с нескомпенсированным спином. Опыт показывает, что несмотря на некоторые изменения, могущие произойти с незамкнутыми слоями электронной оболочки атомов при их объединении в кристалл, индивидуальность этих слоев в металле в значительной степени сохраняется, что означает большую локализацию спиновой плотности вблизи узлов решетки. В особенности это относится к глубоко расположенным  $4f$ -слоям редкоземельных металлов.

Обменное взаимодействие между электронами незаполненных слоев очень часто приводит в переходных металлах к установлению ферро- или антиферромагнитного состояния, в то время как их металлические свойства связаны в первую очередь с бывшими валентными электронами, образующими в кристалле коллективизированную систему электронов проводимости.

\*) Часть I опубликована в УФН 77(3), 377 (1962).

Для изучения связи электрических и магнитных свойств переходных металлов была предложена так называемая  $s-d$ -обменная модель<sup>1</sup>, элементарная и феноменологическая трактовки которой были даны в § 5. Вторая часть обзора посвящена более строгому изложению как основ  $s-d$ -модели, так и ее различных приложений для теоретической трактовки ферро- и антиферромагнитных металлов, причем в гл. III рассматриваются свойства спиновой системы металла с точки зрения влияния на нее электронов проводимости, а в гл. IV изучается обратное влияние спиновой системы на электроны проводимости.

### III. СВОЙСТВА СПИНОВОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДНОГО МЕТАЛЛА

#### § 6. Гамильтониан электронной системы переходного металла

В соответствии с принятой моделью (см. § 5) выделим в переходном металле две группы электронов: электроны незаполненных оболочек ( $d$  или  $f$ \*) и электроны проводимости ( $s$ ), причем первые будем описывать атомными локализованными функциями (2, 11), а вторые — блоховскими функциями

$$\Psi_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}, s) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} U_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) c_{\sigma}(s) = \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) c_{\sigma}(s), \quad (6.1)$$

где  $c_{\sigma}(s)$  — так называемая спиновая функция электрона (см. <sup>73</sup>, § 60).

Оператор  $s-d$ -обменного взаимодействия, согласно векторной модели Дирака, с точностью до постоянного члена можно записать в виде

$$H_{sd} = -2 \sum_{i,n} J(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_n) (s_i S_n), \quad (6.2)$$

где  $s_i$ ,  $\mathbf{r}_i$  и  $S_n$ ,  $\mathbf{R}_n$  — соответственно операторы спина и радиусы-векторы электрона проводимости и суммарного спина парамагнитного иона в узле  $n$ . Спин  $S_n$  складывается из спинов  $z$  неспаренных электронов незаполненного слоя, так что максимальная проекция спина узла равна  $s = \frac{1}{2}z$ ,  $J(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_n)$  — обменный интеграл.

Гамильтониан (6.2) в представлении вторичного квантования для электронов проводимости имеет вид

$$H_{sd} = -2 \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'\sigma\sigma'} S_n (\mathbf{k}\sigma | J(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n) s | \mathbf{k}'\sigma') a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'\sigma'}. \quad (6.3)$$

В формуле (6.3)  $a_{\mathbf{k}\sigma}$  и  $a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}$  являются фермиевскими операторами рождения и уничтожения электронов в состоянии  $\mathbf{k}\sigma$ . Используя мультипликативность спиновой и координатной частей функции (6.1), а также трансляционную инвариантность  $U_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = U_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n)$  (где  $\mathbf{R}_n$  — любой вектор кристаллической решетки), матричный элемент в (6.3) можно записать в виде

$$(\mathbf{k}\sigma | J(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n) s | \mathbf{k}'\sigma') = \frac{1}{N} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \mathbf{R}_n} J(\mathbf{k}\mathbf{k}') (\sigma | s | \sigma'), \quad (6.4)$$

где  $J(\mathbf{k}\mathbf{k}')$  —  $s-d$ -обменный интеграл<sup>1</sup>. Величины  $(\sigma | s | \sigma')$  представляют собой матрицы Паули (см. <sup>73</sup>, § 59, 60). Таким образом, гамиль-

\*) В дальнейшем всюду, где это не может привести к недоразумениям, мы будем индексом  $d$  обозначать обе незаполненные оболочки:  $3d$  и  $4f$ . В таком случае слова « $s-d$ -обменное взаимодействие» означают взаимодействие электронов проводимости с электронами незаполненных оболочек  $3d$  или  $4f$ .

тониан (6,3) можно представить в следующей форме <sup>2</sup>:

$$H_{sd} = -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} J(\mathbf{k}\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\mathbf{R}_n} \{a_{\mathbf{k}(-)}^+ a_{\mathbf{k}'(+)} S_n^- + a_{\mathbf{k}(+)}^+ a_{\mathbf{k}'(-)} S_n^+ + \\ + (a_{\mathbf{k}(-)}^+ a_{\mathbf{k}'(-)} - a_{\mathbf{k}(+)}^+ a_{\mathbf{k}'(+)} S_n^z)\}, \quad (6,5)$$

где  $S_n^\pm = S_n^x \pm iS_n^y$ . В (6,5), как и ниже, для краткости вместо индексов  $\sigma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$  пишем  $+, -$ .

Оператор (6,5) описывает обменное взаимодействие коллективизированных  $s$ -электронов с локализованными «магнитными» электронами. Полный гамильтониан электронной системы переходного металла состоит из трех частей:  $H = H_s + H_d + H_{sd}$ , где  $H_s$  — гамильтониан электронов проводимости, который в представлении вторичного квантования можно записать в виде

$$H_s = \sum_{\mathbf{k}\sigma} [E_{\mathbf{k}} - sJ(\mathbf{k}\mathbf{k})] a_{\mathbf{k}\sigma}^+ a_{\mathbf{k}\sigma}. \quad (6,6)$$

$E_{\mathbf{k}}$  — энергия электрона проводимости в металле без учета  $s$ — $d$ -взаимодействия. Добавочный член,  $-sJ(\mathbf{k}\mathbf{k})$ , обусловлен не зависящим от спина слагаемым обменного гамильтониана, приводящим к одинаковому сдвигу энергии электронов проводимости с обеими проекциями спина.

В качестве гамильтониана  $H_d$  «магнитных» электронов в дальнейшем рассматривается обменный оператор взаимодействия между  $d$ -электронами соседних ионов.

Гамильтониан в форме (6,5) впервые был получен в работе Вонсовского и Турова <sup>2</sup>, а затем, независимо, в работах <sup>3-6</sup>. При выводе (6,5) из общего гамильтониана системы взаимодействующих  $s$ - и  $d$ -электронов использовалось еще дополнительное условие гомеопolarity, т. е. постоянства числа  $d$ -электронов около узлов. Это условие в принятой здесь схеме соответствует возможности записи энергии обмена в форме (6,2).

В работе <sup>1</sup> получено следующее выражение для  $s$ — $d$ -обменного интеграла:

$$J(\mathbf{k}\mathbf{k}') = \int \int \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \varphi^*(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (6,7)$$

где  $\varphi(\mathbf{r})$  — атомная функция  $d$ -электрона;  $\Phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  — потенциал кулоновского взаимодействия  $s$ - и  $d$ -электронов. Из такого общего вида трудно что-либо заключить о зависимости  $J(\mathbf{k}\mathbf{k}')$  от квазиимпульсов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , однако это и не очень существенно. Ниже будет показано, что в выражениях для различных физических величин  $J(\mathbf{k}\mathbf{k}')$  входит при значениях  $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ , близких к предельному импульсу Ферми  $\mathbf{k}_0$ , поскольку электроны в металле сильно вырождены. Если предположить, что в металле при  $k \sim k_0$   $J(\mathbf{k}\mathbf{k}')$  меняется медленно, можно всюду полагать  $J(\mathbf{k}\mathbf{k}') \approx J(k_0, k_0) = J_0$ . По различным оценкам <sup>7</sup> абсолютная величина  $J_0$  составляет  $\sim 10^{-14} - 10^{-13}$  эрг, что на порядок или два меньше энергии Ферми  $\zeta \sim 10^{-12}$  эрг. В этих условиях появляется малый параметр  $J_0/\zeta \ll 1$ , по которому и ведется разложение термодинамических и кинетических величин, если  $s$ — $d$ -взаимодействие рассматривать как возмущение. Малость этого параметра позволяет во многих случаях ограничиться первыми двумя приближениями теории возмущений. В рамках теории возмущений в § 7 и 8 рассмотрены вопросы о распределении спиновой плотности  $s$ -электронов в переходном металле и о косвенном взаимодействии  $d$ -электронов через электроны проводимости.

## § 7. Спиновая поляризация электронов проводимости

Рассмотрим кристалл переходного металла или сплава какого-либо простого металла с диамагнитными ионными остовами и переходного металла, например сплав типа Cu-Mn. Пусть благодаря обменным связям в атомах переходного металла таких кристаллов установлен ферро- или антиферромагнитный спиновый порядок. Выясним его влияние на электроны проводимости при учете  $s$ — $d$ -обменной связи.

Гамильтониан системы  $s$ -электронов в магнитном поле  $H$ , параллельном оси квантования  $z$ , имеет вид

$$H_s = \sum_{\mathbf{k}} [E_{\mathbf{k}} - sJ(\mathbf{k}\mathbf{k}) - \mu_0 H] a_{\mathbf{k}(-)}^{\dagger} a_{\mathbf{k}(-)} + \sum_{\mathbf{k}} [E_{\mathbf{k}} - sJ(\mathbf{k}\mathbf{k}) + \mu_0 H] a_{\mathbf{k}(+)}^{\dagger} a_{\mathbf{k}(+)} + H_{sd}, \quad (7,1)$$

где  $H_{sd}$  определяется выражением (6,5), причем индекс  $n$  нумерует в данном случае узлы, занятые парамагнитными ионами.

Будем рассматривать  $s$ — $d$ -взаимодействие как малое возмущение; тогда в первом порядке теории возмущений следует учесть лишь диагональную часть  $H_{sd}$ , равную

$$- \sum_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k}\mathbf{k}) (a_{\mathbf{k}(-)}^{\dagger} a_{\mathbf{k}(-)} - a_{\mathbf{k}(+)}^{\dagger} a_{\mathbf{k}(+)}) \frac{1}{N} \sum_n S_n^z, \quad (7,2)$$

тогда вместо точного гамильтониана (7,1) получим

$$H = \sum_{\mathbf{k}} (\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}(+)}^{\dagger} a_{\mathbf{k}(+)} + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{-} a_{\mathbf{k}(-)}^{\dagger} a_{\mathbf{k}(-)}), \quad (7,3)$$

где

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\pm} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - sJ(\mathbf{k}\mathbf{k}) \pm \mu_0 H \pm J(\mathbf{k}\mathbf{k}) \frac{1}{N} \sum_n S_n^z. \quad (7,4)$$

Мы видим, что если суммарный спин кристалла отличен от нуля, в выражении для энергии электронов проводимости появляется член, обусловленный  $s$ — $d$ -обменом, имеющий смысл внутреннего молекулярного поля и приводящий к спонтанному подмагничиванию этих электронов. В самом деле, вычислим средние значения  $n_{-}$  и  $n_{+}$  чисел  $s$ -электронов с левым и правым спином:

$$n_{\pm} = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}^{\pm}, \quad (7,5)$$

где

$$n_{\mathbf{k}}^{\pm} = \langle a_{\mathbf{k}(\pm)}^{\dagger} a_{\mathbf{k}(\pm)} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\pm} - \zeta)} + 1}, \quad \beta = \frac{1}{kT}, \quad (7,6)$$

— функции распределения для электронов с различными ориентациями спина. Выражения (7,5) вычисляются обычным переходом от суммирования по  $k$  к интегрированию. Допуская квадратичный закон дисперсии для  $s$ -электронов и принимая приближение  $J(\mathbf{k}\mathbf{k}') = J_0$ , получим

$$n_{\pm} = \frac{N_s}{2} \mp \frac{3}{4} \frac{N_s}{\zeta} \left( \mu_0 H + J_0 \frac{1}{N} \sum_n S_n^z \right), \quad (7,7)$$

$$\zeta = \zeta_0 \left\{ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\mu_0 H + J_0 \frac{1}{N} \sum_n S_n^z}{\zeta_0} \right)^2 \right\}, \quad \zeta_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \frac{N_s}{V} \right)^{2/3}, \quad (7,8)$$

где  $V$  — объем кристалла и  $N_s$  — полное число  $s$ -электронов в нем.

Магнитный момент газа электронов проводимости при пренебрежении его слабым диамагнетизмом равен

$$M_s = \mu_0 \frac{1}{2} (n_- - n_+) = \frac{3}{2} N_s \mu_0 \frac{\mu_0 H}{\zeta} + \frac{3}{2} N_s \mu_0 \frac{J_0}{\zeta} \frac{1}{N} \sum_n S_n^z. \quad (7,9)$$

Первый член в (7,9) дает паулиевскую парамагнитную намагнитченность (см. также (4,8) и ниже), а второй, который не зависит от магнитного поля, — спонтанный магнитный момент  $s$ -электронов. Последний обусловлен  $s$ — $d$ -обменной связью и пропорционален магнитному моменту  $d$ -электронов, составляя по порядку величины  $J_0/\zeta$  часть его. В антиферромагнитном металле, где  $\sum_n S_n^z = 0$ , спонтанное подмагничивание электронов проводимости отсутствует. В ферромагнетиках оно достигает наибольшей величины при  $0^\circ \text{ K}$ , а выше точки Кюри обращается в нуль\*).

Изложенный вывод о  $s$ — $d$ -обменной поляризации электронов проводимости имеет статистический характер. Выясним теперь, как меняется плотность электронов с разными проекциями спина от точки к точке, следуя работе Иосиды<sup>6</sup>.

Плотность  $s$ -электронов со спином данной ориентации  $\varrho_{\pm}(\mathbf{r})$  может быть выражена через их волновые функции (6,1):

$$\varrho_{\pm}(\mathbf{r}) = \sum_s \sum_{\mathbf{k}}^{k_0^{\pm}} \Phi_{\mathbf{k}(\pm)}^* \Phi_{\mathbf{k}(\pm)}, \quad (7,10)$$

где  $k_0^{\pm}$  — граничные импульсы Ферми соответственно правой и левой проекций спина, а  $\sum_s$  означает суммирование по спиновым переменным.

Волновые функции  $\Phi_{\mathbf{k}(\pm)}$  можно найти по теории возмущений. Примем в качестве нулевого приближения для них плоские волны

$$\Phi_{\mathbf{k}(\pm)}^0 = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} C_{\pm}(s). \quad (7,11)$$

Под влиянием  $s$ — $d$ -обмена в первом порядке теории возмущений имеем

$$\Phi_{\mathbf{k}\sigma} = \Phi_{\mathbf{k}\sigma}^0 + \sum_{\mathbf{k}'\sigma'} \frac{(\mathbf{k}\sigma | H_{sd} | \mathbf{k}'\sigma')}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}} \Phi_{\mathbf{k}'\sigma'}. \quad (7,12)$$

Вычислив матричные элементы  $(\mathbf{k}\sigma | H_{sd} | \mathbf{k}'\sigma')$  с помощью функций (7,11) и подставив их в (7,12), получим

$$\Phi_{\mathbf{k}(\pm)} = \Phi_{\mathbf{k}(\pm)}^0 - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{J(\mathbf{k}\mathbf{k}')}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}} \sum_n e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{R}_n} \{ \mp S_n^z \Phi_{\mathbf{k}'(\pm)}^0 + S_n^{\pm} \Phi_{\mathbf{k}'(\mp)}^0 \}; \quad (7,13)$$

штрих у сумм означает, что исключается член с  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ . Подставив (7,13) в (7,10) и просуммировав по  $s$ , находим

$$\varrho_{\pm}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{V} \mp \frac{1}{VN} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'}^{k_0^{\pm}} \frac{J(\mathbf{k}\mathbf{k}')}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}} \sum_h \{ e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')(\mathbf{r}-\mathbf{R}_h)} + e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')(\mathbf{r}-\mathbf{R}_h)} \} S_n^z. \quad (7,14)$$

Очевидно, что при обычных температурах  $\sum_{\mathbf{k}}^{k_0^{\pm}} \frac{1}{V} = \frac{1}{V} n_{\pm}$ , поэтому можно воспользоваться выражением (7,7) для случая  $H = 0$ . Во втором члене

\*) Эти результаты впервые были получены Вонсовским<sup>1</sup> в 1946 г.

(7,14) сделаем замену переменных суммирования  $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{q}$ . В результате (7,14) можно записать в виде

$$\varrho_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{N_s}{V} \right) \pm \frac{3}{4} \left( \frac{N_s}{V} \right) \frac{J_0}{\zeta} \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{n}} S_n^z \pm \frac{1}{VN} \sum_{\mathbf{q}}' \sum_{\mathbf{k}}^{\hbar_0^{\pm}} \frac{J(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q})}{\varepsilon_{\mathbf{k} - \mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}} \sum_n \{ e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n)} + e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n)} \} S_n^z. \quad (7,15)$$

Дальнейшее вычисление выражения (7,15) требует знания зависимости  $J(\mathbf{k}\mathbf{k}')$  от импульсов. В приближении  $J(\mathbf{k}\mathbf{k}') = J_0$  суммирование по  $\mathbf{k}$  в (7,15) можно выполнить до конца. В предположении квадратичного закона дисперсии находим

$$\sum_{\mathbf{k}}^{\hbar_0} \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k} - \mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}} = \frac{3}{16} \frac{N_s}{\zeta} f(\mathbf{q}), \quad (7,16)$$

$$f(\mathbf{q}) = 1 + \frac{4k_0^2 - q^2}{4k_0q} \ln \left| \frac{2k_0 + q}{2k_0 - q} \right|. \quad (7,17)$$

С учетом этих соотношений (7,15) примет вид

$$\varrho_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{N_s}{V} \right) \pm \frac{13}{4} \left( \frac{N_s}{V} \right) \frac{J_0}{\zeta} \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{n}} S_n^z \pm \frac{13}{16} \left( \frac{N_s}{V} \right) \frac{J_0}{\zeta} \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}}' f(\mathbf{q}) \sum_n \{ e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n)} + e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n)} \} S_n^z. \quad (7,18)$$

Поскольку  $f(0) = 2$ , второй член в правой части (7,18) точно равен отсутствующему слагаемому в сумме по  $\mathbf{q}$  при  $\mathbf{q} = 0$ , поэтому он может быть объединен с этой суммой, после чего (7,18) запишется в виде

$$\varrho_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{N_s}{V} \right) \pm \frac{3}{1} \left( \frac{N_s}{V} \right) \frac{J_0}{\zeta} \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} f(\mathbf{q}) \sum_n \{ e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n)} + e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n)} \} S_n^z. \quad (7,19)$$

Легко показать, что<sup>8</sup>

$$\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} f(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}} = 12\pi \frac{N_s}{N} F(2k_0R), \quad (7,20)$$

где

$$F(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^4}. \quad (7,21)$$

Используя (7,20), выражение (7,19) можно написать в окончательной форме:

$$\varrho_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{N_s}{V} \right) \mp \frac{9}{2} \pi \left( \frac{N_s}{V} \right) \frac{J_0}{\zeta} \frac{N_s}{N} \sum_n F(2k_0|\mathbf{r} - \mathbf{R}_n|) S_n^z. \quad (7,22)$$

Первый член правой части (7,22) дает однородную спиновую плотность электронов проводимости без учета  $s$ - $d$ -взаимодействия. Второй член описывает неоднородное изменение плотности, обусловленное  $s$ - $d$ -обменной связью, абсолютная величина которого в данной точке существенно зависит от расстояния ее до парамагнитных узлов. Она максимальна вблизи парамагнитного узла и убывает, как куб расстояния от него, совершая при этом осцилляции. Около самого узла каждый член в сумме по  $n$  в (7,22) обращается в бесконечность. Это связано, по-видимому, с тем обстоятельством, что при вычислении волновых функций учтено только

первое приближение теории возмущений. Можно считать, что спиновая плотность меняется от точки к точке с амплитудой  $\sim \frac{J_0}{\zeta} \left( \frac{N_s}{V} \right)$ .

Из выражения (7,22) видно, что неоднородная составляющая плотности имеет разный знак для электронов с разной проекцией спина. Поэтому в общем случае возникает неоднородная поляризация электронов проводимости  $\Delta q = q_- - q_+$ . В разбавленном растворе переходного элемента в диамагнитном металле спиновая поляризация электронов будет существенно возрастать вблизи парамагнитных узлов. В некотором смысле это эквивалентно фриделевской экранировке заряженных примесей в металле<sup>9</sup>.

Полученный результат вполне эквивалентен также результату, найденному в теории ядерного резонанса в металлах Рудерманом и Киттелем<sup>8</sup>, поскольку сверхтонкое взаимодействие ядра с электронами проводимости описывается таким же гамильтонианом, как и  $s-d$ -обменная связь.

### § 8. Косвенное обменное взаимодействие электронов спин-ненасыщенных слоев через электроны проводимости

Если имеется система частиц, непосредственно не взаимодействующих между собой, но слабо связанных с другой системой, то иногда в рамках теории возмущений можно исключить из гамильтониана это взаимодействие, заменив его некоторой эффективной связью между частицами первой системы. Таким образом, связь системы частиц с другой системой приводит к косвенному взаимодействию между ними. Выясним, какой характер имеет косвенное взаимодействие между спинами незаполненных слоев под действием их обменной связи с  $s$ -электронами.

Для вывода эффективного спин-гамильтониана произведем усреднение гамильтониана электронной системы переходного металла (или сплава) по статистическим состояниям электронов проводимости. Полученное таким образом выражение будет содержать операторы спина парамагнитных ионов и должно описывать эффективное взаимодействие между ними.

Итак, вычислим величину

$$H_{\text{эфф}} = \frac{\text{Sp}_e (e^{-\beta H} H)}{\text{Sp}_e e^{-\beta H}}, \quad (8,1)$$

где шпур берется только по состояниям электронов проводимости. Оператор  $H = H_0 + H_{sd}$  состоит из гамильтониана системы электронов проводимости (6,6) и гамильтониана  $s-d$ -обмена (6,5). С помощью известного разложения экспоненциального оператора

$$e^{-\beta(H_0 + H')} = e^{-\beta H_0} \left\{ 1 - \int_0^\beta d\lambda_1 H'(\lambda_1) + \int_0^\beta d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 H'(\lambda_1) H'(\lambda_2) + \dots \right\}, \quad (8,2)$$

с точностью до членов второго порядка малости по  $H'$ , выражение (8,1) можно представить в виде

$$H_{\text{эфф}} = \langle H_0 \rangle_e - \int_0^\beta d\lambda_1 \langle H'(\lambda_1) H' \rangle_e + \\ + \int_0^\beta d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 \{ \langle H'(\lambda_1) H'(\lambda_2) H_0 \rangle_e - \langle H'(\lambda_1) H'(\lambda_2) \rangle_e \langle H_0 \rangle_e \}, \quad (8,3)$$

где  $\langle \dots \rangle_e = \text{Sp}_e (e^{-\beta H_0} \dots) / \text{Sp} e^{-\beta H_0}$  означает усреднение только по состояниям электронов проводимости. При таком усреднении линейные по  $H'$  члены в  $H_{\text{эфф}}$  выпадают. В выражении (8,3)  $H'(\lambda) = e^{\lambda H_0} H' e^{-\lambda H_0}$ . Эти величины легко вычисляются, если учесть, что для гамильтониана типа (6,6) имеют место соотношения

$$a_{k\sigma}(\lambda) = e^{-\lambda \varepsilon_k^\sigma} a_{k\sigma}, \quad a_{k\sigma}^+(\lambda) = e^{\lambda \varepsilon_k^\sigma} a_{k\sigma}^+. \quad (8,4)$$

После выполнения усреднений в выражении (8,3) по переменным электронов проводимости получаем вместо (8,3) в явном виде

$$H_{\text{эфф}} = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sum_{nm} \frac{J^2(\mathbf{k}\mathbf{k}')}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{R}_{nm}} \{ n_{\mathbf{k}}^+ (1 - n_{\mathbf{k}'}^-) S_n^- S_m^+ + \\ + n_{\mathbf{k}}^- (1 - n_{\mathbf{k}'}^+) S_n^+ S_m^- + [n_{\mathbf{k}}^+ (1 - n_{\mathbf{k}'}^+) + n_{\mathbf{k}}^- (1 - n_{\mathbf{k}'}^-)] S_n^z S_m^z \}, \quad (8,5)$$

где  $n_{\mathbf{k}}^\pm$  — функция распределения электронов (7,6) с квазиимпульсом  $\mathbf{k}$  и спином  $\sigma = \pm 1/2$ . При отсутствии внешнего магнитного поля  $n_{\mathbf{k}}^+ = n_{\mathbf{k}}^- = n_{\mathbf{k}}$ , поэтому (8,5) может быть записано в виде

$$H_{\text{эфф}} = - \sum_{nm} I(\mathbf{R}_{nm}) (S_n S_m), \quad (8,6)$$

где

$$I(\mathbf{R}_{nm}) = \frac{3}{8} \frac{N_s}{N^2} \frac{J_0^2}{\zeta} \sum_{\mathbf{q}} f(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}_{nm}}, \quad (8,7)$$

а функция  $f(\mathbf{q})$  определяется выражением (7,17). При получении (8,6) и (8,7) мы приняли приближение  $J(\mathbf{k}\mathbf{k}') = J_0$ .

Выражение (8,6) означает, что обменное взаимодействие между  $d$ - и  $s$ -электронами обуславливает косвенный обмен первых. Величина соответствующего эффективного обменного интеграла  $\sim J_0^2/\zeta$ . Существенной чертой этого взаимодействия является его дальнедействующий характер\*). Действительно, принимая во внимание (7,20), выражение (8,7) можно записать в виде

$$I(\mathbf{R}_{nm}) = -\frac{9}{2} \pi \frac{J_0^2}{\zeta} \left( \frac{N_s}{N} \right)^2 F_4(2k_0 R_{nm}), \quad (8,8)$$

откуда ясно, что величина  $I(\mathbf{R}_{nm})$  убывает как третья степень расстояния между парамагнитными ионами. Отметим, что пространственное распределение спиновой поляризации электронов проводимости вблизи парамагнитных узлов (7,22) описывается такой же функцией расстояния, что и косвенный обмен между узлами.

Ввиду дальнедействующего характера косвенной связи (8,7) в (8,6) нельзя ограничиваться приближением ближайших соседей, как это делается для прямого короткодействующего обмена, поэтому возможность ферро- или антиферромагнитного упорядочения под действием только косвенного обмена требует дополнительного исследования, которое будет проведено нами в § 9. Однако принципиальная возможность такого упорядочения уже видна. Ясно, что дальнедействующий характер косвенного

\*) Впервые идею о косвенной связи незамкнутых оболочек через обменное взаимодействие их с электронами проводимости высказал Зинер<sup>10</sup>, которому принадлежит феноменологическая теория обменного взаимодействия в металлах (см. § 5). Приводимый здесь расчет, являющийся вариантом расчета Касуи<sup>4</sup>, представляет собой микроскопическую разработку идеи Зинера, однако он значительно содержательнее теории Зинера, поскольку приводит к ясному доказательству дальнедействующего характера косвенного обмена.



обмена особенно важен для объяснения ферро- и антиферромагнитного упорядочения в разбавленных сплавах переходных элементов, а также для редкоземельных металлов (см. § 3).

### § 9. Спин-волновая теория ферромагнитного металла

Изложенная в § 7—8 теория ферромагнитного металла обладает рядом недостатков. Во-первых, в ней не учитывается возможность прямого обмена «магнитных» электронов, что особенно важно для  $d$ -металлов; кроме того, она не совсем последовательна с математической точки зрения: теория возмущений строится лишь для состояний электронов проводимости, операторы спина  $d$ -электронов рассматриваются как  $c$ -числа. Эти недостатки можно устранить в более строгой теории, которая, однако, пригодна только для низких температур вблизи состояния магнитного насыщения.

В начале рассмотрим ферромагнитный металл, описываемый гамильтонианом, в который, кроме оператора  $s$ — $d$ -обмена, включен оператор, описывающий прямой обмен между  $d$ -электронами, и попытаемся определить спектр элементарных возбуждений. Поскольку мы не умеем находить собственные значения гамильтонианов, выраженные в операторах спина, перейдем, следуя Гольштейну и Примакову<sup>11</sup>, к другим динамическим переменным  $b_n$  и  $b_n^\dagger$ :

$$\begin{aligned} S_n^+ &= (2s)^{1/2} f_s(\hat{n}_n) b_n, & S_n^- &= (2s)^{1/2} b_n^\dagger f_s(\hat{n}_n), & S_n^z &= s - \hat{n}_n, \\ \hat{n}_n &= b_n^\dagger b_n, & f_s(\hat{n}) &= \left(1 - \frac{\hat{n}}{2s}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (9,1)$$

Операторы  $b_n$  и  $b_n^\dagger$  подчиняются перестановочным соотношениям<sup>12</sup>

$$\left. \begin{aligned} b_n b_{n'} - b_{n'} b_n &= 0, \\ b_n b_{n'}^\dagger - b_{n'}^\dagger b_n &= 0, \quad n \neq n', \end{aligned} \right\} \quad (9,2)$$

$$b_n b_n^\dagger - b_n^\dagger b_n = 1 - \frac{2s+1}{(2s)!} b_n^{2s} b_n^{2s}. \quad (9,2')$$

Соотношения (9,2) имеют бозевский характер, соотношение же (9,2') более сложно и существенно зависит от величины спина  $s$ . В частном случае  $s = 1/2$  (9,2) имеет характер фермиевского перестановочного соотношения:

$$b_n b_n^\dagger + b_n^\dagger b_n = 1 \quad (s = 1/2). \quad (9,2'')$$

Соотношения (9,2) и (9,2'') определяют операторы Паули. В другом предельном случае  $s \rightarrow \infty$  последним членом в (9,2') можно пренебречь и (9,2') приобретает бозевский характер:

$$b_n b_n^\dagger - b_n^\dagger b_n = 1 \quad (s = \infty). \quad (9,2''')$$

В промежуточном случае перестановочные соотношения сложны, причем можно показать<sup>12</sup>, что собственными значениями оператора  $\hat{n}_n = b_n^\dagger b_n$  являются целые числа: 0, 1, 2, ..., 2s. Оператор  $\hat{n}_n$  описывает отклонения от максимальной проекции спина в узле  $n$ . В основном состоянии ферромагнетика все спины  $d$ -оболочек направлены в одну сторону, т. е. имеют максимальную проекцию  $s$  на ось квантования  $Oz$ . При малых отклонениях системы от основного состояния число узлов, в которых спин отклонен от максимального значения, не велико, поэтому

среднее значение оператора  $\hat{n}_n$  при слабых возбуждениях мало:

$$\langle \hat{n}_n \rangle_{\text{ср}} \ll 2s. \quad (9,3)$$

В этом случае  $f_s(\hat{n}) \approx 1$  и (9,2) принимают вид

$$S_n^+ = (2s)^{1/2} b_n, \quad S_n^- = (2s)^{1/2} b_n^*, \quad S_n^z = s - b_n^+ b_n. \quad (9,4)$$

С такой же степенью точности можно пренебречь последним членом в (9,2'). Таким образом, операторы  $b_n$  и  $b_n^+$  при условии (9,3) приближенно являются бозевскими. Это приближение называется *спин-волновым*.

Рассмотрим полный гамильтониан ферромагнетика в этом приближении. Если сделать фурье-разложение операторов  $b_n$  и  $b_n^+$ ,

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}_n} b_{\mathbf{q}}, \quad b_n^+ = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}_n} b_{\mathbf{q}}^+,$$

то гамильтониан можно представить в виде

$$H = H_0 + H', \quad (9,5)$$

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}^+ a_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{q}} \varepsilon_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{q}}, \quad (9,6)$$

$$H' = - \left( \frac{2s}{N} \right)^{1/2} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} J(\mathbf{k}\mathbf{k}') \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} + \mathbf{q}) (a_{\mathbf{k}(+) }^+ a_{\mathbf{k}'(-) } b_{\mathbf{q}} + a_{\mathbf{k}'(-) }^+ a_{\mathbf{k}(+) } b_{\mathbf{q}}^+) + \\ + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}\mathbf{q}'} J(\mathbf{k}\mathbf{k}') \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} + \mathbf{q}' - \mathbf{q}) (a_{\mathbf{k}(-) }^+ a_{\mathbf{k}'(-) } - a_{\mathbf{k}(+) }^+ a_{\mathbf{k}'(+)} ) b_{\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{q}'}, \quad (9,7)$$

где

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\sigma} = E_{\mathbf{k}} - 2sJ(\mathbf{k}\mathbf{k}) \delta_{\sigma, -1/2} + \sigma \hbar \omega_s, \quad (9,8)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{q}} = Iq^2 + \hbar \omega_d \quad (9,9)$$

соответственно энергии  $s$ -электронов со спином  $\sigma = \pm 1/2$  и спиновых волн с квазиимпульсом  $\mathbf{q}$ , возникающих в системе  $d$ -электронов под действием прямого обмена;  $I$  — интеграл прямого обмена для узлов ближайших соседей,  $\hbar \omega_s \equiv g_s \mu_0 H$ ,  $\hbar \omega_d \equiv g_d \mu_0 H$  и  $g_s$ ,  $g_d$  — соответственно зеемановские энергии и факторы Ланде  $s$ - и  $d$ -электронов.

Диагональная по числам заполнения часть гамильтониана  $H$  представляет энергию элементарных возбуждений системы спиновых волн и электронов проводимости, причем последние оказываются подмагниченными обменным взаимодействием с намагниченными до насыщения  $d$ -электронами. Таким образом, спектр элементарных возбуждений электронной системы ферромагнитного металла содержит две ветви — фермиевскую (электроны проводимости) и бозевскую (спиновые волны).

Оператор  $H'$  в (9,7) описывает взаимодействие этих двух типов возбуждений. Следовательно, связь  $s$ - и  $d$ -электронов в рассматриваемом приближении приводит к двум эффектам: 1) изменению энергии  $s$ -электронов (член с  $J(\mathbf{k}\mathbf{k})$  в (9,8)) и 2) взаимодействию их со спиновыми волнами, вызывающему переходы между нулевыми энергетическими уровнями системы. Оператор  $H'$  содержит два типа членов: «тройные» и «четверные» — по числу операторов рождения и уничтожения. Четверные описывают процессы упругого рассеяния спиновых волн на электронах проводимости, тройные — процессы неупругого рассеяния, при которых могут рождаться и исчезать спиновые волны. Однако в этих процессах общий спин сталкивающихся частиц сохраняется, так что оператор  $H'$  не изменяет суммарного спина системы электронов металла. Стоящие в (9,7) под

знаком суммы  $\delta$ -функции учитывают сохранение квазимпульса при столкновении элементарных возбуждений.

Пользуясь обычной теорией возмущений, можно было бы найти поправки к энергиям элементарных возбуждений, обусловленные их взаимодействием, описываемым оператором  $H'$ . С другой стороны, как уже говорилось, возмущение (9,7) вызывает переходы между нулевыми энергетическими уровнями, т. е. приводит к затуханию элементарных возбуждений, времена жизни которых могут быть найдены в рамках теории возмущений с помощью техники кинетического уравнения<sup>13</sup>. Однако мы не будем решать эти две задачи по отдельности, а подойдем к проблеме затухания с более общих позиций.

Для различных приложений не обязательно знать энергетический спектр системы, а достаточно уметь вычислять некоторые корреляционные функции и функции распределения, являющиеся статистическими средними от динамических переменных системы. Поэтому ниже рассматриваются статистические свойства элементарных возбуждений системы электронов ферромагнитного металла.

Прежде всего вычислим равновесные функции распределения для электронов проводимости и спиновых волн, определяемые как средние статистические от соответствующих чисел заполнения:

$$n_k^{\sigma} = \langle a_{k\sigma}^{\dagger} a_{k\sigma} \rangle, \quad n_q = \langle b_q^{\dagger} b_q \rangle. \quad (9,10)$$

Здесь и в дальнейшем символ  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по гиббсовскому ансамблю с полным гамильтонианом  $H$ , а именно

$$\langle \dots \rangle = \text{Sp} (e^{-\beta H} \dots) / \text{Sp} e^{-\beta H}.$$

Для вычисления функций (9,10) удобно воспользоваться методом статистических функций Грина\*), развитым Боголюбовым и Тябликовым<sup>14</sup>. Заметим сначала, что функции распределения (9,10) представляют, по существу, корреляционные функции при совпадающих аргументах  $t=t'$ . В общем случае для вычисления таких функций

$$\langle A(t) B(t') \rangle, \quad \langle B(t') A(t) \rangle, \quad (9,11)$$

где

$$A(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} A e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \quad (9,12)$$

— произвольные операторы, взятые в гейзенберговском представлении, Боголюбов и Тябликов предлагают рассматривать запаздывающие и опережающие функции Грина  $\langle\langle A(t) | B(t') \rangle\rangle_{\text{ret}}$  и  $\langle\langle A(t) | B(t') \rangle\rangle_{\text{adv}}$ , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \langle\langle A(t) | B(t') \rangle\rangle_{\text{ret}} &\equiv \theta(t-t') \langle [A(t), B(t')]_{\eta} \rangle, \\ \langle\langle A(t) | B(t') \rangle\rangle_{\text{adv}} &\equiv -\theta(t'-t) \langle [A(t), B(t')]_{\eta} \rangle, \end{aligned} \quad (9,13)$$

в которых введены обозначения

$$\theta(t-t') = \begin{cases} 1, & t > t', \\ 0, & t < t', \end{cases} \quad [A, B]_{\eta} = AB - \eta BA \quad (\eta = \pm 1). \quad (9,14)$$

Обе эти функции удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle\langle A(t) | B(t') \rangle\rangle = i\hbar \delta(t-t') \langle [A(t), B(t')]_{\eta} \rangle + \langle\langle i\hbar \frac{d}{dt} A(t) | B(t') \rangle\rangle, \quad (9,15)$$

\*) Подробное изложение метода функций Грина в квантовой статистике можно найти в обзорах<sup>15</sup>.

включающему более сложную функцию Грина  $\langle\langle ih \frac{d}{dt} A(t) | B(t') \rangle\rangle$ . Составив уравнение для этой функции, можно убедиться, что оно порождает еще более сложные гриновские функции. Получающаяся таким образом цепочка уравнений должна обрываться с помощью какого-либо приближения.

Функции Грина (9,13) позволяют найти корреляционные функции (9,11) с помощью спектрального представления

$$\langle B(t') A(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J(E) e^{-\frac{i}{\hbar} E(t-t')} dE, \quad (9,16)$$

$$\langle A(t) B(t') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J(E) e^{\beta E} e^{-\frac{i}{\hbar} E(t-t')} dE. \quad (9,17)$$

Спектральная плотность  $J(E)$  определяется фурье-компонентами  $\langle\langle A | B \rangle\rangle_E$  функций (9,13) на основании предельного соотношения (спектральная теорема)

$$\langle\langle A | B \rangle\rangle_{E+i\varepsilon} - \langle\langle A | B \rangle\rangle_{E-i\varepsilon} = (e^{\beta E} - \eta) J(E), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (9,18)$$

Имея в виду вычисление функций распределения (9,10) для квази-частиц ферромагнитного металла, введем в рассмотрение соответствующие им бозонные и фермионные функции Грина

$$\langle\langle b_q(t) | b_q^+(t') \rangle\rangle, \quad \langle\langle a_{k\sigma}(t) | a_{k\sigma}^+(t') \rangle\rangle, \quad (9,19)$$

причем первую целесообразно ставить при  $\eta=1$ , а вторую — при  $\eta=-1$ . Легко написать для них уравнения (9,15), используя гамильтониан (9,5). В эти уравнения будут входить, кроме (9,19), еще смешанные функции Грина, например

$$\langle\langle a_{k(+)} a_{k-q(-)}^+ | b_q^+ \rangle\rangle, \quad (9,20)$$

$$\langle\langle b_q^+ b_q a_{k(+)} a_{k-q(-)}^+ | b_q^+ \rangle\rangle, \quad \langle\langle a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} b_q | b_q^+ \rangle\rangle. \quad (9,21)$$

Оборвем получающуюся цепочку уравнений, выразив сложные функции Грина (9,21) через простейшие (9,19) и (9,20) с помощью приближений

$$\begin{aligned} \langle\langle b_q^+ b_q a_{k(+)} a_{k-q(-)}^+ | b_q^+ \rangle\rangle &\cong n_q \langle\langle a_{k(+)} a_{k-q(-)}^+ | b_q^+ \rangle\rangle, \\ \langle\langle a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} b_q | b_q^+ \rangle\rangle &\cong n_k^{\sigma} \langle\langle b_q | b_q^+ \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (9,22)$$

Величины  $n_q$  и  $n_k^{\sigma}$ , определяемые по (9,10), следует пока рассматривать как неизвестные функции распределения. Смысл аппроксимации (9,22) становится ясным, если использовать определение гриновских функций (9,13). Как будет показано ниже, она соответствует второму порядку теории возмущений.

С помощью (9,22) цепочка уравнений для гриновских функций превращается в замкнутую систему трех уравнений\*):

$$\begin{aligned} ih \frac{d}{dt} \langle\langle b_q | b_q^+ \rangle\rangle &= ih \delta(t-t') + \left\{ \varepsilon_q + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k}\mathbf{k}) (n_{\mathbf{k}}^- - n_{\mathbf{k}}^+) \right\} \langle\langle b_q | b_q^+ \rangle\rangle + \\ &+ \left( \frac{2s}{N} \right)^{1/2} \sum_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) \langle\langle a_{k(+)} a_{k-q(-)}^+ | b_q^+ \rangle\rangle, \end{aligned} \quad (9,23)$$

\*) Параметр  $\zeta$  формально может быть введен заменой в гамильтониане нулевого приближения (9,6)  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\pm}$  на  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\pm} - \zeta$  или эквивалентным усреднением в (9,11) по большому ансамблю Гиббса.

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \langle a_{\mathbf{k}(\pm)} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\pm} | b_{\mathbf{q}}^{\pm} \rangle \rangle = (\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\pm} - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\pm}) \langle \langle a_{\mathbf{k}(\pm)} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\pm} | b_{\mathbf{q}}^{\pm} \rangle \rangle + \left( \frac{2s}{N} \right)^{1/2} J(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) (n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{-} - n_{\mathbf{k}}^{+}) \langle \langle b_{\mathbf{q}} | b_{\mathbf{q}}^{\pm} \rangle \rangle. \quad (9,24)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \langle a_{\mathbf{k}(\pm)} | a_{\mathbf{k}}^{\pm} \rangle \rangle = i\hbar \delta(t-t') + (\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\pm} - \xi) \langle \langle a_{\mathbf{k}(\pm)} | a_{\mathbf{k}}^{\pm} \rangle \rangle, \quad (9,25)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\pm} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - s(1 \mp \mu) J(\mathbf{k}\mathbf{k}), \quad (9,26)$$

а  $\mu$  — относительная намагниченность  $d$ -электронов:

$$\mu = 1 - \frac{1}{sN} \sum_{\mathbf{q}} n_{\mathbf{q}}. \quad (9,27)$$

Решение системы уравнений находим с помощью преобразования Фурье. Для фурье-образов гриновских функций получаем

$$\langle \langle a_{\mathbf{k}(\pm)} | a_{\mathbf{k}}^{\pm} \rangle \rangle_E = \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{1}{E - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\pm} + \xi}, \quad (9,28)$$

$$\langle \langle b_{\mathbf{q}} | b_{\mathbf{q}}^{\pm} \rangle \rangle_E = \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{1}{E - \varepsilon_{\mathbf{q}} - \Delta - P_{\mathbf{q}}(E)}, \quad (9,29)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k}\mathbf{k}) (n_{\mathbf{k}}^{-} - n_{\mathbf{k}}^{+}), \quad (9,30)$$

$$P_{\mathbf{q}}(E) = \frac{2s}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{J^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) (n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{-} - n_{\mathbf{k}}^{+})}{E - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{+} + \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{-}}, \quad (9,31)$$

С помощью символического тождества

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \frac{\mathcal{P}}{x} \mp i\lambda \delta(x), \quad (9,32)$$

где  $\mathcal{P}$  — символ главного значения, легко показать, что

$$P_{\mathbf{q}}(E_{\mathbf{q}}^{\pm} i\varepsilon) = P_{\mathbf{q}}(E) \mp i\gamma_{\mathbf{q}}(E), \quad (9,33)$$

причем

$$\gamma_{\mathbf{q}}(E) = \pi \frac{2s}{N} \sum_{\mathbf{k}} J^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) (n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{-} - n_{\mathbf{k}}^{+}) \delta(E - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{+} + \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{-}). \quad (9,34)$$

На основании (9,16) при  $t = t'$  с использованием спектральной теоремы (9,18), а также соотношений (9,32) — (9,34), находим функции распределения (9,10):

$$n_{\mathbf{k}}^{\pm} = \frac{1}{e^{\beta(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\pm} - \xi)} + 1}, \quad (9,35)$$

$$n_{\mathbf{q}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{e^{\beta E} - 1} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_{\mathbf{q}}(E)}{(E - \varepsilon_{\mathbf{q}} - \Delta - P_{\mathbf{q}}(E))^2 + \gamma_{\mathbf{q}}^2(E)}. \quad (9,36)$$

В рассматриваемом приближении (9,35) есть фермиевская функция распределения для  $s$ -электронов, энергия которых (9,26) изменена  $s$ - $d$ -взаимодействием. Последнее вполне соответствует формуле (7,4), полученной с помощью теории возмущений.

Выражение (9,36) представляет суперпозицию бозевских элементарных возбуждений с резонансной интенсивностью и затуханием  $\gamma_{\mathbf{q}}(E)$ .

В случае малого затухания резонансная функция под знаком интеграла (9,36) имеет острый максимум в точке  $E = \tilde{\varepsilon}_q$ , определяемой из уравнения

$$\tilde{\varepsilon}_q - \varepsilon_q - P_q(\tilde{\varepsilon}_q) - \Delta = 0, \quad (9,37)$$

и приближенно может быть заменена на  $\delta(E - \tilde{\varepsilon}_q)$ -функцию. Таким образом, при пренебрежении затуханием вместо (9,36) имеем обычную бозевскую функцию распределения

$$n_q = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_q} - 1}. \quad (9,38)$$

Следовательно, величины  $\tilde{\varepsilon}_q$  и  $\tilde{\varepsilon}_k^\pm$  имеют смысл энергий элементарных возбуждений при заданной температуре. В приближении, принятом здесь для фермиевских гриновских функций, фермиевские возбуждения не затухают, затухание появится при учете функций Грина более высокого порядка. Энергия и затухание бозевских возбуждений будут рассмотрены ниже.

Полученные функции распределения позволяют вычислить равновесные термодинамические величины металла, например намагниченность. Оператор магнитного момента в направлении оси  $Oz$  можно записать в виде

$$\hat{M}_z = g\mu_0 s N \left( 1 - \frac{1}{sN} \sum_q b_q^+ b_q \right) + \frac{1}{2} g\mu_0 \sum_k (a_{k(-)}^+ a_{k(-)} - a_{k(+)}^+ a_{k(+)}). \quad (9,39)$$

Усреднив (9,39) по статистическому ансамблю, выразим намагниченность через функции распределения:

$$M_z = \langle \hat{M}_z \rangle = g\mu_0 s N \left\{ 1 - \frac{1}{N_s} \sum_q n_q \right\} + \frac{1}{2} g\mu_0 \sum_k (n_k^- - n_k^+). \quad (9,40)$$

Первый член дает намагниченность  $d$ -электронов ферромагнетика гейзенберговского типа в спин-волновом приближении. Второй член дает вклад в намагниченность за счет электронов проводимости. Он совпадает с полученным ранее выражением (7,9). Вычислив последнюю сумму в (9,40) и используя выражение (9,27), можно записать намагниченность в виде

$$M_z = \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{N_s}{N} \frac{J_0}{\xi} \right) M_d, \quad (9,41)$$

где  $M_d = g\mu_0 s N \mu$  — намагниченность  $d$ -электронов. Ниже мы покажем, что закон дисперсии для спиновых волн при учете  $s$ — $d$ -обмена остается квадратичным, поэтому для намагниченности ферромагнитного металла имеем обычный температурный закон  $T^{3/2}$ .

Определим теперь явный вид  $\tilde{\varepsilon}_q$ ; для этого уравнения (9,37) запишем в раскрытом виде:

$$\tilde{\varepsilon}_q = \varepsilon_q + \frac{1}{N} \sum_k J(\mathbf{k}\mathbf{k}) (n_k^- - n_k^+) + \frac{2s}{N} \sum_k \frac{J^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) (n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^- - n_k^+)}{\tilde{\varepsilon}_q - \tilde{\varepsilon}_k^+ + \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^-}. \quad (9,42)$$

Прежде всего найдем решение (9,42) при  $q=0$ . Принимая во внимание, что, согласно (9,9) и (9,26)

$$\varepsilon_0 = \hbar\omega_d, \quad \tilde{\varepsilon}_k^+ - \tilde{\varepsilon}_k^- = \hbar\omega_s + 2sJ(\mathbf{k}\mathbf{k})\mu,$$

а также приближение  $J(\mathbf{k}\mathbf{k}) = J_0$ , уравнение (9,42) можно свести к квадратному, и его два решения равны

$$\tilde{\epsilon}_0 = \frac{1}{2} \{ \hbar(\omega_s + \omega_d) + 2sJ_0(1 + \mu_s) \pm [(\hbar(\omega_s + \omega_d) + 2sJ_0(1 + \mu_s))^2 - 4[\hbar^2\omega_s\omega_d + 2sJ_0\hbar(\omega_s + \omega_d)]]^{1/2} \}, \quad (9,43)$$

где  $\mu_s$  относительная намагниченность электронов проводимости,

$$\mu_s = \frac{1}{2sN} \sum_{\mathbf{k}} (n_{\mathbf{k}}^- - n_{\mathbf{k}}^+). \quad (9,44)$$

В частном случае, когда  $g_s = g_d$ ,  $\omega_s = \omega_d = \omega_0$ , поэтому из (9,43) следует

$$\epsilon_0^{(1)} = \hbar\omega_0, \quad \tilde{\epsilon}_0^{(2)} = \hbar\omega_0 + 2sJ_0(1 + \mu_s). \quad (9,45)$$

При отсутствии магнитного поля  $\omega_0 = 0$  и  $\tilde{\epsilon}_0^{(1)} = 0$ . Таким образом, в ферромагнитном металле имеется одна ветвь спиновых волн, не отделенных щелью от основного состояния. С математической точки зрения этот результат весьма интересен. Выражение (9,42) представляет собой ряд теории возмущений. Второй член в (9,42) есть поправка первого приближения от четверных членов оператора возмущения (9,7). Тройные его члены в первом приближении дают нуль, так как они не содержат диагональных матричных элементов. Третий член в (9,42) есть поправка второго приближения от тройных членов. Для случая  $q=0$  она равняется поправке первого приближения с обратным знаком. Таким образом, поправка первого приближения по  $s$ - $d$ -взаимодействию, приводящая к появлению щели в спектре спиновых волн, компенсируется поправкой второго приближения. Это является следствием особой структуры оператора возмущений как обменного оператора. Данное обстоятельство было отмечено еще в работе <sup>16</sup>.

Появление второй ветви спиновых волн связано с подмагничиванием электронов проводимости  $s$ - $d$ -обменным взаимодействием, в результате чего последние имеют свой спонтанный магнитный момент, так что металл в целом становится эквивалентным ферриту с двумя магнитными подрешетками. Для феррита характерно наличие в спектре возбуждений высокоэнергетической ветви с энергией порядка обменного взаимодействия различных подрешеток.

Найдем теперь решения уравнения (9,42) для  $\mathbf{q} \neq 0$ . Поскольку  $\epsilon_{\mathbf{q}}$  есть четная функция  $\mathbf{q}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{\mathbf{q}}$  также является четной функцией  $\mathbf{q}$ , поэтому решение уравнения (9,42), отвечающее  $\tilde{\epsilon}_0^{(1)} = \hbar\omega_0$ , будем искать в виде

$$\tilde{\epsilon}_{\mathbf{q}} = \hbar\omega_0 + I^*q^2, \quad (9,46)$$

где  $I^*$  — эффективный параметр обменного взаимодействия.

В случае квадратичного закона дисперсии для  $s$ -электронов ( $\epsilon_{\mathbf{k}} = A\mathbf{k}^2$ ), пренебрегая различием  $g$ -факторов, для сумм, входящих в (9,42), после перехода в них от суммирования к интегрированию, получим

$$\Delta = \frac{3sJ_0^2}{2\zeta} \frac{N_s}{N} + \frac{3\mu_0 J_0 H}{2\zeta} \frac{N_s}{N}, \quad (4,47)$$

$$P_{\mathbf{q}}(E) = \frac{sJ_0^2}{4\pi^2 A q} \{ \psi_-(C_-, q) - \psi_+(C_+, q) \}, \quad (9,48)$$

где

$$\psi_{\pm}(C_{\pm}, q) = \frac{C_{\pm}}{2Ag} + \frac{1}{2} \left( k_{\pm}^2 - \frac{C_{\pm}^2}{4A^2 q^2} \right) \ln \left| \frac{C_{\pm} + 2Ak_{\pm}}{C_{\pm} - 2Ak_{\pm}} \right|, \quad (9,49)$$

причем

$$C_{\pm} = E - \tilde{\epsilon}_k^+ + \tilde{\epsilon}_k^- \pm Aq^2. \quad (9,50)$$

Разлагая (9,48) по степеням  $q^2$ , используя (7,8) для  $\xi_0$  и считая  $I \ll \xi$ , находим

$$P_q(\tilde{\epsilon}_q) = -\Delta + \frac{s \left( 3\pi^2 \frac{N_s}{N} \right)^{1/3}}{24\pi^2} \frac{J_0^2}{\xi} q^2 + \dots \quad (9,51)$$

Подставляя (9,51) в (9,42), видим, что величины  $\Delta$  взаимно сокращаются и для эффективного обменного интеграла  $I^*$  в (9,46) получаем

$$I^* = I + \frac{s \left( 3\pi^2 \frac{N_s}{N} \right)^{1/3}}{24\pi^2} \frac{J_0^2}{\xi}. \quad (9,52)$$

Такое выражение было получено в работах <sup>16-18</sup>. Второй член в (9,52) представляет собой косвенный обменный интеграл \*). Поскольку косвенный обменный интеграл всегда положителен, для существования ферромагнетизма не требуется, чтобы интеграл прямого обмена был обязательно положительным. Ферромагнетизм может существовать и при  $I=0$ , что, по-видимому, имеет место в случае кристаллов типа разбавленных сплавов марганца в меди, а также и при  $I < 0$ . Критерием ферромагнетизма становится более общее требование:  $I^* > 0$ .

Вычислим теперь величины затухания  $\gamma_q$  для спиновых волн с импульсом  $q$ . Переходя в (9,34) от суммирования к интегрированию, получим

$$\gamma_q(\tilde{\epsilon}_q) \approx \tilde{\epsilon}_q \frac{3\pi s}{8} \frac{N_s}{V} \left( \frac{J_0}{\xi} \right)^2 \frac{k_0}{q} \cdot \begin{cases} 1, & q > q_0, \\ 0, & q < q_0, \end{cases} \quad (9,54)$$

где

$$q_0 = \frac{1}{2} \frac{|\epsilon_q - 2sJ_0|}{\xi} k_0, \quad (9,55)$$

$k_0$  некоторый «средний» ( $\approx k_0^- \approx k_0^+$ ) импульс Ферми. Для спиновых волн с энергией  $\epsilon_q \ll 2sJ_0$  имеем  $q_0 \approx \frac{sJ_0}{\xi} k_0$ .

Таким образом, из (9,54) следует, что спиновые волны с малыми квазиимпульсами не затухают под влиянием  $s$ - $d$ -взаимодействия. Это связано с тем фактом, что при малых квазиимпульсах энергия спиновой волны не может удовлетворить закону сохранения энергии при столкновении ее с электроном проводимости. В таком столкновении должен переворачиваться спин электрона, а для этого требуется изменить его энер-

\*) Его также можно получить из выражения (8,6), если перейти от операторов спина к бозе-операторам и продиагонализировать возникающую при этом квадратичную форму. Тогда для энергии спиновой волны получим обычное выражение

$$\epsilon_q = 2s \sum_n I(R_n) (1 - e^{iqR_n}), \quad (9,53)$$

где суммирование ведется по всем узлам. Учитывая формулу (8,7) для  $I(R_n)$ , Находим

$$\epsilon_q = \frac{3}{4} \frac{N_s s J_0^2}{N \xi} [f(0) - f(q)], \quad (9,53')$$

где  $f(q)$  определяется по (7,17). Поскольку при малых  $q$   $f(q) \approx 2 - \frac{q^2}{6k_0^2}$ , то  $\epsilon_q = I^*(aq)^2$ , где  $I^*$  точно равен второму слагаемому в (9,52) (см. добавл. на стр. 50).



гию на величину энергии подмагничивания, т. е. на величину  $\sim 2sJ_0$ . Как только энергия спиновой волны становится достаточной для этого, она будет затухать. Энергия затухания по порядку величины составляет  $\sim \frac{J_0}{\zeta} \varepsilon_q$ , т. е. мала по сравнению с собственной энергией. Этим оправдывается применимость теории возмущений \*).

В заключение отметим, что метод функций Грина позволил более последовательно \*\*) выделить элементарные возбуждения в системе электронов ферромагнитного металла, учесть их затухание, определить влияние спиновой системы на электроны проводимости (эффект подмагничивания) и обратное влияние электронов проводимости на спин-систему (эффективный косвенный обмен \*\*\*)).

На основе полученных здесь результатов в § 11 и 12 будет рассмотрен ферромагнитный резонанс и рассеяние медленных нейтронов в металле.

## § 10. Спин-волновая теория антиферромагнитного металла

Рассмотрим теперь металл с антиферромагнитным упорядочением спинов. Предположим, что в нем можно выделить две коллинеарные магнитные подрешетки. Такая простейшая модель удовлетворительно описывает свойства антиферромагнетика. Для антиферромагнитного состояния большую роль играет магнитная анизотропия <sup>23</sup>. Поэтому наряду с обменом следует учесть анизотропное взаимодействие атомных спинов, которое в простейшем случае анизотропного кристалла, одноосного, с осью симметрии  $Oz$ , приводит к дополнительному члену в спин-гамильтониане типа (9,5)

$$-K \left\{ \sum_n (s_n^z)^2 + \sum_m (s_m^z)^2 \right\},$$

где  $K$  — константа анизотропии, а  $n$  и  $m$  — номера узлов различных подрешеток. Тогда в спин-волновом приближении гамильтониан анти-

\*) Следует отметить, что выражение (9,34) для  $\gamma_0$ , полученное с помощью метода функций Грина, совпадает с найденным ранее Туровым<sup>19</sup>, а также Митчеллом<sup>5</sup> и Абрагамсом<sup>3</sup> с помощью техники кинетического уравнения. Однако последние два автора не учитывали подмагничивания электронов проводимости, поэтому их результат формально совпадает с (9,54), где следует положить  $q_0 = 0$ . Для спиновых волн с малыми  $q_0$  их результаты неправильны.

\*\*) В частности, легко видеть, что никакого сдвига  $g$ -фактора для  $d$ -электронов, обусловленного  $s-d$ -обменом, не появляется вопреки выводу Иосиды<sup>6</sup> и работ<sup>20,21</sup>, согласно которым для ферромагнитного металла  $\tilde{g} = g \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{N_s J_0}{N \zeta} \right)$ . Это происходит потому, что зависящие от магнитного поля поправки в (9,42) взаимно сокращаются. Если пренебречь зависимостью величины  $P_q(E)$  от магнитного поля, то остающийся в (9,47) член приводит как раз к указанному выше сдвигу  $g$ -фактора. Таким образом, фиктивность этого результата обусловлена тем, что в поправке второго приближения к энергии спиновой волны незаконно пренебрегалось членом, зависящим от магнитного поля. «Сдвиг» не наблюдается и на опыте (см. добавл. на стр. 50).

\*\*\*) Метод запаздывающей и опережающей функций Грина в теории ферромагнитного металла недавно был применен также Потаповым и Тябликовым<sup>22</sup>, которые получили результаты, в основном совпадающие с приведенными выше. Однако для спектра спиновых волн они получили щель, пропорциональную третьей степени  $s-d$ -обменного интеграла. Этот результат нам представляется неточным. Для получения поправки к энергии спиновой волны в третьем приближении по  $s-d$ -обмену следовало бы учесть функции Грина более высокого порядка, чем те, которые использовались этими авторами, тогда дополнительно появляющиеся в энергии члены должны компенсировать «щель».

ферромагнитного металла имеет вид <sup>24-26</sup>

$$\begin{aligned}
 H = \sum_{\mathbf{k}\sigma} [E_{\mathbf{k}} + sJ(\mathbf{k}\mathbf{k}) + \sigma\hbar\omega_s] a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{q}} [\varepsilon_{1\mathbf{q}} \xi_{1\mathbf{q}}^{\dagger} \xi_{1\mathbf{q}} + \varepsilon_{2\mathbf{q}} \xi_{2\mathbf{q}}^{\dagger} \xi_{2\mathbf{q}}] + \\
 + \left(\frac{2s}{N}\right)^{1/2} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} J(\mathbf{k}\mathbf{k}') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{q}) g(\mathbf{q}) \{a_{\mathbf{k}(+) }^{\dagger} a_{\mathbf{k}'(-)} (\xi_{1\mathbf{q}} + \xi_{2\mathbf{q}}^{\dagger}) + \\
 + a_{\mathbf{k}'(-)}^{\dagger} a_{\mathbf{k}(+)} (\xi_{1\mathbf{q}}^{\dagger} + \xi_{2\mathbf{q}})\} + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} J(\mathbf{k}\mathbf{k}) (a_{\mathbf{k}(-)}^{\dagger} a_{\mathbf{k}(-)} - a_{\mathbf{k}(+)}^{\dagger} a_{\mathbf{k}(+)}) \times \\
 \times (\xi_{1\mathbf{q}}^{\dagger} \xi_{1\mathbf{q}} - \xi_{2\mathbf{q}}^{\dagger} \xi_{2\mathbf{q}}), \quad (10,1)
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1\mathbf{q}} &= szI \sqrt{(1+\alpha)^2 - \Gamma_{\mathbf{q}}^2} + \hbar\omega_a, \\ \varepsilon_{2\mathbf{q}} &= szI \sqrt{(1+\alpha)^2 - \Gamma_{\mathbf{q}}^2} - \hbar\omega_d, \end{aligned} \right\} \quad (10,2)$$

$$\alpha = \frac{2K}{zI}, \quad \Gamma_{\mathbf{q}} = \frac{1}{z} \sum_{\{n\}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}_n}, \quad g^2(\mathbf{q}) = \left(\frac{1+\alpha-\Gamma_{\mathbf{q}}}{1+\alpha+\Gamma_{\mathbf{q}}}\right)^{1/2}. \quad (10,3)$$

Здесь  $\varepsilon_{1\mathbf{q}}$ ,  $\varepsilon_{1\mathbf{q}}^{\dagger}$  и  $\varepsilon_{2\mathbf{q}}$ ,  $\varepsilon_{2\mathbf{q}}^{\dagger}$  — операторы рождения и уничтожения спиновых волн антиферромагнетика, имеющих энергии  $\varepsilon_{1\mathbf{q}}$  и  $\varepsilon_{2\mathbf{q}}$ . Суммирование в выражении для  $\Gamma_{\mathbf{q}}$  ведется только по  $z$  ближайшим узлам решетки.

Таким образом, в антиферромагнетике имеются две системы спиновых волн с энергиями (10,2) расщепляющимися в магнитном поле. Для малых значений квазимпульса  $q\Gamma_{\mathbf{q}} \approx 1 - \frac{1}{z} q^2$ . В этом случае можно написать две предельные формы для закона дисперсии спиновых волн ( $v=1,2$ ):

$$\varepsilon_{v\mathbf{q}} = s \sqrt{2zI} q \pm \hbar\omega_d \quad \left(\frac{1}{z} q^2 \gg \alpha\right), \quad (10,4)$$

$$\varepsilon_{v\mathbf{q}} = szI \sqrt{\alpha(\alpha+2)} + \frac{sI}{\sqrt{\alpha(\alpha+2)}} q^2 \pm \hbar\omega_d \quad \left(\frac{1}{z} q^2 \ll \alpha\right). \quad (10,5)$$

В случае малой анизотропии по отношению к обменному взаимодействию закон дисперсии для спиновых волн приближенно линейный, в случае большой анизотропии — квадратичный, причем имеется щель  $\sim \sqrt{KI}$ . Таким образом, вблизи энергетической щели закон дисперсии квадратичный, вдали от нее — линейный.

Влияние  $s$ — $d$ -обмена на спектр спиновых волн (10,2) можно исследовать с помощью метода функций Грина <sup>26</sup>, как и в случае ферромагнетика. При этом оказывается, что функции распределения спиновых волн (при пренебрежении затуханием) имеют обычный бозевский характер, а для энергий спиновых волн вместо (10,2) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{1\mathbf{q}} &= \left( szI - \frac{3s}{8(2+\alpha)} \frac{N_s}{N} \frac{J_0^2}{\zeta} \right) \sqrt{(1+\alpha)^2 - \Gamma_{\mathbf{q}}^2} + \tilde{g}\mu_0 H, \\ \tilde{\varepsilon}_{2\mathbf{q}} &= \left( szI - \frac{3s}{8(2+\alpha)} \frac{N_s}{N} \frac{J_0^2}{\zeta} \right) \sqrt{(1+\alpha)^2 - \Gamma_{\mathbf{q}}^2} - \tilde{g}\mu_0 H, \end{aligned} \quad (10,6)$$

где

$$\tilde{g} = g \left\{ 1 + \sqrt{\frac{z}{2}} \frac{J_0 \langle kT \rangle^2}{(szI)^2} \right\}. \quad (10,7)$$

Мы видим, что эффективный обменный интеграл \*), как и (9,52) для ферромагнитного металла, состоит из двух слагаемых, соответствующих прямому и косвенному обмену, однако в этом случае косвенный обмен уменьшает антиферромагнитную связь\*\*).

Для энергии затухания спиновых волн имеем выражения

$$\gamma_{\mathbf{v}\mathbf{q}} = \pm g^2(q) \frac{\pi s}{N} \sum_{\mathbf{k}} J^2(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) (n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^- - n_{\mathbf{k}}^+) \delta(\tilde{\epsilon}_{\mathbf{v}\mathbf{q}} \mp \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+ \pm \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^-), \quad (10,8)$$

которые аналогичны формуле (9,34), за исключением множителя  $g^2(\mathbf{q})$ , зависящего от анизотропии.

Вычисление суммы в (10,8) приводит к приближенному выражению

$$\gamma_{\mathbf{v}\mathbf{q}} = \tilde{\epsilon}_{\mathbf{v}\mathbf{q}} \frac{3\pi s}{16} \frac{N_s}{N} \left( \frac{J_0}{\xi} \right)^2 \frac{k_0}{q} g^2(q) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (10,9)$$

«1» берется, если величина  $\mathbf{q}$  удовлетворяет неравенству

$$\frac{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{v}\mathbf{q}} k_0}{2\xi q} < 1, \quad (10,10)$$

в противном случае  $\gamma_{\mathbf{q}}$  равно нулю. При малой анизотропии (см. (10,4)) условие (10,10) всегда выполняется, поскольку  $(ak_0) \sim 1, \frac{J_0}{\xi} \ll 1$ , и выражение (10,9) в этом случае сводится к следующему:

$$\gamma_{\mathbf{v}\mathbf{q}} = \tilde{\epsilon}_{\mathbf{v}\mathbf{q}} \frac{3\pi s}{8} \frac{N_s}{N} \left( \frac{J_0}{\xi} \right)^2 k_0. \quad (10,11)$$

Таким образом, для достаточно больших  $\mathbf{q}$  (в области линейного дисперсионного закона) затухание пропорционально энергии спиновой волны, составляя от нее  $(J_0/\xi)^2$ -часть.

В случае (10,5), т. е. вблизи щели, спиновые волны с квазиимпульсом

$$q < \frac{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{v}0}}{2\xi} k_0 \equiv q_0 \quad (10,12)$$

вообще не затухают. Для спиновой волны с  $q = q_0$ , для которой начинается затухание,

$$\gamma_{\mathbf{v}q_0} = \frac{3\pi s}{8} \frac{N_s}{N} \left( \frac{\alpha}{2+\alpha} \right)^{1/2} \frac{J_0^2}{\xi}. \quad (10,13)$$

Эта величина существенно зависит от константы анизотропии. Если принять обычные оценки:  $K \sim 10^{-17}$  эрг,  $I \sim 10^{-14}$  эрг,  $J_0 \sim 10^{-14}$  эрг,  $\xi \sim 10^{-12}$  эрг, то  $\gamma_{\mathbf{v}q_0} \sim 10^{-16}$  эрг. Таким образом, величина затухания  $\gamma_{\mathbf{v}\mathbf{q}}$  представляет собой сложную функцию квазиимпульса  $\mathbf{q}$ . При  $q < q_0$  спиновые волны не затухают. При  $q = q_0$  затухание дается формулой (10,13). При  $q^2 \gg \alpha$  (в области линейного дисперсионного закона) затухание определяется формулой (10,11) и начинает возрастать с ростом  $q$ . В этой области оно

\*) Формулы (10,6) при отсутствии анизотропных ( $\alpha = 0$ ) и малых  $q$  переходят в соответствующие формулы работы Бердышева и Карпенко<sup>24</sup>, где они впервые были получены с помощью обычной теории возмущений. Касуя<sup>4</sup>, однако, пришел к выводу, что косвенное взаимодействие через электроны проводимости в антиферромагнитном металле способствует установлению антиферромагнитного порядка. Этот его вывод является ошибочным.

\*\*) В связи с этим возникает трудность в объяснении антиферромагнетизма некоторых разбавленных сплавов переходных элементов в диамагнитных металлах<sup>27</sup>. Косвенный обмен через электроны проводимости не может привести, как здесь указывалось, к антиферромагнетизму. Ряд авторов выдвигают идею<sup>28,29</sup> о косвенной обменной связи в таких сплавах через возбужденные и локализованные состояния электронов.

не зависит от константы анизотропии и составляет при сделанных оценках  $\sim 10^{-4} \tilde{\epsilon}_q$ . В ферромагнитном металле (см. § 9) величина затухания качественно меняется с ростом  $q$  таким же образом, однако величина  $q_0$  там значительно больше ( $q_0 \sim \frac{J_0}{\xi} k_0$ ) из-за обменного подмагничивания электронов проводимости.

Полученные здесь результаты будут использованы в § 11 при обсуждении магнитного резонанса в переходных металлах.

### § 11. Магнитная релаксация и резонанс в ферро- и антиферромагнитных металлах

1.  $s$ - $d$ -обмен приводит к динамическому взаимодействию спиновых волн ферромагнетика с электронами проводимости, поэтому оно, будучи наиболее сильным из всех взаимодействий между этими двумя системами квазичастиц, определяет процессы релаксации между ними.

С помощью техники кинетического уравнения<sup>13</sup> можно определить время релаксации  $\tau_q$  спиновой волны с квазиимпульсом  $q$  в результате взаимодействия ее с  $s$ -электронами. Величина  $\tau_q$  определяется из соотношения

$$n_q(t) - n_q = \Delta n_q e^{-\frac{t}{\tau_q}}, \quad (11,1)$$

где  $n(t)$  — число спиновых волн с импульсом  $q$  в момент времени  $t$ ,  $n_q$  — их равновесное число (см. (9,38)), а  $\Delta n_q$  — отклонение числа спиновых волн при  $t=0$  от равновесного значения.

Для рассматриваемого механизма ( $s$ - $d$ -обмен) время релаксации  $\tau_q$  вычислялось в работах<sup>5, 18, 19</sup>. При этом оказалось, что  $\tau_q$  связано с величиной затухания спиновой волны  $\gamma_q$  (см. (9,34)) простым соотношением

$$\frac{1}{\tau_q} = 2\gamma_q, \quad (11,2)$$

что является характерным не только для  $s$ - $d$ -обмена, но и для всякого другого взаимодействия спиновых волн, которое может быть описано с помощью теории возмущений.

Для характеристики процесса  $s$ - $d$ -обменной релаксации полезно вычислить среднее время релаксации  $\tau_{sd}$  (среднюю вероятность исчезновения спиновой волны), определяемое выражением

$$\frac{1}{\tau_{sd}} = \frac{\sum_q \frac{1}{\tau_q} n_q}{\sum_q n_q}. \quad (11,3)$$

Эта величина была вычислена рядом авторов<sup>19, 30</sup>; в частности, Барьяхтар и Пелетминский<sup>30</sup> нашли

$$\frac{1}{\tau_{sd}} = \frac{(ak_0)^2}{\pi^{3/2} \xi \left(\frac{3}{2}\right)} \frac{T_0}{\hbar} \left(\frac{T}{\theta_K}\right)^{1/2} \Psi\left(e^{-\frac{T}{T_0}}\right), \quad (11,4)$$

где  $\theta_K$  — температура Кюри,  $T_0 = \theta_K (ak_0)^2 \left(\frac{J_0}{\xi}\right)^2$ ,  $\xi\left(\frac{3}{2}\right)$  —  $\xi$ -функции Римана,

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \ln(1-x) \ln \frac{x^2}{1-x} + \int_0^{x^{1-x}} \frac{\ln(1+t)}{t} dt. \quad (11,5)$$

При обычных оценках  $T_0$  составляет несколько градусов Кельвина. Пренебрегая магнитными взаимодействиями, мы можем рассматривать область не слишком низких температур, так что (11,4) фактически имеет смысл при  $T \gg T_0$ . Для этого случая получаем<sup>30</sup>

$$\frac{1}{\tau_{sd}} = \frac{\sqrt{\pi}}{6\bar{\epsilon}\left(\frac{3}{2}\right)} (ak_0)^2 \frac{T_0}{\hbar} \left(\frac{T}{\theta_k}\right)^{1/2}. \quad (11,6)$$

Для  $T \sim 10^\circ \text{ K}$  из (11,6) получаем  $\tau_{sd} \sim 10^{-10} \text{ сек.}$

Исследования показывают<sup>31</sup>, что время  $s$ — $d$ -обменной релаксации значительно меньше всех других времен, обусловленных иными процессами взаимодействия спиновых волн с  $s$ -электронами, в частности— взаимодействием последних с магнитным полем, порождаемым спиновыми волнами ( $\tau_m \sim 10^{-8} \text{ сек.}$ ).

В то же время оказывается<sup>30</sup>, что это магнитное взаимодействие ответственно за установление равновесного значения проекции магнитного момента на ось легчайшего намагничивания со временем релаксации  $\tau \sim 10^{-8} - 10^{-9} \text{ сек.}$ , причем последнее не зависит от температуры. Ввиду того, что  $\tau_{sd} \ll \tau_m$ ,  $\tau$  можно сделать следующий вывод: в ферромагнитном металле благодаря  $s$ — $d$ -обмену прежде всего устанавливается квазиравновесное распределение спиновых волн и электронов проводимости с заданным неравновесным значением проекции магнитного момента на ось легчайшего намагничивания. Затем благодаря магнитному взаимодействию между этими квазичастицами устанавливается равновесное значение проекции магнитного момента.

2. Малость времени релаксации  $\tau_{sd}$  делает вероятным предположение, что  $s$ — $d$ -обмен должен играть важную роль в ферромагнитном резонансе в металле. Как известно, поглощение микроволнового излучения в ферромагнетиках имеет резонансный характер, причем при поглощении происходит возбуждение определенных спиновых волн. Наличие электронов проводимости в ферромагнитном металле не меняет характера резонансного поглощения, но сильно изменяет условия его наблюдения. Это связано с тем, что благодаря наличию электронов проводимости в металле в нем наблюдается скин-эффект, в силу чего обусловленная переменным полем часть намагниченности не однородна по глубине металла. Это меняет правила отбора для переходов под влиянием взаимодействия магнетика с полем, т. е., иными словами, в металле электромагнитное поле возбуждает другие спиновые волны по сравнению, например, с ферромагнитным полупроводником, где неоднородностью переменного поля можно пренебречь.

Точная теория ферромагнитного резонанса в металлах предполагает совместное решение уравнений Максвелла и уравнения для матрицы плотности спиновой системы. Еще нет последовательного решения этой задачи, поэтому в дальнейшем мы ограничимся лишь грубыми оценками. Однако в случае, когда размеры образца много меньше глубины скин-слоя, неоднородностью переменного поля можно пренебречь.

В слабых однородных магнитных полях частоты  $\omega$  поведение магнетика описывается тензором магнитной восприимчивости  $\chi_{\alpha\beta}(\omega)$ , определяемым с помощью соотношения

$$M_\alpha(t) = M_\alpha^0 + \sum_\beta \chi_{\alpha\beta}(\omega) h_\beta(t) \quad (\alpha\beta = x, y, z), \quad (11,7)$$

где  $M_\alpha(t)$  — намагниченность в момент времени  $t$ ,  $M_\alpha^0$  — равновесная намагниченность ферромагнетика,  $h_\beta(t)$  — компонента вектора переменного магнитного поля. Тензор магнитной восприимчивости, по Кубо

и Томите <sup>32</sup>, можно выразить через оператор магнитного момента и гамильтониан  $H$ :

$$\chi_{\alpha\beta}(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{M}_\alpha(\tau), \hat{M}_\beta] \rangle e^{-i\omega\tau + \varepsilon\tau} d\tau. \quad (11,8)$$

Здесь  $\hat{M}_\alpha(t)$  — оператор  $\hat{M}_\alpha$  в гейзенберговском представлении. Из (11,8) видно <sup>33</sup>, что  $\chi_{\alpha\beta}(\omega)$  — фурье-компонента запаздывающей функции Грина  $\ll \hat{M}_\alpha(t) \hat{M}_\beta(t') \gg$  (см. (9,13))

$$\chi_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{2\pi i}{\hbar} \langle \langle \hat{M}_\alpha | \hat{M}_\beta \rangle \rangle_{E=\hbar\omega + i\varepsilon}. \quad (11,9)$$

Для того чтобы воспользоваться соотношением (11,9), необходимо выразить оператор  $M_\alpha$  через те же динамические переменные, что и гамильтониан (9,5). Очевидно, что

$$\hat{M} = g_d \mu_0 \hat{S}_d + g_s \mu_0 \hat{S}_s, \quad (11,10)$$

где  $\hat{S}_d$  и  $\hat{S}_s$  — операторы суммарного спина  $d$ - и  $s$ -электронов.

Пусть резонанс наблюдается в следующих условиях: постоянное магнитное поле  $H$  направлено вдоль оси  $z$ , а перпендикулярное к нему переменное поле линейно поляризовано вдоль оси  $x$ . Тогда достаточно вычислить лишь одну компоненту тензора  $\chi_{xx}(\omega)$ . В спин-волновом приближении, используя (9,4), получаем

$$S_d^x = \sum_j S_j^x = \frac{1}{2} (2sN)^{1/2} (b_0 + b_0^+). \quad (11,11)$$

Это означает, что в однородном резонансе электромагнитное поле возбуждает спиновые волны только с  $q=0$ . Суммарные же проекции спина  $s$ -электронов выражаются через ферми-операторы <sup>34</sup>:

$$\begin{aligned} S_s^x &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} [a_{\mathbf{k}(+)}^+ a_{\mathbf{k}(+)} + a_{\mathbf{k}(+)}^+ a_{\mathbf{k}(+)}], \\ S_s^y &= \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{k}} [a_{\mathbf{k}(+)}^+ a_{\mathbf{k}(-)} - a_{\mathbf{k}(-)}^+ a_{\mathbf{k}(+)}], \\ S_s^z &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} [a_{\mathbf{k}(-)}^+ a_{\mathbf{k}(-)} - a_{\mathbf{k}(+)}^+ a_{\mathbf{k}(+)}]. \end{aligned} \quad (11,12)$$

Оператор полного магнитного момента (11,10) не коммутирует с гамильтонианом (9,5) из-за наличия в нем недиагональных членов с  $k \neq k'$ , описывающих процессы  $s$ — $d$ -обмена, при которых может измениться импульс электрона проводимости. Это обуславливает возможность перекачки энергии от спин-системы  $d$ -электронов на увеличение кинетической энергии  $s$ -электронов. Ввиду этого можно ожидать, что  $s$ — $d$ -обмен приведет к уширению линии поглощения ферромагнитного резонанса.

В силу (11,10) имеем

$$\begin{aligned} \langle \langle M_x | M_x \rangle \rangle &= \mu_0^2 \{ g_d^2 \langle \langle S_d^x | S_d^x \rangle \rangle + g_s g_d \langle \langle S_s^x | S_d^x \rangle \rangle + \\ &\quad + g_s g_d \langle \langle S_d^x | S_s^x \rangle \rangle + g_s^2 \langle \langle S_s^x | S_s^x \rangle \rangle \}. \end{aligned} \quad (11,13)$$

Каждая из четырех функций Грина в (11,13) в силу (11,11) и (11,12)

выражается через операторы вторичного квантования:

$$\left. \begin{aligned} \langle \langle S_d^x | S_d^x \rangle \rangle &\approx \frac{1}{2} sN \langle \langle b_0 | b_0^+ \rangle \rangle + \text{с. с.}, \\ \langle \langle S_s^x | S_d^x \rangle \rangle &\approx \frac{1}{4} (2sN)^{1/2} \langle \langle \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}(-)}^+ a_{\mathbf{k}(+)} | b_0^+ \rangle \rangle + \text{с. с.}, \\ \langle \langle S_d^x | S_s^x \rangle \rangle &\approx \frac{1}{4} (2sN)^{1/2} \langle \langle b_0 | \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}(+)}^+ a_{\mathbf{k}(-)} \rangle \rangle + \text{с. с.}, \\ \langle \langle S_s^x | S_s^x \rangle \rangle &\approx \frac{1}{4} \langle \langle \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}(-)}^+ a_{\mathbf{k}(+)} \left| \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}(+)}^+ a_{\mathbf{k}(-)} \right\rangle \rangle + \text{с. с.} \end{aligned} \right\} \quad (11,14)$$

Здесь символ с. с. означает, что к соответствующему выражению добавляется функция Грина, составленная из сопряженных операторов, например к  $\langle \langle b_0 | b_0^+ \rangle \rangle$  добавляется  $\langle \langle b_0^+ | b_0 \rangle \rangle$ . Заметим, что выражения (11,14) являются приближенными, поскольку в них отброшены гриновские функции вида  $\langle \langle b_0 | b_0 \rangle \rangle$  и т. п., которые, как в этом можно убедиться, составляя для них уравнения движения, оказываются более высокого порядка.

Таким образом, для вычисления  $\chi_{xx}$  следует найти четыре гриновские функции, четыре другие (с. с.) искать специально не нужно, поскольку существует соотношение, связывающее их фурье-компоненты:

$$\langle \langle A^+ | B^+ \rangle \rangle_E = -\langle \langle A | B \rangle \rangle_{-E}^*.$$

Первые две функции в (11,14) легко находятся из (9,29) и (9,24), где нужно положить  $q=0$ . Для двух других функций нужно составить уравнения движения. Аппроксимируя более высокие функции Грина аналогично (9,22), легко написать систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \ll \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}(-)}^+ a_{\mathbf{k}(+)} \left| \sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'(+)}^+ a_{\mathbf{k}'(-)} \gg &= i\hbar \delta(t-t') \sum_{\mathbf{k}} (n_{\mathbf{k}}^- - n_{\mathbf{k}}^+) + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}} (\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^+ - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^-) \ll a_{\mathbf{k}(-)}^+ a_{\mathbf{k}(+)} \left| \sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'(+)}^+ a_{\mathbf{k}'(-)} \gg - \\ &- \left( \frac{2s}{N} \right)^{1/2} \sum_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k}\mathbf{k}) (n_{\mathbf{k}}^- - n_{\mathbf{k}}^+) \ll b_0 \left| \sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'(+)}^+ a_{\mathbf{k}'(-)} \gg, \\ i\hbar \frac{d}{dt} \ll b_0 \left| \sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'(+)}^+ a_{\mathbf{k}'(-)} \gg &= \\ &= \left[ \varepsilon_0 + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k}\mathbf{k}) (n_{\mathbf{k}}^- - n_{\mathbf{k}}^+) \right] \ll b_0 \left| \sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'(+)}^+ a_{\mathbf{k}'(-)} \gg - \\ &- \left( \frac{2s}{N} \right)^{1/2} \sum_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k}\mathbf{k}) \ll a_{\mathbf{k}(-)}^+ a_{\mathbf{k}(+)} \left| \sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'(+)}^+ a_{\mathbf{k}'(-)} \gg. \end{aligned} \right\} \quad (11,15)$$

В принятом приближении эта цепочка превращается в замкнутую систему, которая легко решается. Гриновские функции, определяемые уравнениями (11,15), имеют только вещественные полюсы. Ввиду того, что согласно (9,54)  $\gamma_q=0$  при  $q=0$ , гриновские функции  $\ll b_0 | b_0^+ \gg$  и  $\ll \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}(-)}^+ a_{\mathbf{k}(+)} | b_0^+ \gg$  имеют также лишь вещественные полюсы. Легко видеть, что все функции из (11,14) имеют по два вещественных полюса, одинаковых для всех из них и определяемых выражениями (9,43) — энергиями спиновых волн с нулевым квазиимпульсом.

Подставляя найденные значения гриновских функций в (11,9), получим значение для вещественной части магнитной восприимчивости:

$$\chi_{xx}(\omega) = \frac{\mu_0^2 s N}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \{ -\omega^2 [g_d^2 \omega_d + g_s^2 \omega_s \mu_s + 2sJ_0 \mu_s (g_s - g_d)^2] + \\ + [g_d^2 \omega_s + g_s^2 \omega_d \mu_s + 2sJ_0 (g_d + g_s \mu_s)^2] [\omega_s \omega_d + 2sJ_0 (\omega_d + \omega_s \mu_s)] \}. \quad (11,16)$$

Здесь  $\omega_1 = \frac{\varepsilon_0^{(1)}}{\hbar}$  и  $\omega_2 = \frac{\varepsilon_0^{(2)}}{\hbar}$  — резонансные частоты. Поскольку затухание в данном случае отсутствует, мнимая часть магнитной восприимчивости может быть формально выражена через  $\delta(\omega \pm \varepsilon_0^{(1,2)})$ -функцию. Выражение (11,16) совпадает в точности с соответствующим выражением для восприимчивости феррита с двумя подрешетками и намагниченностями  $\mu_s$  и 1. Таким образом, в ферромагнитном металле должны существовать две резонансные частоты. Как видно из (9,45), одна из них близка к частоте Лармора  $\omega_0$ , другая сдвинута от нее в инфракрасную область на величину  $\sim \frac{2sJ_0}{\hbar}$ . При равенстве  $g$ -факторов выражение (11,16) сильно упрощается \*):

$$\chi_{xx}(\omega) = \chi_0 \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (11,17)$$

$\chi_0$  есть статическая восприимчивость металла

$$\chi_0 = \frac{g\mu_0 s N (1 + \mu_s)}{H} \equiv \frac{M_d + M_s}{H}. \quad (11,18)$$

Вторая частота

$$\omega_2 \leftarrow \omega_0 + \frac{2sJ_0}{\hbar} (1 + \mu_s) \quad (11,19)$$

в данном случае вообще выпадает из выражения для восприимчивости, что имеет место и в ферритах, поэтому резонанс в инфракрасной области спектра ( $s$ — $d$ -обменный резонанс) может наблюдаться только при различии  $g$ -факторов у  $d$ - и  $s$ -электронов.

Полезно отметить, что часть восприимчивости, пропорциональная намагниченности  $s$ -электронов  $\mu_s$ , произошла от функции Грина смешанного типа, а также от функций, относящихся только к электронам проводимости (см. три последние строчки в (11,14)). Другая часть, пропорциональная намагниченности  $d$ -электронов, происходит от функций  $\ll b_0 | b_0^+ \gg$ . Поэтому, пренебрегая первыми тремя функциями Грина, мы пренебрегаем намагниченностью  $s$ -электронов по сравнению с намагниченностью  $d$ -электронов. Последняя всегда значительно больше, как это видно из (9,41). При малых значениях отношения  $J_0/\zeta$  намагниченностью  $s$ -электронов можно пренебречь. Таким образом, для этого случая резонансные свойства системы описываются в основном функцией Грина  $\ll b_0 | b_0^+ \gg$ . Оставив в выражении (11,13) только эту функцию, мы учитываем лишь вклад в магнитную восприимчивость металла от  $d$ -электронов.

После подстановки в (11,9) выражения (9,29) при  $q=0$  получим

$$\chi_{xx}^d(\omega) = \frac{\chi_0 \omega_0}{2} \left\{ \frac{\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\hbar} - \omega}{(\tilde{\varepsilon}_0/\hbar - \omega)^2 + \gamma_0^2/\hbar^2} + \frac{\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\hbar} + \omega}{(\tilde{\varepsilon}_0/\hbar + \omega)^2 + \gamma_0^2/\hbar^2} \right\} + \\ + i \frac{\chi_0 \omega_0}{2} \left\{ \frac{\gamma_0/\hbar}{(\tilde{\varepsilon}_0/\hbar - \omega)^2 + \gamma_0^2/\hbar^2} - \frac{\gamma_0/\hbar}{(\tilde{\varepsilon}_0/\hbar + \omega)^2 + \gamma_0^2/\hbar^2} \right\}. \quad (11,20)$$

\*) Микроскопический вывод формулы (11, 17) был дан Изюмовым и Поляком<sup>25</sup> с помощью варианта метода Кубо и Томиты, основанного на теории возмущений.



Таким образом, магнитная восприимчивость описывалась бы классической функцией Лоренца, если бы затухание  $\gamma_0 \neq 0$ . Ширина линии при этом  $\Delta\omega = \frac{2\gamma_0}{\hbar}$ . Хотя для  $s$ - $d$ -взаимодействия, по (9,54),  $\gamma_0 = 0$  и поэтому в однородном резонансе линия не уширяется, мы используем выражение (11,20) для оценки ширины линии при учете скин-эффекта.

Когда размеры образца меньше глубины скин-слоя, переменное поле возбуждает спиновые волны с квазимпульсами, лежащими вблизи значения обратной глубины скин-слоя  $\delta$ . т. е. при

$$q \sim \frac{1}{\delta} = \frac{\sqrt{4\pi\sigma\omega_0\mu_2(\omega_0)}}{c}, \quad (11,21)$$

где  $\sigma$  — электропроводность металла,  $\mu_2(\omega_0)$  — мнимая часть магнитной восприимчивости при резонансной частоте. Пользуясь (9,54), можно вычислить соответствующую этой спиновой волне величину затухания и, по аналогии с формулой (11,20) для однородного резонанса, считать что ширина линии, обусловленная  $s$ - $d$ -обменом, равна

$$\Delta\omega = \frac{2\gamma_q}{\hbar}. \quad (11,22)$$

При этом следует иметь в виду, что  $\mu_2$  сама зависит от ширины линии, поэтому (11,12) представляет, по существу, некоторое уравнение, неявным образом определяющее ширину линии  $\Delta\omega$ . На это впервые обратили внимание Ахиезер, Каганов и Барьяхтар<sup>30</sup>.

Подставим теперь выражение для  $q$  в формулу (9,54), предполагая, что  $q > q_0$ . Это предположение ограничивает верхний предел  $s$ - $d$ -обменного интеграла, при котором  $s$ - $d$ -взаимодействие может вызывать уширение линии. В противном случае ширина линии обращается в нуль. Итак, разрешая уравнение (11,12), получим<sup>31</sup>

$$\Delta\omega = \left( \frac{3\pi}{4} s \frac{N_s}{N} \frac{J_0^2}{\xi^2 \hbar} \omega k_0 \right)^2 \frac{c^2}{4\pi\sigma\Omega_0^2}. \quad (11,23)$$

Здесь  $\Omega_0$  — резонансная частота. Точная количественная оценка  $\Delta\omega$  по (11,23) весьма затруднительна, так как неизвестен точно порядок величины  $J_0$ , от которой  $\Delta\omega$  зависит очень сильно ( $\Delta\omega \sim J_0^4$ ). Однако из условия (9,55), при котором только и справедлива формула (11,23), находим, что  $J_0$  не должна превышать  $10^{-14}$  эрг. Это означает, что обусловленная рассматриваемым механизмом релаксации максимальная величина  $\Delta\omega$  при  $\sigma \sim 10^{17} \text{сек}^{-1}$  (комнатные температуры) и  $\omega = \Omega_0 \sim 10^4 \text{сек}^{-1}$  составляет  $10^9 \text{сек}^{-1}$ .

Согласно (11,23)  $\Delta\omega$  должна уменьшаться с понижением температуры прямо пропорционально электросопротивлению. Однако в области низких температур скин-эффект становится аномальным и формула (11,23) уже неприменима. Условие применимости теории нормального скин-эффекта в ферромагнитном металле при резонансной частоте имеет вид

$$\delta_0^2 \gg l^2 \mu_2, \quad (11,24)$$

где  $\delta_0$  — глубина скин-слоя при  $\mu=1$ ,  $l$  — средняя длина свободного пробега электронов. Поскольку в резонансе  $\mu_2 \gg 1$ , условие (11,24) может легко нарушаться. Для крайне аномального скин-эффекта ( $\delta_0^2 \ll l^2 \mu_2$ ), как известно, можно пользоваться формальными выражениями, справедливыми в случае нормального скин-эффекта, заменив в них электропроводность  $\sigma$  на  $\sigma_{\text{эфф}}$ , определяемую из условия

$$\sigma_{\text{эфф}} = \sigma \frac{\delta(\sigma_{\text{эфф}})}{l}. \quad (11,25)$$

Исправив таким образом выражение (11,23), получим ширину линии в области аномального скин-эффекта<sup>31</sup>

$$\Delta\omega_a = \left( \frac{3\pi}{4} s \frac{N_s}{N} \frac{J_0^2}{\xi^2 \hbar} \omega k_0 \right)^{3/2} \left( \frac{c^2 l}{4\pi\sigma\Omega_0^2} \right)^{1/2}. \quad (11,26)$$

$\Delta\omega_a$  не зависит от температуры, так как не зависит от температуры  $\sigma/l$ . Принимая, что  $\sigma/l \sim 10^{22} \text{ сек}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ , а все остальные оценки взяв прежними, находим снова  $\Delta\omega_a \sim 10^9 \text{ сек}^{-1}$ , в то время как при низких температурах ( $\sigma \sim 10^{18} \text{ сек}^{-1}$ ) формула (11,23) дает  $\Delta\omega \sim 10^8 \text{ сек}^{-1}$ .

Туров<sup>31</sup> рассмотрел вклад в ширину резонансной линии, обусловленный взаимодействием  $s$ -электронов с магнитными полями, вызванными спиновыми волнами. Он показал, что эти процессы дают значительно меньший вклад в ширину линии. Таким образом, из всех процессов спин-электронной релаксации в ферромагнитном металле преобладает  $s-d$ -обменная релаксация.

3. Рассмотрим теперь резонанс в антиферромагнитном металле. Операторы суммарного спина  $s$ -электронов выражаются теми же формулами (11,12). Нетрудно показать, что для суммарного спина  $d$ -электронов в спин-волновом приближении имеются соотношения (см. § 10):

$$\left. \begin{aligned} S_d^x &= \frac{1}{2} (sN)^{1/2} g(0) (\xi_{10} + \xi_{20} + \xi_{10}^\dagger + \xi_{20}^\dagger), \\ S_d^y &= \frac{1}{2i} (sN)^{1/2} g(0) (\xi_{10} - \xi_{20} + \xi_{20}^\dagger - \xi_{10}^\dagger), \\ S_d^z &= \sum_q (\xi_{2q}^\dagger \xi_{2q} - \xi_{1q}^\dagger \xi_{1q}). \end{aligned} \right\} \quad (11,27)$$

С помощью (11,27) можно, как и в случае ферромагнитного металла, вычислить магнитную восприимчивость как функцию частоты. В частном случае, когда  $s-d$ -взаимодействие отсутствует, для вещественной части восприимчивости получаем выражение

$$\begin{aligned} \text{Re } \chi_{xx}(\omega) &= \chi_s^0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + \\ &+ \frac{g^2 \mu_0^2 s N}{2\hbar} \left( \frac{\alpha}{\alpha + 2} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\frac{\varepsilon_0}{\hbar} + \omega_0}{(\varepsilon_0/\hbar + \omega_0)^2 - \omega^2} + \frac{\frac{\varepsilon_0}{\hbar} - \omega_0}{(\varepsilon_0/\hbar - \omega_0)^2 - \omega^2} \right\}; \end{aligned} \quad (11,28)$$

поглощение в этом случае отсутствует, поэтому  $\text{Im } \chi_{xx}(\omega) = 0$ .

Первый член в (11,28) соответствует спиновому резонансу на  $s$ -электронах,  $\chi_s^0$  — статическая восприимчивость электронного газа. Второй член описывает резонанс в системе  $d$ -электронов. Он разбивается на два слагаемых, каждое из которых описывает резонанс за счет возбуждения спиновых волн с энергиями  $\varepsilon_0 \pm \hbar\omega_0$ . При  $\omega = 0$ ,  $H \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  этот член переходит в выражение для статической восприимчивости антиферромагнетика

$$\chi_{\perp} = \frac{g^2 \mu_0^2 N}{2\alpha I}. \quad (11,29)$$

Таким образом, при слабой  $s-d$ -обменной связи в антиферромагнетике должны наблюдаться три резонансные частоты:  $\omega_0$  и  $\frac{\varepsilon_0}{\hbar} \pm \omega_0$ .

Вблизи частот спинового электронного резонанса ( $\omega \sim \omega_0$ ) преобладает вклад в  $\chi_{xx}(\omega)$  от  $s$ -электронов; вблизи антиферромагнитных

частот  $\left(\omega \sim \frac{\varepsilon_0}{\hbar} \pm \omega_0\right)$  преобладает вклад от  $d$ -электронов. Однако ввиду того, что

$$\frac{\chi_s^0}{\chi_{\perp}} = \frac{3z}{4} \frac{N_s}{N} \frac{I}{\xi} \ll 1, \quad (11,30)$$

интенсивность спинового электронного резонанса меньше, чем антиферромагнитного.

$s$ — $d$ -обмен не меняет существенно интенсивность резонансных линий, но влияет на их форму <sup>26</sup>. Как и в случае ферромагнетика, в антиферромагнитном металле  $s$ — $d$ -обменная связь не приводит к уширению резонансных линий в однородном поле. Однако в ферромагнетике причиной этому было обменное подмагничивание  $s$ -электронов, а в антиферромагнетике — наличие щели в спектре спиновых волн, происходящей от действия поля анизотропии (см. (10,9)).

При учете скин-эффекта  $s$ — $d$ -обмен приводит к уширению линии типа (11,22). В случае антиферромагнитного резонанса  $s$ — $d$ -обмен тесно переплетается с действием анизотропии. Так интенсивность и ширина антиферромагнитных резонансных линий оказываются пропорциональными некоторым степеням константы анизотропии. Однако в эти величины анизотропия входит в силу разных причин. Интенсивность зависит от анизотропии благодаря тому, что выражения для поперечных компонент намагниченности  $d$ -электронов определяется через функцию  $g(0)$  (см. (11,27)), содержащую константу анизотропии. Выражение же для затухания спиновых волн, а значит, и ширина линии, связаны с анизотропией главным образом через механизм  $s$ — $d$ -обмена (см. (10,1) и (10,9)).

## § 12. Магнитное рассеяние медленных нейтронов в ферромагнитном металле

Как уже отмечалось в § 2, важную информацию о состоянии электронной системы ферромагнитного металла может дать изучение магнитного рассеяния медленных нейтронов. В тех случаях, когда длина волны нейтрона порядка межатомных расстояний, в ферромагнетике возникает когерентное рассеяние нейтронов благодаря взаимодействию их со спонтанно упорядоченной системой атомных магнитных моментов. Электроны проводимости будут также давать вклад в рассеяние, как непосредственно, так и путем изменения рассеяния, от внутренних слоев. Здесь мы рассмотрим влияние электронов проводимости на рассеяние нейтронов ферромагнетиком.

Эффективное сечение рассеяния  $\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{p'}}$  на единицу телесного угла и единичный интервал энергии неполяризованного пучка нейтронов можно вычислить с помощью техники временного формализма в теории рассеяния, которая приводит к следующей общей формуле <sup>37</sup>:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{p'}} = \frac{M^2}{(2\pi)^3 \hbar^5} \frac{p'}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{\frac{i}{\hbar}(E_{p'} - E_p)t} \langle V_{p'p}^+ V_{p'p}(t) \rangle. \quad (12,1)$$

Здесь  $M$  — масса нейтрона,  $(p, E_p)$  и  $(p', E_{p'})$  — начальные и конечные импульсы и энергии нейтрона,  $V_{p'p}$  — матричный элемент оператора взаимодействия нейтрона с рассеивателем, взятый по состояниям нейтрона в начальном и конечном пучках,  $V_{p'p}(t)$  — тот же оператор в гейзенберговском представлении с гамильтонианом рассеивателя. Черта над

произведением операторов означает усреднение по спиновым состояниям в нейтронном пучке.

Взаимодействие медленного нейтрона с электронной системой кристалла следует рассматривать как взаимодействие электронного тока  $\mathbf{j}_l$  с полем, порождаемым магнитным моментом нейтрона, так что оператор взаимодействия можно писать в виде

$$V = \sum_l \frac{2\gamma\mu_{\text{яд}}s_n \times (\mathbf{r}_l - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}|^3} \frac{1}{c} \mathbf{j}_l, \quad (12,2)$$

где  $s_n$  — оператор спина нейтрона,  $\mu_{\text{яд}}$  — ядерный магнетон Бора,  $\gamma=1,93$  — гиромагнитное отношение для нейтрона,  $\mathbf{r}_l$  и  $\mathbf{r}$  — координаты  $l$ -го электрона и нейтрона. Суммирование в (12,2) производится по всем неспаренным электронам кристалла.

Ток  $\mathbf{j}_l$  в общем случае имеет орбитальную и спиновую части, причем матричный элемент для него между электронными состояниями  $\psi_n$  и  $\psi_m$  имеет вид <sup>38</sup>

$$\frac{1}{c} \psi_n^* \mathbf{j} \psi_m = i\mu_0 (\psi_m \nabla \psi_n^* - \psi_n^* \nabla \psi_m) + 2\mu_0 \text{rot} (\psi_n^* s \psi_m). \quad (12,3)$$

Здесь  $s$  — оператор спина электрона.

В случае переходного металла нейтроны будут рассеиваться на незамкнутых слоях оболочек атомов и на электронах проводимости. Халперн и Джонсон <sup>39</sup> показали, что матричный элемент  $V_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a$  взаимодействия нейтрона со спинами  $S_j$  незаполненных слоев, находящихся в узлах решетки, равен

$$V_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a = -\frac{4\pi\hbar^2}{M} r_0 \gamma F(\mathbf{q}) \sum e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}_j} (S_j, (s_n \mathbf{e}) \mathbf{e} - s_n). \quad (12,4)$$

Здесь  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$  — вектор рассеяния,  $\mathbf{e} = \mathbf{q}/q$ ,  $\mathbf{R}_j$  — координата  $j$ -го атома,  $r_0 = e^2/mc^2$  — классический радиус электрона,

$$F(\mathbf{q}) = \int d\tau \psi^* \sum_{\nu=1}^z \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_\nu} (s_\nu S)}{s(s+1)} \psi \quad (12,5)$$

— магнитный атомный форм-фактор. Здесь  $\psi$  — волновая функция атома,  $s_\nu$  и  $\mathbf{r}_\nu$  — спин и координата  $\nu$ -го электрона атома. Суммирование ведется по всем  $z$  электронам, образующим некомпенсированный слой атома со спином  $s = \frac{1}{2}z$ .

Матричный элемент  $V_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^s$  оператора взаимодействия нейтрона с электронами проводимости равен <sup>40</sup>

$$V_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^s = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\sigma\sigma'} (\mathbf{k}'\sigma' | \cdot | \mathbf{p} | \mathbf{k}\sigma) a_{\mathbf{k}'\sigma'}^+ a_{\mathbf{k}\sigma}, \quad (12,6)$$

где

$$(\mathbf{k}'\sigma' | v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} | \mathbf{k}\sigma) = -\frac{4\pi\hbar^2}{M} r_0 \gamma \left( \int_V e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}'\sigma'}^* s \varphi_{\mathbf{k}\sigma} d\tau, (s_n \mathbf{e}) \mathbf{e} - s_n \right), \quad (12,7)$$

$\varphi_{\mathbf{k}\sigma}$  — волновые функции  $s$ -электрона.

С помощью выражений (12,4), (12,6) и (12,7) нетрудно теперь записать коррелятор

$$\begin{aligned} \langle V_{p'p}^+ V_{p'p}(t) \rangle = & \left( \frac{4\pi\hbar^2}{M} r_0 \gamma \right)^2 \frac{1}{4} (\delta_{\alpha\beta} - e_\alpha e_\beta) \times \left\{ F^2(\mathbf{q}) \sum_{j,j'} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_{j'})} \langle S_j^\alpha S_{j'}^\beta(t) \rangle + \right. \\ & + F(\mathbf{q}) \sum_j e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}_j} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\sigma\sigma'} \left( \int_V e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}'\sigma'}^* s^\alpha \varphi_{\mathbf{k}\sigma} d\tau \right)^* \langle a_{\mathbf{k}'\sigma'}^+ a_{\mathbf{k}\sigma} S_j^\beta(t) \rangle + \\ & + F(\mathbf{q}) \sum_j e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}_j} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\sigma\sigma'} \int_V e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}'\sigma'}^* s^\alpha \varphi_{\mathbf{k}\sigma} d\tau \langle S_j^\beta a_{\mathbf{k}'\sigma'}^+(t) a_{\mathbf{k}\sigma}(t) \rangle + \\ & \left. + \sum_{\substack{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1' \\ \sigma\sigma'\sigma_1\sigma_1'}} \left( \int_V e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}'\sigma'}^* s^\alpha \varphi_{\mathbf{k}\sigma} d\tau \right)^* \int_V e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}_1\sigma_1'}^* s^\beta \varphi_{\mathbf{k}_1\sigma_1} d\tau \langle a_{\mathbf{k}\sigma}^+ a_{\mathbf{k}'\sigma'} a_{\mathbf{k}_1\sigma_1'}^+(t) a_{\mathbf{k}_1\sigma_1}(t) \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (12,8)$$

Отсюда ясно, что сечение рассеяния (12,1) выражается через корреляторы динамических переменных системы: операторов спина незаполненных слоев атомов и операторы вторичного квантования для электронов проводимости. При низких температурах воспользуемся спин-волновым приближением и перейдем от операторов спина к бозе-операторам рождения и уничтожения спиновых волн посредством формул (9,4). Из всех корреляционных функций, возникающих в (12,8), будем рассматривать только  $\langle b_g^+ b_g(t) \rangle$ ,  $\langle b_g b_g^+(t) \rangle$ ,  $\langle a_{\mathbf{k}\sigma}^+ a_{\mathbf{k}\sigma}(t) \rangle$  и  $\langle a_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}^+(t) \rangle$ . Функции, например, вида  $\langle b_g b_g(t) \rangle$  или  $\langle b_g a_{\mathbf{k}\sigma}^+(t) a_{\mathbf{k}\sigma}(t) \rangle$  дают малый вклад в рассеяние либо в силу малого числа спиновых волн, либо из-за предполагаемой малости  $s$ - $d$ -взаимодействия.

Корреляционные функции, относящиеся к электронам проводимости, легко вычисляются с помощью однофермионных функций Грина (9,28) на основании спектральной теоремы (9,18). Имеем

$$\langle a_{\mathbf{k}\sigma}^+ a_{\mathbf{k}\sigma}(t) \rangle = n_{\mathbf{k}}^\sigma e^{-\frac{i}{\hbar}(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^\sigma - \zeta)t}, \quad \langle a_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}^+(t) \rangle = (1 - n_{\mathbf{k}}^\sigma) e^{\frac{i}{\hbar}(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^\sigma - \zeta)t}. \quad (12,9)$$

В качестве волновых функций  $\varphi_{\mathbf{k}\sigma}$ , входящих в выражение (12,7), мы должны взять блоховские функции (6,4), исправленные на  $s$ - $d$ -обменное взаимодействие. Они вычислены в (7,13). После этих замечаний выражение для сечения рассеяния можно записать в виде

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{p'}} = \frac{d^2\sigma_{\text{унр}}}{d\Omega dE_{p'}} + \frac{d^2\sigma_{\text{неунр}}^d}{d\Omega dE_{p'}} + \frac{d^2\sigma_{\text{неунр}}^s}{d\Omega dE_{p'}}, \quad (12,10)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_{\text{унр}}}{d\Omega dE_{p'}} = & (r_0\gamma)^2 (1 - e_z^2) |F(\mathbf{q}) \sum_j e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}_j} \langle S_j^z \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \int_V e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \{ \mathbf{q}_-(\mathbf{r}) - \mathbf{q}_+(\mathbf{r}) \} d\mathbf{r}|^2 \delta(E_p - E_{p'}), \end{aligned} \quad (12,11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_{\text{неунр}}^d}{d\Omega dE_{p'}} = & (r_0\gamma)^2 \frac{p'}{p} F^2(q) (1 + e_z) \frac{(2\pi)^3}{V_0} \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{g}} \{ \delta(\mathbf{g} - \mathbf{q} - 2\pi\mathbf{r}) Q_{\mathbf{g}}'(E_{p'} - E_p) + \\ & + \delta(-\mathbf{g} - \mathbf{q} - 2\pi\mathbf{r}) Q_{\mathbf{g}}''(E_{p'} - E_p) \}, \end{aligned} \quad (12,12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_{\text{неунр}}^s}{d\Omega dE_{p'}} = & (r_0\gamma)^2 \frac{p'}{p} \frac{1}{4} \frac{(2\pi)^3}{NV_0} \sum_{\mathbf{r}} |\varphi(2\pi\mathbf{r})|^2 \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\sigma\sigma'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{q} - 2\pi\mathbf{r}) \delta \times \\ & \times (E_{p'} - E_p + \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\sigma}) \times n_{\mathbf{k}}^{\sigma} (1 - n_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}) (1 - \varepsilon_{\sigma\sigma'} e_z^2), \quad \varepsilon_{\sigma\sigma'} = \begin{cases} 1, & \sigma = \sigma', \\ -1, & \sigma \neq \sigma'. \end{cases} \end{aligned} \quad (12,13)$$

В выражении (12,10) для краткости обозначено

$$\left. \begin{aligned} Q'_g &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar} Et} \langle b_g b_g^+(t) \rangle dt, \\ Q''_g &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar} Et} \langle b_g^+ b_g(t) \rangle dt, \end{aligned} \right\} \quad (12,14)$$

$$Q_-(\mathbf{r}) - Q_+(\mathbf{r}) = \frac{3}{8} \frac{N_s}{V} \frac{J_0}{\xi} \frac{1}{N} \sum_g f(\mathbf{g}) \sum_j \{e^{i\mathbf{g}(\mathbf{r}-\mathbf{R}_j)} + e^{-i\mathbf{g}(\mathbf{r}-\mathbf{R}_j)}\} S_j^z u^2(\mathbf{r}), \quad (12,15)$$

$u^2(\mathbf{r})$  есть некоторое среднее (по квазимульсам вблизи поверхности Ферми) значение величины  $|u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2$ ,  $f(\mathbf{g})$  дается выражением (7,17).

При получении (12,10) использовано следующее соотношение<sup>41</sup>:

$$\frac{1}{N} \left| \sum_j e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}_j} \right|^2 = \frac{(2\pi)^3}{V_0} \sum_{\boldsymbol{\tau}} \delta(\mathbf{q} - 2\pi\boldsymbol{\tau}), \quad (12,16)$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  — вектор обратной решетки.

Выражение (12,11) описывает упругое рассеяние нейтронов на спинах  $d$ - и  $s$ -электронов металла; (12,13) описывает некогерентное рассеяние нейтронов на электронах проводимости, а (12,12) дает неупругое рассеяние нейтронов с поглощением и испусканием одной спиновой волны.

Рассмотрим сначала упругое рассеяние. Подставив (12,15) в (12,11) и проинтегрировав последнее по энергиям рассеянных нейтронов, получим сечение рассеяния в единицу телесного угла,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{упр}}}{d\Omega} &= (r_0\gamma)^2 (1 - e_z^2) \left| F(\mathbf{q}) \sum_j e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}_j} \langle S_j^z \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \frac{N_s}{N} \frac{J_0}{\xi} \frac{1}{N} \sum_g f(\mathbf{g}) \varphi(\mathbf{q} - \mathbf{g}) \sum_s e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{g})\mathbf{R}_s} \sum_j e^{i\mathbf{g}\mathbf{R}_j} \langle S_j^z \rangle \right|^2, \end{aligned} \quad (12,17)$$

где

$$\varphi(\mathbf{q}) = \int_{V_0} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} u^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (12,18)$$

— электронный форм-фактор элементарной ячейки,  $V_0$  — объем ее. Суммирование по  $s$  производится по всем элементарным ячейкам.

В частном случае слабой связи  $s$ -электрона с решеткой, когда электронную плотность в металле можно принять постоянной, т. е. когда  $u^2(\mathbf{r}) \approx 1$ ,  $\varphi(\mathbf{q}) \sim \delta(\mathbf{q})$ , поэтому вместо (12,17) имеем

$$\frac{d\sigma_{\text{упр}}}{d\Omega} = (r_0\gamma)^2 (1 - e_z^2) \langle S_j^z \rangle^2 \left[ F(\mathbf{q}) + \frac{3}{8} \frac{N_s}{N} \frac{J_0}{\xi} f(\mathbf{q}) \right]^2 \left| \sum_j e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}_j} \right|^2. \quad (12,19)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, описывает эффективный магнитный форм-фактор парамагнитного иона, облаченного поляризованными электронами проводимости. Угловая зависимость рассеяния нейтронов самим поляризованным облаком определяется функцией  $f(\mathbf{q})$ . Более общее выражение (12,17) учитывает влияние на форм-фактор облака поляризации периодической структуры электронной плотности кристалла. Фазовый множитель в (12,19) в случае чистого металла на основании (12,16) дает условия правильных когерентных отражений. Выражение (12,19) пригодно и для описания рассеяния в сплаве переходного металла

с простым, в этом случае суммирование по  $j$  означает суммирование по всем узлам, занятым атомами переходного металла. В случае хаотического распределения их в сплаве фазовая сумма легко вычисляется:

$$\left| \sum_j e^{iqR_j} \right|^2 = C^2 \left| \sum_s e^{iqR_s} \right|^2 + NC(1-C), \quad (12,20)$$

где  $C$  — концентрация примесного элемента. Последнее выражение для случая сплава дает разложение упругого рассеяния на когерентную и некогерентную части. Итак, мы видим, что по изучению рассеяния (упругого) в ферромагнитных металлах или сплавах можно определить распределение спиновой плотности электронов проводимости вблизи парамагнитных ионов.

Обсудим теперь рассеяние нейтронов с испусканием или поглощением одной спиновой волны. При отсутствии взаимодействия спиновых волн с электронами проводимости корреляционные функции в (12,14) имеют такую же структуру, что и (12,9), поэтому после интегрирования по времени в (12,14) возникнут  $\delta$ -функции, учитывающие закон сохранения энергии при испускании или поглощении нейтроном спиновой волны. При учете  $s$ - $d$ -взаимодействия величины (12,14) легко вычисляются с помощью бозонной функции Грина (9,29). В результате имеем

$$Q'_g = N(E) \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_g(E)}{[E - \varepsilon_g - \Delta - P_g(E)]^2 + \gamma_g^2(E)}, \quad (12,21)$$

$$Q''_g = [1 + N(-E)] \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_g(-E)}{[-E - \varepsilon_g - \Delta - P_g(-E)]^2 + \gamma_g^2(E)},$$

где  $\Delta$ ,  $P_g(E)$  и  $\gamma_g(E)$  определяются выражениями (9,30), (9,31), и (9,34),  $N(E)$  — бозевская функция распределения. Как было указано ранее, при малых  $\gamma_g$  величины (12,21) имеют острые максимумы в точках  $E = \pm \varepsilon_g$ . Поскольку  $N(E)$  являются плавно меняющимися функциями  $E$  в интервалах  $E$  порядка  $\gamma_g$ , в выражениях (12,21) можно приближенно заменить: в первом  $N(E)$  на  $N(\tilde{\varepsilon}_g) \equiv n_g$ , во втором  $N(-E)$  на  $N(\tilde{\varepsilon}_g)$ . После этого выражение (12,12) принимает вид  $(\mathbf{q}_1 = \mathbf{q} + 2\pi\tau)^{12}$

$$\frac{d^2\sigma_{\text{неупр}}^d}{d\Omega dE_{p'}} = (r_0\gamma)^2 \frac{p'}{p} F^2(\mathbf{q}) \frac{s}{2} (1 + e_z^2) \sum_{\tau} \left\{ (1 + n_{q_1}) \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_{q_1}}{(E_p - E_{p'} - \tilde{\varepsilon}_{q_1})^2 + \gamma_{q_1}^2} + \right. \\ \left. + n_{q_1} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_{-q_1}}{(E_p - E_{p'} + \tilde{\varepsilon}_{-q_1})^2 + \gamma_{-q_1}^2} \right\}. \quad (12,22)$$

Таким образом, благодаря конечности времени жизни спиновых волн в металле, обусловленной взаимодействием их с электронами проводимости, энергетическое распределение нейтронов, рассеянных в заданном направлении, имеет конечную ширину, пропорциональную энергии затухания соответствующей спиновой волны. Следует иметь в виду, что фактически в ферромагнетике имеется много причин, приводящих к конечности времени жизни спиновых волн. Наиболее важными из них являются спин-спиновое и спин-фононное взаимодействия, поэтому реальная ширина нейтронной линии (так же как и в ферромагнитном резонансе) обусловлена целым рядом взаимодействий. Однако рассматриваемое здесь  $s$ - $d$ -обменное взаимодействие является специфичным лишь для металлов, более того, в металлах оно является, по-видимому, определяющим в общем уширении линий.

Экспериментально это уширение может быть легко отделено от других в силу специфической зависимости величины затухания  $\gamma_q$  от квазиимпульса спиновой волны. Поскольку спиновые волны под влиянием  $s-d$ -взаимодействия не затухают при импульсах, меньших некоторого  $q_0$  (см. (9,55)), ширина линии в металле должна достаточно резко меняться вблизи соответствующего вектора рассеяния. Исследование неупругого рассеяния нейтронов в ферромагнетиках для изучения их энергетического спектра обладает рядом преимуществ по сравнению с методом магнитного резонанса, поскольку нейтроны могут возбуждать весь спин-волновой спектр, в то время как резонанс позволяет исследовать только ограниченное число точек спектра.

#### IV. СИСТЕМА ЭЛЕКТРОНОВ ПРОВОДИМОСТИ В ПЕРЕХОДНОМ МЕТАЛЛЕ

##### § 13. Энергия электронов проводимости в переходном ферромагнитном металле

В § 5 и гл. III было показано, что обменное взаимодействие электронов проводимости с нескомпенсированными спиновыми моментами ионов металла приводит к снятию вырождения в энергии электронов проводимости по спиновому квантовому числу  $\sigma$ . Энергии электронов с различной ориентацией спина, но с одинаковыми квазиимпульсами  $k$ , различаются на величину порядка  $s-d$ -обменного интеграла.

В § 9 с помощью статистических функций Грина были вычислены равновесные функции распределения для электронов проводимости в приближении, эквивалентном первому порядку теории возмущений по  $s-d$ -взаимодействию. Сейчас с помощью того же метода мы учтем следующее приближение. Используя расщепление сложных гриновских функций типа (9,22), легко получить замкнутую систему уравнений для функций Грина  $\ll a_{k\sigma} | a_{k\sigma}^\dagger \gg$ :

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \ll a_{k(-)} | a_{k(-)}^\dagger \gg &= i\hbar \delta(t-t') + (\tilde{\epsilon}_k - \zeta) \ll a_{k(-)} | a_{k(-)}^\dagger \gg - \\ &- \left( \frac{2s}{N} \right)^{1/2} \sum_q J(k+q, k) \ll a_{k+q(+)} b_q^\dagger | a_{k(-)}^\dagger \gg, \\ i\hbar \frac{d}{dt} \ll a_{k(+)} | a_{k(+)}^\dagger \gg &= i\hbar \delta(t-t') + (\tilde{\epsilon}_k^+ - \zeta) \ll a_{k(+)} | a_{k(+)}^\dagger \gg - \\ &- \left( \frac{2s}{N} \right)^{1/2} \sum_q J(k, k-q) \ll a_{k-q(-)} b_q | a_{k(+)}^\dagger \gg, \\ i\hbar \frac{d}{dt} \ll a_{k-q(-)} b_q | a_{k(+)}^\dagger \gg &= (\tilde{\epsilon}_{k-q} + \tilde{\epsilon}_q) \ll a_{k-q(-)} b_q | a_{k(+)}^\dagger \gg - \\ &- \left( \frac{2s}{N} \right)^{1/2} J(k, k-q) (1 + n_q - n_{k-q}) \ll a_{k(+)} | a_{k(+)}^\dagger \gg, \\ i\hbar \frac{d}{dt} \ll a_{k+q(+)} b_q^\dagger | a_{k(-)}^\dagger \gg &= (\tilde{\epsilon}_{k+q}^+ - \tilde{\epsilon}_q^-) \ll a_{k+q(+)} b_q^\dagger | a_{k(-)}^\dagger \gg - \\ &- \left( \frac{2s}{N} \right)^{1/2} J(k+q, k) (n_q + n_{k+q}) \ll a_{k(-)} | a_{k(-)}^\dagger \gg, \end{aligned} \right\} (13,1)$$

где  $\tilde{\epsilon}_k^\pm$  и  $\tilde{\epsilon}_q$  даются формулами (9,26) и (9,42). Для фурье-компонент гриновских функций получаем из (13,1) следующее выражение:

$$\ll a_{k(\pm)} | a_{k(\pm)}^\dagger \gg_E = \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{1}{E - \tilde{\epsilon}_k^\pm - \mathfrak{M}_k^\pm(E)}, \quad (13,2)$$



где

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mathbf{k}}^{-} &= \frac{2s}{N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{J^2(\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}) (n_{\mathbf{q}} + n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{+})}{E - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{+} + \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}}}, \\ \mathfrak{M}_{\mathbf{k}}^{+} &= \frac{2s}{N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{J^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) (1 + n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{-})}{E - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{-} - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}}} \end{aligned} \right\} \quad (13,3)$$

— массовые операторы.

Для нахождения функций распределения нужно воспользоваться спектральной теоремой (9,18), предварительно отделив вещественную и мнимую части в выражении

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mathbf{k}}^{\pm}(E \pm i\epsilon) &= \mathfrak{M}_{\mathbf{k}}^{\pm}(E) \mp i\Gamma_{\mathbf{k}}^{\pm}(E), \\ \Gamma_{\mathbf{k}}^{-} &= \pi \frac{2s}{N} \sum_{\mathbf{q}} J^2(\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}) (n_{\mathbf{q}} + n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{+}) \delta(E - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{+} + \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}}), \\ \Gamma_{\mathbf{k}}^{+} &= -\pi \frac{2s}{N} \sum_{\mathbf{q}} J^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) (1 + n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{-}) \delta(E - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{-} - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}}). \end{aligned} \quad (13,4)$$

Затем на основании соотношения (9,16) находим функции распределения

$$n_{\mathbf{k}}^{\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{e^{\beta E} + 1} \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_{\mathbf{k}}^{\pm}(E)}{[E - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\pm} - \mathfrak{M}_{\mathbf{k}}^{\pm}(E) + \zeta]^2 + \Gamma_{\mathbf{k}}^{\pm 2}(E)}. \quad (13,5)$$

$\Gamma_{\mathbf{k}}^{\pm}$  описывает затухание  $s$ -электронов под влиянием столкновений их со спиновыми волнами. При пренебрежении затуханием и величинами  $\mathfrak{M}_{\mathbf{k}}^{\pm}(E)$  выражение (13,5) переходит в функцию распределения Ферми (9,35).

Таким образом,  $s$ — $d$ -взаимодействие приводит не только к подмагничиванию  $s$ -электронов, но и к их затуханию. Первый эффект появляется в первом порядке теории возмущений, а второй — в следующем. Иначе говоря, энергетический сдвиг электронов проводимости  $\sim J_0$ , а затухание  $\sim J_0^2/\zeta$ . С другой стороны, электроны проводимости действуют на спиновые волны так, что фактически их сдвиг в энергии (при наличии магнитного поля) и их затухание  $\sim J_0^2/\zeta$ .

#### § 14. Эффективное взаимодействие электронов проводимости через спиновые волны и влияние его на сверхпроводящее состояние

Как было показано в § 8, взаимодействие электронов нестроенных слоев с электронами проводимости в ферромагнитном металле ведет к косвенной обменной связи первых. С другой стороны,  $s$ — $d$ -обмен должен приводить к эффективному взаимодействию между  $s$ -электронами. Найдем эффективный гамильтониан этого взаимодействия в рамках спин-волнового приближения. Будем исходить из основного гамильтониана (9,5) и произведем его унитарное преобразование:

$$H_T = e^{-i\hat{S}} H e^{i\hat{S}} = H + i[H, \hat{S}] + \frac{i^2}{2!} [[H, \hat{S}], \hat{S}] + \dots, \quad (14,1)$$

где эрмитов оператор  $\hat{S}$  подбирается так, чтобы уничтожить тройные члены в  $H$ , а именно:

$$\hat{S} = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} + \mathbf{q}) \{A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}^{+} a_{\mathbf{k}'}^{+} b_{\mathbf{q}} + A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}}^{*} a_{\mathbf{k}}^{+} a_{\mathbf{k}'}^{+} a_{\mathbf{k}}^{+} b_{\mathbf{q}}^{+}\}; \quad (14,2)$$

неизвестные коэффициенты  $A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}}$  подбираются из условия

$$H_1' + i[H_0, \hat{S}] = 0, \quad (14,3)$$

где  $H'_1$  — часть оператора (9,7) с тройными членами. Из (14,3) находим

$$A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} = -i \left( \frac{2s}{N} \right)^{1/2} \frac{J(\mathbf{k}\mathbf{k}')}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^+ - \varepsilon_{\mathbf{k}'}^- - \varepsilon_{\mathbf{q}}}.$$

С точностью до второго приближения по константе взаимодействия  $J_0$  имеем

$$\begin{aligned} H_T = & \sum_{\mathbf{k}\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}^+ a_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{q}} \varepsilon_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{q}} - \\ & - \frac{1}{2} \frac{2s}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} J(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) J(\mathbf{k}', \mathbf{k}'-\mathbf{q}) \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^+ - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^- - \varepsilon_{\mathbf{q}}} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^+ - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^- - \varepsilon_{\mathbf{q}}} \right\} \times \\ & \times a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+ (-) a_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^+ (-) a_{\mathbf{k}'}^+ (+) a_{\mathbf{k}}^+ (+) + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} J(\mathbf{k}\mathbf{k}) (a_{\mathbf{k}}^+ (-) a_{\mathbf{k}}^+ (-) - a_{\mathbf{k}}^+ (+) a_{\mathbf{k}}^+ (+)) b_{\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{q}} + \\ & + \frac{2s}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{J^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q})}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^+ - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^- - \varepsilon_{\mathbf{q}}} \left\{ a_{\mathbf{k}}^+ (+) a_{\mathbf{k}}^+ (+) (1 + b_{\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{q}}) - a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+ (-) a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+ (-) b_{\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{q}} \right\}. \quad (14,4) \end{aligned}$$

Мы видим, что в новом представлении в гамильтониане появляются члены, описывающие эффективное взаимодействие  $s$ -электронов.

Прежде всего покажем, что из (14,4) можно получить энергии элементарных возбуждений спиновых волн и  $s$ -электронов, измененные учетом  $s$ - $d$ -взаимодействия. С этой целью усредним гамильтониан (14,4) по состояниям электронов проводимости, используя (7,6). Тогда (14,4) примет вид диагональной квадратичной формы бозе-оператора:

$$H'_T = U_1 + \sum_{\mathbf{q}} \left\{ \varepsilon_{\mathbf{q}} + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k}\mathbf{k}) (n_{\mathbf{k}}^- - n_{\mathbf{k}}^+) + \frac{2s}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{J^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) (n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^- - n_{\mathbf{k}}^+)}{\varepsilon_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}^+ + \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^-} \right\} b_{\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{q}}. \quad (14,5)$$

Далее, производя усреднение по состояниям спиновых волн, используя (9,10), и по состояниям  $s$ -электронов с той или другой проекцией спина, получим диагональные квадратичные формы ферми-операторов:

$$H''_T = U_2 + \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \varepsilon_{\mathbf{k}}^+ - \frac{1}{N} J(\mathbf{k}\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{q}} n_{\mathbf{q}} + \frac{2s}{N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{J^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) (1 + n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^-)}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^+ - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^- - \varepsilon_{\mathbf{q}}} \right\} a_{\mathbf{k}}^+ (+) a_{\mathbf{k}}^+ (+), \quad (14,6)$$

$$H'''_T = U_3 + \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \varepsilon_{\mathbf{k}}^- + \frac{1}{N} J(\mathbf{k}\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{q}} n_{\mathbf{q}} + \frac{2s}{N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{J^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) (n_{\mathbf{q}} + n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+)}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^- - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ + \varepsilon_{\mathbf{q}}} \right\} a_{\mathbf{k}}^+ (-) a_{\mathbf{k}}^+ (-). \quad (14,7)$$

В формулах (14,5)–(14,7)  $U_1, U_2, U_3$  — различные константы, зависящие от функций распределения спиновых волн и электронов проводимости. Выражения, стоящие в фигурных скобках (14,5)–(14,7), имеют смысл энергий элементарных возбуждений — спиновых волн и электронов проводимости — с учетом  $s$ - $d$ -взаимодействия. Эти выражения совпадают с соответствующими (9,42) и (9,26) (см. (13,2)), определяющими полюса бозонной и фермионной одночастичных функций Грина. Этим показывается эквивалентность приближений теории возмущений, допущенных при расцеплении гриновских цепочек. Этот результат проясняет физический смысл полюсов статистических функций Грина (9,19). Каждая из этих функций дает описание элементарных возбуждений спиновых волн или электронов проводимости, при котором все другие возбуждения, кроме рассматриваемого, усредняются и дают постоянный вклад

в гамильтониан. При таком рассмотрении энергия системы не может быть записана как энергия суммы независимых квазичастиц. Метод функций Грина, однако, является более удобным не только потому, что позволяет учесть затухание возбуждений, но и показывает, каким образом термодинамические функции системы выражаются через энергии элементарных возбуждений.

Возвратимся теперь к выражению (14,4). Третий член в нем описывает эффективное взаимодействие электронов проводимости через спиновые волны. Аналогичное выражение может быть получено и для антиферромагнитного металла, описываемого гамильтонианом (10,1), после исключения из него тройных членов. В этом случае

$$H_{\text{int}} = -\frac{s}{2N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} g^2(\mathbf{q}) J(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) J(\mathbf{k}', \mathbf{k}'-\mathbf{q}) \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^+ - \varepsilon_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^- - \varepsilon_{1\mathbf{q}}} - \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^+ - \varepsilon_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^- + \varepsilon_{2\mathbf{q}}} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^+ - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^- - \varepsilon_{1\mathbf{q}}} - \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^+ - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^- + \varepsilon_{2\mathbf{q}}} \right\} \times \\ \times a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+ (-) a_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^+ (-) a_{\mathbf{k}'}^+ (+) a_{\mathbf{k}}^+ (+). \quad (14,8)$$

Легко видеть, что в обоих случаях энергия эффективного взаимодействия электронов вблизи поверхности Ферми  $\sim J_0^2/\xi$ . Полученные выражения для эффективного взаимодействия электронов позволяют исследовать вопрос о роли рассеяния электронов проводимости на спиновых волнах в появлении сверхпроводящего состояния.

Как известно<sup>43,44</sup>, сверхпроводимость возникает в металлах вследствие взаимного притяжения электронов проводимости, имеющих противоположные импульсы и спины вблизи поверхности Ферми. К этому притяжению приводит электрон-фононное взаимодействие. Оператор эффективного взаимодействия электронов (через фононы) с противоположными импульсами и спинами имеет вид

$$H_{\text{red}}^{\text{ph}} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{\mathbf{k}\mathbf{k}' \\ (\mathbf{q}=\mathbf{k}-\mathbf{k}')}} \frac{g'^2 \omega_{\mathbf{q}}^2}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'})^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2} a_{\mathbf{k}'}^+ (-) a_{-\mathbf{k}} (-) a_{-\mathbf{k}'}^+ (+) a_{\mathbf{k}}^+ (+), \quad (14,9)$$

где  $\omega_{\mathbf{q}}$  — энергия фонона с квазиимпульсом  $\mathbf{q}$ , а  $g'$  — константа электрон-фононной связи. Известно, что взаимодействие электронов вблизи поверхности Ферми, описываемое таким оператором, носит характер притяжения. Выделим теперь из (14,4) и (14,8) части, соответствующие взаимодействию электронов с противоположными импульсами, для чего положим  $\mathbf{q}=\mathbf{k}+\mathbf{k}'$ . Кроме того, учтем, что в отсутствие магнитного поля в антиферромагнетике  $\varepsilon_{1\mathbf{q}}=\varepsilon_{2\mathbf{q}}\equiv\varepsilon_{\mathbf{q}}$  и  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\pm}\equiv\varepsilon_{\mathbf{k}}$ . В случае ферромагнетика положим приближенно, что  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\pm}\approx\varepsilon_{\mathbf{k}}\equiv\varepsilon_{\mathbf{k}}$ , т. е. пренебрежем сдвигом сфер Ферми для электронов с различными проекциями спина, поскольку учет этого различия в формуле для  $H_{\text{int}}$  превышает точность приближения, а эффект сдвига поверхности Ферми самостоятельно будет исследован в § 15. Учитывая все сказанное, вместо соответствующих частей (14,4) и (14,8) получим

$$H_{\text{red}}^{\text{f}} = -\frac{2s}{N} \sum_{\substack{\mathbf{k}\mathbf{k}' \\ (\mathbf{q}=\mathbf{k}-\mathbf{k}')}} \frac{J^2(\mathbf{k}\mathbf{k}') \varepsilon_{\mathbf{q}}}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'})^2 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2} a_{\mathbf{k}'}^+ (-) a_{-\mathbf{k}} (-) a_{-\mathbf{k}'}^+ (+) a_{\mathbf{k}}^+ (+), \quad (14,10)$$

$$H_{\text{red}}^{\text{af}} = -\frac{2s}{N} \sum_{\substack{\mathbf{k}\mathbf{k}' \\ (\mathbf{q}=\mathbf{k}-\mathbf{k}')}} \frac{J^2(\mathbf{k}\mathbf{k}') g^2(\mathbf{q}) \varepsilon_{\mathbf{q}}}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'})^2 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2} a_{\mathbf{k}'}^+ (-) a_{-\mathbf{k}} (-) a_{-\mathbf{k}'}^+ (+) a_{\mathbf{k}}^+ (+) \quad (14,11)$$

соответственно для ферро- и антиферромагнитного металлов.

Структура последних выражений совершенно тождественна с (14,9), основное различие заключается в знаках. Поскольку электрон-фононное взаимодействие приводит к притяжению электронов с противоположными импульсами и спинами и к образованию устойчивых куперовских пар, взаимодействие электронов проводимости со спиновыми волнами в ферро- и антиферромагнитных металлах приводит к обратному процессу. Оно способствует разрушению пар, т. е. разрушению сверхпроводящего состояния. Сравнение выражений (14,10) и (14,11) для эффективного взаимодействия в ферро- и антиферромагнитных металлах показывает, что нет принципиальной разницы в характере влияния электрон-магнонного взаимодействия на явление сверхпроводимости в этих металлах, хотя для ферро- и антиферромагнетиков законы дисперсии для спиновых волн различны.

Ясно, что такая качественная эквивалентность результатов обусловлена одинаковой динамикой рассеяния электронов на магнонах: взаимодействие в том и в другом случае происходит так, что при испускании или поглощении спиновой волны электрон меняет не только импульс, но обязательно и направление спина. В этом и заключается специфика рассеяния электронов на спиновых волнах по сравнению с их рассеянием на фононах, которое не приводит к переворачиванию спинов.

Для выяснения, почему переворачивание спина электрона при электрон-магнонном взаимодействии препятствует появлению сверхпроводящего состояния в ферро- и антиферромагнитных металлах, рассмотрим последовательно взаимодействие электронов с фононами и спиновыми волнами. Электрон-фононное взаимодействие приводит к образованию связанной пары электронов, имеющих противоположные импульсы и спины. Если дополнительно к этому есть еще электрон-магнонное взаимодействие, то может произойти следующее: один из электронов пары может поглотить спиновую волну и тем самым изменить направление спина. Таким образом, вместо пары теперь будет иметься два электрона с одинаковыми спинами, но такая система не является устойчивой. Итак, электрон-магнонное взаимодействие может приводить к разрушению куперовских пар. Однако эти рассуждения справедливы только при рассмотрении процессов второго порядка теории возмущений, чем мы и ограничивались выше. Очевидно, что возможны и такие процессы, когда оба электрона, образующие связанную пару, одновременно поглощают (или испускают) спиновые волны, при этом пара не разрушается. Возможны также процессы, идущие вообще без изменения спинов. Однако подробный анализ показывает <sup>45</sup>, что такого рода процессы являются более высокого порядка, чем акты рассеяния лишь одного из электронов пары на спиновой волне. Второй же порядок теории возмущений обязательно должен приводить к переворачиванию спина одного электрона пары.

В работе <sup>46</sup> была рассмотрена термодинамика сверхпроводящих ферро- и антиферромагнетиков. В частности, было найдено выражение для щели однофермионных возбуждений при нуле температуры (в предположении, что области  $k$ -пространства — вблизи поверхности Ферми, где эффективное спин-электронное и электрон-фононное взаимодействия одного порядка величины)

$$\Delta = 2\hbar\omega_e - \frac{1}{Q}, \quad (14,12)$$

где  $Q = Q_{ph} - Q_m$  представляет разность соответствующих величин для электрон-фононного и электрон-магнонного взаимодействий.

Таким образом, электрон-магнонное взаимодействие в ферро- и антиферромагнитных металлах противодействует образованию сверхпроводя-

щего состояния\*). Для антиферромагнитных металлов это является, по-видимому, основной причиной отсутствия среди них сверхпроводников. В случае же ферромагнетиков указанная причина не является единственной. Оказывается, что подмагничивание электронов проводимости  $s-d$ -взаимодействием создает также условия, затрудняющие образование пар, обусловленное электрон-фононным взаимодействием. Этот эффект рассмотрен ниже, в § 15.

#### § 15. Условие существования сверхпроводящего состояния в ферромагнитном металле

Среди большого числа сверхпроводящих металлов и сплавов до недавнего времени не было найдено ни одного ферромагнетика. Только в 1958 г. существование сверхпроводящего ферромагнетика было, по-видимому, установлено Маттиасом и др.<sup>50</sup> в системе  $(\text{Ce}, \text{Gd})\text{Ru}_2$ . Это означает, что в ферромагнитных металлах имеются условия, не благоприятствующие сверхпроводимости, но в принципе ее не исключающие.

Вонсовский и Свирский<sup>51</sup> высказали предположение, что таким неблагоприятным условием может быть обменное подмагничивание электронов проводимости. Действительно, в силу такого подмагничивания, электроны, лежащие на сфере Ферми с различной ориентацией спина, имеют энергии, отличающиеся на величину  $2sJ_0\mu$ , а значит, они имеют и различные импульсы  $k_0^-$  и  $k_0^+$ . Поскольку сверхпроводящее состояние связано с образованием (под влиянием электрон-фононного взаимодействия) пар электронов с противоположными спинами и импульсами вблизи поверхности Ферми, ясно, что подмагничивание электронов действует неблагоприятно на сверхпроводящее состояние, потому что оно уменьшает количество электронов, которые вблизи поверхности Ферми имеют противоположные импульсы и спины. В случае, когда «магнитная» щель  $2sJ_0\mu$  больше удвоенной средней энергии фонона  $\hbar\omega$ , при нулевой температуре вблизи сферы Ферми не будет пар электронов, которые обладали бы противоположными импульсами при различной ориентации спина. В этом случае сверхпроводящее состояние невозможно. Фактически оно оказывается невозможным при еще меньшей величине подмагничивания.

Исследуем теперь детально роль обменного подмагничивания на условие существования сверхпроводящего состояния. Система электронов сверхпроводника в модели Бардина — Купера — Шриффера<sup>43</sup> (БКШ) описывается гамильтонианом

$$H = \sum_{\mathbf{k}\sigma} T_{\mathbf{k}}^{\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\sigma} - \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} A(\mathbf{k}\mathbf{k}') a_{\mathbf{k}}^{+} a_{\mathbf{k}'}^{+} a_{-\mathbf{k}}^{-} a_{-\mathbf{k}'}^{-}. \quad (15,1)$$

Здесь второй член описывает эффективное взаимодействие куперовских пар благодаря электрон-фононному взаимодействию;  $T_{\mathbf{k}}^{\sigma} = \epsilon_{\mathbf{k}}^{\sigma} - \zeta$ . Теория БКШ соответствует случаю, когда  $\epsilon_{\mathbf{k}}^{\sigma}$  не зависит от спина электрона  $\sigma$ . В ферромагнитном металле  $\epsilon_{\mathbf{k}}^{\sigma}$  дается выражением (9,26). Роль динамической части  $s-d$ -взаимодействия (взаимодействия  $s$ -электронов

\*) Вопрос о влиянии электрон-магнитного взаимодействия на сверхпроводящее состояние в ферромагнитных металлах рассматривался впервые Касуя<sup>47</sup>, который установил отталкивательный характер взаимодействия электронов с противоположными импульсами и спинами. Этот вывод находится в согласии с последующими расчетами Карпенко<sup>45</sup>, а также Вонсовского и Свирского<sup>48</sup> по схеме метода Боголобова. В работе<sup>49</sup>, посвященной этому же вопросу, не был учтен знак матричного элемента электрон-электронного взаимодействия, что привело к ошибочному выводу о притягательном характере этой связи.

со спиновыми волнами) на сверхпроводящее состояние уже исследовалась в § 14.

Следуя методу Боголюбова — Тябликова<sup>14</sup>, составим уравнение для функции Грина

$$G_k^\sigma(t-t') = \langle \langle a_{k\sigma} | a_{k\sigma}^+ \rangle \rangle, \quad (15,2)$$

с помощью которой будем вычислять функцию распределения для  $s$ -электронов при учете взаимодействия пар. Легко видеть, что это уравнение содержит функцию Грина, составленную из четырех ферми-операторов, происходящую от учета второго члена в гамильтониане (15,1), которую мы расцепим с помощью следующего приближения:

$$\begin{aligned} \langle \langle a_{-k, -\sigma}^+ a_{-k', -\sigma} a_{k', -\sigma} | a_{k\sigma}^+ \rangle \rangle &= \langle a_{-k', -\sigma} a_{k', -\sigma} \rangle \langle \langle a_{-k, -\sigma}^+ | a_{k\sigma}^+ \rangle \rangle + \\ &+ \delta_{-k, k'} \langle a_{-k, -\sigma}^+ a_{-k, -\sigma} \rangle \langle \langle a_{k\sigma} | a_{k\sigma}^+ \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (15,3)$$

Это приближение соответствует учету корреляции пар электронов с противоположными импульсами и спинами. Нетрудно видеть, что второй член в правой части равенства (15,3) приводит в уравнении для  $G_k^\sigma$  к асимптотически малому члену, который стремится к нулю при  $V \rightarrow \infty$ , поэтому его можно опустить. Таким образом, расщепление состоит в том, что сложная функция Грина в (15,3) заменяется на

$$\Gamma_k^\sigma(t-t') = \langle \langle a_{-k, -\sigma}^+ | a_{k\sigma}^+ \rangle \rangle. \quad (15,4)$$

Уравнение для этой функции Грина в аналогичном приближении включает в себя только функции  $G_k^\sigma$ . Таким образом, получаем две пары замкнутых уравнений:

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} G_k^- &= i\hbar \delta(t-t') + T_k^- G_k^- + L_k \Gamma_k^-, \\ i\hbar \frac{d}{dt} \Gamma_k^- &= -T_k^+ \Gamma_k^- + L_k G_k^-, \end{aligned} \right\} \quad (15,5)$$

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} G_k^+ &= i\hbar \delta(t-t') + T_k^+ G_k^+ - L_k \Gamma_k^+, \\ i\hbar \frac{d}{dt} \Gamma_k^+ &= -T_k^- \Gamma_k^+ - L_k G_k^+, \end{aligned} \right\} \quad (15,6)$$

где введено для краткости обозначение

$$L_k = \frac{1}{V} \sum_{k'} A(kk') \langle a_{-k'} (-) a_{k'} (+) \rangle. \quad (15,7)$$

Решая уравнения (15,5), для фурье-компонент  $G_k^-(E)$  и  $\Gamma_k^-(E)$  гриновских функций  $G_k^-(t-t')$  и  $\Gamma_k^-(t-t')$  получаем выражения

$$G_k^-(E) = \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{E + T_k^+}{(E - T_k^-)(E + T_k^+) - L_k^2}, \quad (15,8)$$

$$\Gamma_k^-(E) = \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{L_k}{(E - T_k^-)(E + T_k^+) - L_k^2}. \quad (15,9)$$

Аналогичные выражения могут быть получены и для другой пары функций. На основании спектральной теоремы (9,16) — (9,18) легко получить теперь выражение для среднего числа электронов в состоянии  $(k\sigma)$ :

$$\langle a_{k(\pm)}^+ a_{k(\pm)} \rangle = \frac{1}{2} \left\{ 1 + f_k^\pm - f_k^\mp - \frac{T_k}{\omega_k} (1 - f_k^\pm - f_k^\mp) \right\}, \quad (15,10)$$

где

$$f_{\mathbf{k}}^{\pm} = \frac{1}{e^{\beta(\omega_{\mathbf{k}} \pm \Delta_{\mathbf{k}})} + 1}, \quad (15,11)$$

причем

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\left(\frac{T_{\mathbf{k}}^+ + T_{\mathbf{k}}^-}{2}\right)^2 + L_{\mathbf{k}}^2}, \quad \Delta_{\mathbf{k}} = \frac{T_{\mathbf{k}}^+ - T_{\mathbf{k}}^-}{2}. \quad (15,12)$$

Величины  $\omega_{\mathbf{k}} \pm \Delta_{\mathbf{k}}$ , являющиеся полюсами гриновских функций (15,2) и (15,4), представляют энергии элементарных возбуждений, отделенных щелью  $L_{\mathbf{k}}$  от уровня Ферми. При  $L_{\mathbf{k}}=0$  они переходят в выражения для  $T_{\mathbf{k}}^+$  и  $T_{\mathbf{k}}^-$ , тогда как формулы (15,10) и (15,11) переходят в обычные фермиевские функции распределения для электронов проводимости ферромагнитного металла в нормальном состоянии.

Величина щели  $L_{\mathbf{k}}$ , как видно из (15,7), обусловлена корреляцией электронов с противоположными импульсами и спинами. До сих пор величина  $\langle a_{-\mathbf{k}(-)} a_{\mathbf{k}(+)} \rangle$  оставалась неопределенной. Поскольку

$$\langle a_{-\mathbf{k}(-)} a_{\mathbf{k}(+)} \rangle = \langle a_{\mathbf{k}(+)}^+ a_{-\mathbf{k}(-)}^+ \rangle,$$

искомая величина может быть выражена через функцию Грина  $\Gamma_{\mathbf{k}}^-(E)$  на основе спектрального представления

$$\langle a_{-\mathbf{k}(-)} a_{\mathbf{k}(+)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma_{\mathbf{k}}^-(E+i\varepsilon) - \Gamma_{\mathbf{k}}^-(E-i\varepsilon)}{e^{\beta E} + 1} dE. \quad (15,13)$$

Вычислив интеграл в (15,13) и подставив результат в выражение (15,7), получим интегральное уравнение для определения величины  $L_{\mathbf{k}}$ :

$$L_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{A(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\omega_{\mathbf{k}'}} (1 - f_{\mathbf{k}'}^- - f_{\mathbf{k}'}^+) L_{\mathbf{k}'}. \quad (15,14)$$

Анализ решения уравнения (15,14) определяет условия существования сверхпроводящего состояния ферромагнитного металла. Пусть величина щели в энергии элементарных фермиевских возбуждений сверхпроводника, обусловленной электрон-фононным взаимодействием, равна

$$\Delta_{\text{фон}} = \hbar \tilde{\omega} e^{-1/q}, \quad (15,15)$$

где  $\hbar \omega$  — средняя энергия фононов. Бердышев и Алиевский<sup>74</sup>, анализируя уравнение (15,14), пришли к заключению, что до тех пор, пока величина энергетической щели обменного подмагничивания

$$\Delta_{\text{об}} = s\mu J(\mathbf{k}\mathbf{k}) \quad (15,16)$$

меньше величины щели (15,15),  $s$ — $d$ -обменное подмагничивание никак не сказывается на величине «сверхпроводящей» щели (15,15). Однако если  $\Delta_{\text{об}} \geq \Delta_{\text{фон}}$ , «сверхпроводящая» щель становится сразу равной нулю и сверхпроводимость, таким образом, исчезает.

Это заключение авторов<sup>74</sup> находится в некотором противоречии с более ранней работой Вонсовского и Свирского<sup>52</sup>, согласно которой при сколь угодно малом  $s$ — $d$ -обменном взаимодействии начинается уменьшение сверхпроводящей щели (15,15). Однако и в этой работе авторы приходят к выводу, что при  $\Delta_{\text{об}} \geq \Delta_{\text{фон}}$  сверхпроводимость исчезает. Неполное соответствие результатов работ<sup>52,74</sup> (см. также заметку<sup>75</sup>) указывает на то, что в этом вопросе нет еще достаточной ясности. Это связано с большими математическими трудностями задачи, на которых мы не останавливаемся здесь, отсылая читателей к оригинальной литературе.

В качестве итога проведенного рассмотрения влияния  $s$ — $d$ -обменного взаимодействия на сверхпроводящее состояние мы можем утверждать следующее.

В ферромагнетиках  $s$ — $d$ -обменное взаимодействие препятствует установлению сверхпроводящего состояния, при этом имеется два различных механизма этого влияния. Один из них связан с тем, что электрон-ферромагнитное взаимодействие приводит к эффективному отталкиванию электронов в куперовских парах. Вторым же механизм обусловлен обменным подмагничиванием электронов проводимости. В антиферромагнитных металлах второй эффект отсутствует, поэтому с этой точки зрения у них имеются более благоприятные условия для одновременной реализации и сверхпроводящего состояния, чем в ферромагнитных металлах. Возможно, что именно это и реализуется в ванадии (см. § 2, п. а) первой части обзора, примечание на стр. 387).

### § 16. Аномальное электросопротивление ферромагнитного металла

Как уже было указано в первой части обзора (см. § 2 и 5), электросопротивление ферромагнитных металлов характеризуется большей величиной по сравнению с непременными металлами. Кроме того, в них наблюдается аномальный температурный ход как в области низких температур, так и вблизи точки Кюри. Последнее связано и с особенностями закона дисперсии носителей тока в ферромагнитных переходных металлах, а также с появлением в этих кристаллах «магнитных» (спин-электронных) механизмов рассеяния этих носителей. Здесь мы рассмотрим более строгий расчет электросопротивления ферромагнетиков, обусловленного механизмом  $s$ — $d$ -обмена \*).

Разобьем гамильтониан ферромагнитного металла на две части:

$$H = H_0 + H',$$

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\sigma} + H_e, \quad H_e = - \sum_{jj'} J(jj') (S_j S_{j'}), \quad (16,1)$$

$$H' = - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'j} J(\mathbf{k}\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}_j} \{ a_{\mathbf{k}(-)}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'(+)} S_j^{-} + a_{\mathbf{k}(+)}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'(-)} S_j^{+} \}. \quad (16,2)$$

В таком представлении часть оператора  $s$ — $d$ -обмена, включающую  $z$ -компоненту спина, мы усредним по состояниям спин-системы, приписав полученную таким образом добавку к электронам проводимости, так что в (16,1) энергия  $s$ -электрона равна

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\pm} = E_{\mathbf{k}} - (s \pm \langle S_j^z \rangle) J(\mathbf{k}\mathbf{k}). \quad (16,3)$$

Формула (16,3) отражает известный факт обменного подмагничивания электронов проводимости ферромагнетика. В последующем будем рассматривать  $H'$  как возмущение. Это значит, что за нулевое приближение выбрано состояние подмагниченных электронов проводимости и незаполненных оболочек с учетом их обменного взаимодействия.

Для вычисления электропроводности воспользуемся методом Кубо<sup>53</sup>, согласно которому электропроводность  $\sigma$  следующим образом связана

\*) В связи с затронутым вопросом обращаем внимание читателей на обзор<sup>76</sup>, а также на оригинальные работы<sup>58,77,78</sup>.



с функцией корреляции токов:

$$\sigma = \beta \int_0^{\infty} \langle j_{\alpha} j_{\alpha}(\tau) \rangle d\tau \quad (\alpha = x, y, z). \quad (16,4)$$

Здесь  $j_{\alpha}$  — оператор тока металла,  $j_{\alpha}(\tau)$  — оператор тока в гейзенберговском представлении с полным гамильтонианом  $H$ . Коррелятор токов можно разложить по степеням возмущения  $H'$ . Во втором приближении теории возмущений получается следующее выражение для электро-сопротивления<sup>54</sup>:

$$\varrho = \frac{1}{\sigma} = \frac{kT}{\hbar^2 \langle j_{\alpha}^2 \rangle} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \langle [j_{\alpha}, H'(\tau)] [H', j_{\alpha}] \rangle d\tau. \quad (16,5)$$

Здесь

$$H'(\tau) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 \tau} H' e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 \tau}. \quad (16,6)$$

Гейзенберговское представление оператора  $H'$  с гамильтонианом  $H_0$ , усреднение в формуле (16,5) проводится также по статистическому ансамблю с нулевым гамильтонианом. Легко видеть, что в случае гамильтониана (16,1) — (16,2)

$$H'(\tau) = -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} J(\mathbf{k}\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}_j} e^{\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}^*) \tau} a_{\mathbf{k}(-)}^+ a_{\mathbf{k}'(+)} S_j^-(\tau) + \text{к. с.}, \quad (16,7)$$

где

$$S_j^{\pm}(\tau) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 \tau} S_j^{\pm} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 \tau}. \quad (16,8)$$

Оператор тока в представлении вторичного квантования имеет вид

$$j_{\alpha} = \frac{e}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial k_{\alpha}} a_{\mathbf{k}\sigma}^+ a_{\mathbf{k}\sigma}. \quad (16,9)$$

С помощью (16,7) и (16,9) легко найти

$$\begin{aligned} \langle [j_{\alpha}, H'(\tau)] [H', j_{\alpha}] \rangle &= \frac{1}{N^2} \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \sum_{j_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \sum_{j_2 \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2} J(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) J(\mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2) \times \\ &\times e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot (\mathbf{R}_{j_1} - \mathbf{R}_{j_2})} \left( \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}_1}}{\partial k_{1\alpha}} - \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}_2}}{\partial k_{2\alpha}} \right)^2 \{ n_{\mathbf{k}_1}^- (1 - n_{\mathbf{k}_2}^+) \langle S_{j_1}^-(\tau) S_{j_2}^+(\tau) \rangle e^{\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{\mathbf{k}_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2}^*) \tau} + \\ &+ n_{\mathbf{k}_1}^+ (1 - n_{\mathbf{k}_2}^-) \langle S_{j_1}^+(\tau) S_{j_2}^-(\tau) \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{\mathbf{k}_2} - \varepsilon_{\mathbf{k}_1}^*) \tau} \}, \quad (16,10) \end{aligned}$$

а также

$$\langle j_{\alpha}^2 \rangle = \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left( \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial k_{\alpha}} \right)^2 n_{\mathbf{k}}^{\sigma} (1 - n_{\mathbf{k}}^{\sigma}), \quad (16,11)$$

где  $n_{\mathbf{k}}^{\sigma}$  — фермиевские функции распределения.

Основная трудность дальнейших расчетов состоит в вычислении величин  $S_j^{\pm}(\tau)$  и взятии средних значений от их произведений. В общем виде сделать это пока не удастся, но можно рассмотреть два предельных случая.

а) Низкие температуры. В этой области допустимо спин-волновое приближение, при котором возможно вычисление указанных величин, а вычисление средних от спиновых операторов приводит

к бозевской функции распределения спиновых волн. Учитывая, что операторы спина могут быть выражены через бозе-операторы рождения и уничтожения спиновых волн  $b_q$  и  $b_q^+$  по формулам (9,4) и что в гейзенберговском представлении с гамильтонианом (16,1)

$$b_q(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_q t} b_q, \quad b_q^+(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \varepsilon_q t} b_q^+,$$

где  $\varepsilon_q$  — энергия спиновой волны, вместо (16,10) получим

$$\begin{aligned} \langle [j_\alpha, H'(\tau)] [H', j_\alpha] \rangle &= \left( \frac{eJ_0}{\hbar} \right)^2 \frac{2s}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} \left[ \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}^-}{\partial k_\alpha} - \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+}{\partial (k-q)_\alpha} \right]^2 \times \\ &\times \{ n_q n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+ (1 - n_{\mathbf{k}}^-) e^{i\Omega_{\mathbf{k}\mathbf{q}}\tau} + (1 + n_q) n_{\mathbf{k}}^- (1 - n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+) e^{-i\Omega_{\mathbf{k}\mathbf{q}}\tau} \}, \quad (16,12) \end{aligned}$$

где

$$\Omega_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = \frac{1}{\hbar} (\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+ - \varepsilon_{\mathbf{k}}^- + \varepsilon_q).$$

Подставим теперь (16,12) в формулу (16,5) и воспользуемся тождеством

$$\int_0^\infty e^{i\Omega\tau} d\tau = \pi \delta(\Omega) + \frac{i}{\Omega}, \quad (16,13)$$

получаем

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi k T}{\hbar \langle j_\alpha^2 \rangle^2} \left( \frac{e}{\hbar} J_0 \right)^2 \frac{2s}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} \left[ \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}^-}{\partial k_\alpha} - \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+}{\partial (k-q)_\alpha} \right]^2 \times \\ &\times \{ n_q n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+ (1 - n_{\mathbf{k}}^-) + (1 + n_q) n_{\mathbf{k}}^- (1 - n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+) \} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+ - \varepsilon_{\mathbf{k}}^- + \varepsilon_q). \quad (16,14) \end{aligned}$$

В изотропном случае  $Q$  не будет зависеть от  $\alpha$ . Входящие сюда суммы по квазиимпульсам могут быть заменены интегралами. После всех вычислений, проводимых по стандартной схеме, приходим к следующей температурной зависимости электросопротивления<sup>55</sup>:

$$Q = C_1 \left( T_0 \ln \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T} \right) T + C_2 \left( \int_{T_0/T}^\infty \frac{x dx}{\operatorname{sh} x} \right) T^2. \quad (16,15)$$

Не зависящие от температуры коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  в общем случае представляют собой весьма громоздкие выражения, зависящие от функций  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^\sigma$  и  $J(\mathbf{k}\mathbf{k}')$  и их производных на границе Ферми. Мы не будем выписывать этих выражений, отметим лишь характерную особенность коэффициента  $C_1$ . Величина  $C_1$  отлична от нуля при условии, что закон дисперсии для  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^\sigma$  не является квадратичным. В случае квадратичного закона дисперсии  $C_1 \neq 0$ , если только  $\left( \frac{dJ(\mathbf{k}\mathbf{k}')}{d\mathbf{k}} \right)_{k_0} \neq 0$ .

Параметр  $T_0$  (см. (11,4)) есть некоторая критическая температура, характерная тем, что ниже ее процессы рассеяния рассматриваемого типа становятся неэффективными (вследствие невозможности одновременного выполнения законов сохранения энергии и импульса при столкновениях электронов и спиновых волн) и соответствующая часть электропроводности исчезает при  $T \ll T_0$  по закону экспоненты.

Для температур  $T \gg T_0$  интеграл, входящий в (16,15), легко разложить в ряд по малому параметру  $T_0/T$ :

$$\int_{T_0/T}^\infty \frac{x dx}{\operatorname{sh} x} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{T_0}{T} + \dots$$

Разлагая в ряд также  $\text{cth} \frac{T_0}{2T}$ , получим температурную зависимость электросопротивления в виде

$$\varrho = C_1 \left( T_0 \ln \frac{2T}{T_0} \right) T - C_2 T_0 T + \frac{\pi^2}{4} C_2 T^2. \quad (16,16)$$

При  $T \gg T_0$   $\varrho$  экспоненциально уменьшается с температурой, так что  $\varrho \sim e^{-T_0/T}$ . В промежуточной области температур нужно пользоваться общей формулой (16,15).

Наиболее интересен случай, когда  $T \gg T_0$ . Если коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  имеют одинаковый порядок величины, то  $s$ — $d$ -обменное взаимодействие при  $T \gg T_0$  будет в основном давать квадратичную зависимость  $\varrho$  от  $T$ . Линейный член сравним с квадратичным лишь при достаточно большой величине отношения  $C_1/C_2$ . Как показывает анализ <sup>55</sup> конкретных выражений для  $C_1$  и  $C_2$ , последнее может иметь место лишь при достаточно сильном отступлении закона дисперсии для  $\varepsilon_k$  от квадратичного. При квадратичном законе дисперсии  $C_1$  не должно превосходить по величине  $C_2$ .

Таким образом, главным членом в электросопротивлении ферромагнетиков при низкой температуре является  $\sim T^2$ . Впервые этот член был получен в работе Турова <sup>56</sup> в 1954 г. В последующем расчет Турова был подтвержден в различных вариантах в работах <sup>57, 58</sup>.

Как известно, рассеяние электронов проводимости на фононах приводит к температурной зависимости  $\varrho \sim T^5$  при низких температурах. Отсюда видно, что в этой области температур для ферромагнитных металлов вклад в сопротивление от  $s$ — $d$ -обмена должен преобладать, поэтому ферромагнитные металлы должны согласно развиваемой теории подчиняться температурному закону, близкому к  $\sim T^2$ .

Экспериментальные исследования температурной зависимости для области гелиевых температур в ферромагнитных металлах, проведенные в работах <sup>59</sup>, находятся в качественном согласии с теорией. Следует, однако, отметить, что выделить температурный член из общего сопротивления, соответствующий обменному рассеянию электронов на спиновых волнах, на основании экспериментальных данных пока невозможно, поскольку существуют другие механизмы рассеяния в переходных металлах, приводящие также к квадратичному температурному члену в сопротивлении (см. § 2 и 5). Для более детального анализа рассматриваемых явлений необходимы дополнительные экспериментальные исследования температурной зависимости электросопротивления, а также и других кинетических коэффициентов. Поэтому, конечно, нельзя считать, что упомянутое выше сравнение теории является окончательным подтверждением правильности полученного температурного хода вклада в электросопротивление ферромагнетиков, обусловленного электрон-ферромагнитным взаимодействием.

б) В ы с о к и е т е м п е р а т у р ы. Рассмотрим область температур, близкую к температуре Кюри. Как известно (см. § 5), в этой области для описания состояний спин-системы применим метод молекулярного поля, заключающийся в том, что обменное взаимодействие в системе спинов заменяется эффективным молекулярным полем  $\lambda$ , действующим на данный спин, так что  $H_l \rightarrow -\lambda S^z$  (постоянная  $\lambda$  может быть легко выражена через температуру Кюри). В этом приближении

$$S_j^\pm(\tau) = e^{-\frac{i}{\hbar} \lambda S_j^z \tau} S_j^\pm e^{\frac{i}{\hbar} \lambda S_j^z \tau} = e^{\mp \frac{i}{\hbar} \lambda \tau} S^\pm, \quad (16,17)$$

$$\langle S_j^\pm(\tau) S_j^\mp \rangle = e^{\mp \frac{i}{\hbar} \lambda \tau} \langle S^\pm S^\mp \rangle \delta_{jj'}.$$

Здесь, например,

$$\langle S^- S^+ \rangle = \langle (s - S^z) (s + S^z + 1) \rangle = \sum_{m=-s}^{+s} W_m (s - m) (s + m + 1), \quad (16,18)$$

$$W_m = \frac{e^{\beta \lambda m}}{\sum_{m=-s}^{+s} e^{\beta \lambda m}}.$$

$W_m$  есть вероятность того, что данный спин имеет проекцию  $m$  на направление молекулярного поля.

Подставляя приближенные соотношения (16,17) в (16,10) и интегрируя по  $\tau$  в пределах от 0 до  $\infty$ , получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^\infty \langle [j_\alpha, H'(\tau)] [H', j_\alpha] \rangle d\tau &= \frac{\pi \hbar}{N} \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} J^2(\mathbf{k} \mathbf{k}') \left[ \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}{\partial k_\alpha} - \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}'}}{\partial k'_\alpha} \right]^2 \times \\ &\times \{ n_{\mathbf{k}}^- (1 - n_{\mathbf{k}}^+) \langle S^- S^+ \rangle + n_{\mathbf{k}'}^+ (1 - n_{\mathbf{k}}^-) \langle S^+ S^- \rangle \} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'} + \lambda). \end{aligned} \quad (16,19)$$

Легко показать, что

$$\langle S^+ S^- \rangle = \langle S^- S^+ \rangle e^{\beta \lambda}. \quad (16,20)$$

С помощью этого соотношения с учетом  $\delta$ -функции под знаком суммы выражение (16,19) упрощается:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^\infty \langle [j_\alpha, H'(\tau)] [H', j_\alpha] \rangle d\tau &= \frac{2\pi e^2}{N \hbar} \sum_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} J^2(\mathbf{k} \mathbf{k}') \left[ \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}{\partial k_\alpha} - \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}'}}{\partial k'_\alpha} \right]^2 \times \\ &\times n_{\mathbf{k}}^- (1 - n_{\mathbf{k}}^+) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'} + \lambda) \langle (s - S^z) (s + S^z + 1) \rangle. \end{aligned} \quad (16,21)$$

Вычислив суммы по квазиимпульсам в приближении квадратичного закона дисперсии для электронов проводимости, получим на основании (16,21) и (16,5) следующую формулу для электросопротивления:

$$\varrho = \frac{3\pi}{4} \frac{J_0^2 m V}{e^2 \hbar \zeta N} \langle (s - S^z) (s + S^z + 1) \rangle \frac{l \beta \lambda}{e^{\beta \lambda} - 1}. \quad (16,22)$$

Пренебрегая дисперсией спиновой переменной, т. е. считая, что  $\langle (S^z)^2 \rangle \approx \langle S^z \rangle^2$ , среднее от спиновых операторов в последней формуле может быть заменено на

$$(s - \langle S^z \rangle) (s + \langle S^z \rangle + 1). \quad (16,23)$$

Поскольку вблизи точки Кюри  $\lambda \rightarrow 0$ , последний множитель в (16,22) практически равен 1, поэтому температурная зависимость сопротивления определяется для этого интервала температур множителем (16,23). Отсюда ясно, что вблизи точки Кюри сопротивление, обусловленное  $s-d$ -обменом, резко возрастает, тогда как выше точки Кюри, когда  $\langle S^z \rangle = 0$ , оно постоянно и равно

$$\varrho_{\text{п}} = \frac{3\pi}{4} \frac{J_0^2 m V}{e^2 \hbar \zeta N} s(s+1). \quad (16,24)$$

В ферромагнитной области, вдали от точки Кюри, оно мало ввиду того, что  $\langle S^z \rangle \approx s$  и обращается в нуль при температуре абсолютного нуля, хотя, вообще говоря, в этой области температур формула (16,22) неприменима. Таким образом, качественно формула (16,22) правильно описывает аномальный ход добавочного электросопротивления в ферромагнетиках. Численная величина сопротивления также удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными. При обычных оценках:  $m \sim 10^{-27}$  г,

$\zeta \sim 10^{-12}$  эрг,  $\frac{N}{V} \sim 10^{22}$  см<sup>-3</sup>,  $J_0 \sim 10^{-14}$  эрг—имеем вблизи точки Кюри и в парамагнитной области  $\varrho_n \sim 10^{-18}$  сек.

Заметим, что формула (16,24) отражает наблюдаемую в переходных металлах тенденцию к тому, что добавочное электросопротивление металла тем больше, чем больше величина спина  $s$  незаполненной оболочки.

Более подробно вопрос о добавочном электросопротивлении ферро- и антиферромагнитных металлов как с теоретической, так и с экспериментальной стороны рассмотрен в обзоре Коулса <sup>76</sup>.

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный выше обзор современного состояния экспериментального и теоретического изучения свойств переходных металлов позволяет утверждать, что этот раздел физики твердого тела представляет собой весьма обширное поле для научных исследований, поскольку мы еще далеко не полностью знаем основные черты электронной структуры этих веществ. Главное наше внимание было уделено изложению основ и применений  $s-d(f)$ -обменной модели переходных металлов (см. § 5—16), в основу которой положено предположение о возможности разделения в кристаллах системы электронов внешних слоев атомной оболочки на две подгруппы: электроны проводимости и электроны бывших недостроенных  $d$ - или  $f$ -слоев. При этом подчеркивался не столько сам факт существования этих двух подгрупп, а указывалось на наличие двух ветвей спектра единой системы электронов кристалла переходного металла. Положительным моментом этой модели является то, что она позволила в наиболее последовательной и общей форме описать ряд важнейших специфических черт электронной системы кристалла переходного металла: 1) установить особенности в структуре поверхности Ферми системы электронов проводимости, связанные со снятием спинового вырождения в ферромагнитных кристаллах или с появлением добавочной энергетической щели в антиферромагнитных металлах; эти особенности энергетического спектра позволили в принципе понять всю специфику равновесных статистических свойств и кинетических коэффициентов этих веществ; 2) принять во внимание активное участие электронов проводимости в явлении косвенного обмена, особенно в случае  $f$ -металлов и разбавленных твердых растворов переходных элементов в диамагнитных растворителях.

Следует отметить, что с помощью новых квантостатистических методов (теория ферми-жидкости <sup>61</sup>, температурные функции Грина <sup>14, 17, 18, 22, 60</sup>, техника графов <sup>63</sup> и т. п., а также феноменологической трактовки  $s-d(f)$ -модели, см. § 5), удалось показать правильность не только ее общих физических положений (о наличии коллективных движений двух типов), но и важнейших ее количественных выводов (смещение поверхностей Ферми для электронов проводимости с различной проекцией спина, выражение для параметра косвенного обмена и др., см. гл. III и IV).

Наиболее слабой чертой  $s-d(f)$ -модели является то, что в ней практически никак не учтен эффект коллективизации электронов бывших внутренних недостроенных слоев и их участие в процессах переноса электронного заряда в кристалле. Поэтому эта модель более подходит к случаю  $f$ -металлов и их сплавов, а также к случаю ферро- и антиферромагнитных полупроводников, в которых эффект коллективизации  $f$ - или  $d$ -электронов минимален\*).

\*) В связи с проблемой ферромагнитных и антиферромагнитных, а также парамагнитных сплавов переходных металлов обращаем внимание читателей на интересную статью Ломера <sup>83</sup>.

Рассматриваемая трактовка так же совершенно не учитывает реального распределения электронной зарядовой  $\rho(r)$  и спиновой  $\sigma(r)$  плотностей в кристалле (см. § 5). Поэтому в рамках  $s-d(f)$ -модели невозможен учет фактической формы ферми-поверхности и в связи с этим трактовка всех специфических для ферми-систем эффектов, а также определение рентгеновских и нейтронных (магнитных) форм-факторов. Модель совершенно бессильна определить сколько-нибудь точно количественно величину средних атомных магнитных моментов (исключая оценки вклада, вносимого эффектом подмагничивания электронов проводимости), особенно в случае  $d$ -металлов и сплавов. Точно так же совершенно не учитывается роль величины и симметрии внутреннего кристаллического (электрического и магнитного) поля в распределении электронной и спиновой плотности  $d$ - и  $f$ -электронов, а также внутренних электронов ионных остовов. В связи с этим в теории остается совершенно открытым вопрос о соотношении между спиновыми и орбитальными моментами  $d$ - и  $f$ -слоев \*). Вместе с тем, как показывают последние опытные исследования внутренних эффективных полей в ферромагнитных и антиферромагнитных кристаллах (с помощью эффекта Мёссбауэра, ядерного магнитного резонанса (см. § 5)), в них имеет место существенное влияние состояния внешних слоев электронной системы на внутреннюю электронную оболочку ионных остовов кристалла.

В связи с перечисленными выше главными недостатками  $s-d(f)$ -модели, можно сформулировать те основные вопросы в области физики переходных металлов, их сплавов и соединений, которые в настоящее время требуют своего экспериментального и теоретического решения.

а) Необходимо весьма прецизионное определение зарядовой  $\rho(r)$  и спиновой  $\sigma(r)$  электронной плотности в кристаллах изучаемых веществ. Для этой цели необходимо прежде всего усовершенствовать экспериментальные методы определения рентгеновских и нейтронных форм-факторов, а также вести дальнейшую разработку более точных теоретических расчетных методов для их теоретического анализа (развитие метода Хартри—Фока, расчеты сечений рассеяния поляризованных нейтронов и т. п.). Одновременно необходимо принимать в расчет влияние симметрии и величины кристаллического поля, учитывать эффекты кристаллического (штарковского и зеемановского) расщепления внутренних электронных уровней и т. д. Следует отметить, что хотя за последнее время в этой области появились работы (см., например, исследования по расчету форм-факторов <sup>64</sup>), вопросы точности экспериментальных измерений, в особенности теоретической трактовки опытных данных, весьма далеки еще от совершенства (достаточно напомнить «дискуссию» в связи с трактовкой результатов опытов в работе Вейсса и де-Марко <sup>65</sup>). Вместе с тем получение правильной картины электронной плотности в кристалле является необходимейшей предпосылкой для построения последовательной теории переходных металлов и их сплавов, которая только и может до конца обнаружить все еще скрытые от нас потенциальные перспективы их практического использования.

б) Решение вопроса о «геометрическом» распределении электронов в изучаемых кристаллах должно быть тесно связано с вопросом об их распределении в пространстве квазимульсов, т. е. с проблемами определения формы поверхности Ферми в кристаллах переходных металлов и сплавов при сложном законе дисперсии для электро-

\*) Как следует из некоторых теоретических работ <sup>62</sup>, даже грубо модельные соображения о виде функции  $\rho(r)$  дают возможность получить качественное объяснение некоторых физических свойств переходных металлов и сплавов.

нов проводимости, определения аномально высоких значений электронной плотности вблизи фермиевской поверхности и т. п.<sup>66,67</sup>. Все эти вопросы пока совершенно не исследованы и ими не занимались в  $s-d(f)$ -обменной модели\*). Вместе с тем изучение подсистемы электронов проводимости металла и сплава без решения этих фундаментальных вопросов нельзя считать сколько-нибудь законченным. Особый интерес эта проблема (ферми-поверхности) будет представлять для  $d$ -металлов, не обладающих атомным магнитным порядком (в первую очередь для начала ряда  $3d$ -металлов и для рядов  $4d$ - и  $5d$ -металлов).

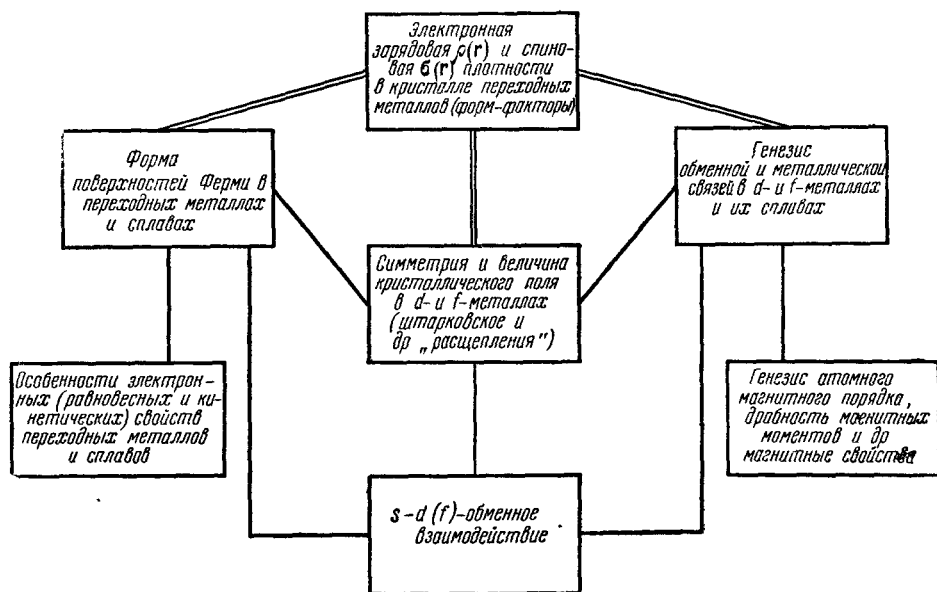


Схема основных «проблем» теории переходных металлов.

в) Третьим важнейшим вопросом является решение проблемы природы обменной и металлической связей в переходных металлах, сплавах и соединениях. Здесь также пока известно очень мало. По сути говоря, мы только в принципе знаем, какова общая (электростатическая) природа обменного взаимодействия и что можно говорить о прямом и косвенном обменных взаимодействиях. До сих пор нет строгой количественной теории обменной связи в кристаллах. Совершенно не ясен, например, вопрос о генезисе этой связи в  $d$ -металлах (см., например, расчет Маршалла и Стюарда<sup>68</sup>, а также работу Фримена и Уотсона<sup>81</sup>). Именно поэтому для нас остался открытым вопрос, почему большая часть  $d$ -металлов парамагнитны, а меньшая часть — ферро- или антиферромагнитны, а  $f$ -металлы, наоборот, все ферро- или антиферромагнитны. Естественно, что этот третий основной вопрос о генезисе и величине обменного взаимодействия находится в тесной связи с первыми двумя, ибо только при точном знании распределения зарядовой и спиновой плотности можно поставить вопрос о вычислении энергетических обменных параметров. В частности, знание поверхностей Ферми позволит решить вопрос о конкуренции обменного взаимодействия и кинетической энергии в системе коллективизированных электронов<sup>69-72,87</sup>. С проблемой генезиса обменной связи

\*) В работе Вонсовского и Кобелева<sup>82</sup> сделана первая попытка с помощью метода функций Грина решить более общую задачу о магнитных свойствах двух подсистем взаимодействующих электронов, не делая заранее никаких предположений об их пространственной локализации или делокализации.

тесно связан вопрос о природе сил связи в переходных металлах и сплавах, определяющих их выдающееся место в ряду прочных конструкционных материалов. Здесь опять-таки решение всех трех перечисленных вопросов должно быть необходимым этапом разработки последовательной теории.

Естественно, что решение поставленных основных проблем и всех вытекающих из них частных конкретных задач объяснения известных и предсказанных свойств (см. схему на стр. 49) должно будет идти параллельно по пути как эксперимента, так и теории. В области эксперимента ведущую роль должны играть сознательно поставленные моделирующие опыты, а не метод простого накопления фактов. Одним из таких важных методов будет являться метод изучения сильно разбавленных твердых растворов переходных элементов, когда в решетке диамагнитного растворителя находится небольшое число практически между собой не взаимодействующих парамагнитных  $d$ - или  $f$ -ионов. Детальные изучения электронной плотности (зарядовой и спиновой), величины среднего магнитного момента, обменной связи, эффективных полей, действующих на электронную оболочку и на ядро и т. п. — всё это необходимые элементы, без которых нельзя решить поставленные выше основные вопросы теории. Важным элементом таких моделирующих экспериментов будут являться также исследования упорядочивающихся сплавов с участием переходных элементов, а также изучение влияния различных дефектов (по возможности единичных) структуры (вакансии, атомы внедрения и замещения, дислокации и т. п.) на разнообразные свойства переходных металлов и сплавов.

*Добавления при корректуре.* 1) К примечанию на стр. 18. Характер закона дисперсии спиновых волн определяется поведением функции  $f(q)$  в (9,53'). В частности, недавно Волл и Неттель<sup>84</sup> заметили, что производная  $f(q)$  в точке  $q=2k_0$  имеет логарифмическую расходимость. Если учесть, что вместо выражения (9,53') правильнее писать

$$\epsilon_q = \frac{3}{4} \frac{N_s}{N} \frac{sJ_0^2}{\zeta} \sum_{\tau} [f(\tau) - f(\tau + q)], \quad (9,53'')$$

где  $\tau$  — вектор обратной решетки, то этот факт приводит к тому, что при значениях  $q$ , удовлетворяющих условию  $|\tau + q| = 2k_0$ , функция  $\epsilon_q$  имеет резкое нарушение монотонности. Численные расчеты, проведенные в работе<sup>84</sup>, показали, что величина таких «срывов» на кривой  $\epsilon_q$  составляет несколько процентов. Хотя этот эффект и трудно наблюдать, он очень интересен, так как демонстрирует влияние вида поверхности Ферми (в данном случае сферической) на спектр спиновых волн.

2) Ко второму примечанию на стр. 19. Достигнутое в работе<sup>85</sup> качественное согласие экспериментальных значений  $g$ -факторов для ряда редкоземельных металлов с рассчитанными по формуле, приведенной во втором примечании на стр. 19, является иллюзорным, поскольку при этом предполагается, что знак  $s-d$ -обменного интеграла для редкоземельных металлов (в частности для Gd) противоположен знаку, который получается из других экспериментов (см., например, <sup>86</sup>), тогда как по абсолютной величине результаты близки друг к другу, причем для Gd  $J_0 \sim 2 \cdot 10^{-13}$  эрг<sup>86, 78</sup>. Отличие величины  $g$ -фактора для этих металлов от значения 2, по-видимому, должно объясняться другими причинами.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА. II

1. С. В. Вонсовский, ЖЭТФ 16, 981 (1946).
2. С. В. Вонсовский и Е. А. Туров, ЖЭТФ 24, 419 (1953).
3. E. A b r a h a m s. Phys. Rev. 98, 387 (1954).
4. T. K a s u y a, Progr. Theor. Phys. 16, 45 (1956).
5. A. H. M i t c h e l l, Phys. Rev. 105, 1439 (1957).
6. K. Y o s i d a, Phys. Rev. 106, 893 (1957).
7. Ю. А. Изюмов, Л. М. Носкова, Физ. тв. тела 4, 217 (1962).
8. M. A. R u d e r m a n, C. K i t t e l, Phys. Rev. 96, 99 (1954).
9. J. F r i e d e l, Advances in Phys. (Phil. Mag. Suppl.) 3, 446 (1954).
10. C. Z e n e r, Phys. Rev. 81, 440 (1951).
11. T. H o l s t e i n, H. P r i m a k o f f, Phys. Rev. 58, 1098 (1940).



12. Ю. А. Изюмов, ДАН СССР 125, 1227 (1959).
13. А. И. Ахиезер, J. Phys. USSR 10, 217 (1946).
14. Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, ДАН СССР 126, 53 (1959).
15. Д. Н. Зубарев, УФН 71, 71 (1960); А. И. Алексеев, УФН 73, 41 (1961); И. Е. Дзялошинский, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, УФН 73, 381 (1961); В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов, Метод функций Грина в статистической механике, М., Физматгиз, 1961.
16. А. А. Бердышев, Б. В. Карпенко, ЖЭТФ 36, 819 (1959).
17. С. В. Вонсовский, А. А. Бердышев, Ю. А. Изюмов, Б. В. Карпенко, Ю. Я. Поляк, ДАН СССР 132, 79 (1960).
18. С. В. Вонсовский, Ю. А. Изюмов, Физ. метал. и металловед. 10, 321 (1960).
19. Е. А. Туров, Изв. АН СССР, сер. физ. 19, 462 (1955).
20. C. Kittel, A. N. Mitchell, Phys. Rev. 101, 1611 (1956).
21. Е. А. Туров, Физ. метал. и металловед. 4, 183 (1957).
22. Н. А. Потапков, С. В. Тябликов, Физ. тв. тела 2, 2733 (1960).
23. Антиферромагнетизм, Сб. статей, М., ИЛ, 1956.
24. А. А. Бердышев, Б. В. Карпенко, ЖЭТФ 38, 925 (1960).
25. А. А. Бердышев, Б. В. Карпенко, Р. Б. Закс, Л. М. Носкова, Физ. метал. и металловед. 9, 481 (1960).
26. Ю. А. Изюмов, Физ. метал. и металловед. 11, 650 (1961).
27. J. Owen, M. Brown, V. Agr, A. F. Kip, J. Phys. Chem. Solids 2, 85 (1956).
28. P. W. Anderson, Phys. Rev. 115, 2 (1959).
29. A. W. Overhauser, J. Phys. Chem. Solids 13, 71 (1960).
30. В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, ЖЭТФ 39, 651 (1960).
31. Е. А. Туров, Сб. «Ферромагнитный резонанс», М., Физматгиз, 1961, гл. 5.
32. R. Kubo, K. Tomita, J. Phys. Soc. Japan 9, 888 (1954).
33. С. В. Тябликов, Физ. тв. тела 2, 361 (1960).
34. Ю. А. Изюмов, Г. В. Скороцкий, Физ. тв. тела 2, 1766 (1960).
35. Ю. А. Изюмов, Ю. Я. Поляк, Физ. метал. и металловед. 10, 641 (1960).
36. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, М. И. Каганов, Физ. метал. и металловед. 6, 932 (1958).
37. L. Van Hove, Phys. Rev. 95, 249 (1954); Ю. А. Изюмов, Физ. метал. и металловед. 11, 801, 1961.
38. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М., Гостехиздат, 1948, § 128.
39. O. Halpern, M. H. Johnson, Phys. Rev. 55, 898 (1939).
40. Ю. А. Изюмов, Физ. тв. тела 4, 225 (1962).
41. А. Ахиезер, И. Померанчук, Некоторые вопросы теории ядра, М., Гостехиздат, 1950.
42. Ю. А. Изюмов, Физ. метал. и металловед. 12, 480 (1961).
43. J. Van der Meer, L. Sosser, J. Schrieffer, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).
44. Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачёв, Д. В. Ширков, Новый метод в теории сверхпроводимости, М., Изд-во АН СССР, 1958.
45. Б. В. Карпенко, Физ. метал. и металловед. 10, 301 (1960).
46. Б. В. Карпенко, Физ. метал. и металловед. 10, 794 (1960).
47. T. Kasuya, Progr. Theor. Phys. 20, 980 (1958).
48. С. В. Вонсовский, М. С. Сви́рский, ЖЭТФ 40, 1676 (1961).
49. А. И. Ахиезер и И. Я. Померанчук, ЖЭТФ 36, 859 (1959).
50. B. T. Matthias, H. Suhl, E. Corenzwit, Phys. Rev. Lett. 1, 449 (1958).
51. С. В. Вонсовский, М. С. Сви́рский, ДАН СССР 122, 204 (1958).
52. С. В. Вонсовский, М. С. Сви́рский, ЖЭТФ 39, 384 (1960).
53. R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan 12, № 6, 570 (1957).
54. H. Nakano, Progr. Theor. Phys. 17, 145 (1957).
55. Ш. Ш. Абельский, Е. А. Туров, Физ. метал. и металловед. 10, 801 (1960).
56. Е. А. Туров, Изв. АН СССР, сер. физ. 19, 474 (1955); Физ. метал. и металловед. 6, 203 (1958).
57. А. А. Юдин, Вестник МГУ, № 3, 81 (1958).
58. I. Mappari, Progr. Theor. Phys. 22, 335 (1959).
59. Е. И. Кондорский, О. С. Галкина, Л. А. Черникова, Изв. АН СССР, сер. физ. 21, 1123 (1957); ЖЭТФ 34, 1070 (1958); А. И. Судовцев, Е. Е. Семеновенко, ЖЭТФ 31, 525 (1956); 42, 10022, 1488 (1962).
60. G. W. Pratt, Jr., R. D. Puff, Bull. Amer. Phys. Soc. 6(1), 54 (1961). D. G. Bulwage, Bull. Am. Phys. Soc. 6 (1), 54 (1961).
61. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 30, 1058 (1956).
62. E. D. Wollan, Phys. Rev. 117, 387 (1960); J. B. Goodenough, Phys. Rev. 120, 67 (1960).
63. G. Horwitz, H. B. Callen, Bull. Amer. Phys. Soc. 6, 123, 124 (1961).
64. R. E. Watson, A. J. Freeman, Acta Crystallogr. 1, 27 (1961).

65. R. J. Weiss and J. J. de Marco, *Revs. Mod. Phys.* **30**, 59 (1958).
  66. C. Herring, *J. Appl. Phys.* **31**, 3 (1960).
  67. E. J. Woll, S. J. Nettel, *Bull. Amer. Phys. Soc.* **6** (2), 144 (1961).
  68. R. Stuart, W. Marshall, *Phys. Rev.* **120**, 353 (1960).
  69. С. В. Вонсовский, Л. Я. Кобелев, *Физ. метал. и металловед.* **11**, 820 (1961).
  70. Р. А. Сурис, *Физ. тв. тела* **3**, 1795 (1961); В. Л. Бонч-Бруевич, Р. А. Сурис, *Физ. тв. тела* **4**, 309 (1962).
  71. F. Englert, *Bull. Am. Phys. Soc.* **6** (1), 55 (1961).
  72. А. А. Абрикосов и И. Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **35**, 771 (1958).
  73. Д. И. Блохинцев, *Основы квантовой механики*, 2-е изд., М., Изд-во «Высшая школа», 1961.
  74. А. А. Бердышев и М. Я. Алиевский, *Физ. метал. и металловед.* (в печати).
  75. Морковски, *Физ. метал. и металловед.* **13**, 940 (1962).
  76. B. R. Coles, *Adv. Phys. (Phil. Mag. Suppl.)* **7**, 40 (1958).
  77. T. Kasuya, *Progr. Theor. Phys.* **16**, 58 (1956).
  78. P. G. de Gennes, J. Friedel, *J. Phys. Chem. Solids* **4**, 71 (1958).
  79. E. Fawcett, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 370 (1961).
  80. J. A. Rayve, H. Sell, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 199 (1962).
  81. A. J. Freeman, R. E. Watson, *Phys. Rev.* **124**, 1439 (1961).
  82. С. В. Вонсовский, Л. Я. Кобелев, *Физ. метал. и металловед.* **12**, 814 (1961).
  83. W. M. Lomer, *Brit. J. Appl. Phys.* **12**, 535 (1961).
  84. E. J. Woll, S. J. Nettel, *Phys. Rev.* **123**, 796 (1961).
  85. S. H. Liu, *Phys. Rev.* **123**, 470 (1961).
  86. V. Jaccarino, B. T. Matthias, M. Peter, H. Suhl, J. H. Werrick, *Phys. Rev. Letts.* **5**, 251 (1960).
  87. D. M. Edwards and E. P. Wohlfarth, *J. phys. et radium* **20**, 136 (1959); D. M. Edwards, Preprint (1962).
-