

ВЫБРОСЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. И. Тихонов

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время изучение случайных процессов представляет не только глубокий физический интерес (броуновское движение, радиоактивный распад, предельные точности измерительных приборов, распространение электромагнитных волн через турбулентную ионосферу и т. д.), но и имеет существенное практическое значение. Это объясняется тем, что дальнейшее усовершенствование ряда физических устройств за счет улучшения их конструкции и технологии изготовления имеет свой предел,

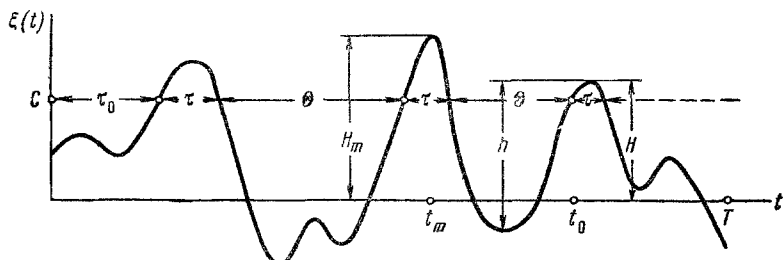


Рис. 1. Реализация стационарного случайного процесса.

определяемый чисто физическими причинами — флуктуациями, заставляющими изыскивать принципиально новые пути решения. Такое положение создалось, например, в ряде отраслей современной радиофизики (радиоастрономия, радиолокация, радиосвязь, радиоспектроскопия и др.).

Естественно поэтому, что после первых работ А. Эйнштейна и М. Смолуховского^{1, 2} по теории броуновского движения к случайным процессам проявлялось все возрастающее внимание, особенно усилившееся за последние 20 лет благодаря большому техническому прогрессу в области радиофизики.

Из обширного комплекса проблем теории случайных процессов в данной статье рассмотрены несколько специальных задач, которые можно объединить общим названием «Выбросы случайных процессов». Хотя не все из этих задач получили законченное аналитическое решение, однако имеющиеся литературные сведения и выполненные экспериментальные работы позволяют привести некоторые общие результаты, что позволит пользоваться ими лицам, специально не занимающимся вопросами выбросов.

Прежде чем перейти к изложению фактического материала, приведем основные определения, укажем практическую значимость отдельных задач и основное содержание статьи.

На рис. 1 приведена реализация стационарного случайного процесса $\xi(t)$ длительностью T . Все физически реальные случайные процессы

представляют собой непрерывные функции времени. Такая функция на конечном интервале T имеет конечное число максимумов и минимумов с различными значениями H , причем в момент времени t_m реализация имеет максимум максимум H_m . Обозначим разность высот между минимумом и соседним максимумом через h .

Реализация $\xi(t)$ N раз (на рис. 1 три раза) пересекает некоторый фиксированный уровень C снизу вверх (с положительной производной), причем в момент времени τ_0 впервые происходит такое пересечение.

Условимся называть событие, состоящее в том, что случайный процесс $\xi(t)$ пересекает уровень C снизу вверх, положительным выбросом. Тогда можно сказать, что реализация $\xi(t)$ имеет N выбросов, причем указанные на рисунке величины τ и Θ можно назвать соответственно длительностями положительных выбросов и интервалов между выбросами.

Величины τ , Θ , H , h в пределах одной реализации могут принимать несколько значений (в зависимости от уровня C и интервала T) и вместе с величинами N , τ_0 и H_m изменяются случайным образом от одной реализации к другой.

В дальнейшем для конкретных видов стационарных случайных процессов $\xi(t)$, с которыми наиболее часто приходится иметь дело в радиофизике, рассмотрены следующие задачи:

1) определены величины, характеризующие распределение числа выбросов N в ансамбле реализаций различной длительности при нескольких значениях уровня C ;

2) приведены распределения случайных величин τ_0 , τ , Θ , H_m , H и h для ансамбля реализаций при нескольких значениях длительности интервала T .

Помимо того, что величины N , τ_0 , τ , Θ , H_m , H , h сами по себе представляют интерес как детальные характеристики случайного процесса $\xi(t)$, знание их оказывается также необходимым при решении ряда практических задач. Приведем несколько конкретных примеров из области радиофизики, механики, теории надежности и биофизики, хотя этими примерами не исчерпывается область применимости результатов.

В разнообразных радиотехнических устройствах часто применяются электронные реле и триггеры. Они применяются в счетно-решающих устройствах дискретного счета, в радиолокационных и радиосвязных устройствах с инструментальной индикацией, в дозиметрических приборах для измерения интенсивности радиоактивных излучений, в приборах для точного измерения малых интервалов времени и частоты периодических колебаний, в различных системах кодирования и декодирования информации, в системах импульсной синхронизации и других устройствах автоматики.

Если полезный сигнал сопровождается флуктуационными помехами, то приходится анализировать воздействие на реле полезных импульсных сигналов совместно с флуктуациями. Влияние последних на работу реле зависит от отношения «порогового» напряжения срабатывания реле к интенсивности помех.

Если уровень помех мал по сравнению с «пороговым» напряжением, то можно пренебречь маловероятными ложными срабатываниями реле. Флуктуационные помехи будут вызывать «дрожание» как момента срабатывания реле, так и момента окончания его работы; длительность импульса, вырабатываемого электронным реле, будет испытывать некоторые колебания³.

Когда уровень помех сравним или превышает «пороговое» напряжение, будут происходить ложные срабатывания, обуславливающие погрешности работы соответствующих устройств⁴⁻⁷.

Если допустимо рассматривать реле как практически безынерционное устройство, то число ложных срабатываний будет определяться чис-

лом N выбросов флуктуационных помех, превышающих порог срабатывания реле. При учете инерционных свойств реле для определения числа ложных срабатываний нужно, кроме N , знать также плотности вероятности для τ и Θ ⁸. При этом сама задача работы инерционного реле является очень характерной для теории массового обслуживания⁹.

Величины N , Θ и H при определенных условиях являются важными характеристиками замираний радиопередач¹⁰⁻¹². Для линий коротковолновой радиосвязи протяженностью более 200 км электромагнитное поле в месте приема образовано пространственной волной, отраженной главным образом от ионизованного слоя F_2 . Плотность ионизации этого слоя неоднородна и изменяется случайным образом во времени. Падающая на такую неоднородную среду гармоническая волна после отражения распадается на ряд элементарных лучей, приходящих в место приема с различными интенсивностями и фазами. При этом принятое колебание будет представлять узкополосный случайный процесс. Применительно к такому случайному процессу величина N характеризует частоту замираний, величина Θ — длительность замираний (федингов) ниже определенного порога и величина H — глубину замираний.

Знание плотности вероятности для наибольших значений H_m в реализациях случайного процесса заданной длительности оказывается необходимым при выяснении области применимости одного из основных статистических критериев оценки параметров — метода максимума функции правдоподобия¹³.

При оценке неизвестных параметров сигнала, принимаемого совместно с флуктуационной помехой, часто пользуются методом максимума функции правдоподобия⁷. За истинное значение принимают то значение параметра, при котором функция правдоподобия на заданном интервале времени имеет максимум максимум. Однако при небольших отношениях сигнал/помеха этот максимум максимум может быть обусловлен выбросами помехи и может находиться на значительном удалении от истинного значения параметра. Для таких отношений сигнал/помеха метод максимума функции правдоподобия дает неприемлемые ошибки и утрачивает свое значение.

Таким образом, выяснение области применимости метода максимума функции правдоподобия связано с определением того значения отношения сигнал/помеха, при котором в достаточно большом числе реализаций флуктуационных помех фиксированной длительности T сравнительно мало таких, в которых имеются выбросы, сравнимые по высоте с выбросами, обусловленными сигналом. Полное решение этой задачи включает в себя как необходимый этап вычисление плотности вероятности для величины H_m .

Знание распределения для величин H и H_m оказывается нужным в радиолокации морских целей на фоне отражений от волнующейся поверхности моря¹⁴, при анализе помехоустойчивости систем экстремального регулирования¹⁵ и в других задачах. Заметим, кстати, что при работе систем экстремального регулирования в условиях наличия флуктуационных помех для определения оптимального шага пробных движений нужно располагать плотностью вероятности для величины h ^{15, 16}.

В механике в последнее время установилась точка зрения, что если какой-либо материал находится под действием случайных нагрузок, то его расчет на прочность следует производить по среднему числу превышений (выбросов) нагрузкой заданного значения в единицу времени. При этом установлено, что случайная нагрузка с тем же средним числом выбросов, что и гармоническая, оказывается более опасной. Поэтому, например, при расчете на прочность крыльев самолета, находящихся под действием случайной атмосферной турбулентности, необходимо знать число

превышений в единицу времени изгибающим и крутящим моментами заданного уровня¹⁷. Аналогичное замечание относится и к расчету плотин, подвергаемых случайным нагрузкам волн.

Указанные ранее параметры выбросов можно использовать на практике для количественной оценки микрошероховатости обработанной поверхности. Отдельные параметры характеризуют микронеровности профиля поверхности с разных сторон. На практике, естественно, стремятся к получению возможно большей информации с помощью минимального числа параметров.

Установлено¹⁸, что при некоторых типах обработки (например, шлифовании) кривую профиля поверхности, изображающую зависимость высоты неровностей от абсциссы профиля, можно рассматривать как стационарный нормальный случайный процесс. При этом довольно полное описание профиля дается тремя параметрами: средним числом пересечений профильной кривой с двумя уровнями C_1 и C_2 и числом максимумов на рассматриваемом участке.

Укажем, что большинство сейсмических приборов и медицинских приборов для регистрации биотоков сердца и мозга основано на измерении высоты и длительности выбросов, а также интервалов между выбросами¹⁹.

По-видимому, к исследованию выбросов случайных процессов могут быть сведены некоторые задачи теории надежности работы сложной аппаратуры (в частности, радиоэлектронной), содержащей большое число элементов. В этом случае число N может характеризовать число отказов элементов (аппаратуры) за время T , τ_0 — момент появления первого отказа, τ — время, отводимое на устранение соответствующей неисправности, или время, отводимое на ввод в действие резервного элемента при «холодном» включении, и Θ — время безотказной работы после устранения очередной неисправности. На практике обычно интересуются средними значениями указанных величин²⁰. Вопрос о том, каким при этом нужно задаваться исходным случайным процессом $\xi(t)$, должен решаться на основании статистического анализа обширного экспериментального материала, относящегося к конкретной аппаратуре.

Из приведенных примеров можно составить представление о том широком научно-прикладном значении, которое имеют исследования по выбросам случайных процессов. Начало этим исследованиям было положено основной теоретической работой С. О. Райса²¹ в 1945 г. В этой работе для некоторых видов случайных процессов получены формулы для среднего числа выбросов и распределения максимумов, а также указан один приближенный путь решения задачи о плотности вероятности для длительностей выбросов (см. § 3).

В последующие годы выбросы случайных процессов рассматривались в ряде теоретических и экспериментальных работ, основное содержание которых будет указано при изложении частных задач.

Отметим, что к настоящему времени некоторые частные задачи по выбросам совсем не имеют аналитического решения (например, распределения для величин τ_0 и h), а удобные для практического использования решения по другим задачам являются весьма приближенными (плотности вероятности для величин $N_{\text{тк}}$, τ , Θ). Ввиду этого в данной работе уделено должное внимание экспериментальным результатам.

Цель данной статьи состоит в том, чтобы в понятной форме изложить основные теоретические и экспериментальные результаты по выбросам случайных процессов. Поскольку экспериментальные результаты получены для частных видов шумов, ниже приведены их основные характеристики.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИССЛЕДУЕМЫХ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ШУМОВ

Весьма трудоемкому экспериментальному исследованию, позволившему определить статистические характеристики случайных величин N , τ_0 , τ , Θ , H_m , H и h , подвергались несколько частных видов стационарных флуктуационных процессов, которые наиболее часто приходится учитывать как мешающие воздействия при работе радиотехнических систем и устройств автоматики*).

1. Нормальный стационарный флуктуационный шум $\xi(t)$, одномерная плотность вероятности которого определяется формулой

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}. \quad (1)$$

При этом использовались три вида нормального шума, имеющие приближенно следующие спектральные плотности и соответствующие им функции корреляции:

$$S(f) = S_0 \exp \left[-0,7 \left(\frac{f}{\Delta f} \right)^2 \right], \quad k(\tau) = S_0 \Delta f \exp \left[-14,1 (\tau \Delta f)^2 \right], \quad \left. \begin{array}{l} \Delta f = 14,6 \text{ кГц}, \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$S(f) = S_0 \left[1 + 0,41 \left(\frac{f}{\Delta f} \right)^2 \right]^{-2}, \quad k(\tau) = 1,3 S_0 \Delta f (1 + 10 \Delta f |\tau|) e^{-10 \Delta f |\tau|}, \quad \left. \begin{array}{l} \Delta f = 21 \text{ кГц}, \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$S(f) = \begin{cases} S_0 & \text{при } 0 \leq f \leq \Delta f, \\ 0 & \text{при } f < 0, f > \Delta f, \end{cases} \quad k(\tau) = S_0 \Delta f \frac{\sin 2\pi \Delta f \tau}{2\pi \Delta f \tau}, \quad \Delta f = 15 \text{ кГц}. \quad (4)$$

Здесь S_0 — значение спектральной плотности при нулевой частоте, Δf — ширина спектральной плотности на уровне $0,5 S_0$.

Такие шумы были получены с выхода низкочастотных усилителей с соответствующими амплитудно-частотными характеристиками, на вход которых воздействовал флуктуационный широкополосный шум тиратрона, помещенного в магнитное поле.

Следует заметить, что практически не удается получить шумы со спектральными плотностями, которые бы достаточно точно аппроксимировались кривыми (2)–(4). Реальные спектральные плотности, особенно вне полосы Δf , заметно отличались от аппроксимирующих кривых. Это обстоятельство является одной из существенных причин, обуславливающих расхождение между теоретическими и экспериментальными результатами.

Нормальные случайные процессы наиболее часто встречаются на практике и поэтому занимают особое положение среди других случайных процессов.

Большинство встречающихся на практике случайных процессов, таких, например, как дробовой шум электронных приборов, тепловые флуктуации, собственный шум типового радиоприемного устройства до детектора, атмосферные помехи, атмосферная турбулентность, шумы космического происхождения и другие, представляют собой результирующий эффект (сумму) большого числа сравнительно малых независимых (или

*) В дальнейшем вместо термина «случайный процесс» в качестве синонимов употребляются «флуктуационный процесс», «флуктуационный шум» или просто «шум».

слабо зависимых) элементарных импульсов, возникающих в случайные моменты времени.

Согласно центральной предельной теореме теории вероятностей плотность вероятности суммы неограниченно приближается к нормальной с увеличением числа слагаемых независимо от того, какие плотности вероятности имеют отдельные слагаемые.

Нормальные процессы обладают свойством «устойчивости» по отношению к линейным преобразованиям, т. е. если на вход линейной системы воздействует нормальный случайный процесс, на выходе системы получается также нормальный процесс. Более того, если ненормальный широкополосный случайный процесс действует на инерционную (узкополосную) систему, то процесс на выходе такой системы приближается к нормальному.

Укажем кратко методику получения других видов флуктуационных шумов. Известно²¹⁻²⁴, что если нормальный стационарный шум имеет спектральную плотность $S(f)$, симметричную относительно некоторой частоты f_0 , и ширина спектральной плотности Δf (допустим, на уровне 0,5 от значения при частоте f_0) много меньше f_0 , то шум по виду напоминает квазигармоническое колебание. Соответственно этому такой квазигармонический шум $\xi(t)$ можно представить в виде гармонического сигнала, случайно модулированного по амплитуде и фазе:

$$\xi(t) = A(t) \cos [2\pi f_0 t + \varphi(t)], \quad (5)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ — медленно изменяющиеся функции по сравнению с $\cos \omega_0 t$. Случайную функцию $A(t)$ можно назвать огибающей (амплитудой) флуктуаций, а функцию $\varphi(t)$ — случайной фазой флуктуаций.

Функция корреляции квазигармонического шума (5) имеет вид

$$k(\tau) = \sigma^2 q(\tau) \cos \omega_0 \tau,$$

где σ^2 — дисперсия шума $\xi(t)$, $q(\tau)$ — медленно изменяющаяся функция по сравнению с $\cos \omega_0 \tau$.

Сумму шума (5) и гармонического сигнала $s(t) = A_m \cos [2\pi f_0 t + \varphi_0]$

$$\eta(t) = \xi(t) + s(t)$$

можно представить в аналогичном виде

$$\eta(t) = E(t) \cos [2\pi f_0 t + \psi(t)]. \quad (6)$$

При выполнении определенных условий огибающие $A(t)$ и $E(t)$ можно выделить при помощи линейного амплитудного детектора, случайные частоты $\dot{\varphi}(t)$ и $\dot{\psi}(t)$ — при помощи частотного детектора, а $\cos \varphi(t)$ и $\cos \psi(t)$ — при помощи фазового детектора.

Можно привести несколько практических примеров, в которых встречаются указанные здесь случайные процессы. Так, в радиоприемных устройствах радиосвязи, предназначенных для приема сигналов с амплитудной, частотной и фазовой модуляцией, в отсутствие сигнала, но с учетом собственных шумов радиоприемника и внешних флуктуационных помех на выходе выделяются соответственно случайные процессы $A(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ и $\cos \varphi(t)$, а при наличии сигнала — случайные процессы $E(t)$, $\dot{\psi}(t)$ и $\cos \psi(t)$.

В импульсной радиолокации вследствие изрезанности диаграммы отражения цели отраженный сигнал часто аппроксимируется видом (5), а в дальней радиосвязи из-за турбулентного характера ионизации отражающего слоя видом (6).

2. Исследованию подвергались флуктуационные процессы $A(t)$ и $E(t)$, имеющие соответственно следующие плотности вероятности:

$$W(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right), \quad A \geq 0, \quad (7)$$

$$W(E) = \frac{E}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{E^2 + A_m^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{EA_m}{\sigma^2}\right), \quad E \geq 0, \quad (8)$$

где $I_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента. В отсутствие сигнала ($A_m=0$) формула (8) переходит в (7).

В обоих случаях спектральная плотность шума $\xi(t)$ имела вид гауссовой кривой

$$S(f) = S_0 \exp\left[-2,8 \left(\frac{f-f_0}{\Delta f}\right)^2\right], \quad (9)$$

причем $f_0 = 12$ Мгц, $\Delta f = 100$ кгц. Согласно формуле Хинчина функция корреляции такого шума равна

$$k(\tau) = S_0 \Delta f \exp[-3,5(\tau \Delta f)^2] \cos 2\pi f_0 \tau. \quad (10)$$

Для флуктуационного процесса $E(t)$ было взято несколько значений отношения сигнал/шум, а именно:

$$a = \frac{A_m}{\sigma} = 1,5; 3,0; 5,0.$$

3. Статистические характеристики указанных ранее величин выбросов при нескольких значениях отношения сигнал/шум и других параметров были также определены для случайных процессов $\dot{\varphi}(t)$, $\dot{\psi}(t)$, $\cos \varphi(t)$ и $\cos \psi(t)$. Однако из-за ограниченного объема статьи эти результаты здесь не приводятся. Одномерные плотности вероятности этих процессов и другие характеристики приведены в работе²².

При исследовании случайных частот $\dot{\varphi}(t)$ и $\dot{\psi}(t)$ исходный нормальный флуктуационный процесс $\xi(t)$ имел спектральную плотность вида (9) с параметрами $f_0 = 140$ кгц, $\Delta f = 1,5$ кгц.

Для случайных процессов $\cos \varphi(t)$ и $\cos \psi(t)$ спектральная плотность нормального шума $\xi(t)$ определялась квадратом резонансной кривой одиночного колебательного контура с резонансной частотой $f_0 = 50$ кгц и полосой пропускания $\Delta f = 3,8$ кгц (на уровне 0,5 по мощности).

Экспериментальное определение статистических характеристик случайных величин N , τ_0 , τ , Θ , H_m , H и h выполнялось путем статистической обработки большого числа фотографий (реализаций) соответствующих случайных процессов. Соответствие флуктуационных процессов указанным выше характеристикам проверялось в основном путем измерения спектральной плотности и сопоставления теоретических и экспериментальных плотностей вероятностей, причем последние определялись фотометрическим методом^{25,26}.

§ 2. ЧИСЛО ВЫБРОСОВ

Получим формулы для среднего числа $\bar{N}(T)$ выбросов стационарного случайного процесса $\xi(t)$ на интервале T , превышающих некоторый уровень C , а также для дисперсии $\sigma_N^2(T)$ числа выбросов.

Формулы для среднего числа выбросов нормальных случайных процессов, а также для огибающих $A(t)$ и $E(t)$ были впервые получены С. О. Райсом^{21,22} и затем более подробно обсуждались в работах^{27,23}.

Соотношения для дисперсии числа выбросов сначала получены в работах ^{28 29}, а затем С. О. Райсом ³⁰.

Будем считать случайную функцию $\xi(t)$ и ее производную $\dot{\xi}(t)$ непрерывными. Предположим, что известна совместная плотность вероятности $W_2(\xi(t), \dot{\xi}(t))$.

Из непрерывности следует, что на малом интервале Δt , т. е. внутри интервала $t \leq t' \leq t + \Delta t$, функция $\xi(t)$ близка к прямой

$$\xi(t') = \xi(t) + \dot{\xi}(t)(t' - t).$$

Поэтому на достаточно малом Δt может быть не более одного пересечения уровня C .

Таким образом, имеется две возможности: на интервале Δt не будет ни одного выброса или будет один выброс. Обозначим через P_1 вероятность того, что будет один выброс, а через P_0 — вероятность того, что не будет ни одного выброса. Очевидно, что среднее число выбросов на интервале Δt равно

$$\bar{N}(\Delta t) = 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_0 = P_1,$$

т. е. совпадает с вероятностью P_1 .

Для вычисления P_1 заметим, что выражение

$$dp = W_2(\xi(t), \dot{\xi}(t)) \Delta \xi \Delta \dot{\xi}, \quad \xi(t) = C,$$

определяет вероятность того, что функция $\xi(t)$, близкая к прямой, пересекает

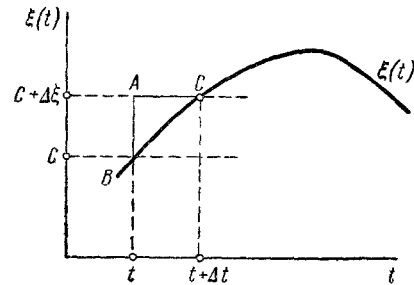


Рис. 2. К вычислению среднего числа выбросов.

вертикальный отрезок $AB = \Delta \xi$ (рис. 2), и при этом производная заключена в интервале от $\dot{\xi}(t)$ до $\dot{\xi}(t) + \Delta \dot{\xi}$.

Рассмотрим вероятность пересечения не вертикального отрезка $AB = \Delta \xi$, а горизонтального отрезка $AC = \Delta t$, считая производную $\dot{\xi}(t)$ фиксированной. Очевидно, что при фиксированной производной $\dot{\xi}(t)$ пересечение горизонтального отрезка длины Δt эквивалентно пересечению вертикального отрезка длины $\Delta \xi = \dot{\xi}(t) \Delta t$. Поэтому вероятность пересечения отрезка $AC = \Delta t$ с производной в пределах от $\dot{\xi}(t)$ до $\dot{\xi}(t) + \Delta \dot{\xi}$ равна

$$dp = W_2(\xi(t), \dot{\xi}(t)) \dot{\xi}(t) \Delta \xi \Delta t, \quad \xi(t) = C.$$

Интересующие нас выбросы (пересечения уровня C снизу вверх) будут происходить при всех положительных значениях производной, т. е. при $0 \leq \dot{\xi}(t) < \infty$. Поэтому полная вероятность P_1 пересечения уровня C на интервале $[t, t + \Delta t]$ равна

$$P_1 = \Delta t \int_0^{\infty} \dot{\xi} W_2(C, \dot{\xi}) d\dot{\xi}. \quad (11)$$

Но вероятность P_1 совпадает со средним числом выбросов, приходящихся на весь интервал $[t, t + \Delta t]$. Поделив обе части этого равенства на Δt , находим среднее число выбросов за единицу времени внутри этого интервала

$$\bar{N}_1 = \int_0^{\infty} \dot{\xi} W_2(C, \dot{\xi}) d\dot{\xi}. \quad (12)$$

Среднее число выбросов на интервале $[0, T]$ получаем интегрированием правой части формулы (11):

$$\bar{N}(T) = \int_0^T dt \int_0^\infty \dot{\xi} W_2(C, \dot{\xi}) d\dot{\xi}. \quad (13)$$

Для стационарных процессов подынтегральная функция не зависит от времени и, следовательно,

$$\bar{N}(T) = \bar{N}_1 T. \quad (14)$$

Формула для дисперсий числа выбросов может быть получена следующим путем³⁰. Разобьем полный интервал времени $[0, T]$ на m равных элементарных подынтервалов малой длительности $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \dots = \Delta t_i = \dots = \Delta t_m = T/m$. В силу предполагаемой непрерывности случайной функции $\xi(t)$ и ее производной $\dot{\xi}(t)$ на каждом элементарном подынтервале функция $\xi(t)$ может иметь не больше одного выброса. Свяжем с i -м подынтервалом случайную величину δ_i , принимающую два значения: $\delta_i = 1$, если реализация $\xi(t)$ имеет один выброс, и $\delta_i = 0$, если выброса нет.

Тогда число выбросов конкретной реализации $\xi(t)$ на интервале $[0, T]$ равно

$$N_\xi(T) = \sum_{i=1}^m \delta_i.$$

Среднее число выбросов для ансамбля реализаций $\xi(t)$ фиксированной длительности T находим статистическим усреднением:

$$\bar{N}(T) = \overline{N_\xi(T)} = \sum_{i=1}^m \bar{\delta}_i.$$

Но для каждого фиксированного подынтервала Δt_i имеем

$$\bar{\delta}_i = 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_0 = \bar{N}_1 \Delta t_i.$$

Следовательно,

$$\bar{N}(T) = \sum_{i=1}^m \bar{N}_1 \Delta t_i.$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta t_i \rightarrow 0$, получаем формулу (13).

Средний по ансамблю квадрат числа выбросов равен

$$\bar{N}^2(T) = \overline{N_\xi^2(T)} = \overline{\left[\sum_{i=1}^m \delta_i \right]^2} = \sum_{i=1}^m \overline{\delta_i^2} + \sum_{\substack{i, j=1 \\ (i \neq j)}}^m \overline{\delta_i \delta_j}.$$

Как и ранее, для каждого фиксированного подынтервала Δt_i имеем

$$\overline{\delta_i^2} = 0 \cdot 0 \cdot P_0 + 1 \cdot 1 \cdot P_1 = \bar{N}_1 \Delta t_i.$$

Аналогично для перекрестных членов при фиксированных i и j , $i \neq j$, можно написать

$$\begin{aligned} \overline{\delta_i \delta_j} &= 0 \cdot 0 \cdot P(\delta_i = 0, \delta_j = 0) + 0 \cdot 1 \cdot P(\delta_i = 0, \delta_j = 1) + \\ &+ 1 \cdot 0 \cdot P(\delta_i = 1, \delta_j = 0) + 1 \cdot 1 \cdot P(\delta_i = 1, \delta_j = 1) = P(\delta_i = 1, \delta_j = 1), \end{aligned}$$

где через P обозначена вероятность соответствующего события. Например, $P(\delta_i = 1, \delta_j = 1)$ обозначает вероятность того, что на двух различных подынтервалах Δt_i и Δt_j имеется по одному выбросу. По аналогии

с формулой (11) эта вероятность равна

$$P(\delta_i = 1, \delta_j = 1) =$$

$$= \Delta t_i \Delta t_j \int_0^\infty \int_0^\infty \dot{\xi}(t_i) \dot{\xi}(t_j) W_4(\xi(t_i), \dot{\xi}(t_i), \xi(t_j), \dot{\xi}(t_j)) d\dot{\xi}(t_i) d\dot{\xi}(t_j)$$

где нужно положить $\xi(t_i) = \xi(t_j) = C$.

Таким образом, можно написать

$$\overline{N^2}(T) = \sum_{i=1}^m \overline{N}_1 \Delta t_i + \sum_{\substack{i, j=1 \\ (i \neq j)}}^m P(\delta_i = 1, \delta_j = 1).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\overline{N^2}(T) = \overline{N}(T) + \int_0^T \int_0^T dt_1 dt_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \dot{\xi}(t_1) \dot{\xi}(t_2) W_4(C, \dot{\xi}(t_1), C, \dot{\xi}(t_2)) d\dot{\xi}(t_1) d\dot{\xi}(t_2). \quad (14')$$

Воспользовавшись известным соотношением

$$\sigma_N^2(T) = \overline{N^2}(T) - \{\overline{N}(T)\}^2,$$

получаем окончательную формулу для дисперсии числа выбросов на уровне C :

$$\sigma_N^2(T) = \overline{N}(T) - \{\overline{N}(T)\}^2 + \int_0^T \int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty \dot{\xi}(t_1) \dot{\xi}(t_2) W_4(C, \dot{\xi}(t_1), C, \dot{\xi}(t_2)) dt_1 dt_2 d\dot{\xi}(t_1) d\dot{\xi}(t_2). \quad (15)$$

Применительно к стационарным в узком смысле процессам эта формула может быть несколько упрощена. Введем обозначение

$$F(t_1, t_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dot{\xi}(t_1) \dot{\xi}(t_2) W_4(C, \dot{\xi}(t_1), C, \dot{\xi}(t_2)) d\dot{\xi}(t_1) d\dot{\xi}(t_2). \quad (16)$$

Для стационарных в узком смысле процессов обычно выполняется условие

$$F(t_1, t_2) = F(\tau) = F(-\tau), \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (17)$$

При этом условии с учетом (14) формула (15) приводится к виду

$$\sigma_N^2(T) = \overline{N}_1 T - (\overline{N}_1 T)^2 + 2 \int_0^T (T - \tau) F(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Если среднее число выбросов $\overline{N}(T)$ для многих случайных процессов вычисляется сравнительно просто, то дисперсию $\sigma_N^2(T)$, как правило, не удастся аналитически вычислить^{28,30} и приходится прибегать к численному интегрированию или пользоваться экспериментальными результатами. В частности, в работе²⁸ при помощи численного интегрирования показано, что для нормального квазигармонического шума с гауссовой формой спектральной плотности (9) при $\Delta f = 0,18 f_0$ дисперсия числа положительных выбросов на нулевом уровне ($C=0$) определяется формулой

$$\sigma_N^2(T) = 0,067 f_0 T,$$

а дисперсия полного числа нулей (пересечений снизу вверх и сверху вниз нулевого уровня) равна

$$\sigma_{2N}^2(T) = 4\sigma_N^2(T) = 0,268f_0T.$$

Приведем без вывода окончательные формулы для среднего числа выбросов в единицу времени \bar{N}_1 некоторых стационарных случайных процессов.

Среднее число положительных выбросов на уровне $\gamma = C/\sigma$ нормального стационарного процесса определяется формулой

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-R''(0)} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}, \quad (19)$$

где $R''(0)$ — вторая производная от коэффициента корреляции в нуле, связанная со спектральной плотностью соотношением

$$R''(0) = -\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)^2 \int_0^\infty f^2 S(f) df.$$

Пусть случайный процесс $\eta(t)$ представляет собой сумму

$$\eta(t) = \xi(t) + s(t),$$

где $\xi(t)$ — нормальный стационарный шум, а

$$s(t) = A_m \cos(\omega_s t + \varphi_0)$$

— детерминированный гармонический сигнал. Для среднего числа выбросов \bar{N}_1 такого процесса $\eta(t)$ получаются следующие формулы:

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-R''(0)} \left\{ e^{-\alpha} I_0(\beta) + 2b \int_0^\pi \varphi(\gamma - a \cos \theta) \sin \theta \left[\int_0^{b \sin \theta} \varphi(x) dx \right] d\theta \right\}, \quad (19')$$

или

$$\bar{N}_1 = \sqrt{-\frac{R''(0)}{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(\gamma)}{n!n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; n+1; -\frac{b^2}{2}\right). \quad (19'')$$

Здесь

$$b = \frac{a\omega_s}{\sqrt{-R''(0)}}, \quad \alpha = \frac{1}{4}(a^2 + b^2), \quad \beta = \frac{1}{4}(a^2 - b^2),$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad \varphi^{(2n)}(z) = \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \varphi(z),$$

${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Из формулы (19') при $\gamma = 0$ можно получить более простое соотношение

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-R''(0)} \left[e^{-\alpha} I_0(\beta) + \frac{b^2}{2a} I_e\left(\frac{\beta}{a}, \alpha\right) \right],$$

где

$$I_e(k, x) = \int_0^x e^{-u} I_0(ku) du$$

— табулированный интеграл²².

Для огибающей $A(t)$ квазигармонического шума (5) имеем

$$\bar{N}_1 = \sqrt{\frac{-q''(0)}{2\pi}} \gamma e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}. \quad (20)$$

Для процесса $E(t)$, представляющего огибающую суммы квазигармонического шума и гармонического сигнала, из формулы (12) получим

$$\bar{N}_1 = \sqrt{\frac{-q''(0)}{2\pi}} \gamma \exp \left[-\frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{A_m^2}{2\sigma^2} \right] I_0 \left(\gamma \frac{A_m}{\sigma} \right). \quad (21)$$

При $A_m=0$ эта формула переходит в (20). Можно получить формулу для \bar{N}_1 и в случае η -процесса⁵².

Можно показать⁵³, что среднее число выбросов в единицу времени случайного процесса $\cos \psi(t)$, превышающих уровень $C = \cos \psi_0$, определяется формулой

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{-q''(0)} \exp \left[-\frac{A_m^2}{2\sigma^2} (1 - C^2) \right] \Phi \left(\frac{CA_m}{\sigma} \right), \quad (22)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

— табулированный интеграл вероятности¹³. Полагая в формуле (22) $A_m=0$, получаем среднее число выбросов случайного процесса $\cos \psi(t)$

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-q''(0)}. \quad (23)$$

Формула для среднего числа выбросов процесса $\dot{\psi}(t)$ в общем случае оказывается весьма громоздкой. Поэтому укажем лишь два частных случая. Если сигнал отсутствует ($A_m=0$), то среднее число выбросов на уровне $C = \dot{\psi}_0$ равно

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{2\pi [\dot{\psi}_0^2 - q''(0)]} \sqrt{q''(0) [4q''(0) \dot{\psi}_0^2 + q''^2(0) - q^{(4)}(0)]}. \quad (24)$$

При больших отношениях сигнал/шум ($A_m/\sigma \geq 3$) среднее число выбросов на уровне $C = \dot{\psi}_0$ можно приближенно подсчитать по формуле

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{q^{(4)}(0)}{q''(0)}} \exp \left[\frac{A_m^2}{2\sigma^2} \frac{\dot{\psi}_0^2}{q''(0)} \right]. \quad (25)$$

Отметим, кстати, что характер изменения среднего числа выбросов (19)–(21) при изменении уровня γ с точностью до постоянного множителя воспроизводит плотности вероятности (1), (7) и (8) самих флуктуационных процессов. Этот результат обычно используют при экспериментальном определении одномерных плотностей вероятностей стационарных случайных процессов с помощью счетных схем, определяющих среднее число выбросов.

Как видно из основной формулы (12), такой результат является следствием того, что для стационарных случайных процессов (1), (7) и (8) отсутствует статистическая зависимость между самим процессом и его производной в совпадающие моменты времени (причем производная для этих процессов имеет нормальную плотность вероятности). Однако следует иметь в виду, что таким свойством обладают не все стационарные случайные процессы. Можно привести примеры стационарных процессов,

не обладающих этим свойством. Свойство независимости процесса и его производной в совпадающие моменты времени также нарушается при нелинейных безынерционных преобразованиях процесса.

Применительно к нормальным процессам со спектральными плотностями (2), (3) и (4) формула (19) принимает соответственно вид

$$\bar{N}_1 = n_1 = \frac{\Delta f}{\sqrt{1,4}} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}, \quad (19a)$$

$$\bar{N}_1 = n_2 = \frac{\Delta f}{0,5413} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}, \quad (19б)$$

$$\bar{N}_1 = n_3 = \frac{\Delta f}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}. \quad (19в)$$

Для нормального шума, спектральная плотность которого определяется резонансной кривой одиночного колебательного контура с резонансной частотой f_0 и полосой пропускания Δf (на уровне 0,5 по мощности), формула (19) дает

$$\bar{N}_1 = n_4 = \sqrt{f_0^2 + \frac{1}{4}\Delta f^2} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}. \quad (19г)$$

Тщательное экспериментальное исследование выбросов такого шума при разных значениях $f_0/\Delta f$ ³¹ дает хорошее согласие экспериментальных результатов с результатами расчетов по формуле (19 г).

Для нормального узкополосного шума с гауссовой формой спектральной плотности (9) получим

$$\bar{N}_1 = n_5 = \sqrt{f_0^2 + \frac{1}{5,6}\Delta f^2} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}. \quad (19д)$$

Из сопоставления формул (19а)—(19в), относящихся к низкочастотным шумам, видно, что при одинаковых Δf и γ среднее число выбросов больше у шумов, имеющих более медленное уменьшение спектральной плотности с ростом частоты за пределами полосы Δf . Иначе говоря, на среднее число выбросов существенное влияние оказывает поведение спектральной плотности при высоких частотах. Такой результат физически объясняется тем, что наличие более резко выраженных высокочастотных спектральных компонент вызывает большую колебательность случайного процесса и, следовательно, обуславливает большее число выбросов.

Среднее число выбросов гармонического колебания с амплитудой A_m и частотой f_0 на любом уровне $C < A_m$, очевидно, равно $\bar{N}_1 = f_0$. Формулы (19г), (19д) показывают, что среднее число выбросов квазигармонического шума на нулевом уровне ($\gamma=0$) всегда больше средней частоты f_0 , однако не превосходит значения верхней частоты полосы пропускания $f_0 + 0,5\Delta f$. Этот результат качественно можно объяснить наличием в спектре случайного процесса высокочастотных составляющих, имеющих сравнительно небольшую интенсивность.

Вопрос об изменении среднего числа выбросов, когда нормальный шум $\xi(t)$ подвергается интегрированию или дифференцированию, рассмотрен в работе³². Количественное представление о среднем числе выбросов нормального шума дает табл. I, в которой приведены результаты расчетов по формуле (19а).

В третьем столбце табл. I приведено отношение среднеквадратичного значения числа выбросов к среднему числу выбросов для нормального

шума (2). Данные получены в результате обработки 800 осциллограмм каждая длительностью $T=10/\Delta f$. Видно, что отношение $\sigma_N(T)/\bar{N}(T)$ с повышением уровня γ увеличивается. Оказывается, что такой результат является общим; он справедлив не только для нормальных флуктуаций, но и для флуктуационных процессов другого вида.

Таблица I
Выбросы нормального шума

γ	$n_1/\Delta f$	$\sigma_N(T)/\bar{N}(T)$
0,0	0,845154	0,20
0,5	0,745846	—
1,0	0,512612	0,30
1,5	0,274381	—
2,0	0,114379	0,67
2,5	0,037133	—
3,0	0,009389	2,93
3,5	0,001849	—
4,0	0,000283	—
5,0	0,0000003	—

Если спектральная плотность квазигармонического шума $\xi(t)$ постоянна и отлична от нуля только в полосе частот Δf с центральной частотой $f_0 \gg \Delta f$, т. е.

$$S(f) = \begin{cases} S_0 & \text{при } |f - f_0| \leq \frac{1}{2} \Delta f, \\ 0 & \text{при } |f - f_0| > \frac{1}{2} \Delta f, \end{cases} \quad (26)$$

то из формулы (20) получим

$$\bar{N}_1 = n_6 = \Delta f \sqrt{\frac{\pi}{6}} \gamma e^{-\frac{1}{2} \gamma^2}. \quad (20a)$$

При гауссовой форме спектральной плотности (9) формула (20) дает

$$\bar{N}_1 = n_7 = \Delta f \sqrt{\frac{\pi}{2,8}} \gamma e^{-\frac{1}{2} \gamma^2}. \quad (20б)$$

Результаты расчетов по формулам (20a), (20б) приведены в табл. II. Здесь также наблюдается отмеченная выше закономерность: чем длиннее «крылья» спектральной плотности, тем больше среднее число выбросов.

В табл. II приведены также экспериментальные значения отношения $\sigma_N(T)/\bar{N}(T)$ на разных уровнях для различных длительностей реализа-

Таблица II
Выбросы случайного процесса $A(t)$

γ	$n_6/\Delta f$	$n_7/\Delta f$	γ	$\sigma_N(T)/\bar{N}(T)$				
				$T\Delta f=2, \\ M=1750$	$T\Delta f=3, \\ M=503$	$T\Delta f=5, \\ M=534$	$T\Delta f=10, \\ M=588$	$T\Delta f=20, \\ M=656$
0,0	0	0	0,66	1,40	1,12	1,08	1,17	0,80
0,5	0,319288	0,467390	1,25	0,94	0,79	0,57	0,41	0,50
1,0	0,438886	0,642464	2,0	1,54	1,09	0,88	0,73	0,45
1,5	0,352378	0,515829	2,6	2,36	1,98	1,48	1,47	0,71
2,0	0,195858	0,286706	3,3	3,43	3,60	2,76	2,76	1,21
2,5	0,079482	0,116350	4,0	5,46	—	6,26	5,30	2,14
3,0	0,024115	0,035301						
3,5	0,005540	0,008110						
4,0	0,000971	0,001421						
5,0	0,000013	0,000020						
6,0	0	0						

ций T . Результаты относятся к флуктуационному процессу $A(t)$, когда спектральная плотность квазигармонического шума $\xi(t)$ имеет вид гауссовой кривой (9). В таблице указано число M фотографий (реализаций), в результате обработки которых получены соответствующие данные.

Анализируя экспериментальные результаты, можно сделать вывод, что отношение $\sigma_N(T)/\bar{N}(T)$ уменьшается с увеличением длительности реализаций T . При всех длительностях T оно имеет минимальное значение на уровне $C = \gamma\sigma$, приближенно равнонаивероятнейшему значению, и по мере отклонения уровня от этого значения отношение $\sigma_N(T)/\bar{N}(T)$ увеличивается.

По формуле (21) среднее число выбросов огибающей $E(t)$ суммы гармонического сигнала и квазигармонического шума, имеющего спектральную плотность (26) или (9), равно соответственно

$$\bar{N}_1 = n_s = \Delta f \sqrt{\frac{\pi}{6}} \gamma \exp \left[-\frac{1}{2} (\gamma^2 + a^2) \right] I_0(a\gamma), \quad (21a)$$

$$\bar{N}_1 = n_g = \Delta f \sqrt{\frac{\pi}{2,8}} \gamma \exp \left[-\frac{1}{2} (\gamma^2 + a^2) \right] I_0(a\gamma). \quad (21б)$$

Результаты расчетов по формуле (21б) приведены в табл. IV.

Приведем формулу для среднего числа выбросов одного нестационарного нормального процесса $\zeta(t)^{33}$, представляющего собой сумму линейно возрастающего напряжения и нормального стационарного шума $\xi(t)$ с нулевым средним значением, дисперсией σ^2 и коэффициентом корреляции $R(\tau)$

$$\zeta(t) = (C_0 + \beta t) + \xi(t). \quad (27)$$

Если воспользоваться известным выражением для совместной плотности вероятности независимых нормальных величин $\xi(t)$, $\xi(t)$ и затем перейти в нем от ξ , ξ к ζ , ζ , то из формулы (13), записанной для нестационарного процесса

$$\bar{N}(T) = \int_0^T dt \int_0^\infty \dot{\zeta} W_2(C, \dot{\zeta}) d\dot{\zeta},$$

в результате некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \bar{N}(T) = & \left[\frac{\sigma}{\beta} \sqrt{\frac{-R''(0)}{2\pi}} \exp \left(\frac{\beta^2}{2\sigma^2 R''(0)} \right) + \right. \\ & \left. + \Phi \left(\frac{\beta}{\sigma \sqrt{-R''(0)}} \right) \right] \left[\Phi \left(\frac{C-C_0}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{C-C_0-\beta T}{\sigma} \right) \right]. \quad (28) \end{aligned}$$

Этой формулой часто пользуются при рассмотрении точности работы устройств импульсной синхронизации, когда присутствует мешающий шум.

§ 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫБРОСОВ И ИНТЕРВАЛОВ МЕЖДУ ВЫБРОСАМИ ПО ДЛИТЕЛЬНОСТИ

Задача о вычислении плотностей вероятностей для длительности выбросов флуктуационных процессов была поставлена в основной работе Райса²¹ в 1945 г. Там же указан один приближенный путь ее решения, более подробно рассмотренный в работе³⁴. В последующие годы эта задача рассматривалась в ряде теоретических^{10,35-40} и экспериментальных^{31,41-44} работ. Краткое содержание основных работ указано ниже*).

Строгое теоретическое решение, полученное в работе³⁵, дает важный частный результат — распределение выбросов при больших длительностях должно иметь экспоненциальный вид. Однако при не очень больших длительностях решение приводит к весьма сложным окончательным формулам, вычисления по которым оказываются весьма громоздкими. Поэтому

*) Прим. при корр. Аналогичную задачу рассматривал Слепян (BSTJ, 41 (2), 463 (1962)).

представляет интерес рассмотрение приближенных методов вычисления плотностей вероятностей для длительностей выбросов.

Можно указать три приближенных метода: метод Райса, метод некоррелированных импульсов и квадратичное приближение. Сущность этих методов и получаемые при этом результаты указаны ниже.

Из физических предпосылок, на которых базируются все три упомянутых метода, следует, что получаемые при помощи их результаты справедливы для выбросов малой длительности при высоких уровнях. Однако точно указать область применимости результатов теоретически затруднительно, так как это связано, как правило, с решением более сложной задачи. В связи с этим в дальнейшем приведены новые экспериментальные результаты.

Ввиду ограниченного объема статьи из обширного экспериментального материала здесь будет приведена лишь небольшая часть результатов, относящихся к флуктуационным процессам $A(t)$ и $E(t)$. Отметим, кстати, что для этих процессов вычисления даже по приближенным формулам оказываются также очень сложными.

Метод Райса^{21, 34}. Предположим, что в некоторый момент времени t_0 имеется начало выброса, т. е. случайная функция $\xi(t)$ при $t=t_0$ пересекает уровень C снизу вверх (см. рис. 1); при этом, очевидно,

$$\xi_0 = \xi(t_0) = C, \quad \dot{\xi}_0 = \dot{\xi}(t_0) > 0.$$

Пусть длительность выброса равна τ . Тогда в конце выброса, т. е. при $t=t_0+\tau$, случайная функция $\xi(t)$ и ее производная должны удовлетворять условию

$$\xi_\tau = \xi(t_0 + \tau) = C, \quad \dot{\xi}_\tau = \dot{\xi}(t_0 + \tau) \leq 0.$$

Путем геометрических рассуждений нетрудно показать, что если известна совместная плотность вероятности для значений случайной функции и ее производной в два различных момента времени $W_4(\xi_0, \xi_\tau, \dot{\xi}_0, \dot{\xi}_\tau)$, то плотность вероятности для длительности выбросов определяется формулой

$$P(\tau) = \frac{1}{N_1} \int_0^\infty \int_0^{-\infty} \dot{\xi}_0 \dot{\xi}_\tau W_4(C, C, \dot{\xi}_0, \dot{\xi}_\tau) d\dot{\xi}_0 d\dot{\xi}_\tau. \quad (29a)$$

Из рассуждений, приводящих к формуле (29a), следует ее приближенный характер. В самом деле, на интервале τ может появиться несколько выбросов. Очевидно, что если τ мало по сравнению с временем корреляции $\xi(t)$, то вероятность многократных пересечений мала и формула (29a) будет давать более правильные результаты.

Метод некоррелированных импульсов^{37, 36}. Вместо случайной функции $\xi(t)$ рассмотрим случайную последовательность прямоугольных импульсов единичной высоты $\eta(t)$, получаемую из $\xi(t)$ путем нелинейного преобразования (рис. 3):

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi(t) < C, \\ 1 & \text{при } \xi(t) \geq C. \end{cases}$$

Ясно, что распределение импульсов по длительности совпадает с распределением $P(\tau)$ выбросов $\xi(t)$ на уровне C , причем при $C \gg \sigma$ выбросы нормальных стационарных флуктуаций можно приближенно считать некоррелированными⁴².

Применительно к нормальным стационарным флуктуациям такой подход дает для плотности вероятности релеевский закон

$$P(\tau) = -\frac{1}{4} \gamma^2 R''(0) \tau \exp \left[\frac{1}{8} \gamma^2 R''(0) \tau^2 \right]. \quad (29б)$$

Эта формула позволяет вычислить среднее значение и дисперсию длительности выбросов.

Квадратичное приближение^{10, 40}. Квадратичное приближение основано на предположении, что при достаточно высоких уровнях подавляющая часть выбросов имеет малую длительность, а по форме выбросы приближаются к параболе.

Пусть t_0 — момент начала выброса, т. е. $\xi_0 = C$, $\dot{\xi}_0 > 0$. Для плавно изменяющегося флуктуационного процесса можно применить разложение $\xi(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки t_0 и ограничиться квадратичным членом

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \dot{\xi}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{\xi}(t_0)(t - t_0)^2.$$

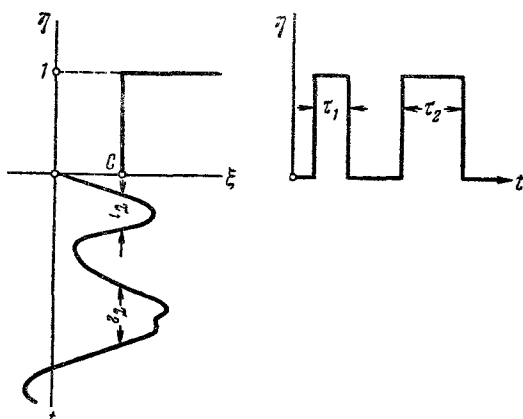


Рис. 3. Нелинейное преобразование.

Если положить $t = t_0 + \tau$, где τ — длительность выброса, то $\xi(t_0 + \tau) = \xi(t_0) = C$, и из предыдущего соотношения получим

$$\dot{\xi}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\xi}_0 \tau^2 = 0, \quad \tau = -2 \frac{\dot{\xi}_0}{\ddot{\xi}_0}. \quad (30)$$

Поскольку началу выброса соответствует положительная производная $\dot{\xi}_0 > 0$, то равенство (30) справедливо лишь при отрицательных значениях второй производной $\ddot{\xi}_0 < 0$.

Если теперь воспользоваться известной формулой для нормальной трехмерной плотности вероятности величин $\xi_0, \dot{\xi}_0, \ddot{\xi}_0$, то получим следующую формулу для плотности вероятности длительности выбросов:

$$P(\tau) = -\frac{\nu R''(0) \tau}{4\varphi^2(\tau)} \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-\frac{\gamma^2}{2\nu}} + \frac{\varphi(\tau) + \frac{\gamma^2}{\nu}}{2\sqrt{\varphi(\tau)}} \exp \left[\frac{R''(0) \gamma^2 \tau^2}{8\varphi(\tau)} \right] \operatorname{erfc} \left(-\frac{\gamma}{\sqrt{2\nu\varphi(\tau)}} \right) \right\}, \quad (29в)$$

где

$$\nu = \frac{R^{(4)}(0) - R''^2(0)}{R''^2(0)}, \quad \varphi(\tau) = 1 - \frac{\nu}{4} R''^2(0) \tau^2, \quad \operatorname{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Квадратичное приближение в принципе позволяет также аналитически вычислить распределение выбросов по площади⁴⁰, что представляет интерес при анализе действия помех на электронные реле и триггеры.

Сравнение результатов расчета по формулам (29а)—(29в) с экспериментальными данными для нормальных стационарных флуктуаций со спектральными плотностями (2) и (26), проведенное в работе³⁷, показывает, что

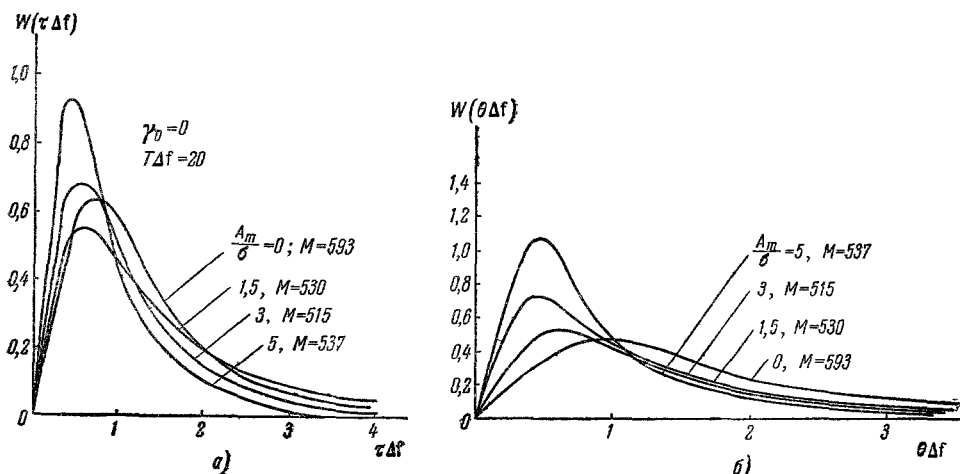


Рис. 4. Плотности вероятности для длительностей выбросов и интервалов огибающей $E(t)$ на уровне $\gamma_0 = 0$.

при плавно меняющихся и осциллирующих функциях корреляции достаточно хорошее приближение к экспериментальным данным дает формула (29б) при не очень больших длительностях τ , начиная с уровня $\gamma \geq 1.5$.

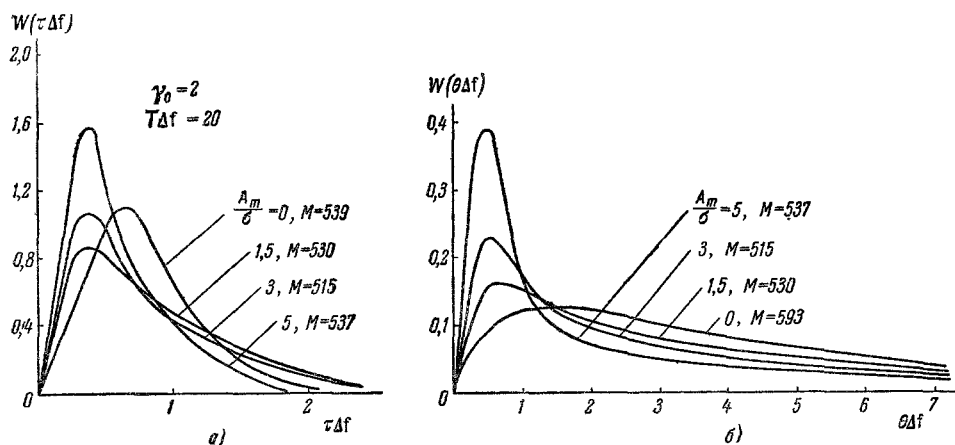


Рис. 5. Плотности вероятности для длительностей выбросов и интервалов огибающей $E(t)$ на уровне $\gamma_0 = 2$.

Для флуктуационных процессов $A(t)$ и $E(t)$ выполнение аналитических расчетов оказывается затруднительным. На рис. 4 и 5 приведены экспериментальные плотности вероятности для безразмерных величин $\tau\Delta f$ и $\theta\Delta f$ случайного процесса $E(t)$ на двух уровнях $\gamma_0 = 0$ и 2 при различных отношениях сигнал/шум для случая, когда спектральная плотность исходного квазигармонического шума $\xi(t)$ имеет вид (9).

Под относительным уровнем γ_0 в данном случае понимается величина

$$\gamma_0 = \frac{C}{\sigma_E}, \quad (31)$$

где C — абсолютный уровень, отсчитанный от среднего значения \bar{E} , σ_E — среднеквадратичное значение флуктуационного процесса $E(t)$.

Отдельные кривые получены в результате обработки M реализаций (фотографий), каждая реализация имела длительность $T=20/\Delta f$.

Из анализа результатов можно сделать следующие качественные выводы:

1. Плотности вероятности как для длительностей выбросов, так и для интервалов между выбросами быстро возрастают от нуля до некоторого максимального значения, а затем медленно уменьшаются до нуля, причем плотность вероятности для интервалов спадает более медленно, чем плотность вероятности для длительностей выбросов.

2. Как наличие сигнала, так и повышение уровня сопровождается смещением наиболее вероятного значения τ в сторону меньших τ . Максимальное значение плотности вероятности для длительностей выбросов при фиксированном сигнале увеличивается с повышением уровня γ_0 .

3. Изменение величины сигнала почти не изменяет наиболее вероятное значение τ . Однако при увеличении сигнала максимальное значение плотности вероятности сначала уменьшается, а затем увеличивается.

Мы не будем приводить других выводов, так как при необходимости это может сделать сам читатель, воспользовавшись приведенными результатами.

В табл. III указаны значения средних длительностей выбросов $\bar{\tau}$ и интервалов $\bar{\Theta}$, а также среднеквадратичных значений σ_τ и σ_Θ на определенном уровне γ_0 . Данные получены путем статистической обработки 530

Таблица III
Основные характеристики выбросов
флуктуационного процесса $E(t)$

γ_0	-1	0	1	2	3
$\bar{\tau}\Delta f$	2,60	1,415	1,0	0,802	0,642
$\sigma_\tau\Delta f$	2,832	1,059	0,776	0,530	0,458
$\bar{\Theta}\Delta f$	0,802	1,482	2,89	4,870	5,510
$\sigma_\Theta\Delta f$	0,777	1,493	2,855	4,375	5,025

реализаций для $A_m/\sigma = 1,5$. Каждая реализация имела длительность $T = 20/\Delta f$.

Видно, что с повышением уровня γ_0 средняя длительность выбросов $\bar{\tau}$ уменьшается, а средний интервал между выбросами $\bar{\Theta}$ увеличивается. То же самое справедливо для среднеквадратичных значений: при увеличении уровня среднеквадратичное значение длительностей выбросов σ_τ уменьшается, а среднеквадратичное значение длительностей интервалов σ_Θ увеличивается.

Заметим, что для средних значений длительности выброса $\bar{\tau}$ и длительности интервала между выбросами $\bar{\Theta}$ можно получить сравнительно простые формулы. Рассмотрим реализацию стационарного эргодического процесса $\xi(t)$ достаточно большой длительности T . Пусть реализация

имеет достаточно большое число выбросов N . Учтем, что для стационарного эргодического процесса величина $W(\xi)\Delta\xi$ пропорциональна отношению времени пребывания случайной функции $\xi(t)$ в интервале $(\xi, \xi + \Delta\xi)$. Поэтому можно написать соотношения

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \tau_i = \int_C^\infty W(\xi) d\xi, \quad \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \Theta_i = \int_{-\infty}^C W(\xi) d\xi,$$

где τ_i и Θ_i — длительности i -го выброса и i -го интервала на уровне C .

Средняя длительность выбросов и средняя длительность интервалов, очевидно, равны

$$\bar{\tau} = \frac{1}{N_1 T} \sum_{i=1}^N \tau_i, \quad \bar{\Theta} = \frac{1}{N_1 T} \sum_{i=1}^N \Theta_i.$$

Отсюда получаем окончательные формулы

$$\bar{\tau} = \frac{1}{N_1} \int_C^\infty W(\xi) d\xi, \quad \bar{\Theta} = \frac{1}{N_1} \int_{-\infty}^C W(\xi) d\xi. \quad (32)$$

Воспользовавшись формулой (19), получим, что для нормального флуктуационного процесса формулы (32) принимают следующий вид:

$$\bar{\tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{-R''(0)}} [1 - \Phi(\gamma)] e^{\frac{1}{2}\gamma^2}, \quad \bar{\Theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{-R''(0)}} \Phi(\gamma) e^{\frac{1}{2}\gamma^2}. \quad (32a)$$

Из формул (7) и (20) для флуктуационного процесса $A(t)$ получаются следующие соотношения:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2\pi}{-\varrho''(0)}}, \quad \bar{\Theta} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2\pi}{-\varrho''(0)}} (e^{\frac{1}{2}\gamma^2} - 1). \quad (32б)$$

Если в формулы (32a), (32б) подставить величины $R''(0)$ и $\varrho''(0)$, выраженные через спектральную плотность флуктуационного процесса $\xi(t)$, то окажется, что в обоих случаях средняя длительность выбросов и интервалов обратно пропорциональна ширине спектральной плотности.

Для огибающей $E(t)$ оказываются справедливыми следующие формулы:

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2\pi}{-\varrho''(0)}} \exp\left(\frac{a^2 + \gamma^2}{2}\right) \frac{J}{I_0(a\gamma)}, \\ \bar{\Theta} &= \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2\pi}{-\varrho''(0)}} \exp\left(\frac{a^2 + \gamma^2}{2}\right) \frac{1 - J}{I_0(a\gamma)}, \end{aligned} \quad (32в)$$

где

$$J = \int_0^\gamma z \exp\left(-\frac{a^2 + z^2}{2}\right) I_0(az) dz.$$

Результаты расчетов по формулам (32в) для четырех отношений сигнал/шум $a = 0; 1,5; 3$ и 5 при нескольких значениях γ приведены в табл. IV. При этом предполагалось, что спектральная плотность исходного квазигармонического шума $\xi(t)$ имеет гауссову форму вида (9).

Таблица IV

Характеристики выбросов процесса $E(t)$

γ	$\bar{N}_1/\Delta f$			$\bar{\tau}\Delta f$				$\bar{\theta}\Delta f$			
	$a=1,5$	3	5	$a=0$	1,5	3	5	$a=0$	1,5	3	5
0,5	0,473840	0,008550	0,000006	1,88814	5,51639	116,756	—	0,25140	0,23602	0,20233	—
1,0	0,343469	0,034835	0,000065	0,94407	2,43462	28,3889	—	0,61244	0,47683	0,31371	—
1,5	0,456691	0,100244	0,000515	0,62937	1,40953	9,56923	1960,47	1,30925	0,78013	0,40700	0,31371
2,0	0,454304	0,214143	0,003008	0,47201	0,93259	4,14084	331,870	3,01583	1,26858	0,52899	0,32226
2,5	0,344452	0,346606	0,013266	0,39484	0,67391	2,17506	74,9841	8,21710	2,22926	0,71001	0,35117
3,0	0,200346	0,428865	0,044682	0,31473	0,51824	1,32299	21,9796	28,0139	4,47302	1,00853	0,39973
3,5	0,089729	0,407885	0,115530	0,27003	0,41691	0,89653	8,47434	123,034	10,7276	1,55516	0,47393
4,0	0,031025	0,299199	0,230722	0,23944	0,34676	0,65678	3,75801	703,986	31,8801	2,68546	0,57623
5,0	0,001718	0,074472	0,424738	0,25581	0,25581	0,41197	1,27160	581,140	581,140	13,0162	1,08278

Таблица V

Статистические характеристики τ_0

$\xi(t)$	$T\Delta f=10,$				$M=500$				$A(t)$					$T\Delta f=20,$				$M=593$																						
	$\gamma=-2$				-1				0				1				2				$\gamma=0,66$				$1,25$				$2,0$				$2,6$				$3,3$			
	$\bar{\tau}_0\Delta f=3,46$				$1,24$				$0,86$				$1,40$				$3,46$				$\bar{\tau}_0\Delta f=3,63$				$1,48$				$4,05$				$6,80$				$7,51$			
$\sigma_0\Delta f=2,53$				$0,96$				$0,65$				$1,03$				$2,5$				$\sigma_0\Delta f=4,40$				$1,64$				$3,97$				5				$4,79$				

§ 4. ВРЕМЯ ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ УРОВНЯ

В некоторых задачах интересно знать распределение времени τ_0 (см. рис. 1). Здесь под τ_0 понимается интервал времени между некоторым фиксированным моментом времени (допустим, началом реализации) и моментом, когда случайный процесс первый раз пересекает постоянный уровень C снизу вверх.

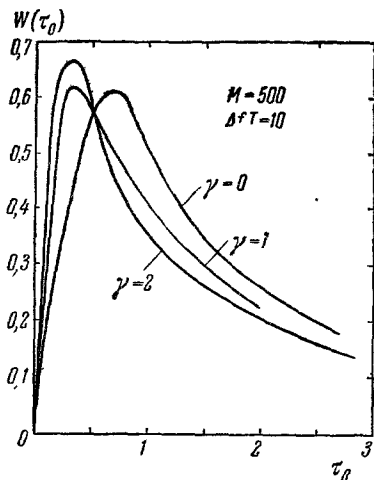


Рис. 6. Плотности вероятности времени первого достижения уровня для нормального шума.

Такая задача аналитически решается лишь для случая марковских процессов 6, 40, 45, 46. Для реальных же гладких процессов до сего времени имеется мало теоретических результатов⁴⁷.

Ниже приведены экспериментальные данные. На рис. 6 изображены плотности вероятности $W(\tau_0)$ для нормального стационарного шума $\xi(t)$ со спектральной плотностью (2) при трех значениях относительного уровня $\gamma = C/\sigma$. Графики построены по результатам обработки 500 реализаций, каждая из которых имела длительность $T = 10/\Delta f$.

В табл. V указаны практически наиболее важные статистические характеристики случайной величины τ_0 — среднее значение $\bar{\tau}_0$ и среднее квадратичное значение σ_0 для указанного нормального шума, а также для огибающей $A(t)$ квазигармонических флуктуаций, имеющих спектральную плотность (9).

Из этих экспериментальных результатов следует, что в обоих случаях среднее значение времени первого достижения уровня и среднее квадратичное значение минимальны на уровне C , равном среднему значению исходных флуктуационных процессов. При уменьшении и увеличении уровня среднее и среднее квадратичное значения увеличиваются. Приведенные неполные данные не позволяют сделать более общих заключений и при необходимости могут быть использованы лишь для ориентировочных оценок.

§ 5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМУМОВ

Найдем плотность вероятности для максимумов случайной функции $\xi(t)$, т. е. найдем закон распределения максимумов в зависимости от их высоты²¹. При этом предполагается известной трехмерная плотность вероятности $W_3(\xi(t), \dot{\xi}(t), \ddot{\xi}(t))$.

Рассмотрим какую-либо реализацию стационарной случайной функции $\xi(t)$ (рис. 7), которую будем считать непрерывной

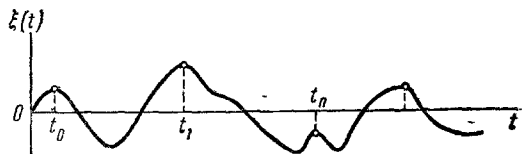


Рис. 7. Реализация стационарного случайного процесса.

вместе с первой производной $\dot{\xi}(t)$. В некоторые моменты времени t_n реализация имеет максимумы. Как известно, в точках t_n выполняются условия

$$\dot{\xi}(t_n) = 0, \quad \ddot{\xi}(t_n) < 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из непрерывности функции $\xi(t)$ следует, что на достаточно малом интервале Δt , т. е. внутри промежутка $t < t' \leq t + \Delta t$, может быть не более одного

максимума (или минимума). Таким образом, на интервале Δt может быть один максимум или же ни одного максимума. Обозначим через $P_1(H, t)$ вероятность того, что на интервале Δt будет один максимум, величина которого заключена между $(H - \Delta H, H)$, а через $P_0(H, t)$ вероятность того, что не будет такого максимума. Очевидно, что среднее число максимумов на интервале Δt , величина которых заключена между $H - \Delta H$ и H , равно

$$\bar{n}_m(H, t) = 1 \cdot P_1(H, t) + 0 \cdot P_0(H, t) = P_1(H, t), \quad (33)$$

т. е. совпадает с P_1 .

Пусть некоторый момент времени t_0 соответствует максимуму случайной функции $\xi(t)$. Тогда выражение

$$dp = W_3(\xi(t_0), \dot{\xi}(t_0), \ddot{\xi}(t_0)) \Delta H (-\Delta \dot{\xi}) \Delta \ddot{\xi}$$

при $\dot{\xi}(t_0) = 0, \ddot{\xi}(t_0) < 0$ определяет вероятность того, что на интервале $t_0 \leq t' < t_0 + \Delta t$ будет максимум, величина которого заключена между $(H - \Delta H, H)$, при этом первая производная находится между нулем и $(-\Delta \dot{\xi})$, а вторая производная заключена в интервале $(\ddot{\xi} - \Delta \ddot{\xi}, \ddot{\xi})$.

Из непрерывности первой производной $\dot{\xi}(t)$ следует, что на малом интервале Δt , т. е. внутри промежутка $t_0 \leq t' < t_0 + \Delta t$, она близка к прямой

$$\dot{\xi}(t') = \dot{\xi}(t_0) + \ddot{\xi}(t_0)(t' - t_0)$$

или

$$\Delta \dot{\xi} = \dot{\xi}(t + \Delta t) - \dot{\xi}(t) = \ddot{\xi}(t_0) \Delta t.$$

Подставив это значение $\Delta \dot{\xi}$ в предыдущее выражение, получим

$$dp = -\Delta t W_3(H, 0, \ddot{\xi}) \ddot{\xi} \Delta H \Delta \ddot{\xi}.$$

Проинтегрировав правую часть по всем отрицательным значениям второй производной (от $-\infty$ до 0), находим вероятность $P_1(H, t)$ того, что максимум будет находиться в элементарном прямоугольнике $\Delta H \Delta t$:

$$P_1(H, t) = -\Delta t \Delta H \int_{-\infty}^0 \ddot{\xi} W_3(H, 0, \ddot{\xi}) d\ddot{\xi}. \quad (34)$$

Как показывает формула (33), вероятность P_1 совпадает со средним числом соответствующих максимумов

$$\bar{n}_m(H, t) = -\Delta t \Delta H \int_{-\infty}^0 \ddot{\xi} W_3(H, 0, \ddot{\xi}) d\ddot{\xi}.$$

Поделив обе части этого равенства на Δt , находим среднее число максимумов в единицу времени, величина которых заключена в интервале $(H - \Delta H, H)$:

$$\bar{n}_{1m}(H, t) = -\Delta H \int_{-\infty}^0 \ddot{\xi} W_3(H, 0, \ddot{\xi}) d\ddot{\xi}. \quad (35)$$

Для стационарного случайного процесса $\xi(t)$ формула (35) не зависит от времени и определяет среднее число максимумов в единицу

времени, величина которых заключена между $H - \Delta H$ и H :

$$\bar{n}_{1m}(H) = -\Delta H \int_{-\infty}^0 \ddot{\xi} W_3(H, 0, \ddot{\xi}) d\ddot{\xi}. \quad (36)$$

Полное среднее число максимумов в единицу времени \bar{N}_{1m} , независимо от их величины, получается отсюда путем интегрирования правой части по всем возможным значениям H :

$$\bar{N}_{1m} = - \int_{-\infty}^{\infty} dH \int_{-\infty}^0 \ddot{\xi} W_3(H, 0, \ddot{\xi}) d\ddot{\xi}. \quad (37)$$

Плотность вероятности для максимумов, очевидно, определяется из соотношения

$$P(H) \Delta H = \frac{\bar{n}_1(H)}{\bar{N}_{1m}},$$

т. е.

$$P(H) = -\frac{1}{\bar{N}_{1m}} \int_{-\infty}^0 \ddot{\xi} W_3(H, 0, \ddot{\xi}) d\ddot{\xi}. \quad (38)$$

Среднее число максимумов в единицу времени, величина которых превышает некоторое значение C , находим путем интегрирования правой части формулы (36) по всем значениям $H \geq C$, т. е. можем написать

$$\bar{n}_{1m}(H \geq C) = - \int_C^{\infty} dH \int_{-\infty}^0 \ddot{\xi} W_3(H, 0, \ddot{\xi}) d\ddot{\xi}. \quad (39)$$

Предположим, что случайная функция $\xi(t)$ представляет нормальный стационарный процесс с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k(\tau) = \sigma^2 R(\tau), \quad (40)$$

где σ^2 — дисперсия, $R(\tau)$ — коэффициент корреляции.

Вследствие четности автокорреляционных функций стационарных процессов корреляции между самой случайной функцией и ее производной, а также между первой и второй производными в один и тот же момент времени отсутствуют. Учитывая, что из взаимной некоррелированности нормальных процессов следует их независимость, можем написать

$$W_3(\dot{\xi}(t), \dot{\xi}(t), \dot{\xi}(t)) = w(\dot{\xi}) w_2(\dot{\xi}, \dot{\xi}).$$

Воспользовавшись известными выражениями для нормальных плотностей вероятностей, получим

$$W_3(\dot{\xi}, 0, \dot{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \varepsilon} \exp \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon} [\sigma_2^2 \dot{\xi}^2 + \sigma^2 \dot{\xi}^2 + 2\sigma_1^2 \dot{\xi} \dot{\xi}] \right\}, \quad (41)$$

где

$$\sigma_1^2 = -\sigma^2 R''(0), \quad \sigma_2^2 = \sigma^2 R^{(4)}(0), \quad \varepsilon = \sigma^2 \sigma_2^2 - \sigma_1^4. \quad (42)$$

Подставив эту плотность вероятности в формулу (32) и выполнив интегрирование сначала по H , а затем по $\ddot{\xi}$, получим

$$\bar{N}_{1m} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1}. \quad (43)$$

Выполнив в формуле (38) вычисления, найдем

$$P(H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sigma\sigma_2} \exp\left(-\frac{\sigma_2^2 H^2}{2\varepsilon}\right) + \sqrt{2\pi} \frac{\sigma_1^2 H}{\sigma^2 \sigma_2} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma^2}\right) \Phi\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma\sqrt{\varepsilon}} H\right) \right]. \quad (44)$$

Формуле (44) можно придать более компактный вид. Для этого вместо $\ddot{\xi}(t)$ рассмотрим нормированную случайную функцию

$$\zeta(t) = \frac{1}{\sigma} \ddot{\xi}(t),$$

имеющую нулевое среднее значение и дисперсию, равную единице.

Из очевидного соотношения

$$P(\xi) d\xi = W(\zeta) d\zeta$$

имеем

$$W(\zeta) = \sigma P(\sigma\xi).$$

Введем новую величину

$$\nu^2 = \frac{\varepsilon}{\sigma^2 \sigma_2^2} = 1 - \frac{\sigma_1^4}{\sigma^2 \sigma_2^2}. \quad (45)$$

Выполнив необходимые преобразования, получим окончательную формулу для плотности вероятности максимумов случайной функции

$$W(H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\nu e^{-\frac{H^2}{2\nu^2}} + \sqrt{2\pi} (1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}} H e^{-\frac{1}{2} H^2} \Phi\left(\frac{\sqrt{1 - \nu^2}}{\nu} H\right) \right]. \quad (46)$$

Данная формула позволяет заключить, что плотность вероятности максимумов нормальной стационарной функции однозначно определяется одним параметром ν . Можно показать, что величина ν изменяется от 0 до 1, причем малые значения $\nu \ll 1$ соответствуют узкополосному процессу вида (5), а значения $\nu \sim 1$ соответствуют широкополосным процессам. Полагая в формуле (46) $\nu = 0$, получим релейевскую плотность вероятности вида (7)

$$W(H) = H e^{-\frac{1}{2} H^2}, \quad H \geq 0. \quad (46a)$$

При $\nu = 1$ из формулы (46) получим нормальную плотность вероятности

$$W(H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} H^2}. \quad (46b)$$

Этим результатам можно дать физическое пояснение. Для квазигармонических флуктуаций (5) имеем

$$\dot{\xi}(t) = \dot{A}(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] - (\omega_0 + \dot{\varphi}) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Вблизи точек t_n , для которых $\omega_0 t_n + \varphi(t_n) = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, случайная функция $\xi(t)$ имеет максимумы. В этих точках справедливы равенства

$$\xi(t_n) = A(t_n), \quad \dot{\xi}(t_n) = \dot{A}(t_n),$$

т. е. около максимумов $\xi(t)$ огибающая $A(t)$ и случайная функция $\xi(t)$

имеют общие касательные. Поскольку огибающая $A(t)$ имеет плотность вероятности (7), естественно ожидать, что максимумы случайной функции $\xi(t)$, являющиеся дискретными значениями огибающей, распределены по тому же закону.

Максимумы нормального широкополосного процесса, являющиеся дискретными значениями нормальной случайной функции, распределены

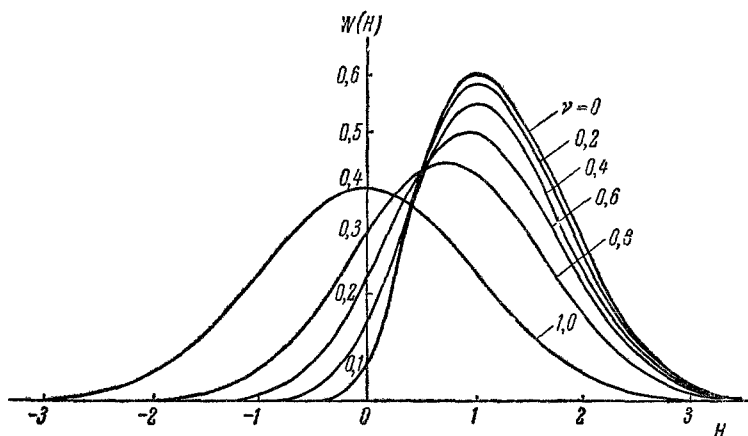


Рис. 8. Плотности вероятности для максимумов нормального шума при различных значениях параметра ν .

также по нормальному закону. Таким образом, плотность вероятности для максимальных значений нормального узкополосного процесса в пределе (при $\nu=0$) является релеевской, а плотность вероятности для макси-

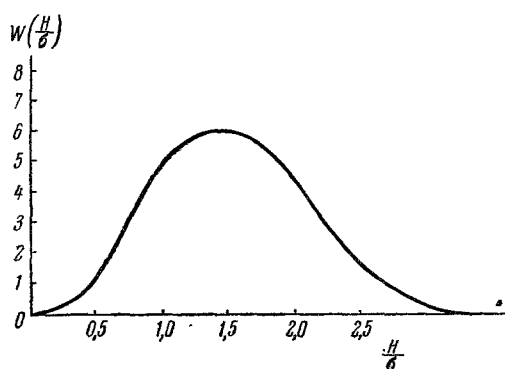


Рис. 9. Плотность вероятности для максимумов огибающей квазигармонических флуктуаций.

мальных значений нормального широкополосного процесса в пределе (при $\nu=1$) является нормальной. На рис. 8 показаны плотности вероятности, подсчитанные по формуле (46), для нескольких значений ν ⁴⁸. Из кривых виден переход от нормального распределения к релеевскому.

Для флуктуационного процесса $A(t)$ вычисления по формуле (38) удастся до конца выполнить лишь в частных случаях, например, для прямоугольной спектральной плотности (26)²¹. (См. *Дополн. при корр.* на стр. 478).

На рис. 9 приведена ненормированная плотность вероятности для максимумов огибающей $A(t)$, полученная экспериментально в работе⁴⁹, когда квазигармонический шум $\xi(t)$ имеет гауссову форму спектральной плотности. Хотя по виду она напоминает нормальную плотность вероятности, однако обладает некоторой положительной асимметрией.

Вычислим среднее число максимумов нормального процесса в единицу времени, превышающих некоторый уровень C . Для этого нужно в формулу (39) подставить выражение плотности вероятности (41). Выполнив

интегрирование сначала по $\ddot{\xi}$, а затем по H , получим следующую формулу:

$$\bar{n}_{1m}(H \geq C) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_1}{\sigma} \left[e^{-\frac{1}{2}\gamma^2} \Phi\left(\frac{\sigma_1^2}{\sqrt{\varepsilon}} \gamma\right) + \frac{\sigma\sigma_2}{\sigma_1^2} \Phi\left(-\frac{\sigma\sigma_2}{\sqrt{\varepsilon}} \gamma\right) \right],$$

где $\gamma = C/\sigma$.

Если ввести параметр v (45), то получим окончательную формулу

$$\bar{n}_{1m}(H \geq C) = \bar{N}_{1m} \left[\Phi\left(-\frac{\gamma}{v}\right) + \sqrt{1-v^2} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2} \Phi\left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{v} \gamma\right) \right], \quad (47)$$

где \bar{N}_{1m} — среднее число всех максимумов случайной функции в единицу времени, вычисляемое по формуле (37).

Отметим, что при достаточно больших γ в формуле (47) можно положить $\Phi(z \geq 3) \approx 1$, $\Phi(z \leq -3) \approx 0$. При этом формула (47) переходит в формулу (19) для среднего числа выбросов в единицу времени, превышающих уровень γ . Практически \bar{N}_1 и \bar{n}_{1m} совпадают при $\gamma \geq 3$.

Из совпадения \bar{N}_1 и \bar{n}_{1m} при $\gamma \geq 3$ можно сделать следующий вывод. В § 3 был указан приближенный метод вычисления плотности вероятности для длительности выбросов, основанный на аппроксимации случайной функции в окрестности выброса параболой. Очевидно, что такая аппроксимация исключает возможность наличия нескольких максимумов в окрестности выброса. Поэтому квадратичное приближение можно считать применимым для больших уровней ($\gamma \geq 3$).

§ 6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ

Строгое математическое вычисление плотности вероятности для наибольших значений H_m (см. рис. 1) в реализациях случайного процесса $\xi(t)$ конечной длительности T является, по-видимому, весьма сложной задачей⁵⁰. Для этого нужно вычислить максимумы, выявить максимум максимумов и сравнить его величину со значениями случайной функции, принимаемыми на концах интервала $[0, T]$.

Можно указать следующий путь решения данной задачи. Разобьем интервал времени T на m равных отрезков длительностью $\Delta = T/m$ каждый. Обозначим значения случайной функции в $(m+1)$ точках отсчета соответственно через

$$\xi_0 = \xi(0), \quad \xi_1 = \xi(\Delta), \quad \xi_2 = \xi(2\Delta), \quad \dots, \quad \xi_m = \xi(m\Delta) = \xi(T).$$

Плотность вероятности для значений случайной функции в этих точках отсчета $W_{m+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$ предполагается известной.

Вероятность $p_i(H_m)$ того что случайная функция $\xi(t)$ при $t = i\Delta$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, принимает значение $\xi(i\Delta) = H_m$ а во всех других точках отсчета принимает значения меньше H_m , равна

$$p_i(H_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_{m+1}(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, H_m, \xi_{i+1}, \dots, \xi_m) d\xi_0 \dots d\xi_{i-1} d\xi_{i+1} \dots d\xi_m. \quad (48)$$

Так как для стационарных флуктуаций все точки отсчета являются равноправными, то вероятность $P(H_m)$, что в какой-либо точке отсчета случайная функция принимает значение H_m , а в остальных меньше H_m , равна

$$P(H_m) = N \sum_{i=0}^m p_i(H_m), \quad (49)$$

где N — нормировочный множитель, определяемый из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(H_m) dH_m = 1.$$

К сожалению, многократный интеграл (48) вычисляется лишь в частных случаях, например, когда значения случайной функции $\xi(t)$ в точках отсчета являются независимыми.

Если значения случайной функции в точках отсчета независимы и распределены по нормальному закону

$$w_{\xi}(\xi_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

или по релеевскому закону

$$W_A(\xi_i) = \frac{\xi_i}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\xi_i^2}{2\sigma^2}\right),$$

то плотности вероятности (49) принимают соответственно вид

$$P_{\xi}(H_m) = (m+1) w_{\xi}(H_m) \Phi^m\left(\frac{H_m}{\sigma}\right), \quad (49a)$$

$$P_A(H_m) = (m+1) W_A(H_m) \left[1 - \exp\left(-\frac{H_m^2}{2\sigma^2}\right)\right]^m. \quad (49b)$$

Эти плотности вероятности изображены на рис. 10.

Следует отметить, что для независимости значений случайной функции в точках отсчета необходимо выбирать $\Delta \gg \tau_k$, где τ_k — время корреляции

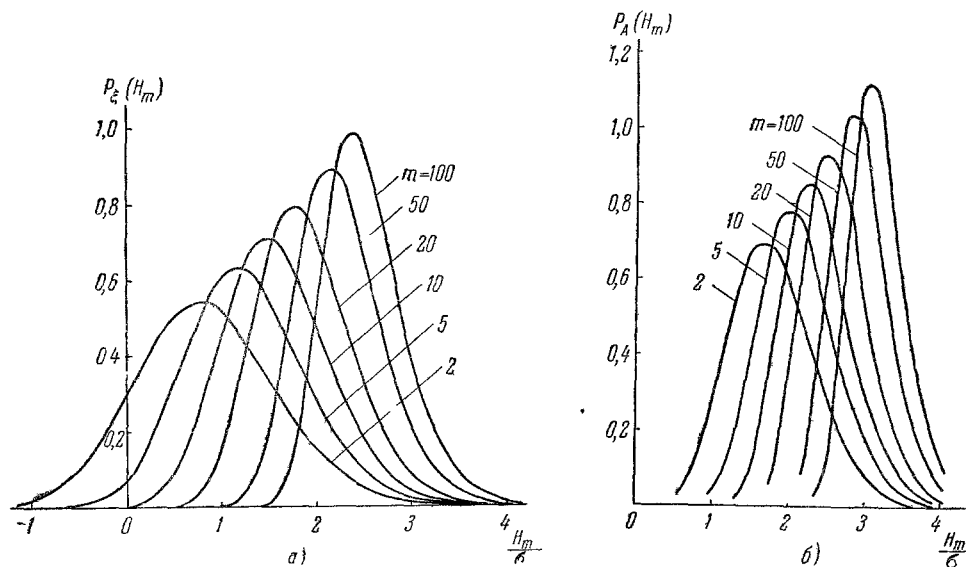


Рис. 10 Плотности вероятности для наибольших значений.

$\xi(t)$. Но при таких больших Δ получаются большие погрешности, так как положение максимума максимума может не совпадать с точками отсчета t_i , и он будет «пропущен».

На рис. 11 приведены плотности вероятности для наибольших значений в реализациях нормального шума (2), (3) и (4) при трех значениях длительностей реализаций. Каждая кривая построена по результатам обработки M реализаций соответствующей длительности.

На рис. 12 приведены аналогичные кривые для флуктуационного процесса $A(t)$, когда спектральная плотность исходных квазигармонических флуктуаций $\xi(t)$ имеет вид (9), причем $f_0 = 30 \text{ МГц}$, $\Delta f = 0,92 \text{ МГц}$. Подобные кривые для процесса $E(t)$ имеются в работе ⁵¹.

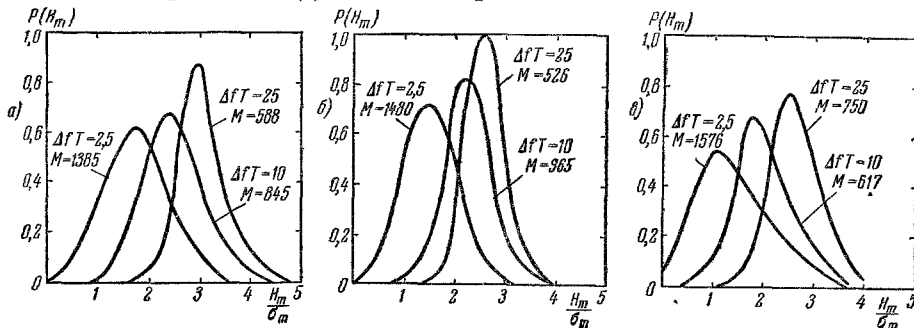


Рис. 11. Плотности вероятности для наибольших значений в реализациях нормального шума длительности T (а — спектральная плотность определяется формулой (2), б — формулой (3) и в — формулой (4)).

Из приведенных результатов следует, что с увеличением длительности реализаций плотности вероятности сужаются и смещаются в сторону

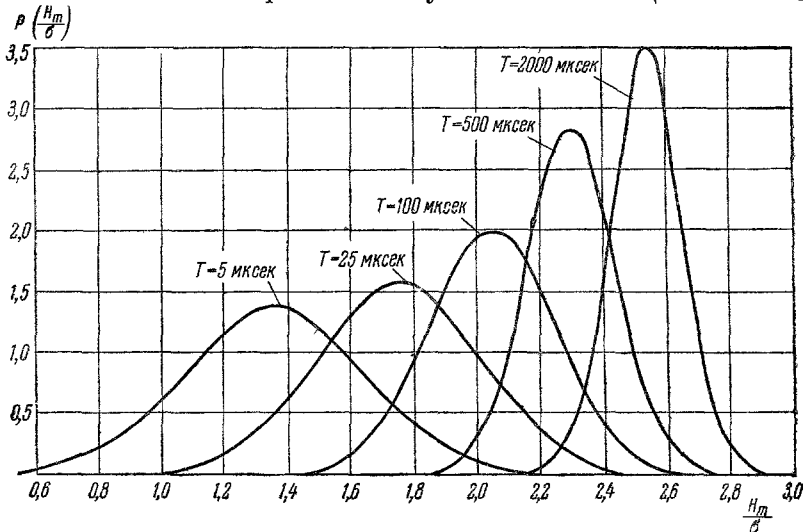


Рис. 12. Плотности вероятности для максимумов максимумов реализаций огибающей квазигармонического шума различной длительности.

бóльших значений H_m . Это объясняется тем, что при увеличении длительности T , во-первых, в каждой отдельной реализации увеличивается значение H_m и, во-вторых, уменьшается разброс значений H_m .

§ 7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ МИНИМУМОМ И СОСЕДНИМ МАКСИМУМОМ

До настоящего времени не предпринимались попытки найти теоретически плотность вероятности для расстояний h между минимумом и соседним максимумом (см. рис. 1). Поэтому ограничимся указанием некоторых конкретных экспериментальных результатов ⁵⁴.

На рис. 13 приведены плотности вероятности случайной величины h для нормального шума. Каждая кривая построена по результатам обра-

ботки M реализаций длительностью $T = 10/\Delta f$ каждая, причем кривая 1 относится к нормальному шуму со спектральной плотностью (2), кривая 2 — со спектральной плотностью (3) и кривая 3 — со спектральной плотностью (4). По оси абсцисс отложена относительная величина h/σ_h , где σ_h — среднеквадратичное значение h .

Из сопоставления кривых можно прийти к заключению, что все кривые по форме напоминают релейевскую плотность вероятности. Все три плотности вероятности имеют наиболее вероятное значение примерно при $h/\sigma_h \approx 0,5$.

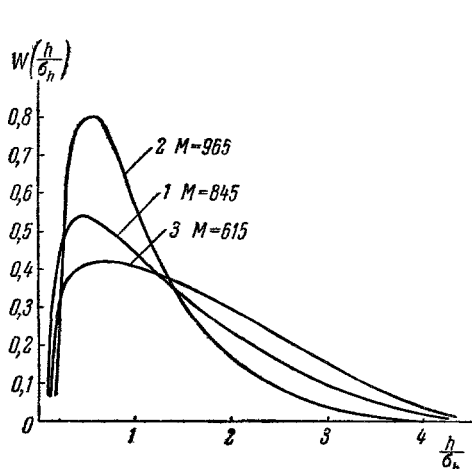


Рис. 13. Плотности вероятности разности высот между минимумом и соседним максимумом в нормальном шуме.

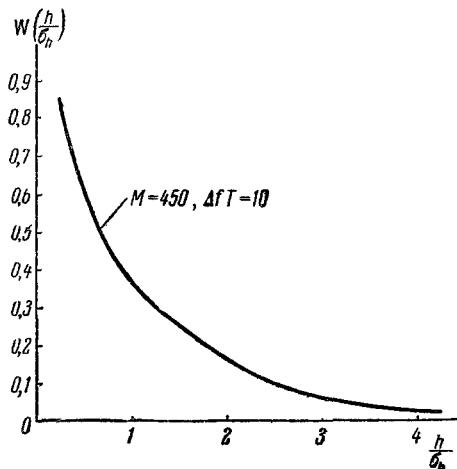


Рис. 14. Плотность вероятности разности высот между минимумом и соседним максимумом в огибающей квазигармонического шума.

Чем медленнее спадает спектр шума с увеличением частоты, тем больше наиболее вероятное значение и тем более быстрый спад плотности вероятности правее его.

На рис. 14 построен график плотности вероятности относительной величины h/σ_h для огибающей $A(t)$ квазигармонического шума со спектральной плотностью (9). Кривая построена по результатам обработки 450 реализаций, каждая из которых имела длительность $T = 10/\Delta f$. В данном случае плотность вероятности имеет вид гиперболы.

Отметим, что плотность вероятности для расстояний между максимумом и соседним минимумом совпадает с плотностью вероятности для расстояний между минимумом и соседним максимумом.

В заключение отметим, что из-за ограниченного объема статьи здесь не были приведены статистические характеристики выбросов флуктуационных процессов $\dot{\varphi}(t)$, $\dot{\psi}(t)$, $\cos \varphi(t)$ и $\cos \psi(t)$, представляющие большой интерес для радиотехнических систем с частотной и фазовой модуляцией. Эти результаты будут сообщены в другом месте.

Дополнение при корректуре. Для флуктуационного процесса $A(t)$ формулы (37) и (38) принимают вид

$$\bar{N}_{1m} = \frac{(a^2 - 1)^2}{(2a)^{5/2}} \sqrt{\frac{-\varphi''(0)}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{7}{4}\right)} \frac{A_n}{a^n}, \quad (37')$$

$$P(z) = \frac{1}{4\bar{N}_{1m}} \sqrt{\frac{-\varphi''(0)}{\pi}} (a^2 - 1)^{\frac{3}{2}} z^{\frac{3}{2}} e^{-a^2 z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n A_n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{7}{4}\right)}. \quad (38')$$

Здесь использованы следующие обозначения

$$z = \frac{-\varrho''(0)}{\sqrt{2} \sqrt{\varrho^{(4)}(0) - \varrho'^2(0)}} \frac{H}{\sigma}, \quad a^2 = \frac{\varrho^{(4)}(0)}{\varrho'^2(0)}, \quad b = \frac{1}{2} (3 - a^2),$$

$$A_n = \sum_{m=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \dots \left(m - \frac{1}{2}\right)}{m!} (n - m + 1) b^m,$$

$$A_n \approx (n + 1) (1 - b)^{-\frac{1}{2}} - \frac{b}{2} (1 - b)^{-\frac{3}{2}}, \text{ если } n \text{ — велико.}$$

Расчеты по формуле (37') показывают, что среднее число максимумов огибающей квазигармонического шума с прямоугольной спектральной плотностью шириной Δf равно

$$\bar{N}_{1m} = 0,6411 \Delta f, \quad (37'a)$$

а для шума с гауссовой формой спектральной плотности (шириной Δf)

$$\bar{N}_{1m} = 1,06 \Delta f, \quad (37'b)$$

т. е. при одинаковых значениях Δf примерно в два раза больше.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. Эйнштейн, М. Смолуховский, Броуновское движение, Сб. статей, М.—Л., ОНТИ, 1936.
2. М. А. Леонтович, Статистическая физика, М., Гостехиздат, 1944.
3. В. И. Тихонов, Вестник МГУ 5, 31 (1956).
4. Л. Н. Лошаков, С. Э. Хайкин, ЖЭТФ 6(8), 857 (1936).
5. И. Я. Барит, М. И. Подгорецкий, А. Е. Чудakov, ЖТФ 19(6), 722 (1949).
6. М. И. Подгорецкий, ДАН СССР 82(6), 881 (1952).
7. Ф. М. Вудворд, Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации, М., Изд. «Советское радио», 1955.
8. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника 1(2), 213 (1956).
9. А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 49, М., Изд. АН СССР, 1955.
10. S. O. Rice, BSTJ 37(3), 581 (1958).
11. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, М., Изд. АН СССР, 1958.
12. Г. В. Корольков, Вопросы радиоэлектроники, сер. 10, вып. 7, 20 (1959).
13. Г. Крамер, Математические методы статистики, М., ИЛ, 1948.
14. M. S. Longuet-Higgins, J. Marine Research 11(3), 245 (1952).
15. Автоматическая оптимизация управляемых систем, Сб. статей, М., ИЛ, 1960.
16. Цянь Сюэ-энь, Техническая кибернетика, М., ИЛ, 1956.
17. Ю. М. Романовский, С. П. Стрелков, Изв. АН СССР, ОТН (Механика и машиностроение), № 4, 3 (1959).
18. А. П. Хусу, Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., № 1 (1), 89 (1956).
19. Г. Я. Дехтярь, Электрокардиография, М., Медгиз, 1955.
20. Надежность радиоэлектронной аппаратуры, Сб. статей, М., Изд. «Советское радио», 1958.
21. С. Райс, Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, Сб. статей, М., ИЛ, 1953.
22. S. O. Rice, BSTJ 27(2), 109 (1948).
23. В. И. Бунимович, Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, М., Изд. «Советское радио», 1951.
24. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применения в радиотехнике, М., Изд. «Советское радио», 1960.
25. В. И. Тихонов, В. В. Тимашев, Труды ВВИА им. Жуковского, вып. 495(5) (1954).

26. В. Н. Иванов, Вестник МГУ 6, 47 (1956).
 27. D. Middleton, J. Appl. Phys. 19(9), 817 (1948).
 28. H. Steinberg, P. M. Schultheiss, G. A. Worgen, F. Zweig, J. Appl. Phys. 26(2), 195 (1955).
 29. I. Miller, J. F. Freund, J. Appl. Phys. 27(11), 1290 (1956).
 30. J. S. Bendat, Principles and Application of Random Noise, New York, 1958.
 31. G. M. White, J. Appl. Phys. 29(4), 722 (1958).
 32. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника 2(1), 23 (1957).
 33. F. W. Lehan, J. Appl. Phys. 22(8), 1067 (1951).
 34. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника 1(1), 23 (1956).
 35. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, ЖТФ 24(1), 103 (1954).
 36. J. A. McFadden, IRE Trans. IT-2 (4), 146 (1956); IT-4(1), 14 (1958).
 37. В. И. Тихонов, И. Н. Амиантов, Радиотехника 15(9), 10 (1960).
 38. В. А. Волконский, Ю. А. Розанов, Теория вероятностей и ее применения 4(2), 186 (1959).
 39. В. П. Яковлев, Радиотехника и электроника 5(10), 1728 (1960).
 40. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, М., Изд. «Советское радио», 1961.
 41. В. И. Тихонов, Радиотехника 11(8), 31 (1956).
 42. В. И. Тихонов, Электросвязь 6, 10 (1957).
 43. K. Blotekjer, IRE Trans. IT-4 (3), 100 (1958).
 44. Ю. П. Озерский, НДВШ (Радиотехника и электроника) 1(2), 35 (1959).
 45. Л. С. Понтрягин, А. А. Андронов, А. А. Витт, в сб. трудов А. А. Андропова, М., Изд. АН СССР, 1956.
 46. A. J. F. Siegert, Phys. Rev. 81(4), 617 (1951).
 47. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника 6(7), 1082 (1961).
 48. D. E. Cartwright, M. S. Longuet-Higgins, Proc. Royal Soc. A237, 1209, 212 (1956).
 49. R. Fürth, D. K. C. MacDonald, Proc. Phys. Soc. 59, pt. 3, 388 (1947).
 50. В. И. Тихонов, Изв. ВУЗ (Радиотехника) 4(5), 568 (1961).
 51. В. И. Тихонов, Е. И. Куликов, Радиотехника 17(2), 15 (1962).
 52. R. A. Silverman, IRE Trans. IT-4(1), 30 (1958).
 53. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника 7(6), (1962).
 54. В. И. Тихонов, Автоматика и телемеханика, 23(6), (1962).
-