1962 г. Ноябрь *Т. LXXVIII, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ

М. М. Гуревич

1. Около 10 лет тому назад А. А. Гершун [1] обратил внимание физиков и светотехников на то, что при изложении законов температурного излучения приходится встречаться с некоторыми затруднениями, связанными с распределением энергии в спектре излучения абсолютно черного тела (а.ч.т.) и, в частности, в связи с вопросом о положении максимума в спектре такого излучения.

Иной раз забывают о том, что спектральная плотность излучения, характеризуемого в той или другой спектральной шкале, сама по себе ни с какой энергией (или мощностью) не связана, а является лишь вспомогательной величиной, позволяющей определить мощность излучения в выбранном участке спектра. Понятно, что эта вспомогательная величина зависит от того, вдоль какой шкалы распределяется мощность излучения.

В настоящее время естественно остановиться на трех таких шкалах. Во-первых, речь пойдет о наиболее привычной для большинства физиков и светотехников линейной шкале длин волн λ, в которой элементарная мощность излучения dP на участке λ, $\lambda + d\lambda$ определяется произведением

$$dP = p(\lambda)\, d\lambda \ \ \textit{вт}\cdot\textit{см}^{-2}. \tag{1}$$

Во-вторых, надо указать на предпочитаемую многими теоретиками шкалу частот или (что почти то же) шкалу волновых чисел n, в которой элементарная мощность dP на участке n, $n + dn$ выражается так:

$$dP = p(n)\, dn \ \ \textit{вт}\cdot\textit{см}^{-2}. \tag{2}$$

И, в-третьих, речь пойдет о мало привычной, но по ряду причин заслуживающей внимание логарифмической шкале, где в линейном масштабе отложены логарифмы длин волн ($\ln\lambda$) или волновых чисел ($\ln n$) и где элементарная мощность dP изображается так:

$$dP = p(\ln\lambda)\, d(\ln\lambda) = p(\ln\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda} \ \ \textit{вт}\cdot\textit{см}^{-2}. \tag{3}$$

Во всех случаях ширина спектрального интервала ($d\lambda$, dn, $d\lambda/\lambda$) входит множителем в выражение для элементарной мощности излучения. Поэтому невозможно указать, при какой из двух длин волн λ_1 и λ_2, входящих в состав сплошного спектра, излучается бо́льшая мощность. Ответ зависит от совершенно независимым путем устанавливаемых интервалов $d\lambda_1$ и $d\lambda_2$. Такие же замечания справедливы для любой спектральной шкалы.

Каждая из шкал приводит к своему виду функции Планка и каждой соответствует свое положение максимального значения этой функции, определяемое законом смещения

$$\lambda_m T = \text{const}. \tag{4}$$

Постоянная закона смещения имеет свое значение для каждой шкалы (см., например, [2]), причем

для функции $p(\lambda)$ $\quad C(\lambda) = 2896{,}2$ *мкм·град*, (4а)

для функции $p(n)$ $\quad C(n) = 5096{,}8$ *мкм·град*, (4б)

для функции $p(\ln\lambda)$ $\quad C(\ln\lambda) = 3667{,}7$ *мкм·град*. (4в)

Линейная шкала длин волн отличается тем, что громадную область коротковолнового излучения (ультрафиолетовые, рентгеновские и γ-лучи) она «зажимает» на малом участке около своего начала. Шкала волновых чисел «зажимает» около своего начала все длинноволновое излучение (инфракрасные, радиоволны) Так как все графики спектрального распределения строятся с соблюдением условия пропорциональности между мощностью, излучаемой в данном интервале, и площадью, лежащей под тем же участком кривой (между кривой, осью абсцисс и двумя граничными ординатами), такое одностороннее «сжатие» шкалы должно сказаться в соответственном увеличении ординат. Иначе говоря, из общих соображений следует ожидать смещения максимума кривой в коротковолновую часть спектра в шкале длин волн и в длинноволновую в шкале волновых чисел (или частот).

Логарифмическая шкала не имеет нулевой точки и предоставляет всем видам электромагнитного излучения равные участки при равных относительных изменениях длины волны (или волнового числа) в любом спектральном диапазоне.

2. С принципиальной точки зрения правомерность всех упомянутых шкал не вызывает сомнений, но практически они оказываются не равноценными. В качестве примера рассмотрим, например, задачу об определении температуры, при которой световой коэффициент полезного действия (к. п. д.) излучения а.ч.т. становится наибольшим. Оптик или светотехник, привыкший оперировать с кривой спектральной плотности $p(\lambda)$, изображаемой в линейной шкале длин волн, легко придет к неверному заключению, если воспользуется привычным значением константы закона смещения (4а) и вычислит эту температуру так:

$$T_m = 2896{,}2/0{,}555 \approx 5200^\circ\,\mathrm{K}.$$

Этот расчет основан на допущении, что наиболее благоприятные условия для светового выхода излучения создаются тогда, когда максимум спектральной плотности придется на ту длину волны, к которой глаз наиболее чувствителен, и при первом взгляде кажется безупречным.

Между тем известно, что излучение а.ч.т. имеет наибольший световой к.п.д. при температуре около 6600° К, которая получится, если воспользоваться тем значением константы закона смещения, которая соответствует логарифмической шкале (4в), т. е.

$$T_m = 3667{,}7/0{,}555 \approx 6600^\circ\,\mathrm{K}.$$

Правильное заключение можно, конечно, получить и исходя из функции $p(\lambda)$, но для этого надо помнить, что если максимальное значение этой функции при температуре T приходится на длину волны λ_m, то наибольшая доля излучения придется на участок около той же длины волны при другой температуре T_m, которую требуется искать путем дополнительных расчетов.

3. В этой связи рассмотрим еще раз задачу о к. п. д. излучения а. ч. т. в узком спектральном интервале*). Под к. п. д. излучения в узком интервале понимается отношение мощности ΔP, приходящейся на выбранный интервал $\lambda, \lambda + \Delta\lambda$, к общей мощности P излучения. Обозначим этот к. п. д. через $\Delta\eta$. Согласно определению для а. ч. т.

$$\Delta\eta = \frac{\Delta P}{P} = \frac{C_1\lambda^{-5}\Delta\lambda}{(e^{C_2/\lambda T}-1)\sigma T^4} = \frac{C_1}{C_2^4\sigma}\,\frac{X^{-4}}{e^{1/X}-1}\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda}, \tag{5}$$

где $X = \lambda T / C_2$.

К.п.д. $\Delta\eta$ является функцией температуры а. ч. т., длины волны λ и ширины выделенного интервала $\Delta\lambda$. Рассмотрим подробнее полученное

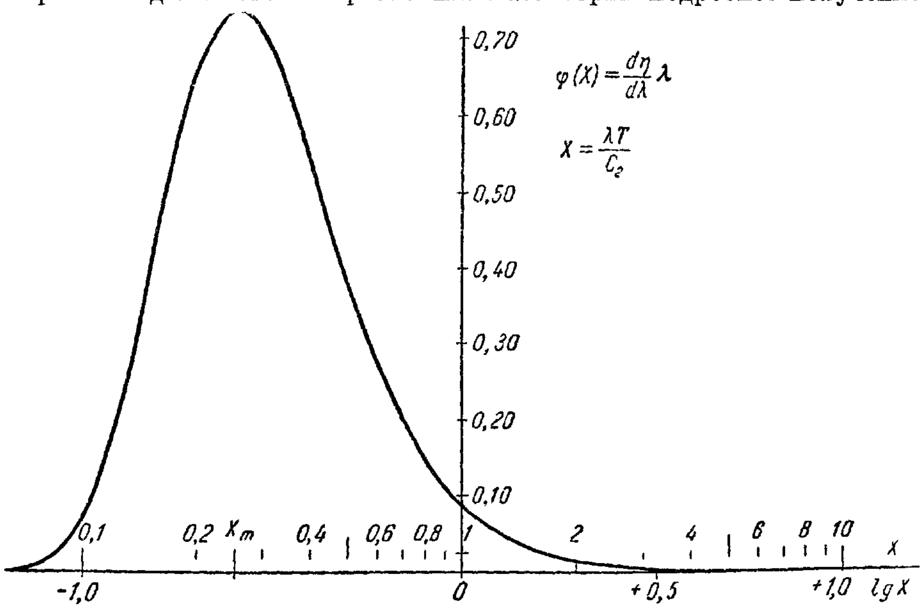

Рис. 1. Рассчитанный на октаву к. п. д. излучения а. ч. т. в зависимости от $\lambda T/C_2$.

выражение. Первый из трех написанных множителей оказывается постоянной и безразмерной величиной, равной 1/6,4939. Второй множитель — $f(X) = X^{-4}/(e^{1/X}-1)$ — также безразмерный и зависит только от произведения λT. Легко видеть, что при $X = X_m = 0{,}25505$ этот множитель достигает своего максимума $f(X_m) = 4{,}7799$ и стремится к нулю как в сторону больших, так и в сторону малых значений X.

Третий, также безразмерный множитель $\Delta\lambda/\lambda$ дает спектральную ширину выделенного интервала в относительной мере. Единицу относительного спектрального интервала можно назвать «октавой», так как она соответствует изменению длины волны ($\Delta\lambda$), равному самой длине волны (λ).

Величина

$$\varphi(X) = \frac{\Delta\eta}{\Delta\lambda/\lambda} = \frac{f(X)}{6{,}4939} \tag{6}$$

представляет к. п. д. излучения а. ч. т., рассчитанный на одну октаву. Его зависимость от X (в логарифмическом масштабе) показана на рис. 1.

*) Недавно эта задача рассмотрена Р. А. Сапожниковым[3], который привел подробную литературу по этому вопросу.

Рассматривая к. п. д. $\Delta\eta$ как функцию температуры, мы видим, что своего наибольшего значения он достигает при температуре T_m вместе с функцией $\varphi(X)$. При этом

$$\Delta\eta_m = \frac{4,7799}{6,4939}\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0,73605\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

и

$$\lambda T_m = 3667,7\ \text{мкм}\cdot\text{град K}. \qquad (7)$$

Таким образом, для того чтобы найти температуру, при которой в интервале λ, $\lambda + \Delta\lambda$ находится наибольшая часть общей мощности излучения а.ч.т., надо руководствоваться выражением (7), что и поясняет рассмотренный выше случай светового к.п.д. излучения а.ч.т. Последнее не зависит от того, в какой шкале рассматривается спектральное разложение — в длинах волн, волновых числах или их логарифмах.

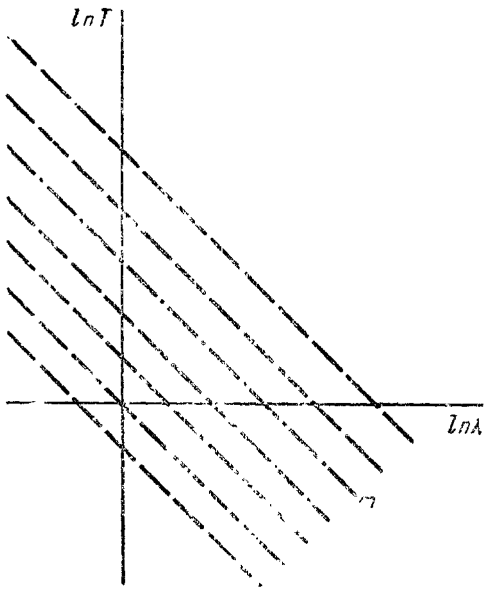

Рис. 2. Плоскость независимых переменных функции Планка в логарифмических шкалах.

Функция $\varphi(X)$, изображенная на рис. 1, показывает, как изменяется к. п. д. при изменении температуры, причем эта зависимость одинакова для всех длин волн. Различие состоит только в том, что в соответствии с (7) при изменении длины волны максимум будет приходиться на другую температуру.

4. Выражение (5), определяющее к. п. д. $\Delta\eta$, можно рассматривать и как функцию длины волны, определяющую спектральную зависимость элементарной мощности ΔP в долях общей мощности P излучения а.ч.т. при постоянной температуре. Из (6) следует, что зависимость от длины волны рассчитанного на октаву к.п.д. совпадает с его зависимостью от температуры и также может быть изображена кривой, показанной на рис. 1.

Для того чтобы подробнее ориентироваться в получающихся соотношениях, отложим по оси абсцисс (рис. 2) логарифм длины волны ($\ln\lambda$), а по оси ординат — логарифм температуры ($\ln T$). Каждой точке этой плоскости соответствует пара значений λ, T и определенное $\varphi(X)$, которое может быть отложено в произвольном масштабе на перпендикуляре к плоскости. Концы полученных отрезков образуют поверхность $\varphi(\lambda T/C_2)$, форма которой может быть легко установлена.

Семейство параллельных прямых, выражаемых уравнением $\ln\lambda + \ln T = \mathrm{const}$ (показано пунктиром на рис. 2), является геометрическим местом точек постоянных значений произведения λT и вместе с тем функции $\varphi(X)$.

Плоскость U, перпендикулярная к плоскости рис. 2 и параллельная оси ординат ($\lambda = \mathrm{const}$), пересечет поверхность φ по линии, повторяющей кривую, изображенную на рис. 1. Перемещая плоскость U параллельно самой себе, будем получать в сечении с поверхностью φ все те же кривые. Максимальная высота этих кривых будет находиться над той из пунктирных линий, которая соответствует (7). На рис. 2 она обозначена буквой m.

Сечение поверхности $\varphi\,(\lambda T/C_2)$ плоскостью V, перпендикулярной к плоскости рис. 2 и параллельной оси абсцисс (T = const), будет повторять ее сечение с плоскостью U. Максимальное значение $\varphi\,(X)$ в этом сечении будет находиться над той же пунктирной линией, которая отмечена буквой m. При перемещении плоскости V параллельно самой себе кривая, по которой она пересечется с поверхностью $\varphi\,(\lambda T/C_2)$, также будет сохранять свою форму.

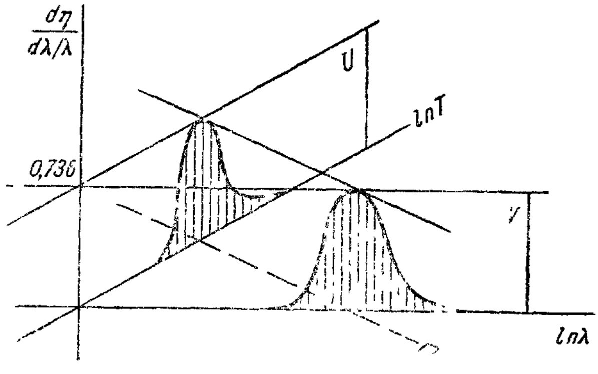

Рис. 3. Поверхность $\varphi\,(\lambda T/C_2)$ и ее сечения плоскостями U (λ = const) и V (T = const).

На рис. 3 показан вид поверхности $\varphi\,(\lambda T/C_2)$ в логарифмических координатах. Поверхность напоминает своеобразную «волну» с горизонтальным и прямолинейным гребнем, расположенным над пунктирной линией m. Поверхность спускается к нулю как в сторону больших, так и в сторону малых значений произведения λT.

5. Следует отметить, что столь простая зависимость к.п.д. монохроматического излучения а.ч.т. от длины волны и от температуры имеет место только в логарифмических шкалах.

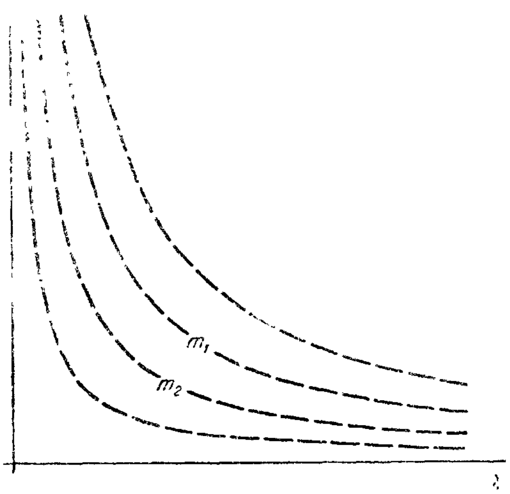

Рис. 4. Плоскость независимых переменных функции Планка в линейных шкалах.

Если обратиться к аналогичной картине в линейных шкалах λ и T, то соотношения окажутся гораздо сложнее. Прежде всего в линейных шкалах их дифференциалы $d\lambda$ и dT окажутся размерными величинами. Построим поверхность

$$\psi(\lambda,\,T)=\frac{d\eta}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda}\,\varphi\left(\frac{\lambda T}{C_2}\right), \tag{8}$$

отложив величины $\psi\,(\lambda,\,T)$ как отрезки на перпендикулярах, восстановленных из точек λ, T координатной плоскости (рис. 4). Величина $\psi\,(\lambda,\,T)$ также окажется размерной с размерностью [длина]$^{-1}$.

Линии λT = const, вдоль которых функция $\varphi\,(X)$ имеет постоянное значение, будут равносторонними гиперболами. Они показаны пунктиром на рис. 4. Одна из этих гипербол, соответствующая значению

$\lambda T = 3667{,}7$ *мкм·град*, обозначена буквой m_1. Функция $\psi(\lambda, T) = \frac{d\eta}{d\lambda}$ не будет иметь постоянного значения вдоль гипербол $\lambda T = \mathrm{const}$, так как согласно (8) постоянную величину $\varphi(X)$ придется делить на изменяющуюся длину волны λ. При уменьшении λ значения $\psi(\lambda, T)$ будут возрастать по гиперболическому закону.

Рассмотрим сечение поверхности $\psi(\lambda, T)$ плоскостью $\lambda = \mathrm{const}$. Как видно из (8), при постоянном λ форма этого сечения не будет отличаться от

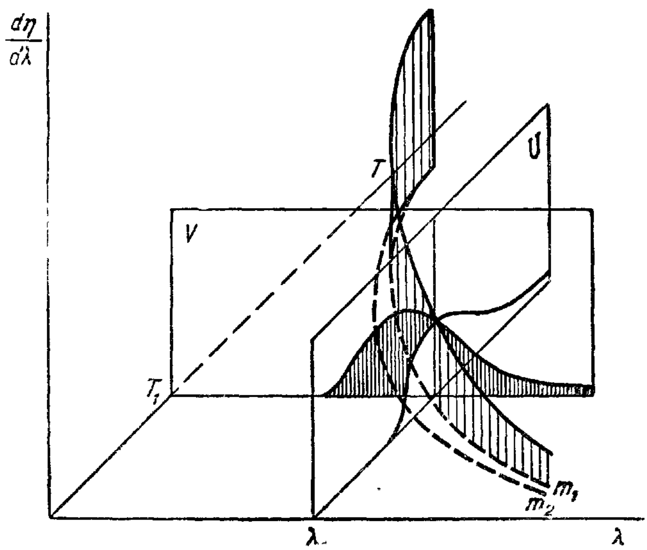

Рис. 5. Поверхность $\psi(\lambda, T)$ и ее сечение плоскостями U ($\lambda = \mathrm{const}$) и V ($T = \mathrm{const}$)

формы кривой $\varphi(X)$, показанной на рис. 1. Своего наибольшего значения в плоскости $\lambda = \mathrm{const}$ функция $\psi(\lambda, T)$ достигнет в точке T_m, лежащей на гиперболе m_1.

Если рассмотреть сечение поверхности $\psi(\lambda, T)$ плоскостью $T = \mathrm{const}$, то максимумы этих кривых также лежат над одной из равносторонних гипербол, но с другим значением постоянной, именно $\lambda T = 2896{,}2$ *мкм·град*. На рис. 4 эта гипербола обозначена буквой m_2.

Если мы попытаемся представить себе поверхность $\psi(\lambda, T)$ в координатах λ и T, то увидим, что она сильно отличается от поверхности $\varphi\left(\frac{\lambda T}{C_2}\right)$, показанной на рис. 3. Прямолинейная «волна» с горизонтальным гребнем превращается здесь в своего рода «гору», изогнутую в горизонтальной плоскости (λ, T) по гиперболе m_1, над которой лежит ее «хребет», круто поднимающийся вверх по мере уменьшения λ. На рис. 5 показаны примерная форма этой «горы» и вид кривых, по которым она пересекается с плоскостями U $(\lambda = \mathrm{const} = \lambda_1)$ и V $(T = \mathrm{const} = T_1)$. Из рисунка видно, что смещение максимума кривой в плоскости V по отношению к линии ее пересечения с плоскостью U, в которой $T_1 = T_m$, является следствием общего подъема всей «горы» в сторону коротких длин волн.

Можно было бы подробнее разобрать формы поверхностей к. п. д. в логарифмических и линейных шкалах волновых чисел n и температур T. И снова пришлось бы убедиться, что в логарифмических шкалах форма поверхности несравненно проще, чем в линейных. Однако такой разбор был бы в значительной мере повторением того, что уже изложено, вследствие чего он опускается.

6. Воспользуемся приемом, изложенным Фабри [4], и, сохранив масштаб функции $\varphi(X)$, примем за единицу независимого переменного то ее значение $X_m = 0{,}25505$, которому соответствует максимум $\varphi(X)$. Обозначив новую функцию через y, а новую независимую переменную буквой x, получим

$$y = 36{,}387\frac{x^{-4}}{e^{3{,}9207/x}-1} = 36{,}387\frac{x^{-4}}{10^{1{,}70273/x}-1}. \qquad (9)$$

Легко видеть, что при $x = 1$ $y = 0{,}7360_5$, что соответствует наибольшему возможному значению к. п. д. излучения а.ч.т. на одну октаву. Из всего

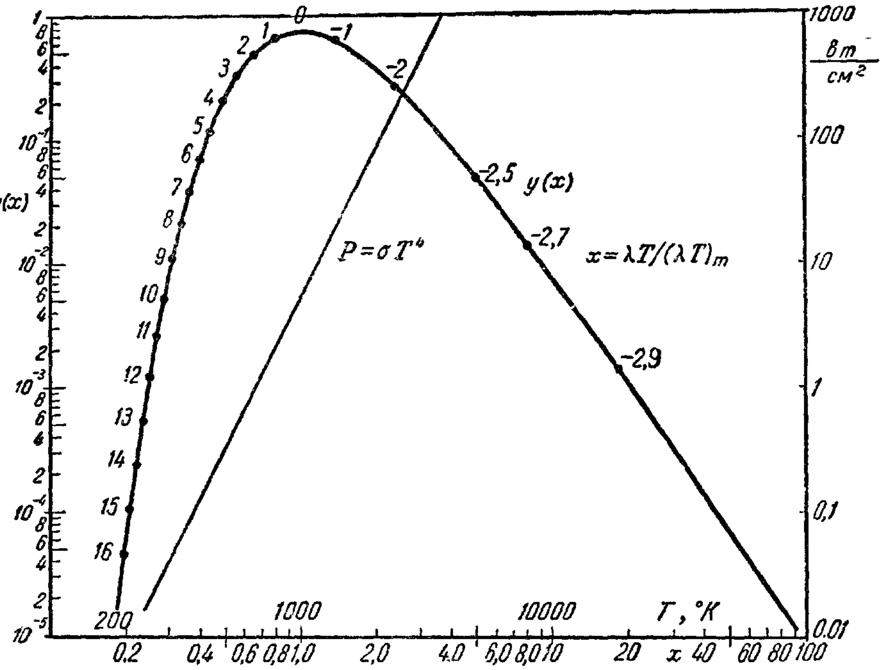

Рис. 6. График для расчета к. п. д. и мощности излучения а. ч. т. в узких участках спектра.

предыдущего следует, что эта функция — она показана графически на рис. 6 — может быть с удобством использована при расчетах излучений, испускаемых а.ч.т.

Допустим, что мы хотим знать, какую мощность излучает а.ч.т. при $T = 2000°$ K в спектральном интервале 0,50—0,60 *мкм*. Определим среднюю длину волны заданного интервала как полусумму крайних и будем считать ее равной 0,55 *мкм*. Найдем произведение $\lambda T = 0{,}55 \cdot 2000 = 1100$ *мкм·град* и отношение его к произведению $(\lambda T)_m$, соответствующему максимальным значениям $\varphi(X)$, т. е. $1100/3667{,}7 \approx 0{,}3$. Легко видеть, что последнее отношение является независимым переменным в выражении (9).

Из рис. 6 видно, что $y(0{,}3) = 0{,}01$ и, следовательно, к. п. д. излучения а. ч. т. в интересующем нас участке равен $y(0{,}3)\,\Delta\lambda/\lambda = 0{,}01\frac{0{,}1}{0{,}55} = 0{,}00182$. Для нахождения мощности ΔP, излучаемой а. ч. т. в указанных условиях, полученный результат надо умножить на $P = \sigma T^4$, т. е. в нашем случае на $5{,}68 \cdot 16 = 90{,}8$ *вт/см²*. Итак, в интервале 0,5—0,6 *мкм* при $T = 2000$ K каждый *кв·см²* а. ч. т. излучает $0{,}00182 \cdot 90{,}8 \approx 0{,}165$ *вт.*

Из предыдущего видно, что к. п. д. излучения а. ч. т. (на одну октаву) определяется отношением произведения заданной пары значений λ и T к $(\lambda T)_m = 3667{,}7$ *мкм·град.*

Числа, проставленные вдоль кривой на рис. 6, показывают, как быстро меняется к.п.д. при изменении температуры (и постоянной длине волны). Так, число 9 около y (0,3) обозначает, что при возрастании температуры на 1% к. п. д. увеличится на 9%. Скорость изменения излучения будет на 4 больше, т. е. при $\lambda T : (\lambda T)_m = 0{,}3$ повышение температуры на 1% поведет к увеличению мощности излучения на 13%. Из того же рисунка видно, что при $\lambda T : (\lambda T)_m = 3$ повышение температуры на 1% приведет к уменьшению к.п.д. на 2,2%, а соответствующее излучение возрастет на $4 - 2{,}2 = 1{,}8\%$.

7. Сказанного достаточно для того, чтобы видеть, что при решении ряда задач, связанных с распределением мощности в спектре излучения а.ч.т., логарифмическая шкала длин волн (волновых чисел, частот) оказывается весьма удобной. Вполне правомочная и не ведущая ни к каким принципиальным ошибкам линейная шкала длин волн (волновых чисел, частот) оказывается связанной с гораздо более сложными зависимостями.

Достоинства логарифмической шкалы длин волн (волновых чисел, частот) состоит в следующем.

а) в логарифмических шкалах спектральная плотность излучения имеет размерность, совпадающую с размерностью интегральной плотности излучения (*вт·см⁻²*);

б) в логарифмических шкалах все области электромагнитного спектра представлены на графике в равной мере, поскольку изменение спектральной координаты (λ, n или ν) на одну октаву в любой части спектра изображается на шкале одинаковыми отрезками;

в) в логарифмических шкалах длины волн и температуры, рассчитанные на одну октаву к.п.д. излучения а.ч.т., имеют одинаковую зависимость от длины волны и от температуры;

г) в логарифмических шкалах константа закона смещения Вина, определяющего положение (λ_m) наибольшей спектральной плотности излучения а. ч. т. при заданной температуре T, совпадает с константой, определяющей температуру (T_m), при которой к. п. д. излучения а. ч. т. в узком спектральном интервале (около длины волны λ) достигает своего максимального значения, т. е. для логарифмической шкалы имеем

$$\lambda_m T = \lambda T_m = 3667{,}7 \text{ мкм·град.}$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гершун, О спектральной плотности излучения, УФН 46 (3), 366 (1952).
2. М. М. Гуревич, О спектральном распределении мощности излучения, УФН 56(3), 417 (1955).
3. Г. А. Сапожников, О спектральном распределении лучистой энергии, УФН 70(2), 387 (1960).
4. Ш. Фабри, Введение в фотометрию, М., ОНТИ, 1934.