

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПЛАЗМЕ

А. А. Рухадзе и В. П. Силин

Теория линейных электромагнитных процессов в плазме усиленно развивается в настоящее время. Подобные процессы можно в известном смысле сопоставить с колебаниями и волнами, которые, естественно, не исчерпывают всех возможных электромагнитных процессов в плазме. По нашему глубокому убеждению, теория линейных процессов составляет основу электродинамики плазмы, на ней основана теория целого ряда нелинейных электромагнитных явлений в плазме. В настоящем обзоре основное внимание уделено таким линейным процессам, которые, на наш взгляд, лягут в основу нелинейной электродинамики плазмы.

Для линейной электродинамики плазмы в целом ряде случаев существенна пространственная дисперсия диэлектрической проницаемости *). Общие вопросы линейной электродинамики сред с пространственной дисперсией изложены в нашем обзоре ³.

В книге ¹ на основе такой электродинамики рассмотрены некоторые линейные электромагнитные процессы в равновесной, максвелловской электронно-ионной плазме. В настоящем обзоре такой плазме будет уделено мало внимания, будут рассмотрены электромагнитные свойства плазмы при весьма общих предположениях о виде функции распределения частиц по скоростям. При этом особое внимание уделено линейным электромагнитным явлениям в неравновесной плазме.

§ 1. ТЕНЗОР КОМПЛЕКСНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПЛАЗМЫ

В линейной электродинамике электромагнитные свойства среды определяются с помощью материального уравнения ^{1,3}

$$D'_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\epsilon}_{ij}(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(\mathbf{r}', t'). \quad (1,1)$$

Для пространственно-однородных сред ядро интегрального соотношения (1,1) зависит от разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. В этом случае удобно представить электромагнитное поле интегралом Фурье в виде совокупности плоских монохроматических волн $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. Для таких волн соотношение (1,1) принимает вид

$$D'_i(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad (1,2)$$

*) Конечно, в плазме существует широкая область явлений, где можно пренебречь пространственной дисперсией. Электродинамика таких явлений многократно освещалась (см., например, книги ^{1,2}). Поэтому подробно рассматривать их здесь мы не будем.

где

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^\infty dt \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t} \hat{\varepsilon}_{ij}(t, \mathbf{r}) \quad (1,3)$$

— тензор комплексной диэлектрической проницаемости, характеризующий электромагнитные свойства среды. Зависимость тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от частоты описывает частотную дисперсию диэлектрической проницаемости, от волнового вектора — пространственную дисперсию.

Для явного вычисления тензора диэлектрической проницаемости необходимо задаться определенной моделью среды. Особое достоинство плазмы с точки зрения теории состоит в том, что плазма является системой частиц со слабым взаимодействием:

$$e^2 N^{1/3} \ll \langle \mathcal{E} \rangle \sim \kappa T.$$

Наличие малого параметра обуславливает возможность построения теории плазмы. Удобным методом описания плазмы является метод кинетического уравнения с самосогласованным полем

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}. \quad (1,4)$$

Используя кинетическое уравнение (1,4), можно получить выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы. В случае плазмы без сильных полей тензор диэлектрической проницаемости при условии, когда столкновениями частиц можно пренебречь, имеет вид *)

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_i} \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) \delta_{jl} + \frac{v_j k_l}{\omega} \right\}, \quad (1,5)$$

где $f_{0\alpha}(\mathbf{p})$ — функция распределения частиц α -го сорта в основном состоянии плазмы. Интеграл в правой части (1,5) является интегралом типа Коши, поэтому $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, как функция комплексного переменного ω , имеет особенности лишь на контуре интегрирования **), т. е. при действительных ω .

Для плазмы, находящейся в сильном магнитном поле $\mathbf{B}_0$, при пренебрежении столкновениями частиц из уравнения (1,4) получаем¹

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} - \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{\omega} \int d\mathbf{p} v_i \int_0^\infty d\tau e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}(\tau) + i\omega\tau} \times \\ \times \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{V}(\tau)}{\omega} \right) \delta_{jl} + \frac{V_j(\tau) k_l}{\omega} \right\} \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{p})}{\partial p_l}, \quad (1,6)$$

где

$$\mathbf{P}(\tau) = \frac{e_\alpha}{c^2} \mathbf{V}(\tau), \quad \mathbf{R}(\tau) = - \int_0^\tau \mathbf{V}(\tau') d\tau', \quad \Omega_\alpha = \frac{e_\alpha c B_0}{\epsilon_\alpha},$$

$$\mathbf{V}(\tau) = \frac{\mathbf{B}_0 (\mathbf{vB}_0)}{B_0^2} + \frac{[\mathbf{B}_0 [\mathbf{vB}_0]]}{B_0^2} \cos \Omega_\alpha \tau - \frac{[\mathbf{vB}_0]}{B_0} \sin \Omega_\alpha \tau.$$

*) При учете столкновений частиц сколько-нибудь общего выражения для $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ до сих пор не получено. Учет столкновений частиц последовательно проводится лишь в условиях, когда пространственной дисперсией можно пренебречь^{1,4}.

**) Строго говоря, такое положение имеет место лишь при учете того факта, что скорость частиц не может превышать скорость света. В случае же, например, нерелятивистского максвелловского распределения $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, как функция комплексного переменного, в окрестности бесконечно удаленной точки имеет особенность.

При отсутствии внешнего магнитного поля ($B_0 \rightarrow 0$)

$$V(\tau) = v, \quad R(\tau) = -V\tau, \quad P(\tau) = p.$$

Тензор диэлектрической проницаемости (1,6) в этом случае совпадает с выражением (1,5). С помощью формул (1,5) и (1,6) могут быть вычислены конкретные выражения для диэлектрической проницаемости плазмы при использовании тех или иных выражений для функций распределения частиц $f_{0\alpha}(p)$.

§ 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ

В изотропной плазме функция распределения частиц по скоростям в основном состоянии $f_{0\alpha}(p)$ является функцией абсолютной величины импульса p . Тензор диэлектрической проницаемости плазмы (1,5) в этом случае можно представить в виде

$$\epsilon_{ij}(\omega, k) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon^{\text{tr}}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon^l(\omega, k). \quad (2,1)$$

Продольная ϵ^l и поперечная ϵ^{tr} диэлектрические проницаемости согласно (1,5) определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^l(\omega, k) &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega k^2} \int dp \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \phi_{\alpha}} (kv)^2 \left[\frac{P}{\omega - kv} - i\pi \delta(\omega - kv) \right], \\ \epsilon^{\text{tr}}(\omega, k) &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{2\pi e_{\alpha}^2}{\omega k^2} \int dp \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \phi_{\alpha}} (kv)^2 \left[\frac{P}{\omega - kv} - i\pi \delta(\omega - kv) \right], \end{aligned} \right\} \quad (2,2)$$

где символ P означает, что особенность в точке $\omega = kv$ следует понимать в смысле главного значения. Выражения (2,2) легко проинтегрировать по углам. Приведем формулы для мнимых частей $\epsilon^l(\omega, k)$ и $\epsilon^{\text{tr}}(\omega, k)$, характеризующих поглощение продольных и поперечных волн в плазме:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^{l''}(\omega, k) &= - \sum_{\alpha} \frac{8\pi^3 e_{\alpha}^2 \omega}{|k|^3 c^4} \left\{ \int_{\phi_{1\alpha}}^{\infty} d\mathcal{E}_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha}^2 \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \phi_{\alpha}} \text{ при } \omega^2 < k^2 c^2, \right. \\ &\quad \left. 0 \text{ при } \omega^2 > k^2 c^2, \right. \\ \epsilon^{\text{tr}''}(\omega, k) &= - \sum_{\alpha} \frac{4\pi^3 e_{\alpha}^2 m_{\alpha}^2 c^2}{\omega |k|} \left\{ \int_{\phi_{1\alpha}}^{\infty} d\mathcal{E}_{\alpha} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \phi_{\alpha}} \left[\frac{\mathcal{E}_{\alpha}^2}{\phi_{1\alpha}} - 1 \right] \text{ при } \omega^2 < k^2 c^2, \right. \\ &\quad \left. 0 \text{ при } \omega^2 > k^2 c^2, \right. \end{aligned} \right\} \quad (2,3)$$

где $\mathcal{E}_{1\alpha} = \frac{m_{\alpha} c^2}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{k^2 c^2}}}$. Из этих формул, в частности, следует, что электро-

магнитные волны с фазовыми скоростями, превышающими скорость света c , в изотропной плазме не поглощаются, так как при $\omega^2 > k^2 c^2$ величины $\epsilon^{l''}$ и $\epsilon^{\text{tr}''}$ равны нулю.

В пределе малых частот $\omega/k \rightarrow 0$ из формул (2,2) получаем

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^l(0, k) &= 1 + \frac{1}{k^2 r_{\text{экр}}^2}, \quad r_{\text{экр}}^{-2} = - \sum_{\alpha} 4\pi e_{\alpha}^2 \int dp \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \phi_{\alpha}}, \\ \epsilon^{\text{tr}}(0, k) &= 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \frac{C}{|k|}, \quad C = - \sum_{\alpha} \pi^2 m_{\alpha}^2 e_{\alpha}^2 c^2 \int_{m_{\alpha} c^2}^{\infty} d\mathcal{E}_{\alpha} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \phi_{\alpha}} \left(\frac{\mathcal{E}_{\alpha}}{m_{\alpha} c^2} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (2,4)$$

Функция $\varepsilon^1(0, k)$ характеризует поведение статического поля заряда в плазме на больших расстояниях. Величина же $r_{\text{экр}}$ представляет собой радиус экранирования скалярного потенциала поля точечного заряда¹

$$\Phi(r) = \frac{e}{|r-r_0|} e^{-\frac{|r-r_0|}{r_{\text{экр}}}}. \quad (2,5)$$

В случае максвелловской плазмы величина $r_{\text{экр}}$ совпадает с дебаевским радиусом экранирования³.

Из формул (2,4) следует, что поперечная диэлектрическая проницаемость изотропной плазмы в отсутствие столкновений частиц в области малых частот ($\omega \rightarrow 0$) имеет полюс $\sim 1/\omega$. Это соответствует наличию конечной проводимости, обусловленной черенковской диссипацией волн в плазме. Заметим, что поперечная диэлектрическая проницаемость (2,4) соответствует области частот аномальною скин-эффекта в плазме^{5,6}.

В области высоких частот $k/\omega \rightarrow 0$ ($\omega \gg k \langle v_{e,i} \rangle$), когда пространственной дисперсией можно пренебречь, получаем

$$\varepsilon^1(\omega, 0) = \varepsilon^{\text{тр}}(\omega, 0) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (2,6)$$

где

$$\omega_0^2 = \sum_{\alpha} \omega_{0\alpha}^2 = - \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{3} \int d\mathbf{p} v^2 \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \omega_{\alpha}}.$$

В пределе $k=0$ мнимая часть тензора диэлектрической проницаемости равна нулю. Однако, если учесть слабую пространственную дисперсию, обусловленную тепловым движением частиц в плазме, из выражений (2,3) получим малую, но отличную от нуля мнимую часть тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, приводящую к поглощению электромагнитных волн в плазме.

Как известно, в изотропной среде возможны продольные и поперечные электромагнитные волны, зависящие от координат и времени как $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. Дисперсионные уравнения для продольных и поперечных волн, устанавливающие связь между частотой и волновым вектором $\mathbf{k}$, соответственно имеют вид^{1,3}

$$\varepsilon^1(\omega, k) = 0, \quad (2,7)$$

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{\text{т}}(\omega, k) = 0. \quad (2,8)$$

В области высоких частот, в которой пространственная дисперсия диэлектрической проницаемости является слабой, для спектра продольных и поперечных колебаний получаем

$$\omega^2 = \omega_0^2, \quad (2,9)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + k^2 c^2. \quad (2,10)$$

Отсюда следует, что фазовая скорость поперечных волн в изотропной плазме больше скорости света, поэтому они оказываются незатухающими (при пренебрежении столкновениями частиц). Что касается продольных волн, то при $\omega_0^2 > k^2 c^2$ они, так же как и поперечные волны, являются незатухающими; при $\omega_0^2 < k^2 c^2$ продольные волны в плазме затухают, причем декремент затухания в случае спектра (2,9) ($\omega \rightarrow \omega - i\gamma$) равен

$$\gamma = - \frac{\varepsilon^{1''}(\omega, k)}{\frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon^{1'}(\omega, k)} = \frac{1}{2} \omega_0 \varepsilon^{1''}(\omega_0, k). \quad (2,11)$$

Согласно формуле (2,3) мнимая часть продольной диэлектрической про-

ницаемости $\epsilon^{1''}(\omega, k)$ выражается через функцию распределения частиц в плазме. Поэтому с помощью измерения декремента затухания продольных волн в принципе можно определить функцию распределения частиц по скоростям. Следует заметить, что вклад ионов в мнимую часть $\epsilon^{1''}(\omega, k)$ практически пренебрежимо мал. Поэтому указанным путем возможно определение лишь функции распределения электронов в плазме.

В области низких частот, когда определяющую роль играет пространственная дисперсия диэлектрической проницаемости, электромагнитные волны в изотропной плазме оказываются сильно затухающими. Существует, однако, случай, когда низкочастотные продольные волны в изотропной плазме являются слабо затухающими. Имеется в виду неизоэнтальпическая электронно-ионная плазма, в которой средняя тепловая энергия электронов значительно больше тепловой энергии ионов. При этом в области фазовых скоростей волн, лежащих между тепловыми скоростями ионов и электронов ($k \langle v_i \rangle \ll \omega \ll k \langle v_e \rangle$), имеем

$$\epsilon^{1'}(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{-1e}^2}{k^2 \langle v_e^2 \rangle}, \quad (2,12)$$

где $\omega_{-1e}^2 = -4\pi e^2 \langle v_e^2 \rangle \int dp \frac{\partial f_{0e}}{\partial \beta}$; $\langle v_e^m \rangle = \int dv v^m f_{0e}$. Мнимая часть продольной диэлектрической проницаемости при этом оказывается малой величиной,

$$\epsilon^{1''}(\omega, k) = \frac{\pi}{2} \frac{\tilde{\omega} \omega_{0e}^2}{k^3 \langle v_e^2 \rangle}, \quad (2,13)$$

где $\tilde{\omega}_{0e}^2 = -4\pi e^2 \langle v_e^3 \rangle \int \frac{dp}{v} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \beta}$. Заметим, что согласно выражению (2,13) поглощение волн в неизоэнтальпической плазме обусловлено тепловым движением электронов. Для частоты и декремента затухания волн получаем выражения

$$\omega = \frac{\omega_0, k \langle v_e^2 \rangle^{1/2}}{\sqrt{\omega_{-1e}^2 + k^2 \langle v_e^2 \rangle}}, \quad \gamma = \frac{\omega^3}{2\omega_{0i}} \epsilon^{1''}(\omega, k). \quad (2,14)$$

Для случая максвелловской плазмы соответствующие формулы приведены в работе¹.

В заключение кратко остановимся на понятии магнитной проницаемости плазмы. Часто говорят, что магнитная проницаемость плазмы равна единице. Однако при этом фактически не определяют понятие магнитной проницаемости. Поэтому не очень ясно, о какой величине идет речь. Магнитная проницаемость изотропной среды равна^{1,3}

$$\mu(\omega, k) = \left\{ 1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2} [\epsilon^1(\omega, k) - \epsilon^{\text{tr}}(\omega, k)] \right\}^{-1}. \quad (2,15)$$

Статическая магнитная проницаемость среды при этом определяется как предел

$$\mu_k(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{\omega/k \rightarrow 0} \mu(\omega, k).$$

Легко видеть, что величина $\mu(\omega, k)$ для изотропной плазмы отлична от единицы, в то время как величина $\mu_k(0, 0) = 1$. Ограниченность понятия магнитной проницаемости можно усмотреть из следующей формулы, имеющей место в случае максвелловской электронной плазмы:

$$\frac{\mu''(\omega, k)}{|\mu(\omega, k)|^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{0e}^2 \omega}{c^2 |k|^3} \sqrt{\frac{m_e}{\kappa T_e}} \left(1 - \frac{\omega^2 m_e}{k^2 \kappa T_e} \right) e^{-\frac{m_e \omega^2}{2k^2 \kappa T_e}}. \quad (2,16)$$

В области малых частот, когда $\omega < k \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_e}}$, мнимая часть магнитной проницаемости положительна, $\mu''(\omega, k) > 0$ (как это обычно принимается в электродинамике, пренебрегающей пространственной, дисперсией ^{7,8}).

Наоборот, в области больших частот ($\omega > k \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_e}}$), соответствующей слабой пространственной дисперсии, мнимая часть магнитной проницаемости оказывается отрицательной; $\mu''(\omega, k) < 0$. Однако этому не следует удивляться, поскольку отнюдь не мнимая часть магнитной проницаемости определяет поглощение в среде.

§ 3. АНИЗОТРОПНАЯ ПЛАЗМА В ОТСУТСТВИЕ СИЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

В отсутствие сильных полей, создаваемых внешними источниками, плазма может быть анизотропной из-за анизотропного распределения частиц по скоростям в основном состоянии. Легко представить себе большое многообразие примеров анизотропной плазмы в отсутствие сильных полей. Здесь мы рассмотрим наиболее интересный с практической точки зрения пример пучковой анизотропии плазмы. Речь идет о такой плазме, в которой наряду с тепловым движением определенная квазинейтральная группа частиц обладает направленным движением с постоянной скоростью u . При этом часто говорят о взаимодействии неограниченного квазинейтрального пучка заряженных частиц с плазмой. Тензор диэлектрической проницаемости такой плазмы может быть вычислен с помощью формулы (1,5). Однако здесь мы приведем другой метод вывода тензора диэлектрической проницаемости анизотропной плазмы, состоящей из неограниченного пучка заряженных частиц (движущаяся плазма) и покоящейся плазмы. Используя свойство аддитивности проводимости в зависимости от плотности плазмы, запишем

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) + \varepsilon_{ij}^{(2)}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ij}, \quad (3,1)$$

где $\varepsilon_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}^{(2)}(\omega, \mathbf{k})$ — соответственно тензор диэлектрической проницаемости пучка и покоящейся плазмы в лабораторной системе координат, связанной с покоящейся плазмой. Выражение для $\varepsilon_{ij}^{(2)}(\omega, \mathbf{k})$, очевидно, определяется формулами (2,1) и (2,2). Для получения диэлектрической проницаемости пучка в лабораторной системе координат используем формулы преобразования Лоренца для плотности индуцированных токов и зарядов. В результате получим ^{1,9}

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega'}{\omega} \alpha_{im} \{ \varepsilon_{mi}^{(1)'}(\omega', \mathbf{k}') - \delta_{mi} \} \beta_{lj} + \varepsilon_{ij}^{(2)}(\omega, \mathbf{k}), \quad (3,2)$$

где $\varepsilon_{ij}^{(1)'}(\omega', \mathbf{k}')$ — тензор диэлектрической проницаемости пучка в движущейся системе координат, связанной с пучком, определяемый формулами вида (2,1) и (2,2). Следует иметь в виду, что плотность частиц в движущейся системе координат определяется с учетом лоренцева сокращения объема. Величины ω' и $\mathbf{k}'$ представляют преобразованную частоту и волновой вектор

$$\omega' = \frac{\omega - u\mathbf{k}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (3,3)$$

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + u \frac{\mathbf{k} (1 - \sqrt{1 - u^2/c^2}) - \omega u/c^2}{u^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Тензоры α_{ij} и β_{ij} имеют вид

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left[\frac{u_i u_j}{u^2} (1 - \sqrt{1-u^2/c^2}) + \frac{u_i k'_j}{\omega'} \right], \quad (3,4)$$

$$\beta_{ij} = \frac{\omega'}{\omega} \delta_{ij} + \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left[\frac{u_i u_j}{u^2} (\sqrt{1-u^2/c^2} - 1) + \frac{k_i u_j}{\omega} \right].$$

В пределе нерелятивистских скоростей пучка, $u \ll c$, формулы (3,3) и (3,4) упрощаются:

$$\omega' \rightarrow \omega - \mathbf{u} \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k},$$

$$\alpha_{ij} \rightarrow \delta_{ij} + \frac{u_i k_j}{\omega'}, \quad \beta_{ij} \rightarrow \frac{\omega'}{\omega} \delta_{ij} + \frac{k_i u_j}{\omega}.$$

Для тензора диэлектрической проницаемости плазмы в этом пределе получаем

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_{ij}^{(2)}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{\omega'^2}{\omega^2} [\epsilon_{ij}^{(1)'}(\omega', \mathbf{k}) - \delta_{ij}] + \frac{k^2 u_i u_j}{\omega^2} \left(\frac{k_l \epsilon_{lm}^{(1)'}(\omega', \mathbf{k}) k_m}{k^2} - 1 \right) +$$

$$+ \frac{\omega'}{\omega} [u_i k_l \epsilon_{lj}^{(1)'}(\omega', \mathbf{k}) + u_j k_l \epsilon_{li}^{(1)'}(\omega', \mathbf{k}) - u_i k_j - u_j k_i]. \quad (3,6)$$

Выражение (3,6) легко получается также из формулы (2,5).

Характерной особенностью рассматриваемой нами анизотропной плазмы, в которой имеются пучки заряженных частиц, является неустойчивость по отношению к малым электромагнитным колебаниям системы. Как известно, движущаяся в среде заряженная частица излучает электромагнитные волны. Если в среде движется не одна, а целый пучок заряженных частиц, то в результате коллективного излучения волн частицами пучка электромагнитное поле в среде может расти со временем. Это означает, что система, состоящая из среды и пучка заряженных частиц (в нашем случае анизотропная плазма), является неустойчивой и со временем распадается.

При решении задачи о взаимодействии пучка заряженных частиц с плазмой обычно в каждом конкретном случае решают систему кинетических уравнений для плазмы и пучка. Однако в этом нет необходимости. Для этого достаточно в дисперсионное уравнение электромагнитных волн в анизотропной среде^{1,3}

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{k^2} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0 \quad (3,7)$$

подставить выражение для тензора диэлектрической проницаемости (3,2). Неустойчивым электромагнитным колебаниям системы соответствуют решения дисперсионного уравнения (3,7) с положительной мнимой частью $\text{Im } \omega(\mathbf{k}) > 0$, которую также называют инкрементом нарастания волн в плазме. При отсутствии сильных полей дисперсионное уравнение (3,7) для рассматриваемой нами анизотропной плазмы распадается на два уравнения:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon^{(2)\text{tr}}(\omega, k) - \frac{\omega'^2}{c^2} [\epsilon^{(1)'\text{tr}}(\omega', k') - 1] = 0, \quad (3,8)$$

$$\left\{ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon^{(2)\text{tr}}(\omega, k) - \frac{\omega'^2}{c^2} [\epsilon^{(1)'\text{tr}}(\omega', k') - 1] \right\} [\epsilon^{(2)1}(\omega, k) + \epsilon^{(1)1}(\omega', k') - 1]$$

$$- \frac{k^2 u^2 - (\mathbf{u} \mathbf{k})^2}{c^2 (1 - u^2/c^2)} \left[\epsilon^{(1)1}(\omega', k') - 1 + \frac{\omega'^2}{c^2 k'^2} \left(\epsilon^{(1)'\text{tr}}(\omega', k') - \epsilon^{(1)1}(\omega', k') \right) \right] \times$$

$$\times \left[\epsilon^{(2)1}(\omega, k) - 1 + \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \left(\epsilon^{(2)\text{tr}}(\omega, k) - \epsilon^{(2)1}(\omega, k) \right) \right] = 0. \quad (3,9)$$

Первое из этих уравнений — аналог дисперсионного уравнения поперечных волн (в отсутствие пучка оно переходит в уравнение для поперечных волн), а второе — аналог уравнения продольных волн в плазме. Можно показать, что уравнение (3,8) имеет лишь такие решения, которые соответствуют затухающим колебаниям системы¹. Интересуясь только неустойчивыми колебаниями, ниже мы займемся анализом уравнения (3,9). При этом для простоты ограничимся случаем нерелятивистских скоростей пучка $u \ll c$ *). Уравнение (3,9) в этом пределе принимает вид

$$\varepsilon^{(1)1}(\omega - \mathbf{uk}, k) + \varepsilon^{(2)1}(\omega, k) - 1 = 0. \quad (3,10)$$

В первую очередь появление неустойчивых колебаний, очевидно, следует ожидать в той области частот ω ($\omega' = \omega - \mathbf{uk}$), в которой мнимые части величин $\varepsilon^{(1)1}(\omega', k)$ и $\varepsilon^{(2)1}(\omega, k)$ пренебрежимо малы по сравнению с их действительными частями. Именно в этой области частот ω и ω' в пучке и покоящейся плазме существуют слабо затухающие продольные волны, возбуждение которых и может привести к неустойчивости системы. Такое положение имеет место в области высоких частот, когда тепловым движением частиц можно пренебречь, а также в неизотермической плазме в области частот $k\langle v_i \rangle \ll \omega$, $\omega' \ll k\langle v_e \rangle$, когда существенно тепловое движение электронов. Выражения вида (2,6) и (2,12) для пучка и покоящейся плазмы определяют все многообразие неустойчивых колебаний системы в отсутствие внешнего магнитного поля. При этом можно получить как высокочастотные неустойчивости, соответствующие возбуждению электронных колебаний, так и низкочастотные неустойчивости, соответствующие возбуждению плазменного звука в системе.

В области высоких частот ω и ω' , когда тепловым движением частиц можно пренебречь, уравнение (3,10) приобретает вид

$$1 - \frac{\omega_{01}^2}{(\omega - \mathbf{uk})^2} - \frac{\omega_{02}^2}{\omega^2} = 0, \quad (3,11)$$

где ω_{01} и ω_{02} характеризуют плотности пучка и плазмы соответственно **). В случае малых плотностей пучка, когда $\omega_{01} \ll \omega_{02}$, из уравнения (3,11) находим

$$\omega = \mathbf{uk} \pm \omega_{01} \left(1 - \frac{\omega_{02}^2}{(\mathbf{uk})^2} \right)^{-1/2}. \quad (3,12)$$

Отсюда видно, что при $|\mathbf{uk}| < \omega_{02}$ колебания плазмы становятся неустойчивыми. Максимальная неустойчивость имеет место при $|\mathbf{uk}| \sim \omega_{02}$ и соответствует возбуждению высокочастотных электронных колебаний в покоящейся плазме, описываемых дисперсионным уравнением (2,9).

В случае, когда плотности пучка и плазмы сравнимы ($\omega_{01} \sim \omega_{02}$), неустойчивым высокочастотным колебаниям системы соответствуют следующие решения уравнения (3,11):

$$\omega = \mathbf{uk} \frac{1 \pm i \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}}{1 + \left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} \right)^2}, \quad (3,12')$$

справедливые в области $|\mathbf{uk}| \ll \omega_{01,2}$.

Рассмотрим теперь случай, когда холодный пучок движется в неизотермической горячей плазме. Пренебрегая тепловым движением частиц

*) О взаимодействии релятивистского пучка с плазмой см. работу¹.

**) Ниже всюду индекс 1 относится к пучку, а индекс 2 к плазме.

в пучке, учтем тепловое движение электронов в покоящейся плазме. При этом будем считать выполненными неравенства

$$\omega' \gg k \langle v_{e,i} \rangle_1, \quad k \langle v_i \rangle_2 \ll \omega \ll k \langle v_e \rangle_2.$$

Уравнение (3,10) в этом случае принимает вид

$$1 + \frac{\omega_{-1e2}^2}{k^2 \langle v_e^2 \rangle_2} - \frac{\omega_{0i2}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{0i1}^2}{(\omega - uk)^2} = 0. \quad (3,13)$$

В случае малых плотностей пучка находим

$$\omega = uk \pm \omega_{0i} \left(1 + \frac{\omega_{-1e2}^2}{k^2 \langle v_e^2 \rangle_2} - \frac{\omega_{0i2}^2}{(uk)^2} \right)^{-1/2}. \quad (3,14)$$

Отсюда следует, что колебания системы становятся неустойчивыми при условии $1 + \frac{\omega_{-1e2}^2}{k^2 \langle v_e^2 \rangle_2} < \frac{\omega_{0i2}^2}{(uk)^2}$.

Легко видеть, что эти неустойчивости соответствуют возбуждению низкочастотных (звуковых) колебаний в покоящейся плазме, описываемых дисперсионным уравнением (2,14), причем они могут иметь место и при скоростях пучка, меньших тепловой скорости электронов в покоящейся плазме.

В заключение рассмотрим случай, когда пучок, представляющий собой неизотермическую плазму, движется также в неизотермической покоящейся плазме. Тепловым движением ионов как в пучке, так и в покоящейся плазме пренебрежем и будем считать выполненными неравенства

$$k \langle v_i \rangle_1 \ll \omega' \ll k \langle v_e \rangle_1, \\ k \langle v_i \rangle_2 \ll \omega \ll k \langle v_e \rangle_2.$$

Дисперсионное уравнение (3,10) в этом случае следует записывать в следующем виде:

$$1 + \frac{\omega_{-1e1}^2}{k^2 \langle v_e^2 \rangle_1} + \frac{\omega_{-1e2}^2}{k^2 \langle v_e^2 \rangle_2} - \frac{\omega_{0i2}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{0i1}^2}{(\omega - uk)^2} = 0. \quad (3,15)$$

В случае малых плотностей пучка приближенное решение уравнения (3,15) имеет вид

$$\omega = uk \pm \omega_{0i1} \left(1 + \frac{\omega_{-1e2}^2}{k^2 \langle v_e^2 \rangle_2} - \frac{\omega_{0i2}^2}{(uk)^2} \right)^{-1/2}. \quad (3,16)$$

При условии $1 + \frac{\omega_{-1e2}^2}{k^2 \langle v_e^2 \rangle_2} < \frac{\omega_{0i2}^2}{(uk)^2}$ выражение (3,16) описывает неустой-

чивые колебания, соответствующие возбуждению низкочастотных волн в покоящейся плазме. В рассматриваемом случае тепловое движение электронов в пучке не играет существенной роли. Напротив, при сравнимых плотностях пучка и плазмы характер возбуждения волн существенно зависит от теплового движения электронов в пучке. Действительно, неустойчивым колебаниям системы при этом соответствуют решения вида

$$\omega = uk \left(1 \pm i \frac{\omega_{0i1}}{\omega_{0i2}} \right) \left(1 + \frac{\omega_{0i1}^2}{\omega_{0i2}^2} \right)^{-2}, \quad (3,17)$$

справедливые в области $1 + \frac{\omega_{-1e2}^2}{k^2 \langle v_e^2 \rangle_2} + \frac{\omega_{-1e1}^2}{k^2 \langle v_e^2 \rangle_1} \ll \frac{\omega_{0i2}^2}{(uk)^2}$. Легко видеть, что

эти неустойчивости являются следствием возбуждения низкочастотных (звуковых) волн во всей системе в целом.

Рассмотренные выше неустойчивости можно назвать гидродинамическими, так как они не связаны с мнимой частью диэлектрической проницаемости и могут быть описаны с помощью уравнений двухжидкостной и одножидкостной гидродинамик плазмы, не учитывающих диссипативные процессы. Не следует думать, что при условиях, когда гидродинамические неустойчивости отсутствуют, электромагнитные колебания плазмы устойчивы. В этих условиях решения дисперсионного уравнения (3,10) при пренебрежении мнимыми частями $\epsilon^{(1)1*}(\omega', k)$ и $\epsilon^{(2)1*}(\omega, k)$ действительны. Учет мнимых частей этих величин приводит к следующему выражению для декремента затухания (или инкремента нарастания) электромагнитных волн в плазме:

$$\gamma = \frac{\text{Im} [\epsilon^{(1)1}(\omega - uk, k) + \epsilon^{(2)1}(\omega, k)]}{\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} [\epsilon^{(1)1}(\omega - uk, k) + \epsilon^{(2)1}(\omega, k)]}. \quad (3,18)$$

При $\gamma > 0$ электромагнитные волны затухают, а при $\gamma < 0$ — нарастают со временем, и система является неустойчивой. Эти неустойчивости, существенно зависящие от мнимой части тензора диэлектрической проницаемости, называют кинетическими. Не вдаваясь в подробный анализ кинетических неустойчивостей плазмы*), заметим лишь, что согласно формулам (2,3), (2,6), (2,12) и (2,13) величины $\text{Im} \epsilon^1(\omega, k)$ и $\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \epsilon^1(\omega, k)$

при $\omega > 0$ положительны и являются нечетными функциями частоты. Отсюда следует, что величина γ , определенная соотношением (3,18), может стать отрицательной лишь в области частот $\omega \leq ku$, т. е. когда скорость пучка больше или порядка фазовой скорости волны.

Из приведенного выше краткого анализа взаимодействия пучка заряженных частиц малой плотности с плазмой следует, что возбуждение электромагнитной волны в плазме происходит в том случае, когда скорость пучка порядка фазовой скорости волны. Следствием этого является наличие двух областей неустойчивости: высокочастотной, соответствующей возбуждению электронных колебаний, и низкочастотной, соответствующей возбуждению звука в плазме.

4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В предшествующих двух параграфах рассматривались электромагнитные свойства плазмы в отсутствие сильных полей. В реальных условиях плазма часто находится в достаточно сильном магнитном поле. Поэтому к исследованию такой плазмы мы теперь и перейдем. Начнем рассмотрение со случая, когда функции распределения частиц по скоростям $f_{0\alpha}(\mathbf{p})$ являются изотропными. При этом тензор диэлектрической проницаемости плазмы (1,6) можно преобразовать к виду ^{1,10}

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} \sum_m \pi_{ij}^{(m)} \times \\ \times \left\{ \frac{P}{\omega - m\Omega_{\alpha} - k_z v_z} - i\pi\delta(\omega - m\Omega_{\alpha} - k_z v_z) \right\}, \quad (4,1)$$

*) Подробности см. в работе ⁴⁰.

где

$$\pi_{ij}^{(m)} = \begin{pmatrix} v_{\perp}^2 \left(m \frac{J_m}{b_a} \right)^2, & i v_{\perp}^2 \left(m \frac{J_m}{b_a} \right) J'_m, & v_{\perp} v_z m \frac{J_m^2}{b_a}, \\ -i v_{\perp}^2 \left(m \frac{J_m}{b_a} \right) J'_m, & v_{\perp}^2 (J'_m)^2, & -i v_{\perp} v_z J_m J'_m, \\ v_{\perp} v_z m \frac{J_m^2}{b_a}, & i v_{\perp} v_z J_m J'_m, & v_z^2 J_m^2 \end{pmatrix}$$

Здесь J_m и J'_m — функция Бесселя m -го порядка и ее производная, причем их аргумент равен

$$b_a = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_a}.$$

В качестве независимых осей координат приняты $(x, y, z) = \left(\frac{[B[kB]]}{kB^2}, \frac{[Bk]}{kB}, \frac{B}{B} \right)$, причем величины $k_{\perp}$ и $v_{\perp}$ — проекции соответствующих векторов на плоскость, перпендикулярную к вектору B .

Исследованию электромагнитных свойств магнитоактивной плазмы посвящено большое число работ (см. ¹ и цитированную там литературу). Одно из наиболее интересных явлений в магнитоактивной плазме состоит в магнитотормозном поглощении электромагнитных волн. В работах Кудрявцева и Трубникова ¹¹⁻¹³ было показано, что магнитотормозное излучение и поглощение плазмы существенно как для энергетического баланса горячей плазмы, так и для распределения частиц по скоростям.

Ниже мы рассмотрим электромагнитные свойства магнитоактивной плазмы при весьма общих предположениях о виде функций распределения частиц по скоростям и укажем, в каких случаях можно определить функции распределения из экспериментов по поглощению электромагнитных волн в плазме.

Далее мы будем в основном интересоваться нерелятивистской плазмой, когда

$$\frac{k \langle v_a \rangle}{\omega} = n \frac{\langle v_a \rangle}{c} \ll 1,$$

где n — показатель преломления. Однако для правильного описания поглощения волн с фазовыми скоростями, сравнимыми со скоростью света, для антиэрмитовской части тензора диэлектрической проницаемости будем пользоваться точными релятивистскими формулами. При этом ограничении исследование дисперсионного уравнения электромагнитных волн

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0 \quad (4,2)$$

все еще остается сложным, так как в нем существенными оказываются как диагональные, так и все недиагональные члены тензора диэлектрической проницаемости. Однако в условиях, когда тепловое движение является малым эффектом или, наоборот, является определяющим, положение значительно упрощается. Действительно, в двух предельных случаях, когда

$$\frac{k_z \langle v_a \rangle}{\omega - m \Omega_a} = \frac{\omega}{\omega - m \Omega_a} \frac{n \langle v_a \rangle}{c} \cos \vartheta \ll 1 \quad (4,2a)$$

или когда

$$\frac{k_z \langle v_a \rangle}{\omega - m\Omega_a} = \frac{\omega}{\omega - m\Omega_a} \frac{n \langle v_a \rangle}{c} \cos \vartheta \gg 1, \quad (4,26)$$

при исследовании уравнения (4,2) можно пользоваться следующим выражением для тензора диэлектрической проницаемости¹⁰:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^s + \varepsilon_{ij}^a = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (4,3)$$

где ε_{ij}^s и ε_{ij}^a — соответственно эрмитовская и антиэрмитовская части тензора диэлектрической проницаемости. В рассматриваемом случае нерелятивистской плазмы $\left(\Omega_a = \frac{e_a B}{m_a c}\right)$ и при условии (4,2а) из выражения (4,1) получаем*)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^s &= 1 - \sum_a \frac{\omega_{0a}^2}{\omega^2 - \Omega_a^2} - \sum_a \sum_{m>1} \frac{\omega_{m-1,a}^2 \langle v_a^{2m-2} \rangle}{\omega(\omega - m\Omega_a)} \left(\frac{k_\perp}{\Omega_a}\right)^{2m-2} \frac{m^2}{2^m m! (2m-1)!!}, \\ g^s &= - \sum_a \frac{\omega_{0a}^2 \Omega_a}{\omega(\omega^2 - \Omega_a^2)} - \sum_a \sum_{m>1} \frac{\omega_{m-1,a}^2 \langle v_a^{2m-2} \rangle}{\omega(\omega - m\Omega_a)} \left(\frac{k_\perp}{\Omega_a}\right)^{2m-2} \frac{m^2}{2^m m! (2m-1)!!}, \\ \varepsilon_2^s &= 1 - \sum_a \frac{\omega_{1a}^2}{\omega^2} - \sum_a \sum_{m>0} \frac{\omega_{ma}^2 \langle v_a^{2m} \rangle}{\omega(\omega - m\Omega_a)} \left(\frac{k_\perp}{\Omega_a}\right)^{2m} \frac{m^2}{2^m m! (2m+1)!!}, \end{aligned} \right\} \quad (4,4)$$

где

$$\omega_{ma}^2 = - \frac{4\pi e_a^2}{2m+3} \frac{1}{\langle v^{2m} \rangle} \int d\mathbf{p} v^{2m+2} \frac{\partial f_{0a}}{\partial \beta_a},$$

$$\langle v_a^{2m} \rangle = \int d\mathbf{p} v^{2m} f_{0a}.$$

Для равновесной максвелловской плазмы имеем

$$\omega_{ma}^2 = \frac{4\pi N_a e_a^2}{m_a},$$

$$\langle v_a^{2m} \rangle = (2m+1)!! \left(\frac{\kappa T_a}{m_a}\right)^m.$$

Члены, учитывающие пространственную дисперсию в формулах (4,4), существенны лишь вблизи резонансных частот $\omega \sim m\Omega_a$. В обратном предельном случае, когда выполняется условие (4,2б), при $m > 1$ для эрмитовской части диэлектрической проницаемости справедливо выражение, получаемое из (4,4) в пределе $k_\perp = 0$. Вблизи первой же линии поглощения $m = 1$ имеем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^s &= 1 - \frac{\omega_{0a}^2}{2\omega(\omega + \Omega_a)}, \\ g^s &= - \frac{\omega_{0a}^2}{2\omega(\omega + \Omega_a)} + \frac{\omega_{0e}^2}{\omega\Omega_e} \delta_{ai}, \\ \varepsilon_2^s &= 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4,5)$$

*) Формулы (4,4) не учитывают поперечного эффекта Доплера, а поэтому справедливы при $\omega - m\Omega_a \ll m\Omega_a \langle v_a^2 \rangle / c^2$. О диэлектрической проницаемости в обратном предельном случае см. работу¹⁰.

При вычислении антиэрмитовской части тензора диэлектрической проницаемости, определяющей форму линий магнитотормозного поглощения, проводить разложение по степеням k_z (условие (4,2а)) или по k_z^{-1} (условие (4,2б)) нельзя, так как будет потеряна необходимая информация о форме линий поглощения в плазме. Используя лишь разложение по степеням $k_\perp$, из формулы (4,1) получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\epsilon_1^a}{g^a} \right) &= -i \sum_a \frac{8\pi^3 e_a^2 m_a^2}{\omega} \sum_{m \neq 0} \left(\frac{1}{|m|} \right) \frac{1}{2^{2|m|}} \left(\frac{k_\perp}{\Omega_a} \right)^{2|m|-2} \frac{(k_z^2 c^2 - \omega^2)^{|m|}}{|k_z|^2 m_1 + 1 [(|m|-1)!]^2} I_{ma}, \\ \epsilon_2^a &= -i 8\pi^3 e^2 \omega m_e^2 \sum_{m \neq 0} \frac{1}{2^{2|m|}} \left(\frac{k_\perp}{\Omega_e} \right)^{2|m|} \frac{(k_z^2 c^2 - \omega^2)^{|m|}}{|k_z|^2 m_1 + 1 [(|m|)!]^2} I_{1m} - \\ &\quad - i \frac{8\pi^3 e^2 \omega}{|k_z|^2 c^4} \left\{ \begin{array}{ll} \int_{\mathcal{E}_{1e}}^\infty d\mathcal{E} \mathcal{E}^2 \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathcal{E}} & \text{при } \omega^2 < k_z^2 c^2, \\ 0 & \text{при } \omega^2 > k_z^2 c^2. \end{array} \right. \quad (4,6) \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} I_{ma} &= \begin{cases} \theta(m) \int_{\mathcal{E}_{-a}^{(m)}}^{\mathcal{E}_{+a}^{(m)}} d\mathcal{E} \frac{\partial f_{0a}}{\partial \mathcal{E}} \left[\left(\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{+a}}{m_a c^2} \right) \left(\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{-a}}{m_a c^2} \right) \right]^{|m|} & \text{при } \omega^2 < k_z^2 c^2, \\ \int_{\mathcal{E}_{-a}^{(m)}}^\infty d\mathcal{E} \frac{\partial f_{0a}}{\partial \mathcal{E}} \left[\left(\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{+a}}{m_a c^2} \right) \left(\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{-a}}{m_a c^2} \right) \right]^{|m|} & \text{при } \omega^2 > k_z^2 c^2, \\ 0 & \text{при } \omega^2 > m^2 \Omega_a^2 + k_z^2 c^2; \end{cases} \\ I_{1m} &= \begin{cases} \theta(m) \int_{\mathcal{E}_{-1e}^{(m)}}^{\mathcal{E}_{+e}^{(m)}} d\mathcal{E} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathcal{E}} \left[\left(\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{+e}}{m_e c^2} \right) \left(\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{-e}}{m_e c^2} \right) \right]^{|m|} \left(\frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} - \frac{m \Omega_e}{\omega} \right)^2 & \text{при } \omega^2 < k_z^2 c^2, \\ \int_{\mathcal{E}_{-e}^{(m)}}^\infty d\mathcal{E} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathcal{E}} \left[\left(\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{+e}}{m_e c^2} \right) \left(\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{-e}}{m_e c^2} \right) \right]^{|m|} \left(\frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} - \frac{m \Omega_e}{\omega} \right)^2 & \text{при } \omega^2 > k_z^2 c^2, \\ 0 & \text{при } \omega^2 > m^2 \Omega_e^2 + k_z^2 c^2; \end{cases} \\ \mathcal{E}_{1e} &= \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c^2}}}, \quad \theta(m) = \begin{cases} 1 & \text{при } m > 0, \\ 0 & \text{при } m < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{\pm a}(m) = \frac{m_a c^2 (m^2 \Omega_a^2 + k_z^2 c^2)}{m \omega \Omega_a \mp \sqrt{k_z^2 c^2 (m^2 \Omega_a^2 + k_z^2 c^2 - \omega^2)}}.$$

Заметим, что вклад ионных членов в выражение для ϵ_2^a мал. Поэтому в формуле (4,6) мы ограничились учетом лишь электронных членов. В случае чисто перпендикулярного распространения волн формулы (4,6) существенно упрощаются.

Имеем

$$\varepsilon_1^a = g^a = \begin{cases} -i \sum_a 16\pi^3 \Omega_a^3 m_a^2 e_a^2 \sum_{m>0} \left(\frac{m_a c}{\omega}\right)^{2m+3} \frac{k^{2m-2}}{2^m m! (2m+1)!} \times \\ \times \left(1 - \frac{\omega^2}{m^2 \Omega_a^2}\right)^{m+\frac{1}{2}} f'_{0a} \left(m \Omega_a \frac{m_a c^2}{\omega}\right) & \text{при } \omega < m \Omega_a, \\ 0 & \text{при } \omega > m \Omega_a; \end{cases} \quad (4,7)$$

$$\varepsilon_2^a = \begin{cases} -i 16\pi^3 \Omega_e^3 m_e^2 e^2 \sum_{m>0} \left(\frac{m_e c}{\omega}\right)^{2m+5} \frac{k^{2m}}{2^m m! (2m+3)!} \times \\ \times \left(1 - \frac{\omega^2}{m^2 \Omega_e^2}\right)^{m+\frac{3}{2}} f'_{0e} \left(m m_e c^2 \frac{\Omega_e}{\omega}\right) & \text{при } \omega < m \Omega_e, \\ 0 & \text{при } \omega > m \Omega_e. \end{cases}$$

Полученные формулы для антиэрмитовской части диэлектрической проницаемости являются релятивистскими, поэтому они пригодны для описания поглощения волн с фазовыми скоростями, сравнимыми со скоростью света. В области нерелятивистских температур плазмы в выражениях для ε_2^a , I_{ma} и I_{1m} следует ограничиваться старшими членами по $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_{\pm a}(m)$. Это соответствует учету старших членов разложения по степеням $\langle v_a^2 \rangle / c^2$. В случае нерелятивистской плазмы имеем

$$\left(\varepsilon_1^a\right) = i \sum_a \frac{8\pi^3 e_a^2 m_a}{\omega |k_z|} \sum_{m \neq 0} \left(\frac{-1}{2}\right)^{|m|} \binom{|m|}{m} \left(\frac{k_{\perp}}{\Omega_a \sqrt{m_a}}\right)^{2|m|-2} F_{|m|a} \left(\frac{m_a (\omega - m \Omega_a)^2}{2k_z^2}\right),$$

$$\varepsilon_2^a = i \frac{8\pi^3 e^2 m_e^2}{\omega |k_z|^3} \sum_m \left(-\frac{1}{2}\right)^{|m|} \frac{(\omega - m \Omega_e)^2}{|m|!} \left(\frac{k_{\perp}}{\Omega_e \sqrt{m_e}}\right)^{2|m|} F_{|m|e} \left(\frac{m_e (\omega - m \Omega_e)^2}{2k_z^2}\right), \quad (4,8)$$

где функция $F_{|m|a}(x)$ определена соотношением

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial x^{|m|}} F_{|m|a}(x) = f_{0a}(x).$$

Для нерелятивистской максвелловской плазмы $F_{|m|a}(\mathcal{E}) = (-1)^{|m|} (\kappa T_a)^{|m|} f_{0a}(\mathcal{E})$.

После получения общих формул для тензора диэлектрической проницаемости исследуем распространение электромагнитных волн в магнитоактивной плазме. Подставляя диэлектрическую проницаемость (4,3) в уравнение (4,2), получим следующие уравнения для обыкновенной и необыкновенной волн в плазме:

$$n^2 = \frac{(\varepsilon_1^2 - g^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \sin^2 \vartheta + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mp \sqrt{(\varepsilon_1^2 - g^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 \sin^4 \vartheta + 4g^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \vartheta}}{2(\varepsilon_1 \sin^2 \vartheta + \varepsilon_2 \cos^2 \vartheta)}. \quad (4,9)$$

В тех областях частот, в которых антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости мала по сравнению с эрмитовской, поглощение волн является относительно слабым. Это имеет место при выполнении условия (4,2а), когда антиэрмитовская часть диэлектрической проницаемости экспоненциально мала, а также при условии (4,2б) для $m > 1$, когда отношение антиэрмитовской части к эрмитовской порядка $\left(\frac{n \langle v_a \rangle}{c}\right)^{2|m|-1}$. В этих областях частот в первом приближении в уравнениях (4,9) при определении показателей преломления волн антиэрмитовской частью $\varepsilon_{ij}^a(\omega, \mathbf{k})$ можно пренебречь. При учете малой антиэрмитов-

ской части $\epsilon_{ij}^a(\omega, \mathbf{k})$ с точностью до линейных членов с помощью уравнения (4,9) коэффициенты поглощения волн выражаются через $\epsilon_{ij}^a(\omega, \mathbf{k})$. Согласно формулам (4,6) — (4,8) $\epsilon_{ij}^a(\omega, \mathbf{k})$ в свою очередь выражается через функции распределения частиц по скоростям. Поэтому эксперименты по измерению коэффициентов поглощения волн в принципе позволяют восстановить функции распределения частиц в плазме. Заметим при этом, что такое восстановление возможно лишь при $n^2 > 0$, т. е. в области прозрачности среды.

В области частот, определяемой условием (4,2б), при $m = 1$, антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости больше эрмитовской. Это приводит к тому, что поглощение электромагнитной волны происходит на длине порядка длины волны. Поэтому для корректного рассмотрения электромагнитных волн в плазме в этой области частот, соответствующей области аномального скин-эффекта, следует решать граничную задачу ^{1, 5, 6}.

В области высоких частот ($\omega \gg \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \Omega_i$) движением ионов в плазме можно пренебречь и рассматривать плазму как электронную. В формулах (4,4) — (4,8) при этом следует учитывать лишь электронные члены. В случае электронной плазмы выражения показателей преломления для коэффициентов поглощения волн, распространяющихся под углом к магнитному полю, весьма громоздки ¹⁰ и приводить их здесь нецелесообразно. Приведем лишь формулы для углов $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. При $\vartheta = 0$ для обыкновенной и необыкновенной волн получаем

$$n_{1,2}^2 = \epsilon_1 \mp g, \quad \kappa_{1,2} = \frac{-i(\epsilon_1^a \mp g^a)}{2n_{1,2} - \frac{\partial \epsilon_1}{\partial n}(1 \mp 1)}. \quad (4,10)$$

При $\vartheta = \pi/2$ имеем

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \epsilon_2, & \kappa_1 &= \frac{-i\epsilon_2^a}{2n_1 - \frac{\partial \epsilon_2}{\partial n}}, \\ n_2^2 &= \epsilon_1 - \frac{g^2}{\epsilon_1}, & \kappa_2 &= \frac{-i\epsilon_1^a \left(1 - \frac{g}{\epsilon_1}\right)^2}{2n_2 - \frac{\partial \epsilon_1}{\partial n} \left(1 - \frac{g}{\epsilon_1}\right)^2}. \end{aligned} \quad (4,11)$$

Заметим, что формулы (4,10) и (4,11) для коэффициентов поглощения κ справедливы лишь в тех областях частот, где $n^2 > 0$.

Для обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся под углом $\vartheta = 0$ к магнитному полю и в области частот, определяемой условием (4,2а), вблизи первой резонансной линии поглощения имеем

$$n_{1,2}^2 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega(\omega \pm \Omega_e)}, \quad \kappa_{1,2} = \frac{-i(\epsilon_1^a \mp g^a)}{2n_{1,2}}. \quad (4,12)$$

Отсюда следует, что для обыкновенной волны $n_1^2 > 0$ при $\omega_{0e}^2 < 2\Omega_e^2$, т. е. в случае достаточно разреженной плазмы, а для необыкновенной волны $n_2^2 > 0$ при $\omega < \Omega_e$. Именно в этих условиях формулы (4,12) могут быть использованы для восстановления функции распределения электронов в плазме. Заметим при этом, что в случае $\vartheta = 0$ для антиэрмитовской части тензора диэлектрической проницаемости можно пользоваться

нерелятивистскими формулами (4,8):

$$\left(\frac{\epsilon_1^a}{g^a} \right) = -i \frac{4\pi^3 e^2 m_e c}{\omega^2 |n|} \left[F_{1e} \left(\frac{m_e c^2 (\omega - \Omega_e)^2}{2\omega^2 n^2} \right) \pm F_{1e} \left(\frac{m_e c^2 (\omega + \Omega_e)^2}{2\omega^2 n^2} \right) \right]. \quad (4,13)$$

Учет релятивистских эффектов теплового движения электронов в рассматриваемом случае приведет к несущественным поправкам. Наоборот, для волн, распространяющихся под углом $\vartheta = \pi/2$ к магнитному полю, поглощение целиком обусловлено релятивистским эффектом теплового движения электронов. При нерелятивистском рассмотрении поглощение волн в плазме при $\vartheta = \pi/2$ полностью отсутствует, так как $\epsilon_{ij}^a(\omega, \mathbf{k}) = 0$. Вблизи первой резонансной линии поглощения для обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся под углом $\vartheta = \pi/2$ к магнитному полю, получаем

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}}{1 + \frac{\langle v_z^2 \rangle}{c^2} \frac{\omega_{0e}^2 \omega}{\Omega_e^2 (\omega - \Omega_e)}}, \quad \kappa_1 = \frac{-in_1 \epsilon_2^a}{2 \left(1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} \right)}, \\ n_2^2 &= \frac{1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \left(2 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} \right)}{1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}}, \quad \kappa_2 = \frac{-i \epsilon_1^a}{2n_2} \left(1 + \frac{\Omega_e}{\omega} \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2 - \omega_{0e}^2} \right), \end{aligned} \quad (4,14)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_1^a = g^a &= \begin{cases} -i \frac{8}{3} \frac{\pi^3 \Omega_e^3 m_e^2 c^5}{\omega^5} \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_e^2} \right)^{3/2} f'_{0e} \left(m_e c^2 \frac{\Omega_e}{\omega} \right) & \text{при } \omega < \Omega_e, \\ 0 & \text{при } \omega > \Omega_e; \end{cases} \\ \epsilon_2^a &= \begin{cases} -i \frac{8}{15} \frac{\pi^3 \Omega_e^3 m_e^2 c^5}{\omega^5} \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_e^2} \right)^{5/2} f'_{0e} \left(m_e c^2 \frac{\Omega_e}{\omega} \right) & \text{при } \omega < \Omega_e, \\ 0 & \text{при } \omega > \Omega_e. \end{cases} \end{aligned}$$

Из этих формул следует, что при $\omega \sim \Omega_e$ показатель преломления обыкновенной волны мал и меняет знак. Для необыкновенной волны $n_2^2 > 0$ лишь в случае разреженной плазмы, когда $\omega_{0e}^2 < 2\Omega_e^2$.

Для того чтобы из экспериментов по измерению коэффициентов поглощения волн можно было восстановить функцию распределения электронов, необходимо наличие заметного поглощения в плазме. При нерелятивистском рассмотрении электромагнитные волны, распространяющиеся под углом $\vartheta = \pi/2$ к магнитному полю, в плазме не поглощаются. Однако учет релятивистских эффектов теплового движения частиц даже в области нерелятивистских температур приводит к значительному поглощению волн. Так, например, в максвелловской плазме при $\omega = \Omega_e/2$, $T_e \sim 10^9$, $B \sim 10^4$, $N \sim 10^{13}$, $n_{1,2} \sim 1$. При этом $\kappa_1 \sim 10^{-3}$, а $\kappa_2 \sim 10^{-2}$, т. е. обыкновенная волна полностью поглощается на длине $\delta \sim 100$ см, а необыкновенная — на длине $\delta \sim 10$ см (длина волны при этом $\lambda \sim 1$ см). Заметим, что магнитотормозное поглощение, описываемое формулами (4,13), при условии ¹⁰

$$10^{33} e \frac{10^{10}}{T_e} \gg NT_e$$

преобладает над поглощением, обусловленным столкновением частиц в плазме. При $T_e \gtrsim 3 \cdot 10^8$ это условие хорошо выполняется в широкой области изменения величин B и N ($B \sim 10^3 \div 10^5$, $N \sim 10^{13} \div 10^{15}$).

Исследование распространения электромагнитных волн в области частот, определяемой условием (4,2а) при $m > 1$, с точки зрения определе-

ния функции распределения электронов в нерелятивистской плазме интереса не представляет. Дело в том, что в этой области частот антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости наряду с экспоненциально малым множителем содержит множитель порядка $\left(\frac{\langle v_e \rangle}{c}\right)^{2m}$. Поэтому магнитотормозное поглощение волн в плазме в этой области частот практически всегда пренебрежимо по сравнению с поглощением, обусловленным столкновениями частиц.

До сих пор мы говорили об областях частот, определяемых условием (4,2а). При выполнении условия (4,2б), как уже отмечалось выше, с помощью формул (4,9) — (4,11) имеет смысл рассматривать волны вблизи резонансных частот с $m > 1$, используя при этом для эрмитовской части тензора диэлектрической проницаемости выражение

$$\epsilon_1^2 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \quad g^2 = -\frac{\omega_0^2 \Omega_e}{\omega(\omega^2 - \Omega_e^2)}, \quad \epsilon_2^2 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}. \quad (4,15)$$

Особый интерес представляет область частот вблизи второй резонансной линии поглощения. В этой области частот антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости мала по сравнению с эрмитовской и отличается всего лишь на величину $n \frac{\langle v_e \rangle}{c}$. Поэтому следует ожидать достаточно интенсивное поглощение волн в плазме. Действительно, при $\omega = 2\Omega_e$ согласно формулам (4,9) и (4,15) электромагнитные волны могут распространяться лишь в достаточно разреженной плазме, в которой $\omega_{0e}^2 \leq 4\Omega_e^2$. При этом магнитотормозное поглощение становится преобладающим над столкновительным поглощением, если выполняется условие ¹⁰

$$0,1N \ll B T_e^2.$$

Это условие хорошо выполняется в широкой области изменения величин N , T_e и B как в лабораторной плазме, так и в ионосферной ¹⁰ (F -слой ионосферы). В плазме, в которой $N \sim 10^{13}$, $T_e \sim 10^7$, $B \sim 10^4$ для обеих волн $n \sim 1$, а $\kappa \sim 0,01$, т. е. они полностью поглощаются на длине $\delta \sim 10$ см.

Перейдем теперь к рассмотрению электромагнитных волн в области частот, близких к ионным резонансным частотам $\omega \sim m\Omega_i$. Исследование распространения электромагнитных волн в плазме в области ионных циклотронных частот при выполнении условий (4,2а) и (4,2б) упрощается благодаря тому, что имеет место неравенство $\epsilon_1^2 - g^2 \ll \epsilon_1 \epsilon_2$. Учитывая это, из дисперсионного уравнения (4,9) получаем следующие уравнения для обыкновенной и необыкновенной волн:

$$n_1^2 = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 (1 + \cos^2 \vartheta)}{\epsilon_1 \sin^2 \vartheta + \epsilon_2 \cos^2 \vartheta}, \quad n_2^2 = \frac{\epsilon_1^2 - g^2}{\epsilon_1 (1 + \cos^2 \vartheta)}. \quad (4,16)$$

В компоненту ϵ_1 тензора диэлектрической проницаемости, а также в компоненту g^2 при этом входят лишь ионные члены; компонента g^2 наряду с ионными членами содержит слагаемое $\frac{\omega_{0e}^2}{\omega \Omega_e}$, обусловленное движением электронов ¹⁴. Наконец, для компоненты ϵ_2 в области частот ионного циклотронного резонанса справедливо выражение (см. формулы (4,8))

$$\epsilon_2 = -\frac{\omega_e^2}{\omega^2} + i \frac{8\pi^3 e^2 m_e^2}{\omega^{-1} |k_z|^3} f_{0e} \left(\frac{m_e \omega^2}{2k_z^2} \right). \quad (4,17)$$

Уравнение (4,13) легко исследовать для всех углов ϑ . В области частот $\omega \sim \Omega_i$ при условии (4,2а) получаем следующие выражения для

показателей преломления волн:

$$n_1^2 = \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\frac{\omega_{0e}^2}{\omega_{0i}^2} \frac{\Omega_i^2 - \omega^2}{\omega^2} \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}, \quad n_2^2 = -\frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} \frac{1}{1 + \cos^2 \vartheta}. \quad (4,18)$$

Отсюда видно, что $n_2^2 < 0$, т. е. необыкновенная волна вблизи первой резонансной частоты ионов $\omega \sim \Omega_i$ в плазме распространяться не может. Что касается обыкновенной волны, то для нее $n_1^2 > 0$ при $\tan^2 \vartheta < \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} \frac{\Omega_i^2 - \omega^2}{\omega^2}$. Это, очевидно, имеет место при $\omega < \Omega_i$ и для всех углов ϑ , не слишком близких к $\pi/2$. Для коэффициента поглощения волны при этом получаем

$$\kappa_1 = \frac{n_1^2}{2(1 + \cos^2 \vartheta)} \left[\frac{-i\varepsilon_1^a \cos^2 \vartheta}{\left(\frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2}\right)^2} + \frac{-i\varepsilon_2^a \sin^2 \vartheta}{\left(\frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}\right)^2} \right]. \quad (4,19)$$

Так как ε_1^a непосредственно выражается через функцию распределения ионов, то измерения величины κ при $\vartheta = 0$ позволяют восстановить функцию распределения ионов в плазме. Заметим, что для ионов практически всегда можно пренебречь релятивистскими эффектами и для ε^a пользоваться формулой (4,8). В достаточно горячей плазме магнитотормозное поглощение волн ионами плазмы может стать значительным. Так, например, в максвелловской плазме при $T_i \sim 10^7$, $B \sim 10^4$, $N \sim 10^{14}$ для волны, распространяющейся под углом $\vartheta = 0$, вблизи первой резонансной частоты $n_1 \sim 100$, а $\kappa_1 \sim 1$, т. е. такая волна полностью поглощается ионами плазмы на длине $\delta \sim 100$ см (при этом длина волны $\lambda \sim 1$ см)*.

Вблизи ионных резонансных частот с $m > 1$ при выполнении условия (4,2а) антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости (4,8) наряду с экспоненциально малым членом содержит малый множитель порядка $\left(\frac{\langle v_i \rangle}{c}\right)^{2m}$. Поэтому магнитотормозное поглощение оказывается всегда меньше столкновительного.

В области частот, определяемой условием (4,2б), наибольший интерес, так же как и в электронной плазме, представляет область $\omega \sim 2\Omega_i$. В этой области частот в плазме, в которой $\omega_{0i}^2 > 3\Omega_i^2$, величины ε_1^a , g^a и ε_2^a отрицательны, а поэтому $n_1^2 < 0$, т. е. обыкновенная волна в плазме распространяться не может. В разреженной же плазме, в которой $\omega_{0i}^2 < 3\Omega_i^2$, имеем $n_1 \sim 1$, а $\kappa_1 \sim \frac{\langle v_i \rangle}{c}$. Что же касается необыкновенной волны, то для нее получаем

$$n_2^2 = \frac{\Omega_i^2 \omega^2 - (\omega_{0i}^2 + \Omega_i^2)^2}{\Omega_i^2 (\omega^2 - \Omega_i^2 - \omega_{0i}^2) (1 + \cos^2 \vartheta)}, \quad \kappa_2 = \frac{-i\varepsilon_1^a (\omega \Omega_i + \Omega_i^2 + \omega_{0i}^2)^2 (\omega - \Omega_i)^2}{2n_2 (1 + \cos^2 \vartheta) \Omega_i^2 (\omega^2 - \Omega_i^2 - \omega_{0i}^2)^2}. \quad (4,20)$$

Отсюда следует, что $n_2^2 > 0$ при $\omega_{0i}^2 > 3\Omega_i^2$. В достаточно плотной плазме магнитотормозное поглощение, описываемое формулой (4,20), может стать значительным и превысить столкновительное поглощение в плазме¹⁴. Так, например, при $T_i \sim 10^7$, $N \sim 10^{14}$, $B \sim 10^4$ имеем $n_2 \sim 100$, $\kappa_2 \sim 10$. Такая волна полностью поглощается на длине $\delta \sim 10$ см (при этом

*) Подробнее о поглощении волн в области частот ионного циклотронного резонанса см. ¹⁴.

длина волны порядка $\lambda \sim 1$ см) и может быть использована для нагрева ионов в современных лабораторных установках.

Все изложенное выше основывалось на малости параметра $n \frac{\langle v_a \rangle}{c} \ll 1$. Но, как показали Днестровский и Костомаров ¹⁵, в области больших показателей преломления это условие может нарушаться. В условиях, когда $n \frac{\langle v_a \rangle}{c} \sim 1$, аналитическое исследование электромагнитных волн практически невозможно и приходится пользоваться численными методами решения дисперсионных уравнений ¹⁵. Однако в пределе $n \frac{\langle v_a \rangle}{c} \gg 1$ положение существенно упрощается благодаря тому, что в выражении для тензора диэлектрической проницаемости (4,1) можно воспользоваться асимптотическим представлением функций Бесселя при больших аргументах. Как показано в работе ¹⁶, указанное неравенство может выполняться вблизи резонансных частот $\omega \sim m\Omega_a$ при условии (4,2а) как для электронов, так и для ионов, причем в очень узком интервале углов около $\vartheta \sim \pi/2$. Тензор диэлектрической проницаемости максвелловской электронно-ионной плазмы в области прозрачности имеет вид

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (4,21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= 1 - \frac{m^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_{0a}^2 \Omega_a^3}{\omega(\omega - m\Omega_a)} \left(\frac{m_a}{k_{\perp}^2 T_a} \right)^{3/2} \left[1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \beta_{ma} e^{-\frac{\beta_{ma}^2}{2}} \right], \\ \epsilon_{22} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_{0a}^2 \Omega_a}{\omega(\omega - m\Omega_a)} \left(\frac{m_a}{k_{\perp}^2 T_a} \right)^{1/2} \left[1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \beta_{ma} e^{-\frac{\beta_{ma}^2}{2}} \right], \\ \epsilon_{33} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_{0a}^2 \Omega_a}{\omega(\omega - m\Omega_a)} \left(\frac{m_a}{k_{\perp}^2 T_a} \right)^{1/2} \left[1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \beta_{ma} e^{-\frac{\beta_{ma}^2}{2}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4,22)$$

Дисперсионное уравнение (4,2) в рассматриваемом случае распадается на три уравнения, представляющие собой дисперсионные уравнения соответственно для обыкновенной, необыкновенной и плазменной волн:

$$n^2 \sin^2 \vartheta = \epsilon_{33}, \quad n^2 = \epsilon_{22}, \quad \epsilon_{11} = 0. \quad (4,23)$$

Отсюда находим показатели преломления и коэффициенты поглощения электромагнитных волн, находящихся в резонансе с гирочастотой одного определенного сорта частиц:

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \left(\frac{\omega_{0a}^2 \Omega_a c \sqrt{m_a}}{\sqrt{2\pi} \omega^2 (m\Omega_a - \omega) \sqrt{T_a} \sin^3 \vartheta} \right)^{1/3}, \quad \kappa_1 \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}} n_1 \beta_{ma} e^{-\frac{\beta_{ma}^2}{2}}, \\ n_2 &= \left(\frac{\omega_{0a}^2 \Omega_a c \sqrt{m_a}}{\sqrt{2\pi} \omega^2 (m\Omega_a - \omega) \sqrt{T_a} \sin \vartheta} \right)^{1/3}, \quad \kappa_2 \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}} n_2 \beta_{ma} e^{-\frac{\beta_{ma}^2}{2}}, \\ n_3 &= \left(\frac{\omega_{0a}^2 \Omega_a^3 c^3 m_a^{3/2} m^2}{\sqrt{2\pi} \omega^4 (\omega - m\Omega_a) T_a^{3/2} \sin^3 \vartheta} \right)^{1/3}, \quad \kappa_3 \approx \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} n_3 \beta_{ma} e^{-\frac{\beta_{ma}^2}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (4,24)$$

где

$$\beta_{ma} = \frac{\omega - m\Omega_a}{n |\cos \vartheta| \omega} \frac{c \sqrt{m_a}}{\sqrt{T_a}} \gg 1.$$

Таким образом, в рассматриваемом пределе обыкновенная и необыкновенная волны в плазме могут распространяться при $\omega < m\Omega_a$, а плазменная при $\omega > m\Omega_a$. Этот результат согласуется с качественным исследованием, проведенным в работе¹⁵.

Особого рассмотрения заслуживает область частот $\omega \ll \Omega_i$. В этой области частот в плазме распространяются так называемые магнитогидродинамические волны. Можно рассматривать два случая: 1) холодная плазма, когда тепловым движением частиц можно пренебречь (предел двухжидкостной гидродинамики), и 2) неизотермическая плазма, когда существен учет теплового движения электронов (предел одножидкостной гидродинамики)¹⁷. В первом случае антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости (4,8), описывающая поглощение волн в бесстолкновительной плазме, экспоненциально мала, а для эрмитовской части $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ имеем

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (4,25)$$

где

$$\varepsilon_1^2 = 1 + \frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_i^2}, \quad \varepsilon_2^2 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} \approx -\frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}.$$

Из дисперсионного уравнения (4,2), которое в этом пределе распадается на три уравнения,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta + \varepsilon_2 \cos^2 \vartheta = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \sin^2 \vartheta + \varepsilon_2 \cos^2 \vartheta}, \quad (4,26)$$

получаем следующий спектр магнитогидродинамических и альвеновских волн (в гидродинамике принято частоту и декремент затухания выражать через волновой вектор):

$$\omega^2 = \frac{k^2 v_A^2}{1 + \frac{v_A^2}{c^2}}, \quad \gamma = -i \frac{\omega \varepsilon_1^a}{\varepsilon_1^3}, \quad (4,27a)$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_{0i}^2} \operatorname{ctg}^2 \vartheta, \quad \gamma = -i \frac{\omega^3}{2\omega_{0e}^2} \frac{(\varepsilon_1^a \sin^2 \vartheta + \varepsilon_2^a \cos^2 \vartheta)}{\cos^2 \vartheta}, \quad (4,27b)$$

$$\omega^2 = \frac{k^2 v_A^2 \cos^2 \vartheta}{1 + \frac{v_A^2}{c^2} + \frac{k^2 c^2}{\omega_{0e}^2} \left(\sin^2 \vartheta + \frac{v_A^2}{c^2} \right)},$$

$$\gamma = -i \frac{(k^2 c^2 \sin^2 \vartheta - \omega^2 \varepsilon_2^a) \varepsilon_1^a + (k^2 c^2 \cos^2 \vartheta - \omega^2 \varepsilon_1^a) \varepsilon_2^a}{(k^2 c^2 \cos^2 \vartheta - \omega^2 \varepsilon_1^a) \frac{\omega_{0e}^2}{2\omega^3} - \omega \varepsilon_1^a \varepsilon_2^a}. \quad (4,27b)$$

Здесь $v_A = \frac{c\Omega_i}{\omega_0}$ — альвеновская скорость; величины ε_1^a и ε_2^a определяются формулами (4,8), причем основной вклад дают электронные члены. Следует заметить, что согласно требованию $\omega \ll \Omega_i$ решение (4,27b) пригодно лишь в очень узком интервале углов около $\vartheta \sim \pi/2$.

В заключение рассмотрим электромагнитные волны в неизотермической плазме, в которой средняя тепловая энергия электронов значительно больше энергии ионов, в области низких частот $k \sin \vartheta \langle v_i \rangle \ll \omega \ll k \cos \vartheta \langle v_e \rangle$, $\omega \ll \Omega_i \ll \omega_{0i}$.

Из общего выражения для тензора диэлектрической проницаемости (4,1) в рассматриваемом пределе получаем¹⁸

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (4,28)$$

где для эрмитовской и антиэрмитовской частей ε_{ij} справедливы выражения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^a &= \frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_i^2}, \quad \varepsilon_{11}^a = 0, \\ \varepsilon_{22}^a &= \frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_i^2}, \quad \varepsilon_{22}^a = -i \frac{\pi^2 e^2 k \sin^2 \vartheta}{\omega |\cos \vartheta|} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \beta} v^3, \\ \varepsilon_{33}^a &= -\frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{0e}^2}{k^2 \cos^2 \vartheta \langle v_e^2 \rangle}, \quad \varepsilon_{33}^a = -i \frac{2\pi^2 e^2 \omega}{k^3 |\cos^3 \vartheta|} \int d\mathbf{p} \frac{1}{v} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \beta}, \\ \varepsilon_{23}^a &= i \frac{\omega_{0i}^2}{\omega \Omega_i} \operatorname{tg} \vartheta, \quad \varepsilon_{23}^a = -\frac{\pi^2 e^2 \sin \vartheta}{k \cos^2 \vartheta \Omega_e} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \beta} v. \end{aligned}$$

Заметим, что вклад в антиэрмитовскую часть $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ дают лишь электронные члены, т. е. поглощение волн обусловлено электронами плазмы.

Дисперсионное уравнение (4,2) в рассматриваемом случае распадается на следующие два уравнения:

$$k^2 \cos^2 \vartheta - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{11} = 0, \quad \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{22} \right) \varepsilon_{33} + \varepsilon_{23}^2 \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \quad (4,29)$$

Отсюда получаем спектр магнитогидродинамических и магнитозвуковых волн, распространяющихся в неизотермической плазме в пределе одножидкостной гидродинамики,

$$\omega^2 = k^2 v_A^2 \cos^2 \vartheta, \quad \gamma = 0, \quad (4,30a)$$

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} k^2 \{ v_A^2 + v_{zv}^2 \pm \sqrt{(v_A^2 + v_{zv}^2)^2 - 4v_A^2 v_{zv}^2 \cos^2 \vartheta} \},$$

$$\gamma_{\pm} = -i \frac{\omega_{\pm}}{2k^2} \frac{1}{\varepsilon_{33}^a} \left\{ \left(k^2 - \frac{\omega_{\pm}^2}{c^2} \varepsilon_{22}^a \right) \varepsilon_{33}^a - \frac{\omega_{\pm}^2}{c^2} \varepsilon_{33}^a \varepsilon_{22}^a + 2\varepsilon_{23}^a \frac{\omega_{\pm}^2}{c^2} \varepsilon_{23}^a \right\}, \quad (4,30b)$$

где $v_{zv} = \frac{\omega_{0i}}{\omega_{0e}} \sqrt{\langle v_i^2 \rangle}$ — скорость звука в неизотермической плазме. В случае максвелловской плазмы формулы (4,30) принимают известный вид¹⁷⁻¹⁸.

§ 5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМОЙ

При наличии внешнего магнитного поля характер пучковых неустойчивостей в плазме становится столь многообразным, что сколько-нибудь подробное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки настоящего обзора*). Для иллюстрации простоты общей теории, изложенной в § 3,

*) Взаимодействию пучка заряженных частиц с магнитоактивной плазмой посвящено огромное число работ. В ближайшее время из печати выходит книга Я. Б. Файнберга²⁰, посвященная этому вопросу, где можно найти подробную библиографию (см. также 1,40).

здесь мы рассмотрим лишь низкочастотные неустойчивости, соответствующие возбуждению магнитогидродинамических и магнитозвуковых волн нерелятивистским пучком в плазме, тем более, что этот вопрос был решен в самое последнее время^{21, 22}.

Неустойчивые решения дисперсионного уравнения (3,7) в первую очередь следует искать в той области частот ω и ω' , в которой поглощение невелико, а поэтому антиэрмитовские части тензоров диэлектрической проницаемости пучка $\epsilon_{ij}^{(1)'}(\omega', \mathbf{k}')$ и плазмы $\epsilon_{ij}^{(2)}(\omega, \mathbf{k})$, ответственные за поглощение электромагнитных волн, пренебрежимо малы по сравнению с их эрмитовскими частями. К этой области частот относятся, с одной стороны, колебания, для которых несущественны тепловые движения частиц (это высокочастотные электронные колебания, электронные и ионные циклотронные волны, а также низкочастотные колебания, соответствующие пределу двухжидкостной гидродинамики), а с другой стороны, низкочастотные колебания неизотермической плазмы, существенно зависящие от теплового движения электронов и соответствующие пределу одножидкостной гидродинамики плазмы¹⁷. В первой области частот тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ определяется выражениями (4,3) — (4,5), во второй — выражением (4,28). Выражения указанного вида для диэлектрических проницаемостей пучка и плазмы позволяют найти все многообразие неустойчивых колебаний в системе при наличии внешнего магнитного поля.

Как уже указывалось выше, при малой плотности пучка возбуждение электромагнитной волны в плазме происходит лишь в том случае, когда скорость пучка порядка фазовой скорости волны. Поэтому, не прибегая к исследованию дисперсионного уравнения (3,7), можно указать условия, налагаемые на скорость пучка u (при которых колебания в плазме будут неустойчивыми), исходя из результатов предыдущего параграфа *). Легко понять, что эти условия имеют вид $u \sim c/n$, где n — показатель преломления возбуждаемой в плазме волны. Определения частот и инкрементов нарастания колебаний, так же как и исследование случая сравнимых плотностей пучка и плазмы, возможны лишь при помощи решения дисперсионного уравнения (3,7).

Перейдем теперь к более детальному исследованию возбуждения магнитогидродинамических и магнитозвуковых волн ($\omega, \omega' \ll \Omega_i$) в плазме нерелятивистским пучком заряженных частиц. Ограничимся случаем, когда тепловым движением частиц в пучке можно пренебречь, т. е. когда $\omega' \gg k \langle v_a \rangle_1$.

В пределе двухжидкостной гидродинамики, когда тепловым движением частиц как в пучке, так и в покоящейся плазме можно пренебречь, дисперсионное уравнение (3,7) распадается на два уравнения:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{(\omega - uk)^2}{\omega^2} \frac{\omega_{0i1}^2}{\Omega_i^2} + \frac{\omega_{0i2}^2}{\Omega_i^2} \right] = 0, \quad (5,1)$$

$$\left\{ k^2 \cos^2 \vartheta - \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{(\omega - uk)^2}{\omega^2} \frac{\omega_{0i1}^2}{\Omega_i^2} + \frac{\omega_{0i2}^2}{\Omega_i^2} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ k^2 \sin^2 \vartheta - \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{0e2}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{0e1}^2}{(\omega - uk)^2} + \frac{k^2 \sin^2 \vartheta u^2}{\omega^2} \frac{\omega_{0i1}^2}{\Omega_i^2} \right] \right\} - \\ - \left[k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{uk \sin \vartheta (\omega - uk)}{c^2} \frac{\omega_{0i1}^2}{\Omega_i^2} \right]^2 = 0. \quad (5,2)$$

*) Результаты § 3 сохраняются при движении пучка вдоль магнитного поля. В случае однородной плазмы только такая постановка задачи имеет физический смысл.

Из уравнения (5,1) получаем

$$\omega = \frac{v_{A2}^2}{v_{A1}^2 + v_{A2}^2} \left\{ \mathbf{uk} \pm \sqrt{(\mathbf{uk})^2 \left(1 - \frac{v_{A1}^2 + v_{A2}^2}{v_{A2}^2} \right)^2 + k^2 v_{A1}^2 \frac{v_{A1}^2 + v_{A2}^2}{v_{A2}^2}} \right\}, \quad (5,3)$$

где v_{A1} и v_{A2} — альвеновские скорости соответственно в пучке и в покоящейся плазме. Из выражения (5,3) следует, что при

$$(\mathbf{uk})^2 \left(\frac{v_{A1}^2 + v_{A2}^2}{v_{A2}^2} - 1 \right) > k^2 v_{A1}^2 \frac{v_{A1}^2 + v_{A2}^2}{v_{A2}^2} \quad (5,4)$$

колебания системы становятся неустойчивыми. Эти неустойчивости соответствуют возбуждению магнитогидродинамических волн, описываемых дисперсионным уравнением (4,27а). Легко видеть, что при $\mathbf{uk} = 0$, т. е. для волн, распространяющихся поперек магнитного поля, указанные неустойчивости в плазме отсутствуют. В случае малой плотности пучка ($v_{A1} \gg v_{A2}$) условие (5,4) принимает вид $(\mathbf{uk})^2 > k^2 v_{A2}^{21, 22}$.

Исследование уравнения (5,2) для произвольных углов ϑ и произвольных плотностей пучка весьма громоздко. При $\vartheta = \pi/2$ уравнение (5,2) имеет лишь такие решения, которые соответствуют затухающим колебаниям в системе. При $\vartheta = 0$ уравнение (5,2) распадается на два уравнения, одно из которых совпадает с уравнением (5,1), а второе — с уравнением (3,11). В случае малой плотности пучка из уравнения (5,2) получаем следующее приближенное решение:

$$\omega = \mathbf{uk} \pm i \frac{\omega_{0e1}}{-c} \operatorname{ctg} \vartheta \cdot \frac{v_{A2}}{c} \sqrt{\frac{u^2 - v_{A2}^2}{2v_{A2}^2 - u^2}}, \quad (5,5)$$

которое при $v_{A2} < u < \sqrt{2} v_{A2}$ описывает неустойчивые колебания, соответствующие возбуждению магнитогидродинамических волн в покоящейся плазме.

Наконец, в случае горячей неизотермической плазмы, когда тепловым движением частиц в пучке можно пренебречь, но необходимо учитывать тепловое движение электронов в покоящейся плазме, дисперсионное уравнение (3,7) при $\vartheta = \pi/2$ имеет лишь такие решения, которые соответствуют затухающим колебаниям системы. При $\vartheta = 0$ оно распадается на два уравнения, одно из которых совпадает с уравнением (5,1) и описывает возбуждение магнитогидродинамических волн, а второе совпадает с уравнением (3,13) и описывает возбуждение плазменного звука в системе (подробно см. ²²).

§ 6. О СТОЛКНОВЕНИЯХ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ

Остановимся здесь еще на одном вопросе, когда также можно получить исчерпывающий ответ с помощью линейной электродинамики плазмы. Речь пойдет о проблеме столкновений и излучения и поглощения электромагнитных волн частицами плазмы. Фактически разделить излучение и поглощение электромагнитных волн в плазме и столкновения частиц можно лишь условно. Поэтому, строго говоря, оба процесса следует рассматривать единым образом, хотя можно указать немало примеров, где эти процессы могут быть разделены.

Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме были рассмотрены Ландау ²³. Им было принято, что столкновения электронов и ионов в плазме происходят так же, как и в вакууме. В действительности столкновения заряженных частиц в плазме отличаются от столкновений в вакууме благодаря тому, что поле заряженных частиц в плазме

вследствие поляризации среды отличается от поля частицы в пустоте. Поляризация среды описывается тензором диэлектрической проницаемости. Так, например, для поля покоящегося точечного заряда в плазме можно написать следующее выражение^{1, 3}:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int d\mathbf{k} \frac{e}{2\pi^2} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}}{k_i \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k}) k_j}. \quad (6,1)$$

Однако использование такого выражения для поля частицы при определении рассеяния двух заряженных частиц возможно лишь при условии, что одна из них бесконечно тяжелая. Учет того факта, что частицы движутся, естественно, несколько усложняет дело. Кулоновское поле нерелятивистского заряда, движущегося со скоростью $v \ll c$ в среде, определяется следующим выражением^{1, 3}:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}}{k_i \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}v, \mathbf{k}) k_j}. \quad (6,2)$$

Здесь величина $\mathbf{k}v$ играет роль частоты, а $\hbar \mathbf{k}$ — роль импульса излученной частицей электромагнитной волны (если, конечно, эти величины соответствуют области прозрачности). Отсюда следует, что при рассмотрении рассеяния нерелятивистских заряженных частиц с учетом лишь их кулоновского взаимодействия фактически приходится вычислять следующие матричные элементы*):

$$4\pi e_a e_\beta \int d\mathbf{k} \frac{\langle \mathbf{p}'_a | e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_a} | \mathbf{p}_a \rangle \langle \mathbf{p}'_\beta | e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\beta} | \mathbf{p}_\beta \rangle}{k_i \varepsilon_{ij} \left(\frac{E'_a - E_{p_a}}{\hbar}, \mathbf{k} \right) k_j}, \quad (6,3)$$

где E_{p_a} , $\mathbf{p}_a$, $\mathbf{p}_\beta$ и $E_{p'_a}$, $\mathbf{p}'_a$, $\mathbf{p}'_\beta$ — энергия и импульсы сталкивающихся частиц до и после столкновения. При вычислении матричных элементов рассеяния следует иметь в виду законы сохранения энергии и импульса.

В том случае, когда в плазме нет сильного магнитного поля и волновые функции частиц в плазме можно считать плоскими волнами, вероятность рассеяния частиц принимает вид

$$\omega_{a\beta}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}'_a) = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \frac{4\pi e_a e_\beta \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}'_a)}}{k_i \varepsilon_{ij} \left(\frac{E'_a - E_{p_a}}{\hbar}, \mathbf{k} \right) k_j}}{(p_a - p'_a)_i \varepsilon_{ij} \left(\frac{p_a^2 - p'^2_a}{2m_a \hbar}, \frac{p'_a - p_a}{\hbar} \right) (p'_a - p_a)_j} \right|^2.$$

Используя вероятность рассеяния $\omega_{a\beta}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}'_a)$, подобно тому как это сделано в работе²⁵, можно записать интеграл столкновений частиц в плазме в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_{st} = \sum_\beta \int \frac{d\mathbf{p}'_a}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{p}_\beta d\mathbf{p}'_\beta \delta(\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}'_a - \mathbf{p}'_\beta) \times \\ \times \delta \left[\frac{p'^2_a}{2m_a} - \frac{p^2_a}{2m_a} + \frac{p'^2_\beta}{2m_\beta} - \frac{p^2_\beta}{2m_\beta} \right] \omega_{a\beta}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}'_a) [f_a(\mathbf{p}'_a) f_\beta(\mathbf{p}'_\beta) - f_a(\mathbf{p}_a) f_\beta(\mathbf{p}_\beta)]. \quad (6,4)$$

*) Квантовый метод рассмотрения рассеяния частиц обладает большей наглядностью по сравнению с классическим.

В классическом пределе ($\hbar \rightarrow 0$) интеграл столкновений частиц можно свести к виду, предложенному Ландау:

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha^i} \sum_\beta \int d\mathbf{p}_\beta I_{\alpha\beta}^{ij}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\alpha^i} f_\beta - f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial p_\beta^i} \right], \quad (6,5)$$

где

$$I_{\alpha\beta}^{ij}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) = \frac{(4\pi e_\alpha e_\beta)^2 \pi}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}\mathbf{v}_\beta) \frac{k_i k_j}{|k_i \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{k}) k_j|^2}. \quad (6,6)$$

Подобный интеграл столкновений был получен в работах ряда авторов²⁵⁻²⁹. Важнейшей особенностью такого интеграла столкновений является то, что он учитывает как экранировку поля на больших расстояниях, так и излучение электромагнитных волн в плазме. Если положить $\varepsilon_{ij} \equiv \delta_{ij}$ (вакуум), выражение (6,6) переходит в известное выражение Ландау²³:

$$I_{\alpha\beta}^{ij}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) = (2\pi e_\alpha e_\beta)^2 \frac{1}{\pi} \frac{u^2 \delta_{ij} - u_i u_j}{u^3} L, \quad (6,7)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$, а $L = \int \frac{dk}{k} \approx \ln \frac{k_{\max}}{k_{\min}} = \ln \frac{Q_{\max}}{Q_{\min}}$ — так называемый кулоновский логарифм. В таком рассмотрении, естественно, отсутствует экранировка поля и интеграл по $d\mathbf{k}$ следует искусственно обрезать при малых $k \gg k_{\min}$ (что соответствует обрезанию кулоновского взаимодействия частиц на больших расстояниях $Q_{\max}$ вследствие дебаевской экранировки). Заметим, что искусственное обрезание взаимодействия приходится делать и на малых расстояниях $Q \gg Q_{\min}$ (т. е. при больших $k \leq k_{\max}$). В классическом пределе $Q_{\min} \sim \frac{e^2}{\kappa T}$, в квантовом $Q_{\min} \sim \frac{e^2}{\hbar \langle v \rangle}$. При учете поляризации среды обрезание взаимодействия частиц на больших расстояниях достигается автоматически благодаря наличию тензора диэлектрической проницаемости в формуле (6,6); на малых же расстояниях*) и в этом случае приходится вводить искусственное обрезание взаимодействия на $Q = Q_{\min}$.

Полученные выше выражения для интеграла столкновений частиц в плазме являются нерелятивистскими и не учитывают релятивистских эффектов теплового движения частиц в плазме. Для получения релятивистского выражения для интеграла столкновений вместо формулы (6,2) следует исходить из формулы

$$E_i(\mathbf{r}) = \frac{e}{2\pi^2} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)} \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c^2} A_{ij}^{-1} v_j, \quad (6,8)$$

где

$$A_{ij} = \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c} \right)^2 \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k}) - k^2 \delta_{ij} + k_i k_j,$$

представляющей собой поле релятивистской заряженной частицы, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ (см. 1, 3). При использовании выражения (6,8) для плазмы в отсутствие сильного магнитного поля интеграл столкновений запишется в виде (6,5), где²⁵

$$I_{\alpha\beta}^{ij}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) = \left(\frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{c^2} \right)^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \pi k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}\mathbf{v}_\beta) \times |v_\alpha^r A_{ie}^{-1}(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha) v_\beta^e|^2. \quad (6,9)$$

*) В квантовом выражении (6,4) расходимость при больших передаваемых импульсах (т. е. на малых расстояниях), естественно, не возникает. Об обрезании взаимодействия на малых расстояниях в классическом пределе см. работу³⁰.

В нерелятивистском пределе ($c \rightarrow \infty$) выражение (6,9) переходит в (6,6). В частном случае изотропной плазмы, когда тензор диэлектрической проницаемости имеет вид (2,1), получаем

$$I_{\alpha\beta}^{ij}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) = \frac{(4\pi e_\alpha e_\beta)^2 \pi}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{k^4} \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}\mathbf{v}_\beta) \times \\ \times \left| \frac{1}{\varepsilon^l(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha, k)} + \frac{k^2 \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\beta - (\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)^2}{(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)^2 \varepsilon^{lr}(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha, k) - k^2 c^2} \right|^2. \quad (6,10)$$

Если в этом выражении положить $\varepsilon^l = \varepsilon^{lr} = 1$ (вакуум), получим известную формулу Беляева и Будкера³¹.

Из изложенного выше следует, что излучение и поглощение электромагнитных волн в плазме последовательно включается в кинетику «столкновений» частиц. Подобное включение проводилось и ранее (см. работы 32, 33), однако при этом речь шла о плазме в состоянии, слабо отличающемся от теплового равновесия. В настоящее время все большее внимание привлекает сильно неравновесная плазма, для описания которой изложенная схема учета возбуждения колебаний и волн в плазме особенно удобна.

Аналогичное рассмотрение интеграла столкновений было проведено и для плазмы, находящейся в сильном магнитном поле 34, 35. При этом для вычисления матричных элементов рассеяния (6,3) следует пользоваться волновыми функциями заряженных частиц в сильном магнитном поле. Нерелятивистский интеграл столкновений частиц в этом случае имеет вид

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st} = \sum_{\beta m, n} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\beta z} \int_0^\infty 2\pi p_{\perp\beta} dp_{\perp\beta} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(k_z \frac{\partial}{\partial p_{\alpha z}} + \right. \\ \left. + \frac{m\Omega_\alpha}{v_{\perp\alpha}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp\alpha}} \right) \pi \delta(k_z v_{\alpha z} + m\Omega_\alpha - k_z v_{\beta z} - n\Omega_\beta) \times \\ \times \left| \frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{k_i k_j \varepsilon_{ij}(m\Omega_\alpha + k_z v_{\alpha z}, k_\perp, k_z)} \right|^2 J_m^2\left(\frac{k_\perp v_{\perp\alpha}}{\Omega_\alpha}\right) J_n^2\left(\frac{k_\perp v_{\perp\beta}}{\Omega_\beta}\right) \times \\ \times \left\{ k_z \frac{\partial}{\partial p_{\alpha z}} + \frac{m\Omega_\alpha}{v_{\perp\alpha}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp\alpha}} - k_z \frac{\partial}{\partial p_{\beta z}} - \frac{n\Omega_\beta}{v_{\perp\beta}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp\beta}} \right\} \times \\ \times f_\alpha(p_{\alpha z}, p_{\perp\alpha}) f_\beta(p_{\beta z}, p_{\perp\beta}), \quad (6,11)$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя.

В заключение укажем, что интеграл столкновений (6,5) можно записать в виде, соответствующем уравнению Фоккера-Планка:

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha^i} \left[D_{ij} \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\alpha^j} - A_i f_\alpha \right], \quad (6,12)$$

где величины D_{ij} и A_i , называемые соответственно коэффициентом диффузии и коэффициентом трения, определяются следующими выражениями:

$$D_{ij} = \sum_\beta \int d\mathbf{p}_\beta I_{\alpha\beta}^{ij}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) f_\beta, \\ A_i = \sum_\beta \int d\mathbf{p}_\beta I_{\alpha\beta}^{ij}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) \frac{\partial f_\beta}{\partial p_\beta^j}. \quad (6,13)$$

§ 7. ФЛУКТУАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПЛАЗМЕ

Теория тепловых флуктуаций в средах с пространственной дисперсией, какой, в частности, является плазма, в настоящее время может считаться разработанной *). Согласно этой теории тепловые флуктуации электродинамических величин в плазме описываются тензором диэлектрической проницаемости. Таким образом, можно сделать вывод, что тензор комплексной диэлектрической проницаемости полностью описывает все линейные электромагнитные свойства плазмы. Тем самым можно сказать, что принципиальная сторона линейной электродинамики плазмы фактически разработана. Дальнейшая задача заключается в изучении конкретных электромагнитных свойств плазмы, если задаваться той или иной функцией распределения частиц в плазме и вычислять тензор диэлектрической проницаемости. Однако в действительности такое утверждение относится лишь к равновесной плазме. В разреженной плазме, где столкновения частиц чрезвычайно редки, функция распределения длительное время может сильно отличаться от равновесной. Естественно, что применение теории тепловых флуктуаций, изложенной в обзоре ³, к такой неравновесной плазме оказывается невозможным. Поэтому в этом параграфе мы кратко изложим теорию флуктуаций в неравновесной плазме, развитой в работе ³⁶ (см. также ³⁷), и покажем, что знание лишь тензора диэлектрической проницаемости не всегда оказывается достаточным.

Введем компоненты Фурье оператора электрического поля:

$$\hat{E}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\mathbf{r} \hat{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (7,1)$$

Для определения флуктуаций электрического поля необходимо вычислить среднее квантовомеханическое значение оператора

$$\frac{1}{2} \{ \hat{E}_j(\omega, \mathbf{k}) \hat{E}_i(\omega', \mathbf{k}') + \hat{E}_i(\omega', \mathbf{k}') \hat{E}_j(\omega, \mathbf{k}) \}. \quad (7,2)$$

Для определения среднего значения оператора (7,2) достаточно знать матричные элементы оператора электрического поля, которые мы будем определять, исходя из матричных элементов оператора плотности тока частиц.

Рассмотрим случай, когда в плазме нет сильного магнитного поля и волновые функции частиц можно считать плоскими волнами. Матричный элемент плотности тока частицы α , соответствующий переходу из состояния n в состояние m , в этом случае имеет вид

$$e\alpha_{mn} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_m, \mathbf{r}) - (E_n - E_m)t] \right\}, \quad (7,3)$$

где $\mathbf{p}_n$ и E_n — импульс и энергия частицы в состоянии n , а α_{mn} — матрицы Дирака. Подставляя выражение (7,3) в уравнения Максвелла, находим матричные элементы оператора электрического поля

$$\langle m | \hat{E}_i(\omega, \mathbf{k}) | n \rangle = -\frac{4\pi i \omega}{c} e\alpha A_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \alpha_{mn}^j \times \\ \times \delta \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_m}{\hbar} \right) \delta \left(\omega - \frac{E_n - E_m}{\hbar} \right), \quad (7,4)$$

где

$$A_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - k^2 \delta_{ij} - k_i k_j.$$

*) Обзор такой теории и соответствующая библиография содержатся в работе ³ (см. также ¹).

Формула (7,4) позволяет вычислить искомое квантовомеханическое среднее значение оператора (7,2). Принимая, что функция распределения частиц α -го сорта по импульсам p_α определяется функцией $f_\alpha(p_\alpha)$, можем записать ³⁶

$$\frac{1}{2} [\hat{E}_j(\omega, \mathbf{k}) \hat{E}_i(\omega', \mathbf{k}') + \hat{E}_i(\omega', \mathbf{k}') \hat{E}_j(\omega, \mathbf{k})] = \\ = \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') (E_i E_j)_{\omega, \mathbf{k}}, \quad (7,5)$$

здесь черта сверху означает квантовомеханическое усреднение, а

$$(E_i E_j)_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha} (4\pi e_\alpha)^2 \frac{\omega^2}{c^2} A_{ie}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) A_{jr}^{*-1}(\omega, \mathbf{k}) \times \\ \times \int d\mathbf{p}_\alpha f_\alpha(p_\alpha) \left\{ \delta \left[\omega - \frac{1}{\hbar} \{E(\mathbf{p}_\alpha + \hbar \mathbf{k}) - E(\mathbf{p}_\alpha)\} \right] \times \right. \\ \times \left(\frac{c^2 p_\alpha^r (p_\alpha + \hbar \mathbf{k})^l}{E(\mathbf{p}_\alpha) E(\mathbf{p}_\alpha + \hbar \mathbf{k})} - \delta_{lr} \frac{[E(\mathbf{p}_\alpha + \hbar \mathbf{k}) - E(\mathbf{p}_\alpha)]^2 - c^2 k^2 l^2}{2E(\mathbf{p}_\alpha) E(\mathbf{p}_\alpha + \hbar \mathbf{k})} + \right. \\ \left. + \frac{c^2 p_\alpha^l (p_\alpha + \hbar \mathbf{k})^r}{E(\mathbf{p}_\alpha) E(\mathbf{p}_\alpha + \hbar \mathbf{k})} \right) + \delta \left[\omega + \frac{1}{\hbar} \{E(\mathbf{p}_\alpha - \hbar \mathbf{k}) - E(\mathbf{p}_\alpha)\} \right] \times \\ \times \left(\frac{c^2 p_\alpha^r (p_\alpha - \hbar \mathbf{k})^l}{E(\mathbf{p}_\alpha) E(\mathbf{p}_\alpha - \hbar \mathbf{k})} + \frac{c^2 p_\alpha^l (p_\alpha - \hbar \mathbf{k})^r}{E(\mathbf{p}_\alpha) E(\mathbf{p}_\alpha - \hbar \mathbf{k})} - \right. \\ \left. - \delta_{lr} \frac{[E(\mathbf{p}_\alpha - \hbar \mathbf{k}) - E(\mathbf{p}_\alpha)]^2 - c^2 l^2 k^2}{2E(\mathbf{p}_\alpha) E(\mathbf{p}_\alpha - \hbar \mathbf{k})} \right) \left. \right\}. \quad (7,6)$$

В классическом пределе при $\hbar \rightarrow 0$ отсюда получаем

$$(E_i E_j)_{\omega, \mathbf{k}} = \sum_{\alpha} \left(4\pi e_\alpha \frac{\omega}{c} \right)^2 A_{ie}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) A_{jr}^{*-1}(\omega, \mathbf{k}) \times \\ \times \int d\mathbf{p}_\alpha f_\alpha(p_\alpha) \frac{v_\alpha^l v_\alpha^r}{c^2} \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha). \quad (7,7)$$

В частном случае изотропного распределения частиц $f_\alpha(p_\alpha)$, когда тензор диэлектрической проницаемости плазмы определяется выражением (2,1), формула (7,7) принимает вид

$$(E_i E_j)_{\omega, \mathbf{k}} = \sum_{\alpha} \left(\frac{4\pi e_\alpha}{k^2} \right)^2 \int d\mathbf{p}_\alpha f_\alpha(p_\alpha) \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha) \times \\ \times \left\{ \frac{k_i k_j}{|\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})|^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^4} \frac{[\mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha]^2 (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j)}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{\text{tr}}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{k^2}{c^2}} \right\}. \quad (7,8)$$

В случае равновесного максвелловского распределения частиц $f_\alpha(p_\alpha)$ формулы (7,6)–(7,8) переходят в известные формулы теории тепловых флуктуаций^{1,3}.

Используя уравнения Максвелла, с помощью полученных формул для флуктуаций электрического поля легко получить выражения для флуктуаций магнитной индукции, электрической индукции, индуцированных в плазме плотностей заряда и тока и т. д. Приведем здесь

выражение для флуктуации силы Лоренца, действующей на частицу α -го сорта³⁶:

$$\left\{ e_{\alpha}^2 \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{B}] \right)_i \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{B}] \right)_j \right\}_{\omega, \mathbf{k}} = \sum_{\beta} \left(\frac{4\pi e_{\alpha} e_{\beta} \omega}{c^2} \right)^2 \times \\ \times \int d\mathbf{p}_{\beta} f_{\beta}(\mathbf{p}_{\beta}) \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_{\beta}) v'_{\beta} v_{\beta}^r \left\{ \delta_{is} \left[1 - \frac{\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha}}{\omega} \right] + \frac{k_i v_{\alpha}^s}{\omega} \right\} A_{sl}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \times \\ \times A_{tr}^{*-1}(\omega, \mathbf{k}) \left\{ \delta_{jl} \left[1 - \frac{\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha}}{\omega} \right] + \frac{k_j v_{\alpha}^l}{\omega} \right\}. \quad (7,9)$$

Теория линейных флуктуаций в неравновесной плазме непосредственно связана с кинетикой «столкновений» частиц в плазме (излучение и поглощение волн в плазме), а поэтому и с начавшимся в последнее время разбиваться квазилинейным подходом к плазме^{38, 39}. Действительно, сравнивая формулы (7,9), (6,9) и (6,13), коэффициенты диффузии и трения, входящие в интеграл столкновений (6,12), можно записать в виде

$$\left\{ \begin{aligned} D_{ij} &= \pi \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ e_{\alpha}^2 \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{B}] \right)_i \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{B}] \right)_j \right\}_{\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{k}}, \\ A_i &= \frac{i}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_i}{4\pi} \left\{ \varepsilon_{tr}(\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{k}) - \varepsilon_{tr}^*(\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{k}) \right\} E_r^{(\alpha)*}(\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{k}) E_l^{(\alpha)}(\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{k}), \end{aligned} \right\} \quad (7,10)$$

где

$$E_i^{(\alpha)}(\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{k}) = - \frac{4\pi i k v_{\alpha}}{c^2} e_{\alpha} A_{ij}^{-1}(\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{k}) v_j^{\alpha}$$

— поле, создаваемое частицей α , движущейся со скоростью $\mathbf{v}_{\alpha}$ в плазме. При учете лишь кулоновского поля коэффициент D_{ij} соответствует коэффициенту, полученному в работе²⁹.

В заключение приведем выражение для флуктуаций кулоновского поля в плазме, находящейся в сильном однородном магнитном поле³⁵:

$$(E_i E_j)_{\omega, \mathbf{k}} = \sum_{\alpha} \left(\frac{4\pi l e_{\alpha} \omega}{c} \right)^2 A_{il}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) A_{jr}^{*-1}(\omega, \mathbf{k}) \times \\ \times \int d\mathbf{p}_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{p}_{\alpha}) \sum_m \delta(\omega - m\Omega_{\alpha} - k_z v_z^{\alpha}) \pi_{ij}^{(m)}, \quad (7,11)$$

где $\pi_{ij}^{(m)}$ — тензор, фигурирующий в теории диэлектрической проницаемости плазмы (см. выражение (4,1)).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред, М., Госатомиздат, 1961.
2. В. Л. Гинзбург, Электромагнитные волны в плазме, М., Физматгиз, 1961.
3. А. А. Рухадзе и В. П. Силин, УФН 74, 223 (1961).
4. В. П. Силин, ЖЭТФ 41, № 3(9), 861 (1961).
5. В. П. Силин, Труды ФИАН, т. 6, 200 (1955).
6. К. Н. Степанов, ЖЭТФ 36, 1457 (1959).
7. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, М., Гостехиздат, 1946.
8. Л. Д. Ландау, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
9. А. А. Рухадзе, ЖТФ (1962).
10. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, ЖТФ 1962 г.
11. Б. А. Трубинов, в сб. «Физика плазмы», 1958 т. 3, стр. 104; т. 4, стр. 305.

12. В. С. Кудрявцев, в сб. «Физика плазмы», 1958, т. 3, стр. 114.
 13. Б. А. Трубников, В. С. Кудрявцев, Труды II Женевской конференции, Докл. советских ученых, 1959, стр. 165.
 14. Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, ЖТФ (1962).
 15. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ 40, 1404 (1961).
 16. Р. Р. Рамазашвили, А. А. Рухадзе, ЖТФ (1962) (в печати).
 17. Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, ЖЭТФ 40, 1213 (1961).
 18. К. Н. Степанов, Укр. физ. ж. 4, 678 (1959).
 19. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ 37, 635 (1959); 38, 912 (1960).
 20. Я. Б. Файнберг, Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой, М., Госатомиздат, 1962.
 21. В. П. Докучаев, ЖЭТФ 39, 413 (1960).
 22. А. И. Ахиезер, А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, ЖТФ (1962).
 23. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 7, 103 (1937).
 24. В. П. Силин, Физика металлов и металловедение 11, 805 (1961).
 25. В. П. Силин, ЖЭТФ 40, 1768 (1961).
 26. О. В. Константинов, В. И. Перель, ЖЭТФ 39, 861 (1960).
 27. R. Balescu, Phys. Fluids 3, 52 (1960).
 28. A. Leonard, Ann. Phys. 10, 390 (1959).
 29. J. Hubbard, Proc. Roy. Soc. A260, № 1300, 114 (1961).
 30. J. Hubbard, Proc. Roy. Soc. A261, № 1306, 85 (1961).
 31. С. Г. Беляев, Г. И. Будкер, ДАН СССР 107, 807 (1956).
 32. Б. И. Давыдов, в сб. «Физика плазмы», 1958, т. 1, стр. 77.
 33. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ 36, 1405 (1959).
 34. В. М. Елеонский, П. С. Зырянов, В. П. Силин, ЖЭТФ (1962).
 35. N. Rostoker, Phys. Fluids 3, 922 (1960).
 36. В. П. Силин, ЖЭТФ 41, № 3, 969 (1961).
 37. N. Rostoker, Ядерный синтез 1, 101 (1961).
 38. Ю. А. Ромапов, Г. Ф. Филиппов, ЖЭТФ 40, 123 (1961).
 39. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез 1, 82 (1961).
 40. Я. Б. Файнберг, Атомная энергия 11, 313 (1961).
-