

ЛОКАЛЬНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ТЕОРИЯ КОМПЕНСИРУЮЩЕГО ПОЛЯ

В. Б. Адамский

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Все явления природы не зависят от того, в какой инерциальной системе координат они рассматриваются. Это находит выражение в том, что уравнения, описывающие эти явления, инвариантны относительно преобразований Лоренца. Волновые функции заряженных частиц (например, электронов), как известно, комплексны. При этом лагранжиан и динамические величины инвариантны относительно преобразования $\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}$ и $\psi^* \rightarrow \psi^* e^{-i\alpha}$. Замеченная на опыте зарядовая независимость ядерных сил привела к необходимости ввести понятие изотопического спина. Математическое выражение этого факта — независимость уравнений, описывающих сильное взаимодействие относительно вращений в изотопическом пространстве. Таким образом, для современных физических теорий весьма характерно, что уравнения и динамические переменные, относящиеся к тому или иному явлению, инвариантны относительно различного рода преобразований. При этом обычно подразумевается, что параметры, определяющие преобразование, например фазовый показатель α или углы в преобразовании Лоренца, являются постоянными по всему конфигурационному пространству и, будучи однажды заданными, сохраняются на всем протяжении времени, соответствующем рассматриваемой задаче.

Предположим теперь, что мы выдвигаем более сильное требование — локальную инвариантность, т. е. требуем, чтобы параметры, которые определяют преобразование, были бы независимы в каждой точке пространства — времени. От параметров ε_i мы переходим к функциям $\varepsilon_i(x, y, z, t)$. Возможна ли такая инвариантность? Оказывается, возможна. Но при этом необходимо ввести некоторое новое компенсирующее поле, которое обеспечивает инвариантность в условиях зависимости $\varepsilon_i(x_\mu)$. Один из примеров такого компенсирующего поля общеизвестен. Это — электромагнитное поле, которое приходится ввести, если предполагать фазовый показатель α функцией координат и времени. В 1954 г. появилась работа Янга и Миллса ¹, в которой показано, что из требования инвариантности относительно локально независимых вращений в изотопическом пространстве вытекает необходимость существования некоторого 12-компонентного B -поля, являющегося 4-вектором в обычном пространстве и имеющего три изотопические компоненты. В работе Утиямы ² (1956 г.) дан общий подход к вопросу о компенсирующем поле. Именно в этой работе показано, что если имеется поле, действие которого инвариантно относительно группы преобразований, зависящей от одного или нескольких параметров α_i , то при переходе от параметров группы, являвшихся числами, к параметрам, зависящим от координат $\alpha_i \rightarrow \alpha_i(x_\mu)$, возникает необходимость в

компенсирующем поле. Утияма показал также, что гравитационное поле может быть получено как компенсирующее поле, если ввести зависимость параметров, определяющих группу Лоренца, от координат. Вводить понятие локальной инвариантности имеет смысл только для непрерывных преобразований. Дискретные преобразования типа пространственных или зарядовых отражений зависят от одного постоянного параметра, который не варьируется. Представление о компенсирующем поле было использовано Саламом и Уордом³ для введения промежуточного векторного мезона в теории слабого взаимодействия. Вопрос о месте принципа локальной инвариантности в современной теории обсуждается в работе Сакураи⁴.

§ 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Рассмотрим прежде всего общеизвестный пример с электромагнитным полем. Преобразование $\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}$, которое допускают волновые функции заряженных частиц, обычно называется калибровочным преобразованием 1-го рода. Инвариант этого преобразования есть не что иное, как заряд (электрический или барионный, т. е. ядерный). Инвариантность относительно этого преобразования обеспечивает сохранение заряда в смысле алгебраической суммы отрицательных и положительных зарядов⁵. Например, мы рассматриваем взаимодействие, в результате которого дважды заряженная частица ψ распадается на две частицы, φ_1 и φ_2 . Чтобы лагранжиан взаимодействия был калибровочно инвариантен, необходимо при замене $\psi \rightarrow \psi e^{2ie\alpha}$ произвести замену $\varphi_1^* \rightarrow \varphi_1^* e^{ie\alpha}$ и $\varphi_2^* \rightarrow \varphi_2^* e^{-ie\alpha}$, т. е. дважды заряженная частица распадается на две частицы, каждая из которых несет единичный заряд того же знака.

Заметим, что сохранение заряда обеспечивается, если фазовый множитель $e^{ie\alpha}$ считать постоянным, т. е. не зависящим от координат и времени. Но если предполагать, что выбор фазового множителя произволен в любой точке пространства — времени, т. е. $\alpha = \alpha(x, y, z, t)$, то потребуются введение некоторого компенсирующего поля, чтобы добиться локальной инвариантности лагранжиана, т. е. инвариантности, соблюдающейся независимо в каждой точке. Действительно, лагранжиан свободного электронного поля

$$L = \frac{1}{2} \bar{\psi} \left(i \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi - \frac{1}{2} \left(i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu - m \bar{\psi} \right) \psi,$$

будучи инвариантен относительно преобразования $\psi \rightarrow \psi e^{ie\alpha}$ и $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-ie\alpha}$, не сохраняет инвариантности при преобразовании $\psi \rightarrow \psi e^{ie\alpha(x_\mu)}$ и $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{ie\alpha(x_\mu)}$ из-за появления членов вида $\frac{\partial \alpha}{\partial x_\mu}$. Но лагранжиан, включающий электромагнитное поле

$$L = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2i} \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie A_\mu \right) \psi + im \bar{\psi} \psi \right] + \\ + \frac{1}{2i} \left[\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} - ie A_\mu \bar{\psi} \right) \gamma_\mu \psi - im \bar{\psi} \psi \right],$$

инвариантен относительно преобразования $\psi \rightarrow \psi e^{ie\alpha(x_\mu)}$ и $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-ie\alpha(x_\mu)}$ при одновременной замене $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial \alpha}{\partial x_\mu}$, что легко проверяется подстановкой. Здесь $F_{\mu\nu}$ — тензор напряженности электромагнитного поля. Таким образом, локальная инвариантность имеет место относительно

преобразований $\psi \rightarrow \psi e^{iea(x_\mu)}$ при одновременном калибровочном преобразовании электромагнитного поля (калибровочное преобразование 2-го рода). Заметим, что если бы лагранжиан электромагнитного поля содержал член с массой фотона $\mu^2 A^2$, то инвариантность не имела бы места.

§ 3. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛОКАЛЬНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ

а) Постановка задачи

Рассмотрим теперь, следуя работе Утиямы², ситуацию с локальной инвариантностью и компенсирующим полем в самом общем виде. Пусть имеются некоторые поля $Q^A(x)$ ($A=1, 2, \dots, N$). Индекс A может пробегать, например, значения от 1 до 4, и Q^A будут являться просто компонентами одного поля.

Введем плотность лагранжиана $L(Q^A, Q_\mu^A)$, где $Q_\mu^A = \frac{\partial Q^A}{\partial x^\mu}$, и действие $I = \int_\Omega L(Q^A, Q_\mu^A) d^4x$, Ω — некоторый произвольный 4-объем.

Мы предполагаем, что действие I остается инвариантным, когда над компонентами поля производится некоторое преобразование $S(\epsilon_\alpha)$, зависящее от n параметров ϵ_α ($\alpha=1, 2, \dots, n$). Это могут быть, например, три параметра, определяющие вращения, или шесть параметров, определяющих преобразование Лоренца,

$$Q' = S(\epsilon_\alpha) Q, \text{ или в компонентах } Q^{A'} = S_B^A(\epsilon_\alpha) Q^B. \quad (3,1)$$

Преобразование S можно разложить в ряд Тейлора по параметрам ϵ_α ,

$$Q' = \left(I + \frac{\partial S}{\partial \epsilon_\alpha} \Big|_{\epsilon_\alpha=0} \epsilon_\alpha + \dots \right) Q,$$

где I — единичное преобразование,

$$T_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \epsilon_\alpha} \Big|_{\epsilon_\alpha=0} \quad (3,2)$$

— оператор бесконечно малого преобразования, или, как его называют, инфинитезимальный оператор. Малое приращение величин Q прямо выражается через инфинитезимальные операторы, набор которых полностью определяет преобразование

$$\delta Q = T_\alpha \epsilon_\alpha Q, \text{ или в компонентах } \delta Q^A = T_{\alpha B}^A \epsilon_\alpha Q^B. \quad (3,3)$$

Из того факта, что действие I инвариантно при преобразовании $Q' = S Q$ и что эта инвариантность имеет место при произвольном объеме Ω , следует, что инвариантна также плотность лагранжиана

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial Q^A} \delta Q^A + \frac{\partial L}{\partial Q_\mu^A} \delta Q_\mu^A = 0. \quad (3,4)$$

Подставляя (3,3) в (3,4), получаем

$$\frac{\partial L}{\partial Q^A} T_{\alpha B}^A Q^B + \frac{\partial L}{\partial Q_\mu^A} T_{\alpha B}^A Q_\mu^B = 0. \quad (3,5)$$

Замечая, что второе слагаемое в (3,4) можно представить в виде

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\mu^A} \delta Q_\mu^A = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{\partial L}{\partial Q_\mu^A} \delta Q^A \right] - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial Q_\mu^A} \delta Q^A,$$

получим

$$\left\{ \frac{\partial L}{\partial Q^A} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial Q_\mu^A} \right) \right\} \delta Q^A + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{\partial L}{\partial Q_\mu^A} \delta Q^A \right] = 0. \quad (3,6)$$

Первый член обращается в нуль, потому что он представляет собой не что иное, как уравнение поля, получаемое из принципа наименьшего действия. Тогда из (3,4) следуют законы сохранения

$$\frac{\partial J_a^\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad \text{и} \quad J_a^\mu = -\frac{\partial L}{\partial Q_\mu^A} T_{aB}^A Q^B \quad (3,7)$$

можно рассматривать как вектор тока.

Предположим теперь, что параметры ε_a , определяющие преобразования, являются уже не числами, а функциями координат — времени:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a(x_\mu). \quad (3,8)$$

Тогда $\delta Q^A = \delta Q^A(x_\mu) = T_{aB}^A \varepsilon_a(x_\mu) Q^B$. При этом инфинитезимальные операторы T_{aB}^A , определяющие характер преобразования, конечно, остаются одними и теми же во всех точках пространства. Теперь в выражении для вариации лагранжиана добавляется новый член, и мы уже не можем полагать ее равной нулю:

$$\delta L \equiv \left\{ \frac{\partial L}{\partial Q^A} T_{aB}^A Q^B + \frac{\partial L}{\partial Q_\mu^A} T_{aB}^A Q_\mu^B \right\} \varepsilon_a(x_\mu) + \frac{\partial L}{\partial Q_\mu^A} T_{aB}^A Q^B \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_\mu},$$

или

$$\delta L \equiv \frac{\partial L}{\partial Q_\mu^A} T_{aB}^A Q^B \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_\mu} \quad (3,9)$$

на основании (3,5). Чтобы сохранить инвариантность лагранжиана в условиях зависимости (3,8), необходимо ввести поле

$$A^J(x_\mu), \quad J = 1, 2, \dots, M,$$

чтобы скомпенсировать дополнительный член, возникший в вариации лагранжиана (3,9). Для этого мы должны рассмотреть новый лагранжиан, включающий также и поле A^J :

$$L'(Q^A, Q_\mu^A, A^J).$$

б) Локально-инвариантный лагранжиан и трансформационные свойства A -поля

Полагаем бесконечно малое приращение поля A равным

$$\delta A^J = U_{aK}^J A^K \varepsilon_a(x_\mu) + C_{a\mu}^J \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_\mu}, \quad (3,10)$$

а бесконечно малые приращения поля Q по-прежнему равными $\delta Q = T_a^A \varepsilon_a Q$. U и C — неизвестные пока матрицы, которые подлежат определению из условия инвариантности лагранжиана L' ,

$$\delta L' \equiv \frac{\partial L'}{\partial Q^A} \delta Q^A + \frac{\partial L'}{\partial Q_\mu^A} \delta Q_\mu^A + \frac{\partial L'}{\partial A'^J} \delta A'^J \equiv 0.$$

Подставляя сюда (3,10) и собирая коэффициенты при $\varepsilon_a(x_\mu)$ и $\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_\mu}$, приравняем их нулю, так как тождество $\delta L' \equiv 0$ должно осуществляться при любом выборе $\varepsilon_a(x)$. Таким образом, получаем два соотношения:

$$\frac{\partial L'}{\partial Q^A} T_{aB}^A Q^B + \frac{\partial L'}{\partial Q_\mu^A} T_{aB}^A Q_\mu^B + \frac{\partial L'}{\partial A'^J} U_{aK}^J A^K \equiv 0, \quad (3,11)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_\mu^A} T_{aB}^A Q^B + \frac{\partial L'}{\partial A'^J} C_{a\mu}^J \equiv 0. \quad (3,12)$$

Количество уравнений (3,12) равно $4n$ (каждому из n параметров преобразования соответствуют четыре уравнения, так как $\mu = 1, 2, 3, 4$). Поэтому, чтобы зависимость лагранжиана L' от поля A , определяемая частными производными $\frac{\partial L'}{\partial A'^J}$, была однозначной, необходимо равенство $M = 4n$, где M — наибольшее значение J , т. е. равенство числа неизвестных числу уравнений.

Матрице C можно сопоставить обратную матрицу C^{-1} , которая определяется условиями

$$C_{\alpha}^{J\mu} C_{\mu K}^{-1\alpha} = \delta_K^J \quad \text{и} \quad C_{\mu J}^{-1\alpha} C_{\beta}^{J\nu} = \delta_{\beta}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\nu}.$$

Используя обратную матрицу, перейдем от A'^J к $A_{\mu}^{\alpha} = C_{\mu J}^{-1\alpha} A'^J$. Тогда $\frac{\partial L'}{\partial A'^J} = \frac{\partial L'}{\partial A_{\mu}^{\alpha}} C_{\mu J}^{-1\alpha}$. Подставив это выражение в (3,12), получим

$$\frac{\partial L'}{\partial A_{\mu}^{\alpha}} + \frac{\partial L'}{\partial Q_{\mu}^A} T_{\alpha B}^A Q^B \equiv 0. \quad (3,13)$$

Для выполнения этого тождества необходимо, чтобы поле A_{μ}^{α} содержалось в лагранжиане в комбинации

$$\nabla_{\mu} Q^A \equiv \frac{\partial Q^A}{\partial x_{\mu}} - T_{\alpha B}^A Q^B A_{\mu}^{\alpha}. \quad (3,14)$$

В этом случае действительно

$$\frac{\partial L'}{\partial A_{\mu}^{\alpha}} \equiv - \frac{\partial L'}{\partial Q_{\mu}^A} T_{\alpha B}^A Q^B.$$

При переходе от A'^J к A_{μ}^{α} формула (3,10), описывающая трансформационные свойства поля A , переходит в выражение

$$\delta A_{\mu}^{\alpha} = M_{\alpha\mu\beta}^{\alpha\nu} A_{\nu}^{\beta} \epsilon^c(x) + \frac{\partial \epsilon^{\alpha}}{\partial x_{\mu}}, \quad (3,15)$$

где

$$M_{\alpha\mu\beta}^{\alpha\nu} = C_{\mu J}^{-1\alpha} U_{cK}^J C_{\beta}^{K\nu}.$$

Теперь мы можем записать $L'(Q^A, Q_{\mu}^A, A_{\mu}^{\alpha}) = L''(Q^A, \nabla_{\mu} Q^A)$, где $\nabla_{\mu} Q^A$ определяется формулой (3,14). При этом между производными возникают соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial Q^A} &= \frac{\partial L''}{\partial Q^A} \Big|_{\nabla Q = \text{const}} - \frac{\partial L''}{\partial \nabla_{\mu} Q^B} \Big|_{Q = \text{const}} T_{\alpha A}^B A_{\mu}^{\alpha}, \\ \frac{\partial L'}{\partial Q_{\mu}^A} &= \frac{\partial L''}{\partial \nabla_{\mu} Q^A} \Big|_{Q = \text{const}}, \quad \frac{\partial L'}{\partial A'^J} = - \frac{\partial L''}{\partial \nabla_{\mu} Q^A} \Big|_{Q = \text{const}} T_{\beta B}^A Q^B C_{\nu J}^{-1\beta}. \end{aligned}$$

Если подставить эти выражения в (3,11), перейти от A'^J к A_{α}^{μ} и использовать соотношения (3,15), то получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial L''}{\partial Q^A} \Big|_{\nabla Q = \text{const}} T_{\alpha B}^A Q^B + \frac{\partial L''}{\partial \nabla_{\mu} Q^A} \Big|_{Q = \text{const}} T_{\alpha B}^A \nabla_{\mu} Q^B + \\ + \frac{\partial L''}{\partial \nabla_{\mu} Q^A} \Big|_{Q = \text{const}} Q^B A_{\nu}^{\beta} \{ [T_{\alpha} T_{\beta}]_B^A \delta_{\mu}^{\nu} - S_{\alpha\mu\beta}^{\alpha\nu} T_{\alpha B}^A \} = 0. \end{aligned} \quad (3,16)$$

Здесь

$$[T_{\alpha} T_{\beta}]_B^A = T_{\alpha c}^A T_{\beta B}^c - T_{\beta c}^A T_{\alpha B}^c.$$

Так как лагранжиан $L''(Q^A, \nabla_\mu Q^A)$ получается из первоначального лагранжиана $L'(Q^A, Q_\mu^A)$ путем замены производной $\frac{\partial Q^A}{\partial x_\mu}$ на «инвариантную» производную

$$\nabla_\mu Q^A = \frac{\partial Q}{\partial x_\mu} - T_{\alpha B}^A Q^B A_\mu^\alpha,$$

подобно тому как вводят электромагнитное поле с помощью перехода $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} - i e A_x$, то согласно тождеству (3,5) первые два члена в (3,16) исчезают, а последние два члена можно записать в виде

$$\frac{\partial L}{\partial \nabla_\mu Q^A} \bigg|_{Q=\text{const}} Q^B A_\nu^\beta \{f_{\alpha\beta}^d \delta_\mu^\nu - M_{c\mu\beta}^{dv}\} T_{dB}^A = 0. \quad (3,17)$$

Здесь мы использовали известные из теории групп перестановочные соотношения между инфинитезимальными операторами:

$$[T_a T_b]^A_B = T_{ac}^A T_{bB}^c - T_{bc}^A T_{aB}^c = f_{ab}^c T_{cB}^A. \quad (3,18)$$

При этом числа f_{bc}^a обладают свойствами

$$f_{ab}^m f_{ma}^c + f_{bc}^m f_{ma}^c + f_{ca}^m f_{mb}^c \equiv 0, \quad f_{ab}^c = -f_{ba}^c. \quad (3,19)$$

Из тождества (3,17) можно выразить неизвестную матрицу M через коэффициенты f , которые определены для любого преобразования

$$M_{ab}^{cv} = \delta_\mu^v f_{ab}^c. \quad (3,20)$$

Итак, мы получили матрицу M , которая определяет законы преобразования A -поля в зависимости от преобразований, которым подвергается поле Q . Теперь бесконечно малое приращение поля A принимает вид

$$\delta A_\mu^a = f_{bc}^a A_\mu^c \varepsilon^b(x) + \frac{\partial \varepsilon^a}{\partial x}. \quad (3,21)$$

Кроме того, мы получим правило, согласно которому переход к локально-инвариантному лагранжиану совершается путем замены обычной производной на инвариантную (3,14).

в) Общие свойства свободного компенсирующего поля

Теперь мы можем исследовать свойства свободного A -поля. Обозначим лагранжиан свободного поля L_0 :

$$L_0(A_\mu^a, A_{\mu,\nu}^a), \quad A_{\mu,\nu}^a = \frac{\partial A_\mu^a}{\partial x_\nu}.$$

Рассмотрим следствия инвариантности лагранжиана L_0 под действием преобразований (3,15), совершаемых над полем A :

$$\delta L_0 = \frac{\partial L_0}{\partial A_\mu^a} \delta A_\mu^a + \frac{\partial L_0}{\partial A_{\mu,\nu}^a} \delta A_{\mu,\nu}^a = 0.$$

Подставляя

$$\delta A_\mu^a = f_{bc}^a A_\mu^c \varepsilon^b(x) + \frac{\partial \varepsilon^a}{\partial x_\mu},$$

$$\delta A_{\mu,\nu}^a = f_{bc}^a A_{\mu,\nu}^c \varepsilon^b(x) + f_{bc}^a A_\mu^c \frac{\partial \varepsilon^b}{\partial x_\nu} + \frac{\partial^2 \varepsilon^a}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$$

и собирая коэффициенты при ε и его производных, получим

$$\frac{\partial L_0}{\partial A_\mu^a} f_{bc}^a A_\mu^c + \frac{\partial L_0}{\partial A_{\mu,\nu}^a} f_{bc}^a A_{\mu\nu}^c \equiv 0, \quad (3,22)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial A_\mu^a} + \frac{\partial L_0}{\partial A_{\nu,\mu}^b} f_{bc}^a A_\mu^c \equiv 0, \quad (3,23)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial A_{\mu,\nu}^a} + \frac{\partial L_0}{\partial A_{\nu,\mu}^a} \equiv 0. \quad (3,24)$$

Чтобы выполнялось последнее тождество, производные от A должны входить в L_0 в виде комбинации

$$A_{[\mu,\nu]}^a = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu^a - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu^a = A_{\nu,\mu}^a - A_{\mu,\nu}^a.$$

Так как $\frac{\partial L_0}{\partial A_{\mu,\nu}^a} = -\frac{\partial L_0}{\partial A_{\nu,\mu}^a} = -\frac{\partial L_0}{\partial A_{[\mu,\nu]}^a}$, то (3,23) можно записать в форме $\frac{\partial L_0}{\partial A_\mu^a} \equiv \frac{\partial L_0}{\partial A_{[\nu,\mu]}^c} f_{ab}^c A_\nu^b$; отсюда следует, что $A_{[\mu,\nu]}^a$ входит в L_0 в комбинации с выражением $\frac{1}{2} f_{bc}^a [A_\mu^b A_\nu^c - A_\nu^b A_\mu^c]$ в виде

$$F_{\mu\nu}^a = \frac{\partial A_\nu^a}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu^a}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} f_{bc}^a [A_\mu^b A_\nu^c - A_\nu^b A_\mu^c]. \quad (3,25)$$

Используя (3,23) и соотношения (3,24), можно показать, что лагранжиан свободного поля L_0 является функцией только $F_{\mu\nu}^a$.

Можно заметить аналогию между величиной $F_{\mu\nu}^a$ и напряженностью поля в электродинамике. Эта величина инвариантна относительно преобразования (3,15)

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \delta_\mu^\nu f_{ab}^c A_\nu^b \varepsilon^c(x) + \frac{\partial \varepsilon^a}{\partial x_\mu},$$

которое, по аналогии с электродинамикой, можно назвать калибровочным. Лагранжиан свободного поля A , являющийся функцией только $F_{\mu\nu}^a$, не содержит члена с массой покоя, который нарушал бы калибровочную инвариантность. Таким образом, A -поле не должно обладать массой покоя.

Можно также ввести вектор

$$J_a^\mu = - \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla_\mu Q^A} T_{aB}^A Q^B + \frac{\partial L_0}{\partial F_{\mu\nu}^b} f_{ac}^b A_\nu^c \right) \quad (3,26)$$

и показать, что он подчиняется законам сохранения вида

$$\frac{\partial J_a^\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (3,27)$$

В отсутствие компенсирующего поля выражение (3,26) переходит в вектор тока (3,7). Заметим, что свойства свободного компенсирующего поля зависят не от инфинитезимальных операторов, осуществляющих преобразование над исходным полем, а от перестановочных соотношений между ними, которые, как известно, одинаковы для всех представлений одной и той же группы. Это значит, что компенсирующее поле одно и то же для разных полей, подвергаемых действию одного и того же преобразования.

§ 4. ГРУППА ФАЗОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Вернемся опять к примеру электромагнитного поля и получим его как частный случай компенсирующего поля, возникающего при фазовых преобразованиях. Рассмотрим заряженное поле, описываемое функцией ψ и комплексно-сопряженной функцией ψ^* . Лагранжиан инвариантен относительно фазового преобразования, т. е. относительно преобразования

$$\psi' = \psi e^{ie\alpha} \quad \text{и} \quad \psi'^* = \psi^* e^{-ie\alpha}.$$

Оператор S в формуле (3,1), осуществляющий преобразование, равен в этом случае просто $e^{ie\alpha}$ или $e^{-ie\alpha}$. Инфинитезимальный оператор $T = \frac{\partial S}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = ie$ для ψ и $T = -ie$ для ψ^* :

$$\delta\psi = ie\alpha\psi \quad \text{и} \quad \delta\psi^* = -ie\alpha\psi^*.$$

Группа фазовых преобразований, как и всякая однопараметрическая группа, коммутативна, т. е. последовательность операций в такой группе не играет роли. Это следует также из вида оператора $S = e^{ie\alpha}$. Существует единственный инфинитезимальный оператор. Поэтому числа f , связанные с перестановочным соотношением между инфинитезимальными операторами по формуле (3,19), равны нулю. Если теперь мы будем требовать локальной инвариантности для заряженного поля ψ и будем, следовательно, считать $\alpha = \alpha(x)$, то компенсирующее поле будет обладать очень простыми свойствами. В этом случае $M = 0$ (см. (3,20)) и согласно (3,15)

$$\delta A_\mu = \frac{\partial \alpha}{\partial x_\mu}. \quad (4,1)$$

Новый лагранжиан

$$L' = L(\psi, \psi^*, \nabla_\mu \psi, \nabla_\mu \psi^*),$$

где $\nabla_\mu \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - ie A_\mu \psi$, $\nabla_\mu \psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu} + ie A_\mu \psi^*$ согласно общей формуле (3,14). Таким образом, заряд, который обеспечивал в алгебраическом смысле сохранение частиц, оказался, кроме того, константой связи между исходным и компенсирующим полями.

Лагранжиан свободного поля $L_0 = L_0(F_{\mu\nu})$, где $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ по общей формуле (3,25).

§ 5. СОХРАНЕНИЕ БАРИОННОГО ЗАРЯДА И СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ ФАЗОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Все реакции с участием тяжелых частиц (барионов), т. е. нуклонов и гиперонов, протекают таким образом, что алгебраическая сумма числа частиц и античастиц сохраняется. Это значит, что существует сохраняющаяся величина — барионный заряд, положительный для барионов и отрицательный для антибарионов. Таким образом, имеется полная аналогия с сохранением электрического заряда. Волновые функции барионов должны быть также комплексны и инвариантны относительно фазового преобразования, как и волновые функции электронов.

Таким образом, относительно барионов, например, протона и нейтрона, можно записать

$$\psi_p \rightarrow e^{i\eta\alpha} \psi_p, \quad \psi_p^* \rightarrow e^{-i\eta\alpha} \psi_p^*, \quad \psi_n \rightarrow e^{i\eta\alpha} \psi_n, \quad \psi_n^* \rightarrow e^{-i\eta\alpha} \psi_n^*;$$

здесь η — барионный заряд.

Так же как и в случае электродинамики, при переходе от постоянной фазы α к произвольной фазе $\alpha(x, y, z, t)$ возникает необходимость

в компенсирующем поле⁶. Это поле должно обладать теми же свойствами, что и электромагнитное, с той разницей, что оно взаимодействует только с «барионно» заряженными частицами, подобно тому как электромагнитное поле взаимодействует с электрически заряженными частицами. Если такое поле действительно существует, то между барионами и, в частности, между нуклонами должны существовать помимо ядерных сил силы типа кулоновских. На это обстоятельство обратили внимание Ли и Янг⁶. Так как все тела состоят из нуклонов и не содержат антинуклонов, то эти силы должны носить характер отталкивания. Между двумя массивными телами, таким образом, будет действовать сила

$$F = -\gamma \frac{M_1 M_2}{R^2} + \eta^2 \frac{A_1 A_2}{R^2}.$$

Здесь первый член соответствует гравитационному притяжению, а второй квазикулоновскому отталкиванию, γ — гравитационная постоянная, M_1 , M_2 и A_1 , A_2 — инертные массы и числа нуклонов, т. е. барионные заряды двух тел соответственно. Для выяснения вопроса о величине такого квазикулоновского отталкивания рассмотрим силу, действующую между протоном и каким-либо телом. Она может быть записана в виде

$$F = -\gamma \frac{M_p \mathfrak{M}}{R^2} = -\gamma \frac{M_p M_i}{R^2} + \eta^2 \frac{A}{R^2},$$

где $\mathfrak{M}$ — эффективная гравитирующая масса тела, включающая в себя квазикулоновское взаимодействие, M_i — инертная масса тела, M_p — масса протона. Отсюда

$$\frac{\mathfrak{M}}{M_i} = 1 + \frac{\eta^2}{\gamma} \frac{A}{M_i M_p};$$

M_i можно представить в виде

$$M_i = M M_p,$$

где M — атомный вес, выраженный через массу протона; величина A/M изменяется от вещества к веществу из-за разницы в дефектах масс порядка $\sim 10^{-3}$, следовательно, $\mathfrak{M}/M_i$ должно варьироваться $\sim 10^{-3} \frac{\eta^2 M_i}{\gamma M_p^2}$.

Из эксперимента известно $\mathfrak{M}/M_i$ с точностью до 10^{-8} . Следовательно, $\frac{\eta^2}{\gamma M_p^2} < 10^{-5}$ и $\eta^2 < 10^{-5} \gamma M_p^2 \sim 10^{-58}$. Таким образом, заряд η оказывается по крайней мере в 10^{19} раз меньше электрического заряда.

Если допустить существование у компенсирующего поля массы покоя, что нарушает калибровочную инвариантность поля (3,15), то соответствующие силы, возникающие между барионами, не будут обладать квазикулоновским дальним действием. Это были бы короткодействующие силы, сфера действия которых определяется фактором $e^{-r/\Lambda}$, где $\Lambda = \frac{h}{mc}$ — комптоновская длина волны частицы с массой m . К таким силам были бы неприменимы выше приведенные соображения об их величине. В этом случае частицы такого векторного нейтрального поля могли бы служить переносчиками сильного взаимодействия между барионами, как это предложено Кобзаревым и Окунем⁷.

§ 6 ГРУППА ВРАЩЕНИЯ В ИЗОТОПИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И КОМПЕНСИРУЮЩЕЕ ПОЛЕ ЯНГА И МИЛЛСА¹

Пусть ψ — двухкомпонентная функция поля с изотопическим спином $\frac{1}{2}$, а S — двухрядная унитарная матрица, осуществляющая преобразование функции ψ при вращении трехмерного изотопического пространства

Все процессы, при которых изотопический спин сохраняется, должны описываться уравнениями, инвариантными относительно вращения в изотопическом пространстве. Обычно предполагается, что вращение может быть произвольным, но должно быть одним и тем же для всех точек пространства и в любой момент времени. Смысл этого ограничения заключается в том, что однажды ориентируя изотопические оси, мы определим изотопические компоненты поля, например $I_z = \frac{1}{2}$ как протон, а $I_z = -\frac{1}{2}$ как нейтрон, и считаем это определение обязательным во всем пространстве и в любое время. Нарушение этого ограничения означало бы самопроизвольную перезарядку с течением времени, или при перемещении частицы из одной точки в другую.

Если отказаться от этого ограничения и распространить тем самым принцип локальной инвариантности на явления, связанные с изотопическим спином, то в соответствии с общей теорией локальной инвариантности и аналогично тому, как это происходит в электродинамике, появится необходимость в компенсирующем поле.

Матрица S зависит от трех параметров, определяющих вращение в изотопическом пространстве. Обычно в качестве таких параметров выбирают углы поворотов вокруг координатных осей. Тогда бесконечно малое приращение одной из компонент функции ψ будет равно

$$\delta\psi^\alpha = i \sum_{c=1}^3 \delta\varphi^c \tau_{c\beta}^\alpha \psi^\beta, \quad (6,1)$$

или в матричной форме

$$\delta\psi = i \sum_{c=1}^3 \delta\varphi^c \tau_c \psi, \quad (6,2)$$

где τ_1, τ_2, τ_3 — матрицы изотопического спина нуклона, которые являются инфинитезимальными операторами поворота вокруг координатных осей в изотопическом пространстве. Теперь, если мы считаем вращение в изотопическом пространстве независимым в каждой точке конфигурационного пространства, нам приходится вводить компенсирующее поле. Такое поле было введено Янгом и Миллсом¹. По общему правилу (3,14) компенсирующее поле вводится переходом от обычной к инвариантной производной:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i\tau_c B_\mu^c. \quad (6,3)$$

Отсюда видно, что поле B обладает тремя изотопическими компонентами и $\tau_c B_\mu^c$ есть не что иное, как скалярное произведение в изотопическом пространстве. Кроме того, B_μ^c является 4-вектором в обычном пространстве. Очевидно, что B_μ^c есть 12-компонентное поле, являющееся 4-векторами в обычном пространстве — времени и вектором в изотопическом пространстве, т. е. обладающее изотопическим спином 1. Каждая изотопическая компонента описывает векторную частицу: положительную, отрицательную и нейтральную, которые образуют изотопический триплет подобно π -мезонам, также имеющим изотопический спин, равный единице.

Можно составить по общей формуле (3,25) величину, аналогичную напряженности:

$$F_{\mu\nu}^a = \frac{\partial B_\nu^a}{\partial x_\mu} - \frac{\partial B_\mu^a}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} [B_\mu^b B_\nu^c - B_\nu^b B_\mu^c]; \quad (6,4)$$

F и B являются векторами в изотопическом пространстве. Воспользовав-

пись этим, можно записать (6,4) в более компактной форме:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} [B_\mu \times B_\nu]. \quad (6,5)$$

Лагранжиан свободного поля B по аналогии с электродинамикой следует записать в виде

$$L_0 = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (6,6)$$

Полный лагранжиан с участием B -поля и нуклонного поля записывается путем замены в лагранжиане свободного нуклонного поля (обычной производной на инвариантную) и добавлением свободного B -поля:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \bar{\psi} \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - i\tau B_\mu \right) \psi - m \bar{\psi} \psi. \quad (6,7)$$

Из формул (6,4) и (6,5) следует, что B -поле имеет нелинейный характер, т. е. возможно непосредственное взаимодействие изотопических компонент поля между собой. Изотопический спин системы, состоящей из ψ - и B -полей, очевидно, определяется суммой зарядов этих полей. Как уже отмечалось выше, независимость ориентаций изотопических осей в любой точке пространства—времени означает возможность перезарядки при переходе из одной точки пространства в другую. Например, заряженная частица, переходя из x в x' , становится нейтральной или покоящаяся нейтральная частица превращается в заряженную. Введение компенсирующего B -поля позволяет объяснить перезарядку как испускание заряженных частиц—изотопических компонент B -поля.

Если мы возьмем в качестве исходного поле, являющееся вектором в изотопическом пространстве, например π^+ -, π^0 -, π^- -мезоны, то получим то же самое компенсирующее поле B . Это является следствием общего положения, упоминавшегося в § 3, о том, что каждому преобразованию соответствует одно компенсирующее поле, которое взаимодействует со всеми полями, допускающими это преобразование. Но инвариантная производная будет выглядеть несколько по-разному для разных полей. Для π -мезонного поля

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} - iTB_\mu,$$

и лагранжиан π -мезонного поля, взаимодействующего с B -полем:

$$L = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} - i(TB_\mu) \Phi \right] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} - i(TB^\mu) \Phi \right] + m^2 \Phi \Phi,$$

где T —трехрядная матрица изотопического спина π -мезона.

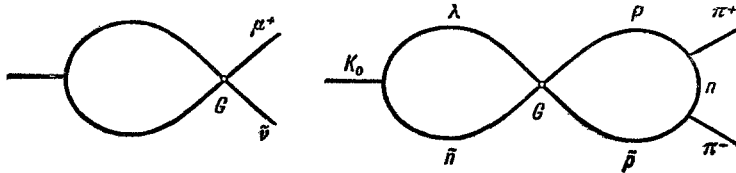
§ 7. ТЕОРИЯ КОМПЕНСИРУЮЩЕГО ПОЛЯ И ПРОБЛЕМА ПРОМЕЖУТОЧНОГО ВЕКТОРНОГО МЕЗОНА В СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

а) Гипотеза о промежуточном мезоне в слабых взаимодействиях

Слабые взаимодействия объединяют процессы, идущие с константой взаимодействия $G = 1,4 \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3$. Их общей чертой является также несохранение четности. Эти процессы идут с участием четного числа фермионов. В таких процессах, как β -распад или распад мезона, участвуют четыре фермиона. В распаде π -мезона $\pi \rightarrow \mu + \nu$ или $\pi \rightarrow e + \nu$

участвуют два фермиона. Наконец, есть процессы, как например, распады K -мезонов $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ или $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$, в которых фермионы совсем не участвуют. Согласно модели Сакаты π -мезоны и K -мезоны не являются истинно элементарными частицами, а состоят из двух фермионов. Таким образом, всякое слабое взаимодействие является четырехфермионным. При этом схемы распада π -мезона и K -мезона имеют вид, изображенный на рисунке:

Еще одной важной особенностью слабых взаимодействий является то, что из четырех участвующих в нем фермионов два заряжены и два



нейтральны. Четырехфермионное взаимодействие записывается в виде взаимодействия двух токов

$$L \sim J_a^* J_a.$$

Ток J_a содержит четыре слагаемых:

$$J_a = J_a^e + J_a^\mu + J_a^n + J_a^\Lambda,$$

$$J_a^e = \bar{\psi}_e \Gamma_a \psi_\nu, \quad J_a^\mu = \bar{\psi}_\mu \Gamma_a \psi_\nu, \quad J_a^n = \bar{\psi}_n \Gamma_a \psi_p, \quad J_a^\Lambda = \bar{\psi}_\Lambda \Gamma_a \psi_p, \quad \Gamma_a = \gamma_a (1 + \gamma_5),$$

причем индексы обозначают: e — электрон, ν — нейтрино, μ — мюон, n — нейтрон, p — протон, Λ — ламбда-гиперон.

Каждый такой ток содержит одну заряженную и одну нейтральную частицы. В процессе слабого взаимодействия как бы происходит «перезарядка». Такую перезарядку легче всего описать, предполагая, например, что нейтральная частица превращается в заряженную, испуская промежуточную заряженную частицу, которая затем распадается на два фермиона, один заряженный и один нейтральный. Такая схема обеспечивает запрет отсутствующих в природе процессов, в которых все четыре фермиона заряжены, таких, как $\mu^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$ и $\mu^- + p \rightarrow p + e^-$, или таких, в которых оба рождающихся лептона заряжены: $K^0 \rightarrow e^+ + e^-$. Гипотеза о такой промежуточной частице предлагалась многими авторами^{8,9}.

Введение промежуточной частицы вносит нелокальность во взаимодействие между четырьмя фермионами. Это — нелокальность порядка комптоновской длины частицы, переносящей взаимодействие между фермионными парами $l \sim \frac{\hbar}{mc}$. Чем легче промежуточная частица, тем большую нелокальность она вносит. При $m \rightarrow 0$ имеет место дальнеедействие, характерное для кулоновского взаимодействия. Очевидно, что промежуточный мезон в слабом взаимодействии должен обладать большой массой, по крайней мере порядка массы нуклона, чтобы не вносить сильных нелокальных эффектов, не наблюдаемых на опыте. Гипотеза о частице, переносящей слабое взаимодействие, сталкивается с серьезной трудностью, связанной с отсутствием процесса $\mu \rightarrow e + \gamma$, который, казалось, должен был бы идти, если существует промежуточная заряженная частица¹⁰. В качестве выхода из этого затруднения предлагается дополнительная гипотеза о двух различных нейтрино¹¹, один из которых участвует в мюонном токе, а другое в электронном. Подробное изложение этого круга вопросов можно найти в обзоре Окуня¹².

б) Приложение принципа локальной инвариантности к лептонному полю

Рассмотрим теперь предложенную Саламом и Уордом³ схему приложения представлений о компенсирующем поле к теории слабого взаимодействия. Они пользуются не изотопическим пространством, а зарядовым, предложенным в работе Д'Эспаньи, Прентки и Салама. Изотопическое пространство и связанные с ним представления неудовлетворительны, по мнению этих авторов, тем, что в них не находится естественного места для лептонов. Предложенное ими зарядовое пространство является трехмерным. Частицы e^+ , ν , e^- образуют зарядовый триплет L_1 и описываются компонентами $\psi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_x + i\psi_y)$, $\psi^0 = \psi_z$ и $\psi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_x - i\psi_y)$ вектора ψ в зарядовом пространстве. Частицы, образующие один триплет, имеют одинаковую «голую» массу. Разница в реальных массах возникает из-за различия во взаимодействии между компонентами триплета. Лагранжиан свободного лептонного поля записывается в виде

$$L = -\bar{\psi}\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)\psi; \quad (7,1)$$

так как ψ — вектор в зарядовом пространстве, то каждый член в лагранжиане представляет собой сумму трех слагаемых по числу зарядовых компонент ψ -поля; m — масса «голого» лептона (возможно, равная нулю).

Лагранжиан (7,1) инвариантен относительно вращений в зарядовом пространстве. Если теперь постулировать инвариантность лагранжиана относительно локально-независимых вращений, то, как и в предыдущих случаях, производные в лагранжиане (7,1) придется заменить на инвариантные производные по формуле (6,3):

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i\varepsilon \mathbf{T} \mathbf{B}.$$

Полный лагранжиан, включающий и B -поле, примет вид

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \bar{\psi} \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - i\varepsilon \mathbf{T} \mathbf{B} \right) \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (7,2)$$

где $\mathbf{T}$ — вектор, соответствующий спину 1 в зарядовом пространстве. B -поле — это поле Янга и Миллса, так как зарядовое и изотопическое пространства обладают одними и теми же геометрическими свойствами.

Воспользуемся соотношением, которое имеет место для оператора, соответствующего спину 1, чтобы придать члену взаимодействия в лагранжиане несколько иной вид:

$$[\hat{g} \times \hat{f}]_\alpha = ig_\beta s_\alpha f_\beta,$$

где s_α — компонента α оператора спина s . Тогда можно записать

$$\bar{\psi} \mathbf{T} \psi = -i [\bar{\psi} \times \psi].$$

Таким образом, член взаимодействия в (7,2) можно представить в виде

$$\mathbf{J} \mathbf{B} = \varepsilon [\psi \times \gamma \psi] \mathbf{B}. \quad (7,3)$$

Развернем это произведение:

$$[\bar{\psi} \times \psi] \mathbf{B} = (\bar{\psi}^+ \psi^- - \bar{\psi}^- \psi^+) B^0 + (\bar{\psi}^0 \psi^- - \bar{\psi}^+ \psi^0) B^+ + (\bar{\psi}^- \psi^0 - \bar{\psi}^0 \psi^-) B^-.$$

Отождествим нейтральную компоненту B -поля с электромагнитным полем. Обозначив $\psi^+ \rightarrow e^+$, $\psi^- \rightarrow e^-$, $\psi^0 \rightarrow \nu$ и $B^0 \rightarrow A$, выпишем

взаимодействие между электронно-нейтринным и B -полями:

$$\varepsilon \{ [\bar{e}^+ \gamma_\mu e^+ - \bar{e}^- \gamma_\mu e^-] A + [\bar{e}^+ \gamma_\mu \nu - \bar{\nu} \gamma_\mu e^-] B^+ + [\bar{\nu} \gamma_\mu e^+ - \bar{e}^- \gamma_\mu \nu] B^- \}. \quad (7,4)$$

Первый член представляет собой обычное электромагнитное взаимодействие. Вторым и третьим членами осуществляют слабые взаимодействия лептонов из зарядового триплета $L_1(e^+, \nu, e^-)$ через заряженные векторные частицы B^+ и B^- , причем константа взаимодействия одинакова для электромагнитного и слабого взаимодействий.

Вследствие того, что масса покоя нейтрино равна нулю, нейтринный лагранжиан, а также взаимодействия с участием нейтрино должны быть инвариантны относительно преобразования нейтринной функции

$$\nu \rightarrow \gamma_5 \nu.$$

Взаимодействие между лептонным и векторно-мезонным полями примет вид, инвариантный относительно этого преобразования, если перейти от (7,4) к выражению

$$\varepsilon \{ [\bar{e}^+ \gamma_\mu e^+ - \bar{e}^- \gamma_\mu e^-] A + [\bar{e}^+ \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu - \bar{\nu} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) e^-] B^+ + [\bar{\nu} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) e^+ - \bar{e}^- \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu] B^- \}. \quad (7,5)$$

Из (7,5) следует, что взаимодействие с заряженными компонентами B -поля (т. е. слабое взаимодействие) приведет к нарушению четности. Таким образом, инвариантность нейтрино относительно преобразования $\nu \rightarrow \gamma_5 \nu$ приведет к тому, что одна ось в зарядовом пространстве становится выделенной. Компонента $B_3 = A$ взаимодействует с лептонами без нарушения четности, в то время как другие компоненты B -поля взаимодействуют с лептонами с нарушением четности.

Не имея никаких указаний о массе заряженных частиц B^+ и B^- из метода, которым они были введены во взаимодействие с лептонным полем, будем считать, что масса определяется путем приравнивания константы связи электромагнитного и слабого взаимодействий по формуле⁹

$$4\pi e^2 = 2 \sqrt{2} G m^2, \quad (7,6)$$

что дает $m_B \approx 56$ нуклонных масс.

Все приведенные выше рассуждения можно применить ко второй группе лептонов: $L_2(\mu^+, \nu, \mu^-)$. Нейтрино, входящее в лептонный триплет L_2 может не совпадать с нейтрино из триплета $L_1(e^+, \nu, e^-)$. Взаимодействие B -поля с мезонами и гиперонами также можно построить, переходя в лагранжиане этих полей от $\frac{\partial}{\partial x}$ к локально инвариантной производной

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} - i e T B.$$

Мы видим, таким образом, что если представить электрон и нейтрино как зарядовый триплет и применить принцип локальной инвариантности относительно вращений в зарядовом пространстве, то заряженные компоненты компенсирующего поля можно отождествить с промежуточной частицей в слабом взаимодействии, а нейтральную — с электромагнитным полем. Однако, чтобы сблизить эту схему с действительным положением, имеющим место в слабых и электромагнитных взаимодействиях, приходится приписывать массу заряженным компонентам B -поля и вводить несохранение четности, что нарушает инвариантность относительно вращений в зарядовом пространстве.

§ 8. ГРУППА ЛОРЕНЦА И ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

Покажем теперь, как это сделал Утияма² в своей работе, что если предполагать параметры группы Лоренца зависящими от координат, то для сохранения инвариантности потребуется, как и в общем случае, компенсирующее поле, которое является не чем иным, как гравитационным полем. Рассмотрим некоторое поле $Q^A(x)$, действие которого $I = \int L(Q^A, Q^A_{,k}) d^4x$ инвариантно относительно преобразований Лоренца. (Здесь принято обычное сокращенное обозначение $Q^A_{,k} = \frac{\partial Q^A}{\partial x_k}$.) Введем, кроме инерциальной системы координат x_k , еще криволинейную систему координат u_μ . При этом интервал определяется в обеих системах через метрический тензор

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu.$$

Латинские индексы относятся к инерциальной системе, а греческие к криволинейной:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = 1, \quad g_{ik} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k \quad \text{и} \quad g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^i \partial x^k}{\partial u^\mu \partial u^\nu} g_{ik}.$$

Введем, как функции криволинейных координат, величины

$$h^k_\mu(u) = \frac{\partial x^k}{\partial u^\mu} \quad \text{и} \quad h^\mu_k(u) = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^k}. \quad (8,1)$$

В криволинейных координатах действие запишется в виде

$$I = \int L(Q^A(u), Q^A_{,\mu} h^\mu_\nu) h d^4u, \quad \text{где} \quad h = \det |h^k_\mu|.$$

Эти величины дают возможность в каждой точке, заданной криволинейными координатами u^μ , перейти к инерциальной системе. В каждой такой точке можно произвести преобразования Лоренца

$$x^k \rightarrow x^k + \varepsilon^k_l x^l, \quad \varepsilon^{kl} = -\varepsilon^{lk}, \quad (8,2)$$

при этом

$$h^\mu_k \rightarrow h^\mu_k + \delta h^\mu_k, \quad \delta h^\mu_k = -\varepsilon^l_k h^\mu_l, \quad \delta h^\mu_\mu = \varepsilon^k_l \delta h^\mu_l,$$

а компоненты поля подвергаются преобразованию

$$\delta Q^A = \frac{1}{2} T^A_{klB} Q^B \varepsilon^{kl}. \quad (8,3)$$

Здесь T^A_{klB} — инфинитезимальный оператор, соответствующий одному из представлений группы Лоренца, в зависимости от природы поля Q . Между инфинитезимальными операторами существуют перестановочные соотношения

$$[T_{kl} T_{mn}] = \frac{1}{2} f^{ab}_{klmn} T_{ab}. \quad (8,4)$$

Коэффициенты f^{ab}_{klmn} характеризуют группу Лоренца и не зависят от представления. Между величинами h^k_μ имеется соотношение

$$\frac{\partial h^k_\mu}{\partial u^\nu} = \frac{\partial u^k_\nu}{\partial h_\mu}, \quad (8,5)$$

являющееся равенством смешанных производных $\frac{\partial^2 x^k}{\partial u^\mu \partial u^\nu}$, которое сохраняется при преобразованиях Лоренца. Пусть теперь параметры

ε^{ik} будут зависеть от криволинейных координат той точки, в которой мы производим преобразование Лоренца $\varepsilon^{ik} = \varepsilon^{ik}(u)$. Соответственно

$$\delta Q^A = \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}(u) T_{klB}^A Q^B \quad \text{и} \quad \delta h_\mu^k = \varepsilon_i^k(u) h_\mu^i. \quad (8,6)$$

Лагранжиан поля уже не будет инвариантен относительно такого преобразования и потребуются ввести, по общему правилу, компенсирующее поле $A_\mu^{kl}(u)$. Заметим сразу, что $A_\mu^{kl}(u) = -A_\mu^{lk}(u)$, так как индексы k, l нумеруют оси инерциальной системы координат, и поэтому A_μ^{kl} и A_μ^{lk} соответствуют одному и тому же повороту, но в противоположных направлениях. Трансформационные свойства A -поля получим, применяя общую формулу (3,21):

$$\delta A_\mu^{kl} = \frac{1}{4} f_{hg}^{kl} A_\mu^{ml} \varepsilon^{ab}(u) A_\mu^{hg} + \frac{\partial \varepsilon^{kl}}{\partial u_\mu}.$$

Используя свойства перестановочных коэффициентов группы Лоренца (антисимметрия по трем парам индексов, равенство нулю, когда имеются четыре разных индекса, и равенство единице или минус единице, когда в каждой паре имеется по одному индексу из двух других пар), получим

$$\delta A_\mu^{kl} = \varepsilon_\mu^k A_\mu^{ml} + \varepsilon_\mu^l A_\mu^{km} + \frac{\partial \varepsilon^{kl}}{\partial u_\mu}. \quad (8,7)$$

Лагранжиан поля Q останется инвариантным под действием преобразования (8,6), если в этом лагранжиане перейти от обычных производных $\frac{\partial}{\partial u_\mu}$ к инвариантным согласно общему правилу (3,1):

$$\frac{\partial Q^A}{\partial u_\mu} \rightarrow \frac{\partial Q^A}{\partial u_\mu} - \frac{1}{2} A_\mu^{kl} T_{klB}^A Q^B. \quad (8,8)$$

В условиях зависимости $\varepsilon^{ik}(u)$ соотношение (8,5) уже не выполняется. Выполнение этого условия означало, что всегда можно перейти от криволинейной к инерциальной системе координат, т. е. хотя мы и пользовались криволинейной системой координат, пространство было плоским. (Все компоненты тензора кривизны Римана — Кристоффеля $R_{ij,kl} = 0$.) Нарушение условия (8,5) означает, что пространство искривляется. Искривление пространства, как известно, свидетельствует о наличии гравитационного поля. Метрика пространства, искривленного из-за зависимости $\varepsilon^{ik}(u)$, задается метрическим тензором

$$g_{\mu\nu}(u) = h_\mu^k(u) h_{k\nu}(u).$$

Остается только найти связь между метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ и компонентами компенсирующего поля. Рассмотрим для этого тензорное поле Q^{kl} . Возьмем инвариантную производную

$$\nabla_\mu Q^{kl} = \frac{\partial Q^{kl}}{\partial u^\mu} - A_\mu^{km} Q_m^l - A_\mu^{lm} Q_m^k. \quad (8,9)$$

Перейдем от компонент тензора Q^{kl} к компонентам $Q^{q\sigma} = h_k^q h_l^\sigma Q^{kl}$. Подставляя $Q^{kl} = h_k^q h_l^\sigma Q^{q\sigma}$ в правую часть (8,9), имея в виду, что h зависит от u_μ , умножая затем на $h_k^q h_l^\sigma$ и пользуясь $h_k^\mu h_\nu^\mu = \delta_\nu^k$, приходим к выражению

$$\nabla_\mu Q^{q\sigma} = \frac{\partial Q^{q\sigma}}{\partial u^\mu} + \Gamma_{\sigma\mu}^q Q^{q\sigma} + \Gamma_{\sigma\mu}^\sigma Q^{q\sigma}, \quad \nabla_\mu Q^{kl} = h_k^q h_l^\sigma \nabla_\mu Q^{q\sigma}, \quad (8,10)$$

где введены обозначения

$$\Gamma_{\sigma\mu}^q = h_l^q \frac{\partial h_\nu^l}{\partial u^\mu} - A_{\nu\mu}^q, \quad A_{\nu\mu}^q = h_k^q h_{l\nu}^l A_\mu^{kl}. \quad (8,11)$$

Инвариантная производная (8,10) имеет вид обычной ковариантной производной с тензорами Кристоффеля $\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}$. Покажем, что выражения (8,11) мы имели право обозначить как символы Кристоффеля

$$\nabla_{\mu} g^{\rho\nu} = h_k^{\rho} h_l^{\nu} \nabla_{\mu} g^{kl}.$$

Отсюда

$$\nabla_{\mu} g^{\rho\nu} = \frac{\partial g^{\rho\nu}}{\partial u^{\mu}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} g^{\sigma\mu} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\nu} g^{\rho\sigma} = 0.$$

Если предположить симметрию $\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}$ по нижним индексам, то мы придем к обычному выражению символов Кристоффеля через метрический тензор

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial u^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^{\sigma}} \right). \quad (8, 12)$$

Итак, мы показали, что зависимость параметров, определяющих группу Лоренца от криволинейных координат u_i , приводит к необходимости ввести компенсирующее поле A_{μ}^{kl} для сохранения инвариантности. С другой стороны, эта зависимость приводит к искривлению пространства. Метрический тензор и символы Кристоффеля, определяющие это искривление пространства и характеризующие тем самым гравитационное поле, связаны с компенсирующим полем A_{μ}^{kl} соотношениями (8,11) и (8,12). Таким образом, компенсирующее поле A_{μ}^{kl} есть не что иное, как гравитационное поле. Вводя лагранжиан и действие поля A , Утияма показывает, что можно с помощью вариационных принципов получить также и уравнение гравитационного поля².

§ 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, принцип локальной инвариантности приводит к появлению компенсирующих полей. Каждому виду преобразования соответствует свое поле. У этих полей есть два общих свойства. Они должны обладать тензорной размерностью не ниже единицы, т. е. не могут быть скалярными, а должны быть векторными или тензорными полями. Они не должны иметь массу покоя, так как член с массой покоя нарушил бы локальную инвариантность.

Сам принцип локальной инвариантности представляется логичным требованием к лагранжиану и уравнениям поля. В самом деле, почему должна соблюдаться инвариантность относительно преобразования, единого во всем пространстве—времени? Почему преобразование в одной точке должно зависеть от того, какое производится преобразование в другой точке, тем более, если эти точки разделены пространственно-подобным интервалом? Инвариантность относительно фазовых преобразований означает неизмеримость фазы волновой функции заряженной частицы. Локальная инвариантность означает в этом случае, как замечают Янг и Ли, неизмеримость разности фаз волновой функции в различных точках пространства — времени, т. е. величины, явно не более наблюдаемой, чем сама фаза.

В схему компенсирующих полей хорошо укладываются гравитационное и электромагнитное поля. Эти поля соответствуют преобразованиям, инвариантность относительно которых соблюдается с абсолютной точностью. Применение принципа локальной инвариантности к преобразованиям типа изотопических приводит к введению заряженных полей без массы покоя. Чтобы они могли служить переносчиками уже известных взаимодействий, слабого или сильного, они должны обладать массой покоя. При этом нарушится локальная инвариантность. Ситуация аналогична той,

какая возникает в случае преобразования спиральности $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$. Инвариантным относительно этого преобразования является только свободное нейтринное поле. Инвариантны относительно него и слабые взаимодействия, но без выражений, включающих массы слабо взаимодействующих частиц. Отсутствие массы покоя в компенсирующих полях означало бы, что эти поля полностью аналогичны кулоновским, не имеют отношения к короткодействующим силам слабых и сильных взаимодействий, и вообще, как показали Ли и Янг (см. § 5), почти не проявляют себя.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. C. N. Yang and R. L. Mills, Phys. Rev. 96, 191 (1954).
 2. R. Utiyama, Phys. Rev. 101, 1597 (1956).
 3. A. Salam and J. C. Ward, Nuovo cimento 11, 568 (1959).
 4. J. Sakurai, Ann. Phys. 11, 1 (1960).
 5. Я. Б. Зельдович, ДАН СССР 91, 1317 (1953).
 6. T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. 98, 1501 (1955).
 7. И. Ю. Кобзарев и Л. Б. Окунь, ЖЭТФ (в печати).
 8. J. Schwinger, Ann. Phys. 2, 497 (1957).
 9. R. P. Feynman and M. Gell-Mann, Phys. Rev. 109, 193 (1958).
 10. G. Feunberg, Phys. Rev. 110, 1482 (1958).
 11. Э. М. Липманов, ЖЭТФ 37, 1054 (1959).
 12. Л. Б. Окунь, УФН 68, 449 (1959).
-