1961 г. Июнь Т. LXXIV, вып. 2
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СРЕД С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

А. А. Рухадзе и В. П. Силин

ВВЕДЕНИЕ

Феноменологическая электродинамика материальных сред, сформулированная Максвеллом, в своей первоначальной форме не учитывала зависимости диэлектрической и магнитной проницаемостей от частоты электромагнитного поля. Поэтому экспериментально обнаруженная зависимость показателя преломления от частоты света (дисперсия или, более точно, частотная дисперсия), приводящая в теории Максвелла к дисперсии диэлектрической и магнитной проницаемостей, представлялась некоторое время явлением, противоречащим теории. Однако последующее развитие физики и, в частности, молекулярной теории и теории электронов Лоренца позволило вскрыть микроскопические причины явления дисперсии. Наконец, квантовая механика в известном смысле увенчала микроскопическую теорию дисперсии.

С другой стороны, уже в конце прошлого века стало ясно, что явление естественной оптической активности может быть объяснено при учете зависимости диэлектрической проницаемости не только от частоты, но и от волнового вектора. Подобная точка зрения была полностью подтверждена микроскопической теорией Борна, которая показала, что зависимость диэлектрической проницаемости от волнового вектора (ниже называется пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости*)) в естественно оптически активных (гиротропных) средах соответствует учету малых величин, порядка отношения размеров молекулы к длине волны электромагнитного излучения. В подобном случае можно говорить о слабой пространственной дисперсии.

В последние годы, главным образом, благодаря бурному развитию физики плазмы, а также исследованию электромагнитных свойств металлов при низких температурах радиочастотными методами, стало ясно, что наряду с частотной дисперсией диэлектрической проницаемости в ряде случаев имеет место отнюдь не малая пространственная дисперсия. В многочисленных теоретических работах, посвященных в основном физике плазмы и физике металлов, наряду с конкретными электромагнитными свойствами рассматриваемых сред, как правило, исследуются также общие вопросы электродинамики сред с пространственной дисперсией. Настоящий обзор представляет собой систематическое изложение электродинамики сред с пространственной дисперсией.

---

*) Термин «пространственная дисперсия» был, по-видимому, впервые использован в работе [3].

§ 1. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Электродинамика материальных сред отличается от электродинамики вакуума прежде всего тем, что под действием внешних полей или внешних источников поля в среде индуцируются плотности заряда и тока. При этом для напряженности электрического поля **E** и магнитной индукции **B** имеют место следующие уравнения поля:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi(\varrho+\varrho_0), \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\ &\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}+\mathbf{j}_0), \quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0. \end{aligned} \tag{1,1}$$

Здесь ϱ_0 и $\mathbf{j}_0$ представляют собой плотность заряда и плотность тока внешних источников поля, а ϱ и $\mathbf{j}$ — соответствующие плотности, индуцируемые в среде. При этом для индуцированных зарядов и токов имеет место уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}=0. \tag{1,2}$$

Физический смысл напряженности электрического поля **E** и магнитной индукции **B**, входящих в уравнения поля (1,1), определяется выражением для силы **F**, действующей на пробный точечный заряд e, движущийся в среде со скоростью **v**:

$$\mathbf{F}=e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v},\ \mathbf{B}]\right). \tag{I}$$

Для того чтобы система уравнений поля стала замкнутой, необходимы так называемые материальные уравнения, связывающие плотность индуцированных токов с напряженностью электрического поля и магнитной индукцией. Такие соотношения, собственно говоря, и определяют электромагнитные свойства материальных сред. Однако запись материальных уравнений, а следовательно, и соответствующей им системы уравнений поля не является однозначной.

Обычно уравнения электромагнитного поля в среде записываются в виде [1,2]

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\varrho_0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\ &\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0. \end{aligned} \tag{1,3}$$

Здесь напряженность магнитного поля **H** и электрическая индукция **D** следующим образом связаны с плотностью индуцированных токов:

$$\mathbf{j}=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+c\operatorname{rot}\mathbf{M}, \tag{1,4}$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}. \tag{1,6}$$

Вектор **M** называют намагниченностью, а **P** — вектором поляризации среды. Подставляя (1,4) в (1,1) и используя (1,5) и (1,6), получим (1,3).

Уже тот факт, что вместо одной векторной величины, характеризующей среду (**j**), в системе уравнений (1,3) возникли две векторные величины, указывает на определенный произвол в выборе формы записи уравнений поля, который определяется, очевидно, соображениями удобства. Заметим, что из тока поляризации $\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$ часто выделяют ток проводимости $\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\longrightarrow\frac{\partial\mathbf{P}'}{\partial t}+\mathbf{j}_{\text{пров}}$. Такое подразделение имеет определенный смысл лишь для медленно меняющихся полей. Так, для случая постоянного поля, принимая $\frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial t}=0$, имеем $\mathbf{j}=\mathbf{j}_{\text{пров}}+c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$. При этом плотность тока проводимости определяется так, что интеграл от нее по некоторой поверхности, пересекающей среду, равен полному току. Поэтому введение намагниченности **M** оправдывается возможностью существования отличной от нуля плотности тока и в том случае, когда полный ток через любую поверхность равен нулю *).

Однако в случае переменных полей разделение индуцированного тока на части, а также противопоставление ему тока смещения $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ оправдать довольно трудно. С другой стороны, с помощью соотношения

$$\mathbf{D}'(\mathbf{r},\ t)=\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)+4\pi\int_{-\infty}^{t} dt'\,\mathbf{j}(\mathbf{r},\ t') \tag{1,7}$$

можно ввести величину $\mathbf{D}'$, позволяющую в уравнениях поля (1,1) объединить плотности индуцированных зарядов и токов с током смещения. При этом уравнения поля приобретают вид (см. [2], § 83)

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\,\mathbf{D}'=4\pi\varrho_0, && \mathrm{rot}\,\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\\ &\mathrm{rot}\,\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0, && \mathrm{div}\,\mathbf{B}=0. \end{aligned} \tag{II}$$

Естественно, что система уравнений (1,8) должна быть дополнена материальным уравнением, дающим явное выражение величины $\mathbf{D}'$, которую ниже везде мы будем именовать электрической индукцией **).

Прежде чем обсуждать возможные материальные уравнения, сделаем следующее замечание. Как было показано, формулировка уравнений поля может быть различной. В частности, уравнения поля (II) формулируются так, что в них вообще не используется понятие напряженности магнитного поля. Такая форма уравнений поля оказывается предпочтительнее для рассмотрения быстропеременных явлений. Однако, учитывая тот факт, что часто электродинамика излагается на основе уравнений (1,3), что в ряде случаев вполне оправдано, а также в целях установления связи различных подходов, мы хотя и будем отдавать предпочтение уравнениям (II), но также будем пользоваться и уравнениями (1,3). В частности, переходя к обсуждению материальных уравнений, дополняющих уравнения поля, рассмотрим сначала материальные уравнения для случая уравнений (1,3).

Ниже мы ограничимся случаем линейной электродинамики. При этом материальные уравнения являются линейными соотношениями. В случае постоянных полей материальные уравнения, соответствующие уравнениям (1,3), записываются в виде [1, 2]

$$D_i=\varepsilon_{ij}E_j,\qquad B_i=\mu_{ij}H_j.$$

Здесь величины ε_{ij} и μ_{ij}, называемые соответственно тензором диэлек-

---

*) Во избежание недоразумений укажем, что в отличие от принятого нами (и используемого многими авторами) определения индукции **D** согласно формуле (1,6) часто в литературе под электрической индукцией понимается величина $\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}'$ (см., например, [4])

) Также электрической индукцией мы называем величину, входящую в уравнения (1,3) и определяемую соотношением (1,6) Мы надеемся, что это не вызовет путаницы. В каждом случае, могущем вызвать сомнение, мы будем при использовании термина «электрическая индукция» писать соответственно **D или $\mathbf{D}'$

трической проницаемости и тензором магнитной проницаемости, определяются конкретными свойствами среды и в этом смысле характеризуют ее электромагнитные свойства. Такие материальные уравнения пригодны лишь для достаточно медленно меняющихся полей. В случае быстропеременных полей, меняющихся быстро по сравнению с характерными временами релаксации в среде или по сравнению с периодами характерных собственных колебаний среды, положение усложняется. При этом состояние среды оказывается зависящим не только от поля в данный момент t, но и от его значений в предшествующие моменты времени. Это можно понять, если учесть, например, тот факт, что релаксационный процесс, начавшийся в среде под действием поля, возникшего в момент t и обратившегося в нуль спустя время, много меньшее времени релаксации, будет все еще протекать после исчезновения поля. Поэтому в случае высокочастотных полей следует, как это обычно и делается, использовать материальные уравнения вида [2]

$$D_i(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \hat{\varepsilon}_{ij}(t-t') E_j(t'), \qquad B_i(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \hat{\mu}_{ij}(t-t') H_j(t'). \quad (1,8)$$

Соотношения (1,8) учитывают влияние предыстории на электромагнитные свойства среды. При этом обычно говорят о временно́й, или частотной дисперсии.

В случае полей, резко меняющихся в пространстве, необходимо, очевидно, также учитывать влияние поля в удаленных точках на электромагнитные свойства среды в данной точке пространства. Действительно, например, благодаря процессам переноса состояние в определенной точке среды будет определяться не только значением поля в этой точке, но также и полем в целых областях среды, из которых влияние поля переносится в результате переноса вещества. Поэтому вместо материальных уравнений (1,8) необходимо использовать пространственно нелокальные соотношения, учитывающие не только временну́ю дисперсию, но также и пространственную. Для однородной, изотропной и негиротропной среды*) такие соотношения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\mu}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}', t'). \end{aligned} \quad (1,9)$$

Таким образом, электромагнитные свойства подобной среды определяются двумя функциями, зависящими от $\mathbf{r}$ и t.

Мы здесь умышленно не стали писать соотношений, обобщающих материальные уравнения (1,8) для анизотропных сред. Дело в том, что при непосредственном обобщении соотношений (1,8) возникло бы чрезмерно большое число функций (два тензора, зависящих от $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ и $t-t'$), используемых для описания электромагнитных свойств среды. С другой стороны, в уравнения поля (II) входит лишь одна векторная величина $\mathbf{D}'$, характеризующая свойства среды. Материальное уравнение, дополняющее уравнения поля (II) и учитывающее как временну́ю, так и пространственную

*) Относительно материального уравнения для изотропной и гиротропной среды см. § 7.

дисперсии, в случае линейной электродинамики может быть записано в виде

$$D_i'(\mathbf{r},\ t)=\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}'\hat{\varepsilon}_{ij}(t-t',\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')\,E_j(\mathbf{r}',\ t). \tag{III}$$

Зависимость ядра интеграла правой части этого соотношения от разности $t-t'$ обусловлена однородностью задачи во времени*). В случае пространственно однородной среды зависимость от координат также является разностной.

Может показаться, что материальное уравнение (III) не является общим, так как оно учитывает лишь зависимость электрической индукции $\mathbf{D}'$ от электрического поля $\mathbf{E}$. В принципе можно было бы говорить о зависимости $\mathbf{D}'$ также и от магнитной индукции $\mathbf{B}$. Однако легко видеть, что в последнем случае с помощью уравнения поля $\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ всегда можно исключить $\mathbf{B}$ и записать материальное уравнение в виде (III).

Материальное уравнение (III) дополняет уравнения поля (II). Если же исходить из уравнений поля (1,1), то следует пользоваться материальным уравнением, связывающим плотность тока $\mathbf{j}$, индуцированного в среде, с напряженностью электрического поля

$$j_i(\mathbf{r},\ t)=\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}'\hat{\sigma}_{ij}(t-t',\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')\,E_j(\mathbf{r}',\ t'). \tag{1,10}$$

С помощью соотношений (1,7) и (1,11) легко установить следующую связь между величинами $\hat{\varepsilon}_{ij}(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ и $\hat{\sigma}_{ij}(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')$:

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(t,\mathbf{r},\mathbf{r}')=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t)\delta_{ij}+4\pi\int\limits_{-\infty}^{t} dt'\,\hat{\sigma}_{ij}(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}'). \tag{1,11}$$

Естественно, что обе формы материального уравнения (III) и (1,10), так же как и уравнения поля (II) и (1,1), совершенно эквивалентны. Из этих соотношений следует, что электромагнитные свойства анизотропной среды определяются одним тензором, зависящим от $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ и $t-t'$. Поэтому ясно, что два тензора, возникающие при непосредственном обобщении формул (1,8) на случай пространственной дисперсии, не могут быть независимыми. Это обстоятельство указывает на нецелесообразность введения для анизотропных сред в случае учета пространственной дисперсии наряду с электрической индукцией также и напряженности магнитного поля.

Система уравнений поля должна быть дополнена граничными условиями. Сформулируем граничные условия на однородной поверхности раздела сред. При этом, как следствие уравнения $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$, получается условие непрерывности нормальной к поверхности составляющей магнитной индукции $B_{1n}=B_{2n}$. Нормаль к поверхности раздела сред считается направленной из первой среды во вторую. Далее, из уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ получаем условие непрерывности тангенциальной к поверхности раздела составляющей электрического поля $\mathbf{E}_{1t}=\mathbf{E}_{2t}$. Эти граничные условия являются следствием уравнений поля, в которых не проявляются

*) Заметим, что если под действием некоторых внешних причин (не связанных с влиянием электромагнитного поля, учтенным в соотношении (III)) среда меняет свои свойства с течением времени, то уже нельзя говорить об однородности задачи во времени, а поэтому о разностной зависимости от времени в $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}',\ t,\ t')$.

свойства среды, а поэтому они пригодны как для системы уравнений поля (II), так и для уравнений (1,3).

Усложнение граничных задач при учете пространственной дисперсии проявляется в условиях, связанных с материальными уравнениями. Формальное интегрирование уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}+\mathbf{j}_0)$ дает граничное условие $[\mathbf{n},\ \mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1]=\frac{4\pi}{c}(\mathbf{i}'+\mathbf{i}_0)$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности раздела, $\mathbf{i}_0$ — плотность тока поверхностных внешних источников, а $\mathbf{i}'$ — плотность поверхностных токов. Последняя величина определяется равенством

$$\mathbf{i}'=-\int_1^2 dl\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{j}\right)=-\frac{1}{4\pi}\int_1^2 dl\frac{\partial\mathbf{D}'}{\partial t}.$$

Интегрирование ведется на бесконечно малой глубине поверхностного слоя.

В случае уравнений поля (1,3), когда для плотности индуцированного тока используется выражение (1,4), имеем

$$\mathbf{i}'=-\frac{1}{4\pi}\int_1^2 dl\,\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+c\,[\mathbf{n},\ \mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1].$$

Поэтому для тангенциальных составляющих магнитного поля граничное условие может быть записано в виде

$$[\mathbf{n},\ \mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1]=\frac{4\pi}{c}(\mathbf{i}+\mathbf{i}_0),$$

где

$$\mathbf{i}=-\frac{1}{4\pi}\int_2^1 dl\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}.$$

Таким образом, как тангенциальные компоненты магнитной индукции, так и тангенциальные компоненты напряженности магнитного поля даже при отсутствии внешних поверхностных источников поля могут претерпевать скачок на поверхности раздела двух сред.

Последнее граничное условие, являющееся следствием уравнения $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi(\varrho+\varrho_0)$, для случая уравнения (II) имеет вид $D'_{2n}-D'_{1n}=4\pi(\sigma'+\sigma_0)$. Здесь σ_0 — поверхностная плотность заряда внешних источников, а

$$\sigma'=\frac{1}{4\pi}\int_1^2 dl\operatorname{div}[\mathbf{n},\ [\mathbf{D},\ \mathbf{n}]].$$

Аналогичное граничное условие может быть написано и для уравнений поля (1,3).

Следует отметить, что для возможности решения системы уравнений поля необходимо также иметь выражение для поверхностной индуцированной плотности тока (а также и заряда). Иными словами, необходимо иметь поверхностные материальные уравнения*). Таким образом, подводя итог, можем сказать, что уравнения поля (II), дополненные материальным уравнением (III) (а также поверхностными

*) Примеры такого типа поверхностных материальных уравнений рассматривались в работе [5] (см. также [6], § 18).

материальными уравнениями), при учете граничных условий

$$B_{1n}=B_{2n}, \qquad D'_{2n}-D'_{1n}=4\pi(\sigma_0+\sigma'),$$
$$\mathbf{E}_{1t}=\mathbf{E}_{2t}, \qquad [\mathbf{n},\ \mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1]=\frac{4\pi}{c}(\mathbf{i}_0+\mathbf{i}') \tag{IV}$$

совместно с условиями на бесконечности позволяют однозначно определить электромагнитное поле в любой части пространства.

§ 2 ТЕНЗОР КОМПЛЕКСНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Электромагнитное поле в среде с помощью разложения Фурье может быть представлено в виде совокупности монохроматических компонент, зависимость которых от времени определяется функцией $e^{i\omega t}$. Такое разложение называют также спектральным разложением. Для монохроматического электромагнитного поля с частотой ω материальное уравнение (III) приобретает следующий вид:

$$D'_i(\mathbf{r})=\int d\mathbf{r}'\varepsilon_{ij}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')E_j(\mathbf{r}'), \tag{2,1}$$

где

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')=\int_0^\infty dt e^{i\omega t}\hat{\varepsilon}_{ij}(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}'). \tag{2,2}$$

Тензор $\hat{\varepsilon}_{ij}(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')$, устанавливающий линейную связь между действительными величинами $\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)$ и $\mathbf{D}(\mathbf{r},\ t)$, очевидно, является действительной функцией. Величина $\varepsilon_{ij}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')$, определенная соотношением (2,2), при этом, вообще говоря, может быть комплексной. Обозначим действительную и мнимую части $\varepsilon_{ij}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ соответственно через $\varepsilon'_{ij}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ и $\varepsilon''_{ij}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')$, т. е.

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')=\varepsilon'_{ij}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')+i\varepsilon''_{ij}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}').$$

Из соотношения (2,2) следует, что

$$\varepsilon_{ij}(-\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')=\varepsilon^*_{ij}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}'),\quad \varepsilon'_{ij}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')=\varepsilon'_{ij}(-\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}'),$$
$$\varepsilon''_{ij}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')=-\varepsilon''_{ij}(-\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}'). \tag{2,3}$$

Если среда неограничена в пространстве и однородна, то ядро интегрального соотношения (III) является функцией разности координат

$$D'_i(\mathbf{r},\ t)=\int_{-\infty}^t dt'\int d\mathbf{r}'\hat{\varepsilon}_{ij}(t-t',\ \mathbf{r}-\mathbf{r}')E_j(\mathbf{r}',\ t). \tag{2,4}$$

В этом случае удобно разложить электромагнитное поле в интеграл Фурье, представив его в виде совокупности плоских монохроматических волн, зависимость которых от координат и времени определяется функцией $e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}$. Для таких волн соотношение (2,4) принимает следующий вид:

$$D'_i=\varepsilon_{ij}(\omega,\ \mathbf{k})E_j, \tag{2,5}$$

где

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\ \mathbf{k})=\int_0^\infty dt e^{i\omega t}\int d\mathbf{r}e^{-i\mathbf{kr}}\hat{\varepsilon}_{ij}(t,\ \mathbf{r})=\int d\mathbf{r}e^{-i\mathbf{kr}}\varepsilon_{ij}(\omega,\ \mathbf{r}). \tag{2,6}$$

В дальнейшем величину $\varepsilon_{ij}(\omega,\ \mathbf{k})$ мы будем называть тензором комплексной диэлектрической проницаемости среды. Следует подчеркнуть, что тензор диэлектрической проницаемости (2,6) можно вводить лишь в случае неограниченных и пространственно однородных сред, для которых материальное уравнение имеет вид (2,4). Зависимость тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от частоты поля определяет частотную дисперсию, а зависимость от волнового вектора $\mathbf{k}$, обусловленная нелокальностью материального уравнения (2,4), характеризует, как говорят, пространственную дисперсию.

Величина $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ является, вообще говоря, комплексной функцией действительных переменных ω и $\mathbf{k}$. Из соотношения (2,6), учитывая действительность функции $\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r})$, получаем следующие соотношения для действительной $\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и мнимой $\varepsilon''_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ частей тензора диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon'_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}) = \varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}), \quad \varepsilon''_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}) = -\varepsilon''_{ij}(\omega, \mathbf{k}),$$
$$\varepsilon^{*}_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}). \tag{2,7}$$

Для неограниченной и пространственно однородной среды можно ввести еще одну величину, характеризующую электромагнитные свойства среды. Для этого разложим электромагнитное поле в интеграл Фурье по координатам, представив его в виде наложения полей, зависимость которых от координат дается множителем $e^{i\mathbf{kr}}$. Для таких полей материальное уравнение (2,4) приобретает вид

$$D'_i(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} dt'\varepsilon_{ij}(t-t', \mathbf{k})\, E_j(\mathbf{t}'), \tag{2,8}$$

где

$$\varepsilon_{ij}(t-t', \mathbf{k}) = \int d\mathbf{r}\, e^{-i\mathbf{kr}} \hat{\varepsilon}_{ij}(t-t', \mathbf{r}). \tag{2,9}$$

Тензор $\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{k})$, так же как и $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, является комплексной величиной, действительная и мнимая части которой обладают следующими свойствами:

$$\varepsilon'_{ij}(t, \mathbf{k}) = \varepsilon'_{ij}(t, -\mathbf{k}), \quad \varepsilon''_{ij}(t, \mathbf{k}) = -\varepsilon''_{ij}(t, -\mathbf{k}). \tag{2,10}$$

Зависимость $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от волнового вектора приводит к тому, что даже в изотропной и негиротропной среде сохраняется существенно тензорный вид диэлектрической проницаемости. Действительно, в такой среде благодаря зависимости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от вектора $\mathbf{k}$, кроме тензора δ_{ij}, можно составить также тензор $k_i k_j$. Поэтому тензор диэлектрической проницаемости в изотропной и негиротропной среде может быть представлен в следующем виде [7]:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{k_i k_j}{k^2}\,\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega, \mathbf{k}). \tag{2,11}$$

Коэффициент в правой части формулы (2,11), стоящий у поперечного тензора, будем называть поперечной диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega, k)$), а соответствующий коэффициент у продольного тензора — продольной диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega, k)$) изотропной среды. Эти величины являются комплексными функциями частоты и волнового вектора. Вводя действительные и мнимые части продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей, из соотношений (2,7) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mathrm{tr}\prime}(\omega, k) &= \varepsilon^{\mathrm{tr}\prime}(-\omega, k), \quad & \varepsilon^{\mathrm{tr}\prime\prime}(\omega, k) &= -\varepsilon^{\mathrm{tr}\prime\prime}(-\omega, k), \\ \varepsilon^{\mathrm{l}\prime}(\omega, k) &= \varepsilon^{\mathrm{l}\prime}(-\omega, k), \quad & \varepsilon^{\mathrm{l}\prime\prime}(\omega, k) &= -\varepsilon^{\mathrm{l}\prime\prime}(-\omega, k). \end{aligned} \tag{2,12}$$

Выше мы уже говорили о двух формах уравнений поля в среде. Целесообразно теперь остановиться на взаимосвязи материальных уравнений (1,9) и (III) для пространственно однородной, изотропной и негиротропной среды, а также на взаимосвязи уравнений Максвелла (1,3) и (II). Предварительно, однако, рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из материальных уравнений (1,9).

Для монохроматического электромагнитного поля с частотой ω из уравнений (1,9) имеем

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}'\varepsilon(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}'\mu(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{H}(\mathbf{r}'), \tag{2,13}$$

где

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^\infty dt e^{i\omega t}\hat{\varepsilon}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad \mu(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^\infty dt e^{i\omega t}\hat{\mu}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \tag{2,14}$$

Вследствие действительности полей $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, очевидно, действительны и функции $\hat{\varepsilon}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $\hat{\mu}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$. При этом из выражений (2,14) аналогично (2,3) следует, что действительные части величин $\varepsilon(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $\mu(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ являются четными функциями частоты ω, а мнимые части — нечетными.

В случае пространственно однородной и неограниченной среды зависимость $\hat{\varepsilon}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $\hat{\mu}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ от координат является разностной. Разложив поле по плоским монохроматическим волнам $e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}$, из материальных уравнений (1,9) при этом получим следующее соотношение между величинами $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ в такой волне:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega, k)\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu(\omega, k)\mathbf{H}, \tag{2,15}$$

где

$$\varepsilon(\omega, k) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t}\int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{kr}}\hat{\varepsilon}(t, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{kr}}\varepsilon(\omega, \mathbf{r}), \tag{2,16}$$

$$\mu(\omega, k) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t}\int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{kr}}\hat{\mu}(t, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{kr}}\mu(\omega, \mathbf{r}).$$

Величины $\varepsilon(\omega, k)$ и $\mu(\omega, k)$ в дальнейшем будут называться соответственно диэлектрической и магнитной проницаемостями изотропной среды. Из соотношений (2,16) получаем следующие формулы, характеризующие свойства действительных и мнимых частей этих величин, аналогичные (2,12):

$$\begin{aligned} \varepsilon'(-\omega, k) &= \varepsilon'(\omega, k), \quad & \varepsilon''(-\omega, k) &= -\varepsilon''(\omega, k), \\ \mu'(-\omega, k) &= \mu'(\omega, k), \quad & \mu''(-\omega, k) &= -\mu''(\omega, k). \end{aligned} \tag{2,17}$$

Перейдем теперь к установлению интересующей нас взаимосвязи уравнений поля (1,3) и (II). Уравнения (1,3) для полей, зависящих от времени и координат как $e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}$, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} & i\mathbf{kE}\varepsilon(\omega, k) = 4\pi\varrho_0(\omega, \mathbf{k}), \quad [\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \frac{\omega}{c}\mathbf{B}, \\ & \frac{i}{\mu(\omega, k)}[\mathbf{k}, \mathbf{B}] = -\frac{i\omega}{c}\varepsilon(\omega, k)\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0(\omega, \mathbf{k}), \quad \mathbf{kB} = 0, \end{aligned} \tag{2,18}$$

где $\varrho_0(\omega, \mathbf{k})$ и $\mathbf{j}_0(\omega, \mathbf{k})$ — Фурье-компоненты плотности заряда и плотности тока внешних источников поля.

Аналогично уравнение поля (II) в рассматриваемом случае при учете выражения (2,11) для тензора диэлектрической проницаемости приобретает вид

$$\left.\begin{aligned} & i\mathbf{kE}\varepsilon^{l}(\omega,\ k)=4\pi\varrho_0(\omega,\ \mathbf{k}), \quad [\mathbf{k},\ \mathbf{E}]=\frac{\omega}{c}\mathbf{B}, \quad \mathbf{kB}=0, \\ & i\,[\mathbf{k},\ \mathbf{B}]_i=-\frac{i\omega}{c}\left\{\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\varepsilon^{tr}(\omega,\ k)+\frac{k_ik_j}{k^2}\varepsilon^{l}(\omega,\ k)\right\}E_j+ \\ & \qquad +\frac{4\pi}{c}j_{0i}(\omega,\ \mathbf{k}). \end{aligned}\right\} \tag{2,19}$$

Из сравнения уравнений (2,18) и (2,19) непосредственно следует, что

$$\varepsilon^{l}(\omega,\ k)=\varepsilon(\omega,\ k). \tag{2,20}$$

Для установления связи величины $\mu(\omega,\ k)$ с величинами $\varepsilon^{l}(\omega,\ k)$ и $\varepsilon^{tr}(\omega,\ k)$ поступим следующим образом. Вычтем из уравнения системы (2,18), содержащего в правой части плотность тока внешних источников поля $\mathbf{j}_0(\omega,\ \mathbf{k})$, соответствующее уравнение системы (2,19). Учитывая при этом соотношение (2,20) и исключив из полученной разности с помощью уравнения поля

$$\mathbf{B}=\frac{c}{\omega}[\mathbf{k},\ \mathbf{E}] \tag{2,21}$$

магнитную индукцию $\mathbf{B}$, получим

$$\frac{\omega}{c}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)(\varepsilon^{l}-\varepsilon^{tr})E_j=\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\frac{c}{\omega}[\mathbf{k},\ [\mathbf{k},\ \mathbf{E}]]_i.$$

Отсюда имеем следующее соотношение [7]:

$$1-\frac{1}{\mu(\omega,\ k)}=\frac{\omega^2}{c^2k^2}[\varepsilon^{tr}(\omega,\ k)-\varepsilon^{l}(\omega,\ k)], \tag{2,22}$$

позволяющее выразить магнитную проницаемость изотропной среды $\mu(\omega,\ k)$ через продольную и поперечную диэлектрические проницаемости.

В случае изотропной и негиротропной среды материальное уравнение (2,5) может быть записано также в несколько иной форме, использование которой в ряде случаев удобнее для установления связи уравнений поля в форме (1,3) и (II). Именно согласно выражению (2,11) материальное уравнение (2,5) для изотропной негиротропной среды приобретает вид

$$\mathbf{D}'=\varepsilon^{tr}(\omega,\ k)\,\mathbf{E}-[\varepsilon^{tr}(\omega,\ k)-\varepsilon^{l}(\omega,\ k)]\frac{\mathbf{k}(\mathbf{kE})}{k^2}. \tag{2,23}$$

Используя уравнение поля (2,21), а также соотношения (2,20) и (2,22), материальное уравнение (2,23) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{D}'=\varepsilon(\omega,\ k)\,\mathbf{E}-\frac{c}{\omega}\frac{4\pi\chi(\omega,\ k)}{\mu(\omega,\ k)}[\mathbf{k},\ \mathbf{B}], \tag{2,24}$$

где введено обозначение

$$\chi(\omega,\ k)=-\frac{1}{4\pi}(\mu(\omega,\ k)-1). \tag{2,25}$$

Величину $\chi(\omega,\ k)$ будем называть магнитной восприимчивостью изотропной среды.

Естественно, обе формы материального уравнения поля (2,23) и (2,24), а также и (2,15) совершенно эквивалентны. В каждую из них входят по две функции частоты и волнового вектора, описывающие электромагнитные свойства изотропной и негиротропной среды.

В заключение этого параграфа введем понятие комплексного тензора проводимости среды. Как уже отмечалось выше, вместо уравнений поля (II) и материального уравнения (III) можно пользоваться уравнениями поля (1,1) и материальным уравнением (1,10). Тензор $\hat{\sigma}_{ij}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$, связывающий плотность тока $\mathbf{j}$, индуцированного в среде, с напряженностью электрического поля, обладает свойствами, аналогичными свойствам $\hat{\varepsilon}_{ij}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$. В частности, в случае пространственно неограниченной и однородной среды тензор $\hat{\sigma}_{ij}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ является разностной функцией координат. При этом для полей, зависящих от времени и координат как $e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}$, получаем

$$j_i = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j, \tag{2,26}$$

где

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{kr}} \hat{\sigma}_{ij}(t, \mathbf{r}). \tag{2,27}$$

Величину $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ будем называть комплексным тензором проводимости среды. Из соотношений (1,11), (2,6) и (2,27) получаем связь между тензором диэлектрической проницаемости и тензором проводимости *)

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + 4\pi^2 \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \delta_+(\omega). \tag{2,28}$$

С помощью (2,28) легко могут быть получены определенные соотношения, характеризующие свойства тензора проводимости $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, при наличии соответствующих соотношений для тензора диэлектрической проницаемости (см., например, (2,7)).

Для изотропной и негиротропной среды по аналогии с формулой (2,11) можно написать

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) \sigma^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \sigma^{l}(\omega, k), \tag{2,29}$$

где σ^{tr} и σ^{l} — соответственно поперечная и продольная проводимости среды. При этом из формул (2,11), (2,28) и (2,29) имеем

$$\varepsilon^{tr,\, l}(\omega, k) = 1 + 4\pi^2 \sigma^{tr,\, l}(\omega, k) \delta_+(\omega). \tag{2,30}$$

§ 3. ДИСПЕРСИЯ ТЕНЗОРА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

В предыдущем параграфе было введено понятие тензора диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, учитывающего как частотную, так и пространственную дисперсии. Здесь мы рассмотрим поведение $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ при малых значениях ω и $\mathbf{k}$ и укажем на связь этого тензора с некоторыми величинами, характеризующими электромагнитные свойства среды.

Переменное во времени электромагнитное поле может быть переменным также и в пространстве. В случае полей, резко меняющихся в пространстве, необходимо принимать во внимание влияние поля в удаленных точках на электромагнитные свойства среды в данной точке пространства, т. е. учитывать пространственную дисперсию. Однако если электромагнитное поле достаточно плавно меняется в пространстве, можно ограничиться учетом лишь частотной дисперсии и пренебречь пространственной. С другой стороны, возможен и такой случай, когда

*) Функция $\delta_+(\omega)$ определяется следующим образом:

$$\delta_+(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} = \frac{1}{2} \delta(\omega) + P \frac{i}{2\pi\omega},$$

где символ P означает, что особенность при $\omega = 0$ следует понимать в смысле главного значения.

неоднородное в пространстве поле можно считать статическим и, следовательно, можно пренебречь частотной дисперсией. Электромагнитные свойства среды в этих двух предельных случаях описываются предельными выражениями тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ соответственно при $\frac{k}{\omega} \to 0$ и $\frac{\omega}{k} \to 0$. Рассмотрим указанные пределы на примере изотропной и негиротропной среды. В этом случае тензор диэлектрической проницаемости (2,11) содержит две функции $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ и $\varepsilon^{l}(\omega, k)$. Начнем с рассмотрения продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{l}(\omega, k)$.

В статическом пределе, т. е. при $\omega \to 0$, внешние источники поля могут, вообще говоря, создавать в среде неоднородное электрическое поле. При этом электрическое поле в среде будет потенциальным, т. е.

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi, \tag{3,1}$$

где Φ — скалярный потенциал поля.

Разложим функции $\mathbf{E}$ и Φ в трехмерный интеграл Фурье по координатам $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\mathbf{E}, \qquad \Phi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\Phi_{\mathbf{k}}. \tag{3,2}$$

При этом согласно (3,1) имеем

$$\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\Phi_{\mathbf{k}}.$$

Подставляя это выражение в уравнения поля (2,19), получим следующее уравнение для скалярного потенциала $\Phi_{\mathbf{k}}$:

$$k^2\varepsilon^{l}(0, k)\,\Phi_{\mathbf{k}} = 4\pi\varrho_0(0, \mathbf{k}). \tag{3,3}$$

В случае, когда источником поля в среде является покоящийся точечный заряд, плотность заряда равна

$$\varrho_0(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Поэтому электростатический потенциал точечного заряда в изотропной среде согласно уравнению (3,3) имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi e}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,\frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}}{k^2\varepsilon^{l}(0, \mathbf{k})}. \tag{3,4}$$

Отличие функции $\varepsilon^{l}(0, k)$ от единицы приводит к тому, что поле точечного заряда в среде отличается от кулоновского поля. В частности, если, например,

$$\varepsilon^{l}(0, k) = 1 + \frac{1}{r^2_{\text{экр}}k^2}, \tag{3,5}$$

то из выражения (3,4) получим

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{e}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{r_{\text{экр}}}}. \tag{3,6}$$

Такой потенциал соответствует дебаевскому экранированию поля точечного заряда в среде (см. [8], § 74). Дебаевское экранирование приводит к ослаблению поля на больших расстояниях от заряда и обусловлено тем, что подынтегральное выражение в формуле (3,4) в случае, когда $\varepsilon^{l}(0, k)$ имеет вид (3,5), остается конечным при $k = 0$. При этом существенно, что второй член в формуле (3,5) положителен. Таким образом, для того чтобы в изотропной среде имело место дебаевское экранирование электростатического поля, достаточно, чтобы статическая диэлектрическая проницаемость $\varepsilon^{l}(0, k)$ при $k = 0$ обладала особенностью типа $1/k^2$, оставаясь при этом положительной. Величина $r_{\text{экр}}^{-2}$, определенная соотношением

$$r_{\text{экр}}^{-2} = \lim_{k \to 0} \lim_{\omega/k \to 0} k^2 [\varepsilon^l(\omega, k) - 1], \tag{3,7}$$

характеризует расстояние, на котором происходит ослабление статического поля заряда в среде.

В противоположном предельном случае, т. е. при $\frac{k}{\omega} \to 0$, величина

$$\varepsilon^l(\omega, 0) = \lim_{k/\omega \to 0} \varepsilon^l(\omega, k) \tag{3,8}$$

представляет собой обычную диэлектрическую проницаемость среды, учитывающую лишь частотную дисперсию. Следует заметить, что в этом пределе, соответствующем пренебрежению пространственной дисперсией, тензор диэлектрической проницаемости изотропной среды должен иметь вид

$$\varepsilon(\omega)\, \delta_{ij}.$$

Это следует из того факта, что в изотропной среде при пренебрежении пространственной дисперсией можно составить лишь единственный тензор второго ранга δ_{ij}. Исходя из этого, заключаем, что*)

$$\varepsilon^l(\omega, 0) = \varepsilon^{tr}(\omega, 0) = \varepsilon(\omega). \tag{3,9}$$

Очевидно, что в пределе $\omega \to 0$ величина $\varepsilon(\omega)$ не может привести к какому-либо экранированию статического поля в среде и прежде всего потому, что она не только не имеет особенности $\sim 1/k^2$, но и вообще не зависит от волнового вектора $\mathbf{k}$.

Из вышеизложенного ясно, что могут существовать, вообще говоря, два различных предела продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^l(\omega, k)$ при $\omega = 0$ и $k = 0$. В тех случаях, когда эти пределы существуют, будем пользоваться для них следующими обозначениями:

$$\varepsilon^l_\omega(0, 0) = \lim_{\omega \to 0} \lim_{k/\omega \to 0} \varepsilon^l(\omega, k),$$
$$\varepsilon^l_k(0, 0) = \lim_{k \to 0} \lim_{\omega/k \to 0} \varepsilon^l(\omega, k). \tag{3,10}$$

Таким образом, точка $\omega = 0$, $\mathbf{k} = 0$ может в некоторых случаях являться существенно особой точкой для продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^l(\omega, k)$.

Следует заметить, что диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$, учитывающая лишь частотную дисперсию, может иметь особенность в области малых ω. Для проводников, например, при малых частотах (см., например, [2], § 62)

$$\varepsilon(\omega) = \frac{4\pi i \sigma_0}{\omega}, \tag{3,11}$$

где σ_0 — электростатическая проводимость проводника. Для диэлектриков в области малых частот $\varepsilon(\omega)$ не имеет особенности

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0, \tag{3,12}$$

где ε_0 — статическая диэлектрическая постоянная.

Рассмотрим теперь предельные переходы к случаям $\omega = 0$ и $k = 0$ для поперечной диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$. Прежде

*) В случае изотропной и негиротропной среды пространственная дисперсия диэлектрической проницаемости рассматривалась в работе [9]. Однако там было принято, что равенство (3,9) имеет место и при $\mathbf{k} \neq 0$.

всего заметим, что уравнения электромагнитного поля (1,3) допускают наряду с электростатическим полем возможность существования в среде постоянного магнитного поля, создаваемого внешними источниками. Мы не случайно обратились к уравнениям поля в форме (1,3). Дело в том, что уравнения поля (II) оказываются неудобными для описания постоянного магнитного поля в среде. Действительно, рассмотрим случай, когда напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в среде равна нулю, а магнитная индукция $\mathbf{B} \neq 0$. Материальное уравнение (2,23) при этом, очевидно, непригодно, так как оно вообще не содержит в явном виде магнитную индукцию $\mathbf{B}$. Материальное уравнение, записанное в форме (2,24), также малопригодно для описания постоянного поля в среде. Для случая постоянного магнитного поля удобнее пользоваться уравнениями Максвелла (1,3) и соответствующими им материальными уравнениями (2,15).

Выясним условия, при которых можно говорить о постоянном поле в среде. В случае медленного изменения магнитного поля во времени в среде возникает слабое переменное электрическое поле, определяемое уравнением

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Заметим, что при этом в среде возможно также существование постоянного, вообще говоря, немалого электрического поля. Порядок напряженности переменного электрического поля $\mathbf{E}$ можно получить путем оценки обеих сторон указанного уравнения. Если ω — характерная частота, а $1/k$ — характерный размер неоднородности магнитного поля в среде, то согласно этому уравнению $E \sim \frac{\omega}{ck} B$. С другой стороны, из уравнений поля (1,1) и (1,4) имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}') + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{пров}}. \tag{3,13}$$

Отсюда видно, что магнитное поле в среде можно считать постоянным, если в этом уравнении можно пренебречь членом $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}')$. Для диэлектриков из-за отсутствия проводимости величина $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}'$ совпадает с электрической индукцией $\mathbf{D}$, и поэтому указанный член в уравнении (3,13) при малых ω имеет порядок $i\varepsilon_0 \frac{\omega}{c}\mathbf{E}$, где ε_0 — статическая диэлектрическая постоянная диэлектрика. Для проводников величина $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}'$ отличается от индукции $\mathbf{D}$ членом, обусловленным током проводимости. Так как особенность диэлектрической проницаемости проводника в области малых частот, как мы отмечали выше, (3,11), связана с проводимостью, заключаем, что $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}') \sim \frac{i\omega}{c}\varepsilon_0\mathbf{E}$, причем величина ε_0 остается конечной при $\omega \to 0$ *). Таким образом, для таких сред указанным выше членом в уравнении (3,13) можно пренебречь, если $\frac{\sqrt{\varepsilon_0 \omega}}{ck} \ll 1$. Переход же к постоянному магнитному полю означает переход

*) Заметим, что величина ε_0 не совпадает со статической диэлектрической проницаемостью проводника, так как $\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}'$ отличается от индукции $\mathbf{D}$. В области малых частот для проводника

$$\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon_0 + \frac{4\pi i \sigma_0}{\omega}.$$

В литературе, однако, часто величина ε_0 называется диэлектрической постоянной проводника. Второй же член в этом выражении связывается с током проводимости.

в материальных уравнениях к пределу $\frac{\omega}{k} \to 0$, и следовательно, статическую магнитную проницаемость следует определить из соотношения (2,22) следующим образом:

$$\mu_k(0,\ 0) = \lim_{k \to 0} \lim_{\omega/k \to 0} \left\{1 - \frac{\omega^2}{c^2k^2}(\varepsilon^{tr} - \varepsilon^{l})\right\}^{-1}. \tag{3,14}$$

Из этой формулы следует, что отличие статической магнитной проницаемости от единицы (или, что то же самое, отличие статической магнитной восприимчивости от нуля) означает, что правая часть соотношения (2,22) отлична от нуля в пределе постоянного поля, т. е. при $\omega/k \to 0$.

В противоположном предельном случае при $k/\omega \to 0$ можно говорить о слабой пространственной дисперсии и разложить величины $\varepsilon^{l}(\omega,\ k)$ и $\varepsilon^{tr}(\omega,\ k)$ в ряд по степеням k/ω:

$$\varepsilon^{l}(\omega,\ k) \approx \varepsilon(\omega) + \alpha(\omega)\frac{c^2k^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon^{tr}(\omega,\ k) \approx \varepsilon(\omega) + \beta(\omega)\frac{c^2k^2}{\omega}. \tag{3,15}$$

При этом из соотношения (2,22) имеем

$$\mu_\omega(\omega,\ 0) = \lim_{k/\omega \to 0} \mu(\omega,\ k) = [1 + \alpha(\omega) - \beta(\omega)]^{-1}. \tag{3,16}$$

Эта величина не зависит от волнового вектора $\mathbf{k}$, и в пределе $\omega = 0$ она отнюдь не совпадает со статической магнитной проницаемостью, определенной соотношением (3,14).

Необходимо особо подчеркнуть, что когда говорят о частотной дисперсии магнитной проницаемости, соответствующей материальным уравнениям (1,8), то речь идет не о величине $\mu_\omega(\omega,\ 0) = \lim_{k/\omega \to 0} \mu(\omega,\ k)$, а о величине $\mu(\omega,\ k)$ в окрестности точки $\omega/k = 0$. В определенных условиях в окрестности этой точки величина $\mu(\omega,\ k)$ может оказаться существенно зависящей от частоты поля и не зависящей от волнового вектора $\mathbf{k}$. На языке величин $\varepsilon^{l}(\omega,\ k)$ и $\varepsilon^{tr}(\omega,\ k)$ это означает следующее. Во-первых, для того чтобы статическая магнитная проницаемость среды была отлична от единицы, или, как говорят, среда обладала магнитными свойствами, необходимо, чтобы выражение $\varepsilon^{tr} - \varepsilon^{l}$ в окрестности точки $\omega/k = 0$ имело особенность типа k^2/ω^2. Для немагнитных сред это выражение не обладает в окрестности точки $\omega/k = 0$ указанной особенностью, и поэтому статическая магнитная проницаемость таких сред $\mu_k(0,\ 0) = 1$. Во-вторых, если в разложении функции $\varepsilon^{tr} - \varepsilon^{l}$ в ряд по степеням ω/k коэффициент при члене k^2/ω^2 окажется не зависящим от $\mathbf{k}$, но зависящим от частоты ω, то и величина $\mu(\omega,\ k)$, определенная соотношением (2,22), в окрестности точки $\omega/k = 0$ будет функцией лишь частоты. Именно эта величина, в отличие от величины $\mu_\omega(\omega,\ 0)$, определяемой формулой (3,17), имеет смысл магнитной проницаемости среды, учитывающей частотную дисперсию. В дальнейшем, чтобы не путать эту величину с $\mu_\omega(\omega,\ 0)$, будем обозначать ее через $\mu_k(\omega)$. Из всего изложенного заключаем, что частотная дисперсия магнитной проницаемости среды $\mu_k(\omega)$ имеет смысл лишь в ограниченной области частот в окрестности точки $\omega/k = 0$, где $1/k$ — характерный размер неоднородностей поля в среде. В пределе $\omega = 0$ эта величина естественно совпадает со статической магнитной проницаемостью (3,14). Следует заметить, что возможность существования двух пределов $\mu_\omega(0,\ 0)$ и $\mu_k(0,\ 0)$ является следствием того, что точка $\mathbf{k} = 0$ и $\omega = 0$ может, вообще говоря, быть существенно особой точкой для тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega,\ k)$.

Совершенно аналогичное положение имеет место и в случае анизотропной среды. Так, в пределе $\omega/k \to 0$ скалярный потенциал поля, создаваемого точечным зарядом в анизотропной среде, определяется следующим выражением:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi e}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}}{k_i \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k}) k_j}. \tag{3,17}$$

Если функция $k_i \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k}) k_j$ при $\mathbf{k} \to 0$ остается конечной, то, как и в случае изотропной среды, в анизотропной среде может иметь место экранировка электростатического поля заряда на больших расстояниях от него. При этом характер экранировки поля в анизотропной среде, вообще говоря, зависит от направления.

В противоположном предельном случае, когда $k/\omega \to 0$, величина $\varepsilon_{ij}(\omega, 0)$ представляет собой тензор диэлектрической проницаемости, учитывающей лишь частотную дисперсию при полном пренебрежении пространственной. Функция $\varepsilon_{ij}(\omega, 0)$ может, вообще говоря, обладать особенностью в области малых частот ω. Для проводящих сред, например, функция $\varepsilon_{ij}(\omega, 0)$ при малых ω имеет особенность типа $1/\omega$, в то время как для непроводящих сред она остается конечной.

Из вышеизложенного следует, что точка $\omega = 0$, $\mathbf{k} = 0$, так же как и в случае изотропной среды, может быть существенно особой точкой для тензора диэлектрической проницаемости и что могут существовать два различных предела тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ при $\omega = 0$ и $\mathbf{k} = 0$. Проявлением этого обстоятельства является также существование анизотропных сред с отличной от нуля магнитной восприимчивостью. Все приведенные выше рассуждения о возможности считать магнитное поле в изотропной среде постоянным сохраняют силу и для анизотропной среды, т. е. магнитное поле в среде можно считать постоянным лишь в окрестности точки $\omega/k = 0$, где ω — характерная частота, а $1/k$ — характерный размер неоднородности поля. При этом в окрестности этой точки тензор диэлектрической проницаемости может иметь особенность $\sim (k/\omega)^2$, что соответствует наличию у среды отличной от нуля магнитной восприимчивости.

§ 4. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ

Внешние источники поля, создающие электромагнитное поле, изменяют энергию среды. При этом изменение энергии среды фактически определяется взаимодействием электромагнитного поля с источниками поля. Такая энергия взаимодействия определяется работой, совершаемой полем над внешними источниками. Заметим, что работа, совершаемая в течение времени dt электрическим полем $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ над внешними токами в объеме $d\mathbf{r}$, характеризующимися плотностью тока $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t)$, равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\, \mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t)\, d\mathbf{r}\, dt. \tag{4,1}$$

Поэтому полная работа, произведенная полем во всем пространстве за время действия внешних источников вплоть до рассматриваемого момента t, определяется интегралом от этого выражения

$$A = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}\, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t')\, \mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t'). \tag{4,2}$$

Согласно закону сохранения энергии работа, совершаемая полем, должна компенсироваться изменением энергии электромагнитного поля, которую мы обозначим через W. При этом скорость изменения энергии поля определяется соотношением

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dA}{dt} = -\int d\mathbf{r}\, \mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)\, \mathbf{j}_0(\mathbf{r},\ t). \tag{4,3}$$

С помощью уравнений поля (1,3) можно исключить из правой части соотношения (4,3) плотность тока внешних источников. При этом получаем

$$\frac{dW}{dt} = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) + \frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] \right\}. \tag{4,4}$$

С другой стороны, для исключения плотности тока внешних источников может быть использована система уравнений поля (II). В этом случае

$$\frac{dW}{dt} = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) + \frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\mathbf{E},\ \mathbf{B}] \right\}. \tag{4,5}$$

Для неограниченной материальной среды (этим случаем мы лишь и ограничимся здесь) поля на бесконечности можно считать исчезающими. Поэтому поверхностные интегралы, к которым сводятся выражения в формулах (4,4) и (4,5), содержащие дивергенции по бесконечно удаленным поверхностям, также можно считать исчезающими. Если внутри материальной среды магнитная индукция $\mathbf{B}$ и напряженность магнитного поля меняются непрерывно, то скорость изменения энергии в неограниченной среде дается формулами (4,4) и (4,5), в которых можно опустить члены с дивергенциями. В частности,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int \partial\mathbf{r} \left\{ \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} \right\}. \tag{4,6}$$

С помощью формулы (4,6) можно получить выражение для количества тепла, выделяющегося в среде. Рассмотрим монохроматическое поле, зависящее от времени как $e^{-i\omega t}$. Усреднив выражение (4,6) по времени, получим среднюю энергию, накапливающуюся в среде, или, что то же самое, количество тепла, выделяющееся в среде в единицу времени. В силу того обстоятельства, что электрическое поле является действительной величиной, его можно представить в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},\ \omega)\, e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r},\ \omega)\, e^{i\omega t}. \tag{4,7}$$

Аналогичным образом следует представить магнитную и электрическую индукции. Подставляя такие выражения в формулу (4,6) и усредняя по времени, получим

$$Q = \frac{i\omega}{4\pi}\int d\mathbf{r}\, \{\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)\, \mathbf{D}'^*(\mathbf{r},\ \omega) - \mathbf{E}^*(\mathbf{r},\ \omega)\, \mathbf{D}'(\mathbf{r},\ \omega)\}. \tag{4,8}$$

Поскольку для монохроматического поля материальное уравнение (III) принимает вид (2,1), а, кроме того, имеет место соотношение (2,3), формулу (4,8) можно записать в следующем виде:

$$Q = \frac{i\omega}{4\pi}\int d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}'\, \{\varepsilon^*_{ij}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}') - \varepsilon_{ji}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')\}\, E_i(\mathbf{r},\ \omega)\, E^*_j(\mathbf{r}',\ \omega). \tag{4,9}$$

Правая часть этого соотношения определяет энергию, накапливающуюся в единицу времени в среде (или соответственно отдаваемую средой*)) в результате возникновения в среде монохроматического электромагнитного поля, обусловленного внешними источниками.

*) Последнее возможно в том случае, когда среда не находится в состоянии термодинамического равновесия. Для того чтобы не загромождать изложение, мы будем говорить о накоплении энергии.

В однородной среде со слабым поглощением при рассмотрении распространения плоских монохроматических волн $e^{-i\omega t+i\mathbf{kr}}$ можно приближенно считать $\mathbf{k}$ действительной величиной. Тогда с помощью формулы (4,9) можно получить следующее выражение для тепла, выделяющегося в единицу времени и отнесенного к единице объема тела:

$$\frac{Q}{V}=\frac{i\omega}{4\pi}\{\varepsilon^*_{ij}(\omega,\ \mathbf{k})-\varepsilon_{ji}(\omega,\ \mathbf{k})\}E^*_jE_i. \qquad (4,10)$$

В условиях, когда тепло практически не выделяется, можно пренебречь диссипацией и считать среду непоглощающей. При этом можно считать выполненным равенство

$$\varepsilon^*_{ij}(\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')=\varepsilon_{ji}(\omega,\ \mathbf{r}',\ \mathbf{r}). \qquad (4,11)$$

В случае однородной среды при этом имеем

$$\varepsilon^*_{ij}(\omega,\ \mathbf{k})=\varepsilon_{ji}(\omega,\ \mathbf{k}). \qquad (4,11')$$

Таким образом, для непоглощающей среды тензор диэлектрической проницаемости оказывается эрмитовским. Для изотропной и негиротропной среды в качестве тензора диэлектрической проницаемости следует использовать выражение (2,11). При этом формула (4,10) принимает вид

$$Q=\frac{i\omega}{4\pi k^2}\{[\varepsilon^{l*}(\omega,\ k)-\varepsilon^{l}(\omega,\ \mathbf{k})]\,|(\mathbf{kE})|^2+[\varepsilon^{tr*}(\omega,\ k)-$$
$$-\varepsilon^{tr}(\omega,\ \mathbf{k})]\,|[\mathbf{k},\ \mathbf{E}]|^2\}=\frac{\omega}{2\pi k^2}\{\varepsilon^{l''}(\omega,\ \mathbf{k})\,|(\mathbf{kE})|^2+\varepsilon^{tr''}(\omega,\ \mathbf{k})\,|[\mathbf{k},\ \mathbf{E}]|^2\}. \qquad (4,12)$$

Первое слагаемое правой части формулы (4,12) определяет поглощение продольного поля в среде, а второе — поглощение поперечного поля. В этом смысле можно говорить о продольных и поперечных потерях в среде.

Для материальных сред, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, в результате внешних воздействий энтропия возрастает, а поэтому выделяется тепло. В этом случае Q положительно, и из выражения (4,12) следует

$$\varepsilon^{l''}>0 \quad \text{и} \quad \varepsilon^{tr''}>0. \qquad (4,13)$$

Заметим, что с помощью соотношений (2,15), (2,20) и (2,22) правую часть формулы (4,12) можно представить в виде

$$Q=\frac{i\omega}{4\pi}\{(\varepsilon^*-\varepsilon)\mathbf{EE}^*+(\mu^*-\mu)\mathbf{HH}^*\}=\frac{\omega}{2\pi}\{\varepsilon''\,|\mathbf{E}|^2+\mu''\,|\mathbf{H}|^2\}. \qquad (4,14)$$

Это выражение может быть получено и непосредственно усреднением по времени формулы (4,4).

Заметим, что из неравенств (4,13), вообще говоря, не следует условие положительности мнимой части магнитной проницаемости μ''. Такое условие не вытекает в общем случае и из формулы (4,14), поскольку поперечное электрическое поле $\mathbf{E}^{tr}$ и магнитное поле связаны между собой. Последнее означает, что для положительности выражения (4,14) необязательно выполнение условия $\mu''>0$.

Представляет интерес рассмотреть случай почти монохроматического поля и определить соответствующую такому случаю скорость систематического изменения энергии. Действительно, когда обычно говорят о поле, состоящем из суперпозиции монохроматических полей с частотами, близкими к некоторому значению ω, это означает, что в разложении Фурье

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega' e^{-i\omega' t}\mathbf{E}(\mathbf{r},\ \omega')$$

величина $\mathbf{E}(\mathbf{r},\ \omega')$ как функция ω' имеет резкие максимумы вблизи точек $\omega'=\pm\omega$. Два значения частоты $(\pm\omega)$ обусловлены тем, что благодаря действительности поля $\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)$ имеет место соотношение $\mathbf{E}^*(\mathbf{r},\ \omega)=\mathbf{E}(\mathbf{r},\ -\omega)$. Все это позволяет представить почти монохроматическое поле в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)=\mathbf{E}_0(\mathbf{r},\ t)\, e^{-i\omega t}+\mathbf{E}_0^*(\mathbf{r},\ t)\, e^{i\omega t}, \tag{4,15}$$

где $\mathbf{E}_0(\mathbf{r},\ t)$ как функция времени мало меняется за время, равное периоду $2\pi/\omega$. Очевидно, что

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r},\ t)=\int\limits_0^{\infty} d\omega' e^{i(\omega-\omega')t}\,\mathbf{E}(\mathbf{r},\ \omega'),$$

$$\mathbf{E}_0^*(\mathbf{r},\ t)=\int\limits_{-\infty}^{0} d\omega' e^{-i(\omega+\omega')t}\,\mathbf{E}^*(\mathbf{r},\ \omega').$$

В подынтегральных выражениях таких интегралов из-за того, что $\mathbf{E}(\mathbf{r},\ \omega)$ является функцией с резким максимумом, можно провести разложение по степеням $\omega'\mp\omega$. Это, в частности, позволяет записать следующие приближенные соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_0(\mathbf{r},\ t)\approx i\int\limits_0^{\infty} d\omega'\,(\omega-\omega')\,\mathbf{E}(\mathbf{r},\ \omega'),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_0^*(\mathbf{r},\ t)\approx -i\int\limits_{-\infty}^{0} d\omega'\,(\omega+\omega')\,\mathbf{E}^*(\mathbf{r},\ \omega').$$

Возникновение в правых частях этих соотношений величин $\omega\pm\omega'$ приводит к тому, что при достаточно узком распределении поля по частотам функция $\mathbf{E}_0$ действительно оказывается медленно меняющейся. Аналогично положение для электрической и магнитной индукций.

Получим теперь приближенное выражение для производной по времени от электрической индукции почти монохроматического поля, поставив перед собой задачу выразить ее через медленно меняющуюся функцию $\mathbf{E}_0(\mathbf{r},\ t)$. Согласно формуле (2,1) имеем

$$\frac{\partial D_i'(\mathbf{r},\ t)}{\partial t}=-i\int d\omega' e^{-i\omega' t}\int d\mathbf{r}'\varepsilon_{ij}(\omega',\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')\,E_j(\mathbf{r},\ \omega').$$

Благодаря тому, что в нашем случае почти монохроматического поля существенный вклад при интегрировании по ω' вносят лишь области частот, близкие к $\pm\omega$, в подынтегральном выражении правой части этого соотношения можно провести разложение по степеням $\omega'\pm\omega$. Удерживая лишь два первых члена такого разложения, а также учитывая полученные выше выражения для $\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t}$ и $\frac{\partial \mathbf{E}_0^*}{\partial t}$, находим

$$\frac{\partial D_i'(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \approx -i\omega e^{-i\omega t}\int d\mathbf{r}'\,\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')\,E_{0j}(\mathbf{r}', t) +$$
$$+ i\omega e^{i\omega t}\int d\mathbf{r}'\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')\,E_{0j}^*(\mathbf{r}', t) + e^{-i\omega t}\int d\mathbf{r}'\,\frac{\partial E_{0j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')] - e^{i\omega t}\int d\mathbf{r}'\,\frac{\partial E_{0j}^*(\mathbf{r}^*, t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')].$$

Это выражение, а также формула (4,15) и соответствующее выражение для магнитной индукции позволяют определить интересующую нас скорость систематического изменения энергии электромагнитного поля среды. Действительно, подставив эти выражения в формулу (4,6) и усреднив по периоду $2\pi/\omega$, получим для скорости систематического изменения электромагнитной энергии следующее выражение:

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{\text{ср}} = \frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{r}\,d\mathbf{r}'\left\{E_{0i}^*(\mathbf{r}, t)\,\frac{\partial E_{0j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')] +\right.$$
$$\left.+ E_{0j}(\mathbf{r}', t)\,\frac{\partial E_{0i}^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\varepsilon_{ji}^*(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r})]\right\} + \frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{r}\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B}_0^*\mathbf{B}_0) + Q, \quad (4,16)$$

где Q — тепло, выделяющееся в единицу времени и определяющееся формулой (4,9).

Формула (4,16) позволяет дать количественный критерий непоглощающей среды. Именно о равенстве (4,11) можно говорить в условиях, когда выражение для выделяющегося тепла Q оказывается много меньше суммы всех остальных членов правой части формулы (4,16). В этом случае, принимая $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx \varepsilon_{ji}^*(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r})$, из формулы (4,16) получаем

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{\text{ср}} = \frac{dU}{dt} =$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{\int\frac{d\mathbf{r}}{4\pi}\,\mathbf{B}_0^*\,\mathbf{B}_0 + \int\frac{d\mathbf{r}, d\mathbf{r}'}{4\pi}\,\mathbf{E}_{0i}^*(\mathbf{r}, t)\,\mathbf{E}_{0j}(\mathbf{r}', t)\,\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')]\right\}. \quad (4,17)$$

Существенно, что для непоглощающей среды скорость систематического изменения энергии электромагнитного поля дается согласно выражению (4,17) полной производной по времени. Поэтому величину U можно рассматривать как среднюю энергию электромагнитного поля среды.

Для плоских волн, зависимость которых от пространственных координат имеет вид $e^{i\mathbf{kr}}$, из (4,17) получаем

$$U = \frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{r}\left\{\mathbf{B}_0^*\,\mathbf{B}_0 + E_{0i}^*\,E_{0j}\,\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})]\right\}. \quad (4,18)$$

В случае изотропной и негиротропной среды согласно соотношению (2,11) можно записать правую часть формулы (4,18) в виде

$$\frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{r}\left\{\mathbf{B}_0^*\mathbf{B}_0 + |\,\mathbf{E}_0^{l}\,|^2\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\varepsilon^{l}) + |\,\mathbf{E}^{tr}\,|^2\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\varepsilon^{tr})\right\} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{r}\left\{|\,\mathbf{E}_0^{l}\,|^2\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\varepsilon^{l}) + |\,\mathbf{E}_0^{tr}\,|^2\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\left[\varepsilon^{tr} - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right]\right)\right\}. \quad (4,19)$$

Здесь $\mathbf{E}_0^{l}$ — продольная (параллельная вектору $\mathbf{k}$) компонента электрического поля, $\mathbf{E}_0^{tr}$ — поперечная ($\operatorname{div}\mathbf{E}_0^{tr} = 0$).

Из условия положительности выражения (4,19), в частности, следуют неравенства

$$\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\varepsilon^{l}) \geqslant 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\omega\left[\varepsilon^{tr} - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right]\right\} \geqslant 0, \quad (4,20)$$

которые при $\mathbf{k}=0$ совпадают и переходят в известное неравенство (см. [2], § 64)

$$\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon(\omega)) \geqslant 0.$$

С помощью выражения (4,19), а также согласно соотношениям (2,15), (2,20) и (2,22) нетрудно убедиться, что для изотропной и негиротропной среды формула (4,18) приводится к виду

$$U=\frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{r}\left\{|\mathbf{E}_0|^2\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\varepsilon)+|\mathbf{H}_0|^2\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\mu)\right\}. \tag{4,21}$$

Последнее выражение весьма подобно обычно используемому в случае непоглощающих изотропных сред при рассмотрении лишь частотной дисперсии диэлектрической проницаемости [2].

В заключение подчеркнем, что о средней энергии электромагнитного поля U, определяемой формулами (4,18), (4,19) и (4.21), можно говорить лишь в условиях, когда поглощение в среде пренебрежимо мало.

§ 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ

При отсутствии внешних источников в пустоте, как известно, возможны электромагнитные поля. Такие поля называют электромагнитными волнами. В частности, это могут быть плоские монохроматические волны, зависимость которых от времени и координат имеет вид $e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}$, где ω и $\mathbf{k}$ — действительные величины.

В отсутствие поглощения в среде также возможны подобные волны. Напротив, в поглощающих средах дело обстоит иначе. Действительно, если в такой среде в некоторый начальный момент времени в результате воздействия внешних источников возникло некоторое электромагнитное поле, то в последующие моменты времени после окончания действия внешних источников благодаря наличию диссипативных процессов поле в среде станет, вообще говоря, затухать. При этом, в частности, могут оказаться возможными затухающие колебания поля — затухающие во времени электромагнитные волны.

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о зависимости электромагнитного поля от времени в неограниченной однородной среде, в которой в начальный момент $t=0$ внешними источниками создано электромагнитное поле, а в последующие моменты времени внешние источники поля не действуют.

Для решения такой начальной задачи недостаточно знать в начальный момент времени $t=0$ магнитную индукцию $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$, электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$ и электрическую индукцию $\mathbf{D}'(\mathbf{r}, 0)$. Действительно, в правую часть материального уравнения (III), которое в нашем случае однородной неограниченной среды имеет вид (2,4), входят значения электрического поля как для $t>0$, так и предшествующих моментов времени. Поэтому должно быть ясно, что для решения начальной задачи фактически необходимо знать предысторию поля в среде.

Электрическую индукцию можно представить в виде суммы двух слагаемых [7] $\mathbf{D}'=\mathbf{D}^{(0)}+\mathbf{D}^{(1)}$, где

$$D_i^{(0)}=\int_{-\infty}^{0} dt'\int d\mathbf{r}'\hat{\varepsilon}_{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}')E_j(\mathbf{r}', t'), \tag{5,1}$$

$$D_i^{(1)}=\int_{0}^{t} dt'\int d\mathbf{r}'\hat{\varepsilon}_{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}')E_j(\mathbf{r}', t'). \tag{5,2}$$

Величина $\mathbf{D}^{(1)}$ зависит лишь от значений поля для $t>0$; напротив, $\mathbf{D}^{(0)}$ зависит от предыстории, а поэтому в начальной задаче эта величина должна быть задана. Физический смысл необходимости задания такой величины, являющейся функцией времени, заключается в том, что таким образом учитываются процессы релаксации и переноса, обусловленные частицами среды и начавшиеся до момента времени $t=0$ *).

Итак, при решении интересующей нас начальной задачи будем считать заданными $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$ и $\mathbf{D}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$. Заметим, что $\mathbf{D}'(\mathbf{r}, 0)=\mathbf{D}^{(0)}(\mathbf{r}, 0)$. Считая эти величины известными, для получения решения уравнений поля воспользуемся преобразованием Фурье [10-12] **)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\int\limits_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} d\omega e^{-i\omega t}\,\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)\quad (t\geqslant 0),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)=\int d\mathbf{r}\int\limits_0^\infty dt\, e^{i\omega t-i\mathbf{kr}}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\quad (\operatorname{Im}\omega=\sigma>0). \tag{5,3}$$

При этом по времени используется одностороннее преобразование Фурье, соответствующее тому факту, что уравнения поля без источников в рассматриваемой начальной задаче имеют место лишь при $t>0$. Формулы, аналогичные (5,3), следует иметь в виду для электрической и магнитной индукций. При этом из уравнений поля имеем

$$\frac{\omega}{c}\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)-[\mathbf{k}, \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)]=\frac{i}{c}\mathbf{B}(\mathbf{k}, t=0),\quad \mathbf{kB}=0,$$

$$\frac{\omega}{c}\mathbf{D}'(\mathbf{k}, \omega)+[\mathbf{kB}(\mathbf{k}, \omega)]=\frac{i}{c}\mathbf{D}'(\mathbf{k}, t=0),\ \mathbf{kD}'=0.$$

Здесь

$$\mathbf{D}'(\mathbf{k}, t=0)=\int d\mathbf{r}\, e^{-i\mathbf{kr}}\,\mathbf{D}'(\mathbf{r}, t=0);$$

аналогичное соотношение определяет $\mathbf{B}(\mathbf{k}, t=0)$. Исключив магнитную индукцию, а также представив электрическую индукцию в виде суммы $D_i'=D_i^{(0)}+D_i^{(1)}$, получим

$$\omega^2\mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)+c^2[\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)]]=$$
$$=\omega\mathbf{D}'(\mathbf{k}, t=0)+ic[\mathbf{kB}(\mathbf{k}, t=0)]-\omega^2\mathbf{D}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega), \tag{5,4}$$
$$\mathbf{kD}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)=-\mathbf{kD}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega). \tag{5,5}$$

Дополнив эту систему материальным уравнением, связывающим величины $\mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ и имеющим согласно формуле (5,2) следующий вид:

$$D_i^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)=\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})\,E_j(\mathbf{k}, \omega), \tag{5,6}$$

---

*) Естественно, что если бы рассматривалась начальная задача не только для уравнений поля, но также и для уравнений движения частиц среды, то знание предыстории оказалось бы ненужным. Однако при этом, кроме начальных значений поля, необходимо было бы задать начальные состояния частиц среды.

**) В предположении, что $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ растет со временем не быстрее $e^{\sigma t}$, согласно формуле (5,3) можно утверждать, что $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ как функция комплексного переменного ω не обладает особенностями в плоскости комплексного переменного выше линии $\operatorname{Im}(\omega)=\sigma$. То же самое относится и к функции $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, определенной соотношением (2,6).

получим систему линейных алгебраических уравнений, определяющих величину $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$:

$$k_i \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\mathbf{k}, \omega) = -\mathbf{k}\mathbf{D}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega), \tag{5,4'}$$

$$(\omega^2 \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - c^2 k^2 \delta_{ij} + c^2 k_i k_j) E_j(\mathbf{k}, \omega) = -\omega^2 D_i^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) + i\omega D_i'(\mathbf{k}, t=0) + ic[\mathbf{k}, \mathbf{B}(\mathbf{k}, t=0)]. \tag{5,5'}$$

Рассмотрим сначала случай изотропной и негиротропной среды, когда для тензора диэлектрической проницаемости имеет место выражение (2,11). В этом случае система уравнений (5,4′) и (5,5′) распадается на независимые уравнения для продольного $\mathbf{E}^{l}$ (параллельного вектору $\mathbf{k}$) и поперечного $\mathbf{E}^{tr}$ полей

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}^l(\mathbf{k}, \omega) = -\mathbf{D}^{(0)l}(\mathbf{k}, \omega),$$

$$\{\omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) - c^2 k^2\} \mathbf{E}^{tr}(\mathbf{k}, \omega) = -\omega^2 \mathbf{D}^{(0)\,tr}(\mathbf{k}, \omega) + i\omega \mathbf{D}'(\mathbf{k}, t=0) + ic[\mathbf{k}, \mathbf{B}(\mathbf{k}, t=0)].$$

Здесь $\mathbf{D}^{(0)l}$ и $\mathbf{D}^{(0)tr}$ — продольная и поперечная составляющие вектора $\mathbf{D}^{(0)}$. Отсюда сразу имеем

$$\mathbf{E}^l(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\mathbf{D}^{(0)l}(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon^l(k, \omega)}, \tag{5,7}$$

$$\mathbf{E}^{tr}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{-\omega^2 \mathbf{D}^{(0)tr}(\mathbf{k}, \omega) + i\omega \mathbf{D}'(\mathbf{k}, t=0) + ic[\mathbf{k}, \mathbf{B}]}{\omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k) - c^2 k^2}. \tag{5,8}$$

Согласно формулам (5,7) и (5,8) выражения для продольного и поперечного полей могут быть представлены в виде

$$\mathbf{E}^l(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dt' \int d\mathbf{r}' G_+^l(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}'^2} \mathbf{D}^{(0)}(\mathbf{r}', t'), \tag{5,7'}$$

$$\mathbf{E}^{tr}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dt' \int d\mathbf{r}' \left\{ \mathbf{D}'(\mathbf{r}', t=0) \frac{\partial}{\partial t} G_+^{tr}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') + G_+^{tr}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') \left[\frac{\partial^2 \mathbf{D}^{(0)}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'^2} - c \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t=0) \right] \right\}, \tag{5,8'}$$

где продольная и поперечная запаздывающие функции Грина имеют соответственно вид [7]

$$G_+^l(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} d\omega e^{-i\omega t} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2 \varepsilon^l(\omega, k)}, \tag{5,9}$$

$$G_+^{tr}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} d\omega e^{-i\omega t} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k) - c^2 k^2}. \tag{5,9'}$$

Ясно, что для рассмотрения зависимости поля от времени необходимо изучить вид запаздывающих функций Грина.

В выражениях (5,9) и (5,9′) целесообразно сместить контур интегрирования по ω в нижнюю полуплоскость комплексного переменного*).

*) Следует отметить, что при смещении контура интегрирования в уравнении (5,9) необходимо аналитически продолжить подынтегральное выражение в нижнюю полуплоскость комплексного переменного ω. Функции $\mathbf{D}^{(0)l}(\mathbf{k}, \omega)$ и $\varepsilon^l(\omega, k)$ как функции ω, определенные с помощью одностороннего преобразования Фурье формулами (2,6) и (5,3), являются аналитическими всюду в верхней полуплоскости комплексного переменного ω ($\operatorname{Im}\omega \geqslant \sigma \geqslant 0$), кроме, может быть, полосы конечной ширины σ около действительной оси.

При этом интеграл по линии, параллельной действительной оси и лежащей бесконечно далеко в нижней полуплоскости, дает нулевой вклад. Конечный вклад возникает от обхода полюсов подынтегральных выражений, а также обхода разрезов в плоскости комплексного переменного, возникающих благодаря наличию точек ветвления.

Рассмотрим вклад в интеграл (5,9), обусловленный полюсом подынтегрального выражения, связанным с обращением в нуль продольной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon^{l}(\omega, k)=0. \tag{5,10}$$

В этом случае интеграл по контуру вокруг такого полюса, соответствующий вычету подынтегральной функции (5,9), дает зависимость от времени

$$e^{-i\omega' t+\omega'' t},$$

где $\omega=\omega'+i\omega''$ — решение уравнения (5,10), определяющее зависимость частоты ω' и декремента затухания $\gamma=-\omega''$ для волны с волновым вектором $\mathbf{k}$ *). При данном волновом векторе могут, вообще говоря, возникать различные корни уравнения (5,10). При достаточно больших временах из всех таких колебаний существенным будет лишь наиболее медленно затухающее, т. е. обладающее наименьшим декрементом затухания, что соответствует ближайшему к действительной оси корню уравнения (5,10).

Вклад в интеграл (5,9), обусловленный ветвлением продольной диэлектрической проницаемости и связанный с интегрированием по берегам линии разреза плоскости комплексного переменного ω, не дает чисто экспоненциальной зависимости [12]. Можно сказать, что в этом случае определенному волновому вектору $\mathbf{k}$ соответствует непрерывный спектр частот. Особый интерес представляют такие случаи, когда вблизи линии разреза на соседних листах комплексного переменного ω аналитическое продолжение функции $\varepsilon^{l}(\omega, k)$ имеет нуль. В этом случае при немалых временах основная зависимость от времени, связанная с интегрированием по берегам линии разреза, будет чисто экспоненциальной, с комплексной частотой, определяющейся уравнением (5,10) для аналитического продолжения продольной диэлектрической проницаемости на соседние листы.

Аналогичное рассмотрение для поперечных волн, использующее выражение (5,8), очевидно, приводит к условию

$$\omega^{2}\varepsilon^{tr}(\omega, k)-c^{2}k^{2}=0, \tag{5,11}$$

определяющему частоты и декременты затухания поперечных колебаний поля.

В случае анизотропной однородной среды решение системы линейных уравнений (5,4′) и (5,5′) пропорционально $\Delta^{-1}(\mathbf{k}, \omega)$, где

$$\Delta(\mathbf{k}, \omega)=\left|k^{2}\delta_{ij}-k_{i}k_{j}-\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})\right| \tag{5,12}$$

— детерминант системы таких линейных уравнений. Поэтому точки ветвления и нули такого детерминанта и определяют зависимость поля от времени, обусловленную свойствами среды, а не приготовлением начального состояния. В частности, вместо дисперсионных уравнений (5,10)

*) ω'' отрицательно, если полюс лежит в нижней полуплоскости. Если же полюс расположен в верхней полуплоскости ($\sigma \gg \omega'' > 0$), то следует говорить об инкременте нарастания, что может быть лишь в том случае, когда среда находится в неравновесном состоянии.

и (5,11), дающих зависимость частоты и декремента затухания от волнового вектора, в случае анизотропной среды имеем

$$\left| k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0. \qquad (5,13)$$

Нетрудно видеть, что в случае изотропной среды с выражением для тензора комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, определяемым формулой (2,11), детерминант $\Delta(\mathbf{k}, \omega)$ разбивается на произведение двух сомножителей, в результате чего уравнение (5,13) сводится к уравнениям (5,10) и (5,11).

§ 6. ПЛОСКИЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ

Как мы уже отмечали выше, в материальной среде при отсутствии поглощения, так же как и в вакууме, возможно существование электромагнитных волн вида

$$e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}. \qquad (6,1)$$

В вакууме частота ω и волновой вектор $\mathbf{k}$ являются действительными величинами, а волны (6,1) являются плоскими. При рассмотрении распространения электромагнитных волн (6,1) в материальных средах в общем случае оказывается необходимым вводить комплексные величины ω и $\mathbf{k}$. В предыдущем параграфе мы рассмотрели задачу распространения в среде электромагнитных волн, возникающих в результате произвольного начального возмущения в ней. При этом, задаваясь действительным волновым вектором $\mathbf{k}$, мы нашли уравнения (5,10), (5,11) и (5,13), позволяющие определить комплексную частоту $\omega = \omega' + i\omega''$, действительная часть которой представляет частоту колебаний, а мнимая — декремент затухания (или инкремент нарастания) амплитуды волны со временем. Мыслима, однако, и другая постановка задачи, когда задается действительная частота, т. е. рассматривается распространение в среде монохроматической волны с заданной частотой ω. При этом требуется определить комплексный волновой вектор $\mathbf{k}$. Здесь мы рассмотрим распространение волн вида (6,1) в такой постановке задачи для неограниченной однородной среды. Уравнения (II) и (III), описывающие электромагнитное поле в среде, при этом можно свести к следующей системе однородных алгебраических уравнений для напряженности электрического поля $\mathbf{E}$:

$$\left\{ k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right\} E_j = 0. \qquad (6,2)$$

Условие совместности этой системы

$$\left| k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0 \qquad (6,3)$$

представляет собой дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в среде. Оно определяет в неявном виде закон дисперсии, т. е. зависимость волнового вектора от частоты.

Для вакуума $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij}$, и поэтому из уравнения (6,3) найдем $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. В случае материальной среды уравнение (6,3) при действительном ω может иметь и комплексные решения $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$. Следует отметить, что комплексные решения $\mathbf{k}$ не обязательно связаны с комплексностью тензора диэлектрической проницаемости. В самом деле, для изотропной среды, например, при пренебрежении пространственной дисперсией $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega)\delta_{ij}$; поэтому из уравнения (6,3) имеем $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)$.

При $\varepsilon(\omega) < 0$ корни этого уравнения являются чисто мнимыми, хотя поглощение в среде и отсутствует.

В общем случае комплексных $\mathbf{k}$ волна (6,1) может быть названа «плоской» лишь в условном смысле. Из координатной зависимости полей $e^{i\mathbf{kr}} = e^{i\mathbf{k'r}-\mathbf{k''r}}$ следует, что плоскостями постоянной фазы волны являются плоскости, перпендикулярные к вектору $\mathbf{k}'$, в то время как амплитуда волны постоянна на плоскостях, перпендикулярных к вектору $\mathbf{k}''$, в направлении которого происходит затухание (или нарастание) волны. Поэтому такие волны называются неоднородными плоскими волнами, в отличие от однородных плоских волн, в которых поверхности постоянного значения поля совпадают с поверхностями постоянной амплитуды волны. Однородными плоские волны могут быть в случае, когда величина $\mathbf{k}$ действительна, как это имеет место, например, в вакууме, или в случае, когда $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$ параллельны друг другу. Среды, в которых действительным ω соответствуют действительные $\mathbf{k}$ (точнее, мнимая часть пренебрежимо мала), называются прозрачными для данных частот.

В случае однородных плоских волн дисперсионное уравнение (6,3) позволяет определить величину волнового вектора $\mathbf{k}$ в каждом заданном направлении распространения волны. В тех же случаях, когда в рассматриваемой задаче возникают существенно неоднородные плоские волны, обычно кроме частоты известны также две какие-нибудь действительные компоненты волнового вектора. При этом дисперсионное уравнение (6,3) определяет третью комплексную компоненту $\mathbf{k}$. Такое положение имеет место, например, в задаче об отражении и преломлении плоской монохроматической волны при наклонном падении ее на плоскую границу вакуум — среда. Тангенциальные компоненты волнового вектора преломленной волны при этом равны тангенциальным компонентам волнового вектора падающей волны и действительны; нормальная же компонента определяется из дисперсионного уравнения (6,3) и, вообще говоря, комплексна.

После таких общих замечаний рассмотрим наиболее важные частные случаи распространения электромагнитных волн вида (6,1) в материальных средах.

Особенно простой и наглядной является картина распространения плоских монохроматических волн в прозрачной среде. Если среда при этом изотропна и негиротропна, то дисперсионное уравнение (6,6) распадается на два уравнения. Первое из них

$$\varepsilon^{l}(\omega, k) = 0 \tag{6,4}$$

определяет волновой вектор продольных волн в среде. Второе же уравнение

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}(\omega, k) = 0 \tag{6,5}$$

представляет собой дисперсионное уравнение поперечных электромагнитных волн.

Используя соотношения (2,20) и (2,22), дисперсионные уравнения (6,4) и (6,5) можно записать также в следующем виде:

$$\varepsilon(\omega, k) = 0, \tag{6,4'}$$

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega, k)\mu(\omega, k) = 0. \tag{6,5'}$$

Такой вид записи дисперсионных уравнений для продольных и поперечных волн соответствует описанию распространения электромагнитных волн в изотропной и негиротропной среде с помощью уравнений поля (1,3) и (1,9).

В прозрачной среде можно определить вектор $\mathbf{n}$ с помощью соотношения

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}. \tag{6,6}$$

Величина $n(\omega)$, называемая показателем преломления среды, характеризует отличие фазовой скорости волны, распространяющейся в заданном направлении, от скорости света в вакууме.

Дисперсионные уравнения для продольных и поперечных волн в изотропной и негиротропной прозрачной среде с помощью величин $\mathbf{n}$ и ω записываются в следующем виде:

для продольных волн

$$\varepsilon^{l}\left(\omega, \frac{\omega}{c}\mathbf{n}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon\left(\omega, \frac{\omega}{c}\mathbf{n}\right) = 0, \tag{6,7}$$

для поперечных волн

$$n^2 = \varepsilon^{tr}\left(\omega, \frac{\omega}{c}\mathbf{n}\right) \quad \text{или} \quad n^2 = \varepsilon\left(\omega, \frac{\omega}{c}\mathbf{n}\right)\mu\left(\omega, \frac{\omega}{c}\mathbf{n}\right). \tag{6,8}$$

В изотропной среде показатель преломления волны не зависит от направления распространения. Это приводит к тому, что в изотропной среде как фазовая, так и групповая скорости волны параллельны направлению ее распространения. Следует оговорить, что при этом групповая скорость может, вообще говоря, быть направленной противоположно направлению распространения волны. В этом случае говорят, что электромагнитные волны имеют отрицательную групповую скорость.

При условии пренебрежения пространственной дисперсией $\left(\text{т. е. в пределе } \frac{k}{\omega} \to 0\right)$ дисперсионное уравнение продольных волн (см. формулу (3,9))

$$\varepsilon(\omega) = 0 \tag{6,9}$$

определяет дискретные частоты электромагнитных колебаний среды. В этом случае продольные волны имеют нулевую групповую скорость и произвольную фазовую. При учете пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости, как это видно из уравнений (6,4) и (6,7), частота продольных волн становится функцией волнового вектора, и поэтому групповая скорость волн отлична от нуля. В этом смысле продольные волны в среде при учете пространственной дисперсии становятся равноправной ветвью нормальных волн.

Дисперсионное уравнение поперечных волн (6,5) в изотропной прозрачной среде при пренебрежении пространственной дисперсией принимает вид

$$n^2 = \varepsilon(\omega). \tag{6,10}$$

Так как диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ является однозначной функцией частоты, говорят, что в изотропной среде при пренебрежении пространственной дисперсией может распространяться лишь одна поперечная волна при заданной частоте ω (при этом, разумеется, возможны волны с двумя различными поляризациями). При учете пространственной дисперсии уравнение поперечных волн (6,8) имеет, вообще говоря, несколько (возможно и неограниченное число) решений $n_i^2(\omega)$. В связи с этим в среде могут распространяться несколько поперечных волн с одной и той же частотой, но с разными показателями преломления $n_i(\omega)$.

В случае анизотропной прозрачной среды дисперсионное уравнение электромагнитных волн (6,3) с помощью величин $\mathbf{n}$ и ω записывается в следующем виде:

$$\left| n^2\delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij}\left(\omega, \frac{\omega}{c}\mathbf{n}\right)\right| = 0. \qquad (6,11)$$

Подразделение электромагнитных волн на продольные и поперечные волны в случае анизотропной среды, вообще говоря, невозможно. Показатель преломления волны $n(\omega)$ при этом зависит от направления ее распространения. Поэтому направление групповой скорости волны в анизотропной среде не совпадает с направлением ее распространения, как это имеет место в изотропной среде.

При условии пренебрежения пространственной дисперсией дисперсионное уравнение электромагнитных волн в прозрачной анизотропной среде

$$| n^2\delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon(\omega) | = 0 \qquad (6,12)$$

в пространстве (n_x, n_y, n_z) определяет некоторую поверхность четвертого порядка — «поверхность волновых векторов». При каждом заданном направлении $\mathbf{n}$ это уравнение является квадратным уравнением относительно n^2. Поэтому в каждом направлении в анизотропной среде могут, вообще говоря, распространяться две волны с одной и той же частотой ω. При учете пространственной дисперсии картина значительно усложняется. Дисперсионное уравнение (6,11) в общем случае является поверхностью более высокого порядка, чем (6,12), и поэтому в каждом направлении в среде может распространяться больше двух волн.

До сих пор мы рассматривали распространение плоских монохроматических волн (6,1) в прозрачных средах, когда волновой вектор волны $\mathbf{k}$ является действительной величиной. Однако, как мы уже отмечали выше, при рассмотрении задач распространения монохроматических волн в материальных средах приходится вводить также комплексный волновой вектор $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$. При этом можно выделить большой класс однородных плоских волн, для которых $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$ параллельны друг другу. К такому типу волн относятся, например, электромагнитные волны в изотропной поглощающей среде. Задачи распространения однородных плоских волн в поглощающей среде формально не отличаются от соответствующих задач в прозрачной среде. Те же самые дисперсионные уравнения (6,3) (для анизотропных сред), (6, 7) и (6,8) (для изотропных) определяют величину комплексного волнового вектора в каждом заданном направлении распространения волны. При этом следует иметь в виду, что при большой мнимой части волнового вектора $\mathbf{k}''$ теряет смысл понятие волны; так как ее амплитуда сильно меняется на расстоянии порядка длины волны $\lambda = \frac{2\pi}{k'}$, по существу имеем экспоненциально затухающее в пространстве электромагнитное поле. При больших значениях $\mathbf{k}''$ теряет смысл и направление распространения волны. В поглощающей непрозрачной среде наряду с волновым вектором комплексной величиной является и показатель преломления, определенный соотношением (6,6) $n = n' + in''$. При этом величину n' называют показателем преломления, а $\varkappa = n''$ — коэффициентом поглощения среды.

В качестве простого примера рассмотрим поперечные электромагнитные волны в изотропной поглощающей среде при пренебрежении пространственной дисперсией. Из уравнения (6,8) при этом получаем [2]

$$n' = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}, \qquad n'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}. \qquad (6,13)$$

Отсюда видно, что величина $n(\omega)$ может быть комплексной и в случае действительной диэлектрической проницаемости среды, т. е. в отсутствие поглощения в среде. В частности, при $\varepsilon' < 0$ и $\varepsilon'' = 0$ из выражений (6,13) имеем $n' = 0$, $n'' = \sqrt{|\varepsilon'|}$. Для проводников в области низких частот, когда справедлива формула (3,11), из выражений (6,13) находим, что n' и n'' совпадают по величине и равны $n' = n'' = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}}$. Наиболее общим классом волн (6,1) в материальных средах являются неоднородные плоские волны, в которых действительная $\mathbf{k}'$ и мнимая $\mathbf{k}''$ части волнового вектора не параллельны друг другу. Существенно неоднородные плоские волны возникают, например, в задачах отражения и преломления плоских волн на плоской границе раздела между двумя однородными средами. В таких задачах обычно известны две какие-либо действительные компоненты волнового вектора $\mathbf{k}$, а из дисперсионных уравнений (6,3), (6,4) и (6,5) определяется третья комплексная компонента как функция частоты волны и двух известных компонент волнового вектора.

§ 7. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ СО СЛАБОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

При рассмотрении электромагнитных волн в неограниченных и пространственно однородных средах мы пользовались материальным уравнением

$$D'_i = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})\, E_j. \tag{7,1}$$

При этом мы не ограничивались какой-либо явной функциональной зависимостью тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от волнового вектора $\mathbf{k}$. Если электромагнитное поле достаточно плавно меняется в пространстве, тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ можно разложить в ряд по степеням $\mathbf{k}$. Ограничиваясь первыми членами разложения, напишем [13] (см. также [4, 6, 14])

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega) + i\gamma_{ijl}(\omega)\, n_l + \alpha_{ijlm}(\omega)\, n_l n_m, \tag{7,2}$$

где $\mathbf{n} = \frac{c}{\omega}\mathbf{k}$. В рассматриваемом случае медленно меняющегося в пространстве поля коэффициенты γ_{ijl} и α_{ijlm} являются малыми и разложение (7,2) представляет собой ряд по степеням малого параметра*). В таких случаях говорят о слабой пространственной дисперсии.

Распространение плоских электромагнитных волн в материальных средах при учете слабой пространственной дисперсии, очевидно, может быть исследовано более полно, чем это было сделано в предыдущем параграфе. Кроме того, при распространении электромагнитных волн в таких средах возникают некоторые характерные эффекты, отсутствующие при пренебрежении пространственной дисперсией.

Из выражения (6,2) следует, что эффекты слабой пространственной дисперсии могут стать существенными при малых значениях компонент тензора $\varepsilon_{ij}(\omega)$, являющегося тензором диэлектрической проницаемости

---

*) Этот параметр зависит от электромагнитных свойств среды. В плазме для продольных волн малым параметром пространственной дисперсии служит отношение r_D/λ, где r_D — дебаевский радиус, а λ — длина волны продольного поля. Для поперечных волн в плазме этот параметр порядка $\sim v/c$, где v — тепловая скорость частиц. Для кристаллических сред и нейтральных газов таким параметром является отношение a/λ, где a — соответственно постоянная решетки или размер молекул газа и т. д.

среды, учитывающим лишь частотную дисперсию. Действительно, при этом в разложении (7,2) существенны второй и третий члены, связанные с пространственной дисперсией.

Разложение (7,2), однако, не всегда достаточно для описания эффектов слабой пространственной дисперсии в среде. Дело в том, что если все компоненты тензора $\varepsilon_{ij}(\omega)$ велики, то в выражении (7,2) можно ограничиться лишь первым членом. В то же самое время компоненты тензора $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$ могут при этом оказаться малыми и в разложении [13-15]

$$\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega) + i g_{ijl}(\omega) n_l + \beta_{ijlm}(\omega) n_l n_m \tag{7,3}$$

второй и третий члены, учитывающие пространственную дисперсию, будут существенными. Поэтому для описания эффектов слабой пространственной дисперсии в среде наряду с разложением (7,2) мы будем пользоваться и разложением (7,3).

Прежде чем перейти к рассмотрению электромагнитных волн в среде при учете слабой пространственной дисперсии, сделаем несколько замечаний относительно симметрии коэффициентов γ_{ijl} и α_{ijlm}. Из свойства симметрии тензора диэлектрической проницаемости (см. § 9)

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\mathbf{k}) \tag{7,4}$$

непосредственно следует, что $\gamma_{ijl} = -\gamma_{jil}$, а $\alpha_{ijlm} = \alpha_{jilm}$. Тензор α_{ijlm} является симметричным также по индексам l и m. Коэффициенты g_{ijl} и β_{ijlm}, очевидно, обладают теми же свойствами симметрии, что и γ_{ijl} и α_{ijlm}. При отсутствии поглощения в среде $\varepsilon_{ij}^{*}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})$; поэтому для такой среды тензоры γ_{ijl} и α_{ijlm} действительны. Дальнейшее упрощение этих величин связано уже с конкретной симметрией среды. Ниже мы ограничимся рассмотрением слабопоглощающих сред. Поэтому коэффициенты в разложениях (7,2) и (7,3) в дальнейшем всюду будут считаться действительными.

В разложениях (7,2) и (7,3) наряду с линейными членами по $\mathbf{k}$ мы умышленно оставили и квадратичные члены. В большинстве случаев разложение тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ по степеням волнового вектора не содержит членов нечетных степеней по $\mathbf{k}$. Дело в том, что если отдельные молекулы, из которых состоит среда, имеют центры симметрии, а в случае кристаллической среды элементарная ячейка кристалла имеет центр симметрии, то тензор диэлектрической проницаемости такой среды обладает следующим свойством:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, -\mathbf{k}).$$

В этом случае разложение тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ по степеням волнового вектора, очевидно, содержит лишь четные степени $\mathbf{k}$. Такие среды называют **негиротропными** или оптически неактивными. Среды же, не обладающие указанным свойством симметрии, называются **гиротропными**. Гиротропными, в частности, могут быть и изотропные среды. Примером такой среды является раствор тростникового сахара. Для гиротропных сред в разложениях (7,2) и (7,3) можно ограничиться первыми двумя членами.

Рассмотрим теперь распространение электромагнитных волн в средах при учете слабой пространственной дисперсии. Начнем с рассмотрения изотропных гиротропных сред. В изотропной среде (а также в кристалле с кубической симметрией) симметрический тензор второго ранга $\varepsilon_{ij}(\omega)$ сводится к скаляру, а антисимметрический тензор второго ранга $\gamma_{ijl} n_l$ — к псевдоскаляру. Вводя обозначения $\gamma_{ijl} = \gamma e_{ijl}$ и $g_{ijl} = -g e_{ijl}$, где e_{ijl} — единичный полностью антисимметричный тензор третьего ранга, разложения (7,2) и (7,3) в рассматриваемом случае можно записать в следующем виде *):

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega)\,\delta_{ij} + i\gamma(\omega)\,e_{ijl}\,n_l, \tag{7,5}$$

$$\varepsilon^{-1}_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^{-1}(\omega)\,\delta_{ij} - ig(\omega)\,e_{ijl}n_l. \tag{7,6}$$

Выражением (7,5) для учета слабой пространственной дисперсии, как мы уже отмечали выше, следует пользоваться при малых значениях $\varepsilon(\omega)$, в то время как при больших значениях $\varepsilon(\omega)$ нужно пользоваться выражением (7,6). Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$, учитывающая частотную дисперсию, является, вообще говоря, немонотонной функцией частоты. При рассмотрении электромагнитных волн вблизи полосы поглощения среды часто пользуются следующей интерполяционной формулой (см., например, [16],§ 149):

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' = \varepsilon_0 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_j^2 - i\omega\nu}, \tag{7,7}$$

где ω_0, ω_j и ν — величины, характеризующие свойства среды. При $\nu = 0$ диэлектрическая проницаемость (7,7) действительна, т. е. поглощение в среде отсутствует.

Из выражений (7,5) и (7,6) для продольных волн следует уравнение

$$\varepsilon(\omega) = 0, \tag{7,8}$$

совпадающее с дисперсионным уравнением для продольных волн в изотропной и негиротропной среде при условии пренебрежения пространственной дисперсией **).

Что касается поперечных электромагнитных волн, выражения (7,5) и (7,6) для них приводят к различным дисперсионным уравнениям. Так как для поперечных волн согласно уравнениям Максвелла $\mathbf{D} = n^2\mathbf{E}$, то из разложения (7,5) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$[n^2 - \varepsilon(\omega)]^2 = \gamma^2(\omega)\,n^2. \tag{7,9}$$

Вследствие малости величины γ^2 приближенные решения уравнения (7,10) можно записать в виде

$$n_\pm^2 \approx \varepsilon(\omega) \pm \gamma(\omega)\sqrt{\varepsilon(\omega)}. \tag{7,10}$$

Двум решениям уравнения (7,9) соответствуют следующие два соотношения между компонентами вектора $\mathbf{E}$ (или $\mathbf{D}$):

$$E_x = \pm iE_y$$

*) Для изотропной гиротропной среды тензор диэлектрической проницаемости, учитывающий произвольную пространственную дисперсию, можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}\right)\varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{k_ik_j}{k^2}\,\varepsilon^{l}(\omega, \mathbf{k}) + i\varphi(\omega, \mathbf{k})\,l_{ijl}k_l.$$

В случае слабой дисперсии это выражение переходит в (7,5) при $\varphi(\omega, 0) = \gamma(\omega)\frac{c}{\omega}$ и в (7,6) при $\varphi(\omega, 0) = \varepsilon^2(\omega)\,g(\omega)\frac{c}{\omega}$.

**) Следует заметить, что дисперсионное уравнение для продольных электромагнитных волн в изотропной гиротропной среде при учете пространственной дисперсии

$$\varepsilon^{l}(\omega, \mathbf{k}) = 0$$

также не отличается от соответствующего уравнения в изотропной и негиротропной среде (вектор $\mathbf{k}$ считается направленным по оси Oz). Это означает, что две волны, соответствующие двум решениям уравнения (7,9), обладают различными поляризациями. Именно волна, в которой $E_x = iE_y$, имеет правую круговую поляризацию, а волна, в которой $E_x = -iE_y$, — левую. В такой среде происходит вращение плоскости поляризации электромагнитной волны.

Если частота поперечной волны лежит вблизи от собственной частоты среды, то согласно (7,5) дисперсионное уравнение имеет вид[13]

$$g^2 n^6 - \left(\frac{n^2}{\varepsilon} - 1\right)^2 = 0. \qquad (7,11)$$

Пользуясь малостью величины g^2, находим следующие решения этого уравнения *):

$$n_{1,2}^2 \cong \varepsilon(\omega)\,[1 \pm g(\omega)\,\varepsilon^{3/2}(\omega)], \qquad n_3^2 \cong \frac{1}{\varepsilon^2(\omega)\,g^2(\omega)}, \qquad (7,12)$$

соответствующие трем поперечным волнам. Легко показать, что волны с показателями преломления n_1^2 и n_2^2 имеют соответственно правую и левую круговые поляризации.

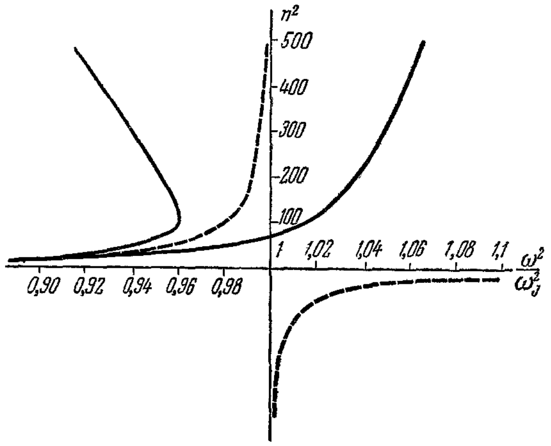

Рис. 1.

Резюмируя сказанное выше, заключаем, что в изотропной гиротропной среде вдали от полос поглощения распространяются две поперечные волны, вблизи же полос поглощения согласно (7,13) могут распространяться три поперечные волны с одной и той же частотой, но с разными показателями преломления. На рис. 1 приведены кривые $n_{1,2,3}^2(\omega)$ вблизи полосы поглощения для $\varepsilon(\omega)$, взятой в виде (7,7), причем поглощением пренебрегается ($\nu = 0$). При построении использованы следующие значения: $g^2 = 10^{-5}$, $\varepsilon_0 = 1$, $\frac{\omega_0}{\omega_j} = 1$. Пунктиром на рис. 1 нанесена предельная кривая (7,7). Отметим, что кратным корням уравнения (7,12) отвечают

$$\varepsilon_m^2 = \frac{2^{2/3}}{3g^{2/3}}, \quad n_m^2 = \left(\frac{2}{g}\right)^{2/3}, \quad n^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{g}\right)^{2/3},$$

т. е. $\frac{\omega^2}{\omega_j^2} \approx 0{,}96$, $n_m^2 \approx 70$ и $n^2 \approx 18$. В оптической области частот это соответствует $\Delta\omega \sim 2\cdot 10^{-2}\omega_j \sim 6 \div 12\cdot 10^{13}$ *сек*$^{-1}$, или $\Delta\lambda \sim 80 \div 150$ Å. Эти оценки показывают, что область существования трех поперечных волн в среде лежит достаточно далеко от центра линии поглощения (собственной частоты среды). Поглощение при этом еще пренебрежимо мало, что делает возможным экспериментальное наблюдение таких волн.

В случае негиротропной среды, как мы уже отмечали выше, разложение тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ начинается с квадратичных членов по $\mathbf{k}$.

*) Измерения величины g для различных веществ в настоящее время отсутствуют Однако, по-видимому, можно считать, что она такого же порядка, что и величина γ, которая в оптической области спектра для различных веществ порядка $\gamma \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$ (см. [16], гл XXIX).

Если среда при этом изотропна, то разложения (7,2) и (7,3) принимают вид

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = [\varepsilon(\omega) - \alpha_1(\omega) n^2] \delta_{ij} - \alpha_2(\omega) n_i n_j, \tag{7,13}$$

$$\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = [\varepsilon^{-1}(\omega) + \beta_1(\omega) n^2] \delta_{ij} + \beta_2(\omega) n_i n_j. \tag{7,14}$$

При написании этих выражений мы воспользовались тем обстоятельством, что в случае изотропных сред тензоры α_{ijlm} и β_{ijlm} сводятся к тензорам второго ранга с двумя независимыми компонентами.

Выражение (7,14) привóдит к следующему дисперсионному уравнению для продольных волн в среде:

$$n_{\parallel}^2 = \frac{\varepsilon(\omega)}{\alpha_1(\omega) + \alpha_2(\omega)}. \tag{7,15}$$

Это уравнение качественно отличается от дисперсионного уравнения продольных волн, полученного при пренебрежении пространственной дисперсией (6,9). Отличие заключается в том, что уравнению (6,9) отвечают лишь колебания с дискретными частотами и, следовательно, продольные волны с нулевой групповой скоростью, в то время как волны, определенные уравнением (7,15), имеют отличную от нуля групповую скорость.

Для поперечных волн из выражения (7,14) получаем дисперсионное уравнение

$$n_{\perp}^2 = \frac{\varepsilon(\omega)}{1 + \alpha_1(\omega)}, \tag{7,16}$$

которое вследствие малости величины $\alpha_1(\omega)$ практически не отличается от уравнения (6,10), соответствующего пренебрежению пространственной дисперсией.

Иначе обстоит дело при больших значениях $\varepsilon(\omega)$, когда для учета слабой пространственной дисперсии следует пользоваться выражением (7,15). При этом дисперсионное уравнение для поперечных волн принимает вид [13, 15]

$$\beta_1 n^4 + \frac{n^2}{\varepsilon} - 1 = 0, \tag{7,17}$$

откуда имеем следующие решения:

$$n_{1,2}^2 = -\frac{1}{2\varepsilon\beta_1} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\varepsilon\beta_1}\right)^2 + \frac{1}{\beta_1}}. \tag{7,18}$$

Таким образом, учет слабой пространственной дисперсии в изотропных средах приводит вблизи полос поглощения к качественно новому явлению, а именно к появлению новых поперечных волн. На рис. 2 и 3 приведены кривые $n_{1,2}^2(\omega)$ вблизи полосы поглощения для случая действительной функции $\varepsilon(\omega)$, т. е. при $\nu = 0$ в формуле (7,7). При этом были использованы следующие значения: $\varepsilon_0 = 1$, $\frac{\omega_0}{\omega_j} = 1$ и $|\beta_1| = 10^{-5}$, причем на рис. 2 $\beta_1 > 0$, а на рис. 3 $\beta_1 < 0$. Пунктиром в обоих случаях нанесена кривая (7,8).

При $\beta_1 > 0$ один из корней (7,18) отрицательный, и поэтому соответствующая волна в среде распространяться не может. В случае же $\beta_1 < 0$ возможно распространение двух волн. Кратным корням в этом случае отвечают значения

$$\varepsilon_m^2 = \frac{1}{4|\beta_1|}, \quad n_m^2 = \frac{1}{\sqrt{|\beta_1|}},$$

т. е. $n_m^2 \approx 300$, а $\frac{\omega^2}{\omega_j^2} \approx 0{,}994$. В оптической области частот это соответствует $\Delta\omega \sim 3\cdot 10^{-3}\omega_j \sim 1 \div 2\cdot 10^{13}$ *сек*$^{-1}$ или $\Delta\lambda \sim 10 \div 20$ Å. Это настолько близко к собственной частоте среды, что поглощение при этом весьма существенно, вследствие чего указанные выше волны трудно наблюдать. Действительно, при $\nu \neq 0$ имеем $n^2 = (n' + in'')^2$, причем коэффициент поглощения n'' при частоте, соответствующей кратным корням, равен

$$n'' \cong \varepsilon'' |\beta_1|^{1/4} \cong 0{,}5\cdot 10^4 \frac{\nu}{\omega_j}.$$

При $\frac{\nu}{\omega_j} \sim 10^{-6}$ имеем $n'' \sim 5\cdot 10^{-3}$. Поскольку интенсивность излучения затухает по закону $e^{-2\frac{\omega}{c}n''z} = e^{-\mu z}$, получаем $\mu \approx \approx 3\cdot 10^3$ *см*$^{-1}$, т. е. интенсивность излучения уменьшается в e раз на длине $\sim 3\cdot 10^{-4}$ *см* (при этом $\lambda \sim 2\cdot 10^{-6}$ *см*). Вдали от центра линии поглощения, где можно пренебречь затуханием, показатель преломления одной из волн настолько велик, что нарушается условие применимости разложения (7,14). Из приведенных оценок следует, что наблюдение двух волн в изотропной и негиротропной среде возможно лишь в пленках толщиной $< 10^{-4}$ *см*.

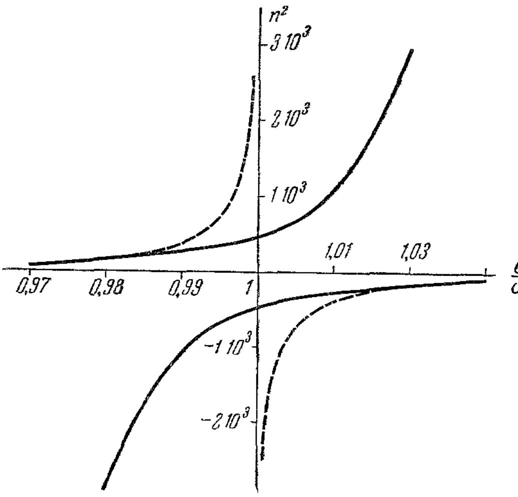

Рис. 2.

В заключение рассмотрим очень кратко распространение электромагнитных волн в средах с различной кристаллической структурой при учете слабой пространственной дисперсии. Для простоты ограничимся рассмотрением лишь негиротропных сред. Учет слабой пространственной дисперсии, естественно, уменьшает симметрию тензора диэлектрической проницаемости среды по сравнению с той симметрией, которая имелась при пренебрежении дисперсией.

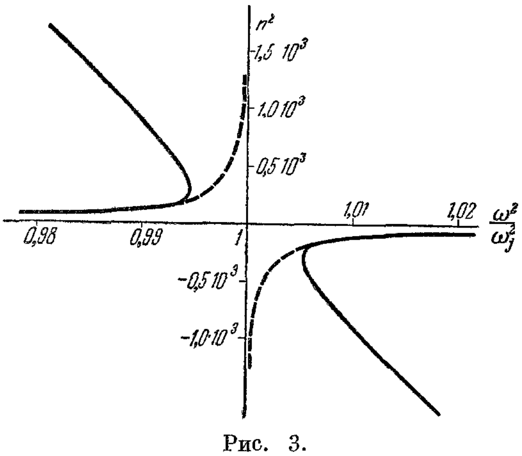

Рис. 3.

В кристаллических средах с кубической симметрией диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_{ij}(\omega)$, учитывающая лишь частотную дисперсию, подобна проницаемости изотропной среды. Однако при учете слабой пространственной дисперсии появляется слабая оптическая анизотропия кубических кристаллов, связанная с тем, что тензор α_{ijlm} (а также и β_{ijlm}) в кубических кристаллах имеет три независимые компоненты. Отличные от нуля компоненты тензора α_{ijlm} при этом равны [13]

$$\alpha_1 = \alpha_{xxxx} = \alpha_{yyyy} = \alpha_{zzzz}, \quad \alpha_2 = \alpha_{xyxy} = \alpha_{xzxz} = \alpha_{yzyz},$$

$$\alpha_3 = \alpha_{xxyy} = \alpha_{yyxx} = \alpha_{zzxx} = \alpha_{yyzz} = \alpha_{xxzz} = \alpha_{zzyy}.$$

Для учета слабой анизотропии кубических кристаллов при рассмотрении поперечных волн достаточно в малые члены разложений (7,2) и (7,3) подставить нулевое значение показателя преломления $n_0^2 = \varepsilon(\omega)$, соответствующее пренебрежению пространственной дисперсией. Следует, однако, иметь в виду, что такая замена законна лишь вдали от тех частот, для которых величина $\varepsilon(\omega)$ близка к нулю или бесконечности. При этом тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ согласно (7,2) зависит от направления распространения волны, что соответствует оптической анизотропии среды, проявляющейся, например, в двойном лучепреломлении кубического кристалла. В области частот, для которых $\varepsilon(\omega) \to 0$ или $\varepsilon(\omega) \to \infty$, в кубическом кристалле должны появляться те же характерные эффекты, что и в изотропной среде, но несколько осложненные слабой анизотропией кубического кристалла.

Аналогичным образом можно рассмотреть также и кристаллы с другой симметрией. В зависимости от симметрии кристаллов тензоры α_{ijlm} и β_{ijlm} упрощаются по-разному. Например, в ромбических кристаллах они имеют по 12 независимых компонент, в тетрагональных по 7 и т. д. Следует отметить, что в кубических кристаллах, так же как и в изотропной среде пространственная дисперсия значительно более сильное при наличии гиротропии.

§ 8. ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В СРЕДЕ

Быстрая заряженная частица при движении в среде возбуждает в ней электромагнитные волны. В поглощающей среде эти волны быстро затухают, что по существу соответствует передаче энергии частицы среде посредством возбуждения в ней электромагнитных волн. Поэтому при движении в среде быстрая заряженная частица теряет часть своей энергии. Мы будем считать, что энергия возбуждаемых электромагнитных волн мала по сравнению с энергией частицы и изменением скорости частицы в среде можно пренебречь. Теория потерь быстрых заряженных частиц в среде была развита в работах Тамма, Франка и Ферми[17-20]. Обобщение этой теории на случай пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости дано в работах [7, 21-33].

Потеря энергии движущейся частицей, очевидно, определяется работой, производимой силой торможения, действующей на частицу со стороны создаваемого ею электромагнитного поля в среде. Работа этой силы, определяющейся выражением (I), на единицу длины пути в среде равна

$$W = \frac{\mathbf{vF}}{v} = \frac{e(\mathbf{vE})}{v}. \tag{8,1}$$

В эту формулу следует подставлять напряженность электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ в точке нахождения заряда. Рассмотрим движение быстрой заряженной частицы в пространственно однородной и неограниченной среде. Представим электромагнитное поле, создаваемое частицей, с помощью разложения Фурье в виде совокупности волн $e^{i\mathbf{kr} - i\omega t}$. Переходя в уравнениях поля (II) к Фурье-компонентам и исключив магнитную индукцию $\mathbf{B}$, получим следующее уравнение для определения Фурье-компоненты напряженности электрического поля $\mathbf{E}$:

$$\left\{k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})\right\} E_j = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_{0j}(\omega, \mathbf{k}), \tag{8,2}$$

где $\mathbf{j}_0(\omega, \mathbf{k})$ — Фурье-компонента плотности тока внешних источников поля.

В изотропной и негиротропной среде, когда тензор диэлектрической проницаемости имеет вид (2,11), из уравнений (8,2) находим следующее выражение для Фурье-компоненты напряженности электрического поля $\mathbf{E}$:

$$E_i = \frac{4\pi i\omega}{k^2}\left\{\frac{k^2\left(\delta_{ij}-\frac{k_i k_j}{k^2}\right)}{c^2\left[k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega, k)\right]}-\frac{k_i k_j}{\omega^2\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega, k)}\right\} j_{0j}(\omega, \mathbf{k}). \qquad (8,3)$$

Напряженность электрического поля в среде в произвольной точке в момент времени t при этом определяется с помощью формулы преобразования Фурье

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t}\int d\mathbf{k}\, e^{i\mathbf{kr}}\,\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}). \qquad (8,4)$$

Формулы (8,3) и (8,4) позволяют найти электромагнитное поле в изотропной и негиротропной среде, создаваемое произвольным источником поля с плотностью тока $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t)$. В случае, когда источником поля является точечный заряд, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t). \qquad (8,5)$$

При этом из формул (8,3) и (8,4) получаем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi i e}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,\frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}}{k^2}\left\{\frac{\mathbf{k}}{\varepsilon^{\mathrm{l}}}-\frac{k^2(\mathbf{kv})\left(\mathbf{v}-\frac{(\mathbf{kv})\mathbf{k}}{k^2}\right)}{c^2\left[k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{\mathrm{tr}}\right]}\right\}. \qquad (8,6)$$

Взяв значение напряженности электромагнитного поля в точке нахождения заряда, т. е. в точке $\mathbf{r}=\mathbf{v}t$, с помощью формулы (8,1) находим потерю энергии частицы на единицу длины ее пути в среде [6, 32]

$$W = \frac{ie^2}{2\pi^2 v}\int d\mathbf{k}\,\frac{(\mathbf{kv})}{k^2}\left\{\frac{1}{\varepsilon^{\mathrm{l}}(\mathbf{kv}, k)}-\frac{k^2\left[v^2-\frac{(\mathbf{kv})^2}{k^2}\right]}{c^2\left[k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\mathbf{kv}, k)\right]}\right\}. \qquad (8,7)$$

Вводя обозначения $\omega = \mathbf{kv}$, $q^2 = k^2-\frac{(\mathbf{kv})^2}{v^2}$, запишем формулу (8,7) в следующем виде:

$$W = \frac{ie^2}{\pi v^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega\, d\omega\int\limits_0^{\infty}\frac{q\, dq}{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\left\{\frac{1}{\varepsilon^{\mathrm{l}}\left(\omega, \sqrt{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\right)}-\right.$$
$$\left.-\frac{v^2}{c^2}\,\frac{q^2}{q^2+\omega^2\left[\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\varepsilon^{\mathrm{tr}}\left(\omega, \sqrt{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\right)\right]}\right\}. \qquad (8,8)$$

Так как действительные и мнимые части продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей являются четными функциями частоты, а мнимые части — нечетными, из формулы (8,8) имеем

$$W = W^{\mathrm{l}} + W^{\mathrm{tr}}, \qquad (8,9)$$

где

$$W^{\mathrm{l}} = -\frac{2e^2}{\pi v^2}\int\limits_0^{\infty}\omega\, d\omega\int\limits_0^{\infty}\frac{q\, dq}{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{\varepsilon^{\mathrm{l}}\left(\omega, \sqrt{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\right)}, \qquad (8,10)$$

$$W^{\mathrm{tr}} = \frac{2e^2}{\pi c^2}\int\limits_0^{\infty}\omega\, d\omega\int\limits_0^{\infty}\frac{q^3\, dq}{q^2+\frac{\omega^2}{v^4}}\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{q^2+\omega^2\left[\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\varepsilon^{\mathrm{tr}}\left(\omega, \sqrt{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\right)\right]}. \qquad (8,11)$$

С первого взгляда может показаться, что существенный вклад в потери энергии заряженной частицы в среде вносят лишь те области изменения аргументов ω и $\mathbf{k}$, в которых имеется значительное поглощение. Это, однако, не так. В выражении (8,8) содержится также заметный вклад от тех областей, в которых мнимые части ε^l и ε^{tr} пренебрежимо малы. Дело в том, что в таких областях знаменатели первого и второго членов в фигурных скобках (8,8) могут, вообще говоря, проходить через нуль, а подынтегральное выражение при этом может иметь полюса. В § 4 было показано, что для сред, находящихся в термодинамически равновесном состоянии, $\operatorname{Im}\varepsilon^l \geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\varepsilon^{tr} \geqslant 0$. Учитывая это обстоятельство, а также используя соотношение

$$\lim_{\delta\to+0} \frac{1}{x+i\delta} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x),$$

находим следующие вклады в W^l и W^{tr}, обусловленные теми областями переменных ω и $\mathbf{k}$, в которых отсутствует поглощение:

$$\Delta W^l = \frac{2e^2}{v^2}\int \omega\, d\omega \int \frac{q\, dq}{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\, \delta\left[\varepsilon^l\left(\omega, \sqrt{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\right)\right], \tag{8,12}$$

$$\Delta W^{tr} = \frac{2e^2}{c^2}\int \omega\, d\omega \int \frac{q^3\, dq}{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\, \delta\left[q^2+\omega^2\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\,\varepsilon^{tr}\left(\omega, \sqrt{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\right)\right)\right]. \tag{8,13}$$

Интегрирование по ω и q в этих выражениях распространяется по областям слабого поглощения в среде. Из формул (8,12) и (8,13) видно, что в областях слабого поглощения потери энергии определяются теми значениями переменных ω и $\mathbf{k}$, в которых аргументы δ-функций, входящих в эти формулы, равны нулю. Согласно (6,4) и (6,5) эти значения ω и $\mathbf{k}$ соответствуют продольным и поперечным электромагнитным волнам в изотропной и негиротропной среде.

Выражение для потери энергии частицы в среде мы записывали в виде суммы двух слагаемых W^l и W^{tr}. Первое слагаемое W^l в (8,9) представляет собой потерю энергии нерелятивистского электрона в среде и обусловлено излучением продольных электромагнитных волн, второе же слагаемое W^{tr} представляет потерю энергии электрона на возбуждение в среде поперечных электромагнитных волн. Часто в литературе энергетические потери частицы, соответствующие величине W^l, называются поляризационными, или боровскими потерями, в то время как потери, связанные с членом W^{tr} в (8,9), называются черенковскими потерями. Следует подчеркнуть, что такое деление носит в некотором смысле условный характер, поскольку как первое, так и второе слагаемые в (8,9) относятся к потерям энергии заряженной частицы на возбуждение соответственно продольных и поперечных электромагнитных волн в среде. В анизотропной среде, в которой деление электромагнитных волн на продольные и поперечные, вообще говоря, невозможно, теряет смысл деление потерь на поляризационные и черенковские.

В случае движения заряженной частицы в анизотропной среде из формул (8,1), (8,2) и (8,4) получаем следующее выражение для потери энергии частицы на единицу длины пути ее движения [30]:

$$W = \frac{ie^2}{2\pi^2 vc^2}\int d\mathbf{k}\,(\mathbf{kv})\left[(v_i\alpha_{ij}^{-1}v_j) + \frac{(v_i\alpha_{ij}^{-1}k_j)(k_i\alpha_{ij}^{-1}v_j)}{1-k_i\alpha_{ij}^{-1}k_j}\right], \tag{8,14}$$

где

$$a_{ij} = k^2\delta_{ij} - \frac{(\mathbf{kv})^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}).$$

Для непоглощающей среды энергетические потери частицы в среде будут определяться полюсами подынтегрального выражения в (8,14). Эти полюса совпадают с корнями уравнения (6,3), представляющего дисперсионное уравнение электромагнитных волн в анизотропной среде.

Формула (8,14) значительно упрощается в том случае, когда в среде для всех значений аргументов ω и $\mathbf{k}$ можно считать выполненным неравенство $\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \ll 1$. При этом формула (8,14) принимает следующий вид:

$$W = -\frac{ie^2}{2\pi^2 v}\int \frac{(\mathbf{kv})\,d\mathbf{k}}{k_i\varepsilon_{ij}(\mathbf{kv}, \mathbf{k})\,k_j}. \tag{8,15}$$

Так как выражение (8,15) получается из (8,14) формальным переходом к пределу $c \to \infty$, говорят, что оно определяет полные нерелятивистские потери энергии заряженной частицы в анизотропной среде.

Из вышеизложенного следует, что деление потерь на продольные и поперечные, как это имеет место в изотропной среде, в случае анизотропной среды теряет смысл. Однако при этом можно говорить о нерелятивистских потерях быстрой частицы, определяемых выражением (8,15), и о полных потерях частицы, определяемых формулой (8,14).

Выясним теперь, к каким характерным особенностям для потерь в изотропной и негиротропной среде приводит учет пространственной дисперсии. Рассмотрим каждое слагаемое в формуле (8,9) в отдельности.

Как мы уже отмечали выше, величина W^1 представляет собой потерю энергии заряженной частицы, обусловленную излучением продольных волн в среде. Пусть частица с импульсом $\mathbf{p}$ в результате взаимодействия со средой излучает продольную электромагнитную волну с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$ и при этом рассеивается на угол $\vartheta \ll 1$. На языке квантовой механики такую волну можно назвать продольным квантом с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$. Из законов сохранения энергии и импульса получаем

$$\hbar^2k^2 = p^2\vartheta^2 + \frac{\hbar^2\omega^2}{v^2} = (\Delta\mathbf{p})^2 + p^2\vartheta^2. \tag{8,16}$$

Отсюда, учитывая обозначения $k^2 = q^2 + \frac{\omega^2}{v^2}$, имеем $q = \frac{p\vartheta}{\hbar}$. Следует заметить, что такая квантовомеханическая трактовка имеет место лишь в области прозрачности среды, когда мнимые части ω и $\mathbf{k}$ малы. Из формулы (8,10) находим следующее выражение для вероятности рассеяния быстрой частицы на угол $\vartheta \ll 1$ с испусканием продольного кванта с частотой ω при движении в среде за единицу времени:

$$\frac{v\,dW^1}{\hbar\,\omega\,d\omega\vartheta\,d\vartheta} = -\frac{2e^2}{\pi\hbar v}\,\frac{1}{\vartheta^2+\left(\frac{\hbar\omega}{pv}\right)^2}\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{\varepsilon^1\left(\omega, \sqrt{\left(\frac{p\vartheta}{\hbar}\right)^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\right)}. \tag{8,17}$$

Используя соотношение $\omega = \mathbf{kv}$, а также формулу (8,16), из выражения (8,17) легко получить вероятность испускания в единицу времени продольного кванта с волновым вектором $\mathbf{k}$ быстрым электроном, движущимся в среде со скоростью $\mathbf{v}$. Для непоглощающих сред такая вероятность равна

$$\frac{v\,dW^1}{\hbar\omega\,d\mathbf{k}} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\,\frac{\delta\,[\varepsilon^1(\mathbf{kv}, \mathbf{k})]}{k^4}. \tag{8,18}$$

При пренебрежении пространственной дисперсией формула (8,17) принимает следующий вид [2]:

$$\frac{v dW^1}{\hbar\omega\, d\omega\vartheta\, d\vartheta} = -\frac{2e^2}{\pi\hbar v}\frac{1}{\vartheta^2+\left(\frac{\hbar\omega}{pv}\right)^2}\operatorname{Im}\frac{1}{\varepsilon(\omega)}, \tag{8,19}$$

где $\varepsilon(\omega)=\varepsilon^1(\omega, 0)$. Сравнивая формулы (8,17) и (8,19), заключаем, что учет пространственной дисперсии изменяет угловую зависимость вероятности рассеяния быстрой частицы в среде с испусканием продольного кванта. В некоторых случаях при не очень малых углах рассеяния различие между (8,17) и (8,19) может оказаться весьма существенным.

Формула (8,18) для вероятности испускания продольного кванта при пренебрежении пространственной дисперсией принимает вид

$$\frac{v dW^1}{\hbar\omega\, d\mathbf{k}} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\frac{\delta\,[\varepsilon^1(\mathbf{kv})]}{k^2}. \tag{8,20}$$

Наконец, укажем еще один вид записи выражения для продольных (поляризационных) потерь (8,10), используемый в случае, когда пространственной дисперсией можно пренебречь. Выразив диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega)$ через показатель преломления n' и коэффициент поглощения $\varkappa$

$$\varepsilon(\omega)=(n'+i\varkappa)^2=n^2(\omega)$$

и проинтегрировав по q, из формулы (8,10) получим

$$W^1=\frac{2e^2}{\pi v^2}\int_0^\infty \omega\, d\omega \frac{2n'\varkappa}{(n'^2+\varkappa^2)^2}\ln\frac{q_0 v}{\omega}. \tag{8,21}$$

Верхний предел интегрирования по q, величина q_0, определяется из условия возможности пренебрежения пространственной дисперсией продольной диэлектрической проницаемости в выражении (8,10).

Совершенно аналогично из формулы (8,11) получаем выражение для вероятности рассеяния быстрой частицы в единицу времени с испусканием поперечного кванта с частотой ω:

$$\frac{v dW^1}{\hbar\omega\, d\omega\vartheta\, d\vartheta} = \frac{2e^2p^2}{\pi\hbar^3c^2}\frac{\vartheta^2}{\vartheta^2+\left(\frac{\hbar\omega}{pv}\right)^2}\operatorname{Im}\frac{1}{\left(\frac{p\vartheta}{\hbar}\right)^2+\omega^2\left[\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\varepsilon^{\mathrm{tr}}\left(\omega, \sqrt{\left(\frac{p\vartheta}{\hbar}\right)^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\right)\right]}. \tag{8,22}$$

Так же, как и в (8,17), угловая зависимость в выражении (8,22) отличается от угловой зависимости соответствующего выражения, полученного при пренебрежении пространственной дисперсией. Однако в отличие от (8,17) учет пространственной дисперсии в (8,22) для нерелятивистской частицы приводит к слабому эффекту, ибо, как это видно из формулы (8,22), изменения касаются лишь малого члена порядка $\frac{v^2}{c^2}\varepsilon^{\mathrm{tr}}$. Впрочем, и вклад выражения (8,22) в полную вероятность рассеяния частицы в среде на угол $\vartheta \ll 1$ при излучении электромагнитных волн является малым порядка $\frac{v^2}{c^2}$. Для релятивистской частицы эффект пространственной дисперсии может стать значительным. Учет пространственной дисперсии существенно сказывается на спектральном и угловом распределении поперечного излучения частицы. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим случай непоглощающей среды.

При этом

$$W^{tr}=-\frac{2e^2}{c^2}\int\limits_0^\infty \omega\,d\omega\int\limits_0^\infty \frac{q^3\,dq}{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\,\delta\Big(q^2+\omega^2\Big[\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\,\varepsilon^{tr}\Big(\omega,\sqrt{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\Big)\Big]\Big). \tag{8,23}$$

Пренебрегая в этом выражении пространственной дисперсией, получим

$$W^{tr}=-\frac{2e^2}{c^2}\int\limits_0^\infty \omega\,d\omega\int\limits_0^\infty \frac{q^3\,dq}{q^2+\frac{\omega^2}{v^2}}\,\delta\Big(q^2+\omega^2\Big[\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\,\varepsilon(\omega)\Big]\Big), \tag{8,24}$$

где $\varepsilon(\omega)=\varepsilon^{tr}(\omega, 0)$.

Из выражения (8,24) следует, что черенковское излучение с частотой ω имеет место лишь в том случае, если выполнено условие

$$v\geqslant\frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}=\frac{c}{n(\omega)},$$

где $n(\omega)$ — показатель преломления излученной поперечной волны. После интегрирования по q из (8,24) получаем окончательную формулу

$$W^{tr}=\frac{e^2}{c^2}\int\limits_0^\infty \omega\,d\omega\Big(1-\frac{c^2}{v^2n^2(\omega)}\Big), \tag{8,25}$$

определяющую полную интенсивность черенковского излучения.

Вводя угол θ между направлением движения заряженной частицы и направлением распространения черенковского излучения с частотой ω и замечая, что для черенковской волны $\omega=\mathbf{kv}=kv\cos\theta=n\frac{\omega}{c}v\cos\theta$, находим, что это излучение распределено по поверхности конуса с углом раствора

$$\cos\theta=\frac{c}{vn(\omega)}. \tag{8,26}$$

При учете пространственной дисперсии из формулы (8,23) получаем следующее условие излучения черенковской волны с частотой ω:

$$v>\frac{c}{n_i(\omega)},$$

где $n_i(\omega)$ — один из корней уравнения (6,8), представляющий собой дисперсионное уравнение поперечных электромагнитных волн в среде. При этом излучение распределяется по поверхности конуса с углом раствора θ_i:

$$\cos\theta_i=\frac{c}{vn_i(\omega)}. \tag{8,27}$$

Так как уравнение (6,8) имеет, вообще говоря, несколько корней, то и черенковское излучение с частотой ω может распределяться по поверхности нескольких конусов, в то время как при пренебрежении пространственной дисперсией все излучение распределено по поверхности одного конуса[13, 30].

§ 9. ФЛУКТУАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В результате флуктуационных колебаний плотности в материальной среде возникают местные спонтанные или, как говорят, случайные токи $\mathbf{j}_{ст}$, вызывающие появление флуктуационного электромагнитного поля. Вместо случайных токов удобнее вводить случайные индукции $\mathbf{K}$, связанные с $\mathbf{j}_{\text{ст}}$ соотношением

$$\mathbf{j}_{\text{ст}}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t}. \tag{9,1}$$

Эти величины называют также «сторонними», подчеркивая тем самым, что в уравнениях Максвелла для флуктуационных полей они играют роль сторонних (внешних) источников поля.

Теория флуктуаций электромагнитного поля в материальных средах при учете лишь частотной дисперсии диэлектрической проницаемости подробно разработана в [2,34-38]. Теории электромагнитных флуктуаций в средах с учетом пространственной дисперсии на сегодняшний день посвящено небольшое число работ [6,39-43]. В этом параграфе мы кратко осветим результаты этих работ.

Пусть в среде возникает случайный ток с частотой ω. Этот ток, рассматриваемый как внешний источник, вызывает в среде флуктуационные электромагнитные поля. Следуя рассуждениям, приведенным в работе [2] (§ 90), получаем следующее выражение для корреляции случайных токов $\mathbf{j}_{\text{ст}}$ [40]:

$$(\mathbf{j}_{\text{ст}\,i}(\mathbf{r})\,\mathbf{j}_{\text{ст}\,j}(\mathbf{r}'))_\omega=-\frac{\hbar\omega}{4\pi}\left[\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{r},\mathbf{r}')+\sigma^*_{ji}(\omega,\mathbf{r}',\mathbf{r})\right]\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}. \tag{9,2}$$

Используя соотношения (1,11) и (9,1), из выражения (9,2) получаем формулу корреляции флуктуаций случайных индукций в среде [6]

$$(K_i(\mathbf{r})\,K_j(\mathbf{r}'))_\omega=i\hbar\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\left[\varepsilon^*_{ji}(\omega,\mathbf{r}',\mathbf{r})-\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{r},\mathbf{r}')\right]. \tag{9,3}$$

Следует заметить, что нелокальность корреляции случайных токов и случайных индукций обусловлена пространственной дисперсией. При условии пренебрежения пространственной дисперсией

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{r},\mathbf{r}')=\varepsilon_{ij}(\omega)\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\quad \sigma_{ij}(\omega,\mathbf{r},\mathbf{r}')=\sigma_{ij}(\omega)\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

Формулы (9,2) и (9,3) в этом случае принимают обычный вид [2]

$$(j_{\text{ст}\,i}(\mathbf{r})\,j_{\text{ст}\,j}(\mathbf{r}'))_\omega=-\frac{\hbar\omega}{4\pi}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\left(\sigma_{ij}(\omega)+\sigma^*_{ji}(\omega)\right)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{9,4}$$

$$(K_i(\mathbf{r})\,K_j(\mathbf{r}'))_\omega=i\hbar\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\left(\varepsilon^*_{ji}(\omega)-\varepsilon_{ij}(\omega)\right)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{9,5}$$

Рассмотрим теперь случай пространственно однородной, изотропной и негиротропной среды Воспользовавшись разложением Фурье по координатам и имея в виду соотношение (2,11), из формул (9,2) и (9,3) получим

$$(j_{\text{ст}\,i}(\mathbf{k})\,j_{\text{ст}\,j}(\mathbf{k}'))_\omega=-\frac{\hbar\omega}{(2\pi)^4}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\left\{\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\operatorname{Re}\sigma^{\text{tr}}(\omega,k)+\right.$$
$$\left.+\frac{k_ik_j}{k^2}\operatorname{Re}\sigma^{1}(\omega,k)\right\}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'), \tag{9,6}$$

$$(K_i(\mathbf{k})\,K_j(\mathbf{k}'))_\omega=\frac{2\hbar}{(2\pi)^3}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\left\{\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\operatorname{Im}\varepsilon^{\text{tr}}(\omega,k)+\right.$$
$$\left.+\frac{k_ik_j}{k^2}\operatorname{Im}\varepsilon^{1}(\omega,k)\right\}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'). \tag{9,7}$$

Чтобы определить корреляцию флуктуаций электрического поля в среде, необходимо решить уравнения Максвелла, в которых роль внешних источников играют случайные индукции. Для изотропной и негиротропной среды имеем

$$\left\{k^2\delta_{ij} - k_ik_j - \frac{\omega^2}{c^2}\left[\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\varepsilon^{tr} + \frac{k_ik_j}{k^2}\varepsilon^{l}\right]\right\} E_j(\mathbf{k}) = \frac{\omega^2}{c^2}K_i(\mathbf{k}). \tag{9,8}$$

Из решения этого уравнения при учете формулы (9,7) получаем [42]

$$(E_i(\mathbf{k})\,E_j(\mathbf{k}'))_\omega = \frac{2\hbar}{(2\pi)^3}\,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\,\psi_{ij}(\omega,\,\mathbf{k})\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'), \tag{9,9}$$

где *) 72

$$\psi_{ij}(\omega,\,\mathbf{k}) = \frac{k_ik_j}{k^2}\,\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon^l}{|\varepsilon^l|^2} + \frac{\omega^4}{c^4}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}}{\left|k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}\right|^2}. \tag{9,10}$$

Наконец, используя обратное преобразование Фурье, находим пространственную корреляцию электрического поля в изотропной и негиротропной среде

$$(E_i(\mathbf{r})\,E_j(\mathbf{r}'))_\omega = 2\hbar\,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\,\Phi_{ij}(\omega,\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{9,11}$$

где

$$\Phi_{ij}(\omega,\,\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}\psi_{ij}(\omega,\,\mathbf{k}). \tag{9,12}$$

Отметим, что первое слагаемое правой части (9,9) соответствует корреляции продольного поля, в то время как второе слагаемое обусловлено поперечным полем. В связи с этим корреляционная формула для продольного поля может быть записана в виде [42]

$$(\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r})\,\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}'))_\omega = 2\hbar\,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\,\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon^l}{|\varepsilon^l|^2}. \tag{9,13}$$

Аналогично может быть записана корреляционная формула для поперечного электромагнитного поля. Производя упрощение по индексам i и j в формуле (9,11), получим

$$(\mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathbf{E}(\mathbf{r}'))_\omega = 2\hbar\,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}\left\{\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon^l}{|\varepsilon^l|^2} + 2\,\frac{\omega^4}{c^4}\,\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}}{\left|k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}\right|^2}\right\}, \tag{9,14}$$

где $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Если в этом выражении пренебречь пространственной дисперсией и учесть соотношение (3,9), оно приобретает известный вид [2]

$$(\mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathbf{E}(\mathbf{r}'))_\omega = \\ = 2\hbar\,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\left\{\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)}{|\varepsilon(\omega)|^2}\,\delta(\mathbf{R}) - \frac{1}{4\pi}\,\frac{i\omega^2}{Rc^2}\left[e^{-\frac{\omega}{c}\sqrt{-\varepsilon(\omega)}\,R} - e^{-\frac{\omega}{c}\sqrt{-\varepsilon^*(\omega)}\,R}\right]\right\}. \tag{9,15}$$

Одной из особенностей этой формулы является наличие δ-функции перед членом, пропорциональным мнимой части диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и приводящим к бесконечно большим флуктуациям продольного поля в поглощающих средах. Выражение же (9,14) не содержит указанной сингулярности вида $\delta(\mathbf{R})$. Второй особенностью формулы (9,15) является наличие расходимости флуктуации продольного поля при $\varepsilon(\omega)=0$, т. е. когда и мнимая и действительная части диэлектрической проницаемости равны нулю. Физическая причина такой рас-

*) Заметим, что из выражений (9,9) и (9,10) следуют неравенства (4,13).

ходимости довольно проста[42]. Дело в том, что условие $\varepsilon(\omega)=0$ является условием возможности продольных колебаний, причем частота колебаний не зависит от волнового вектора. Следовательно, одной частоте продольных колебаний отвечает бесконечное число волн с любыми волновыми векторами. Последнее означает, что флуктуационное продольное поле с частотой продольных колебаний соответствует тепловому возбуждению бесконечного числа степеней свободы, что и приводит к сингулярности в формуле (9,15) при частоте, равной частоте продольных колебаний. Легко понять, что при учете пространственной дисперсии, когда частота продольных волн становится функцией волнового вектора, указанной сингулярности не должно быть. Действительно, из формулы (9,11) видно, что корреляция флуктуации продольного поля при $\varepsilon^{l}(\omega, k)=0$ не обладает особенностью. Это обусловлено тем, что при учете пространственной дисперсии продольные волны, так же как и поперечные волны, становятся равноправной ветвью нормальных волн в среде и приводят к эффектам, аналогичным возникающим от поперечных электромагнитных волн.

В случае непоглощающей среды из выражения (9,9) легко получить следующие формулы для флуктуаций продольного и поперечного полей в среде:

$$\begin{gathered}(\mathbf{E}^{l}(\mathbf{k}))^2=\frac{\hbar}{(2\pi)^2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\,\delta\left[\varepsilon^{l}(\omega, k)\right],\\ (\mathbf{E}^{\mathrm{tr}}(\mathbf{k}))^2=\frac{2\hbar}{(2\pi)^2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\,\delta\left[\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega, k)-\frac{c^2k^2}{\omega^2}\right].\end{gathered}\tag{9,16}$$

Подставляя эти выражения в формулу (4,19), определяющую плотность энергии электромагнитного поля в непоглощающей среде, получим[43]

$$\begin{gathered}\frac{dW^{l}}{d\omega}=\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^3}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\sum_i (n_{\parallel}^{i}(\omega))^2\frac{d}{d\omega}(\omega n_{\parallel}^{i}(\omega)),\\ \frac{dW^{\mathrm{tr}}}{d\omega}=\frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\varkappa T}\sum_i (n_{\perp}^{i}(\omega))^2\frac{d}{d\omega}(\omega n_{\perp}^{i}(\omega)),\end{gathered}\tag{9,17}$$

где $n_{\parallel}^{i}$ и $n_{\perp}^{i}$ — показатели преломления для продольных и поперечных волн, т. е. решения уравнений (6,7) и (6,8) соответственно.

В заключение рассмотрим вопрос о симметрии тензора диэлектрической проницаемости среды. Воспользуемся свойством временнóй симметрии флуктуаций электрического поля

$$(E_i(\mathbf{r})\,E_j(\mathbf{r}'))_\omega=(E_j(\mathbf{r}')\,E_i(\mathbf{r}))_\omega.\tag{9,18}$$

Совершенно аналогичным свойством симметрии обладают и флуктуации случайных индукций $\mathbf{k}$. Следствием этого согласно (9,5) является равенство

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')-\varepsilon_{ji}^{*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r})=\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r})-\varepsilon_{ij}^{*}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}').\tag{9,19}$$

Отсюда имеем

$$\varepsilon_{ij}'(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')=\varepsilon_{ji}'(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}),\tag{9,20}$$

где $\varepsilon_{ij}'(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — действительная часть тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Но действительная и мнимая части тензора диэлектрической проницаемости среды, находящейся в равновесном состоянии, связаны друг с другом линейными интегральными соотношениями — формулами Крамерса — Кронига. Действительно, $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ как функция ω, определенная с помощью одностороннего преобразования Фурье (2,2), является аналитической всюду в верхней полуплоскости комплексного переменного ω, за исключением, быть может, полосы конечной ширины $\operatorname{Im}\omega \geqslant \sigma \geqslant 0$. Для сред, находящихся в равновесном состоянии, $\sigma = +0$ (см. § 5). Поэтому для таких сред

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') - \delta_{ij} = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P \frac{\varepsilon_{ij}(\omega', \mathbf{r}, \mathbf{r}') - \delta_{ij}}{\omega' - \omega} d\omega', \tag{9,21}$$

где P обозначает, что интеграл следует понимать в смысле главного значения. Отделяя в (9,21) действительную и мнимую части, получим известные формулы Крамерса — Кронига *)

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') - \delta_{ij} &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P \frac{\varepsilon''_{ij}(\omega', \mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\omega' - \omega} d\omega', \\ \varepsilon''_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P \frac{\varepsilon'_{ij}(\omega', \mathbf{r}, \mathbf{r}') - \delta_{ij}}{\omega' - \omega} d\omega'. \end{aligned} \tag{9,22}$$

Из этих соотношений следует, что мнимая часть $\varepsilon''_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$, так же как и действительная $\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$, обладает свойством симметрии (9,20). Таким образом, мы приходим к окончательному результату

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}). \tag{9,23}$$

В случае неограниченной и пространственно однородной среды отсюда получаем следующее свойство симметрии тензора диэлектрической проницаемости [44]

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\mathbf{k}). \tag{9,24}$$

Вид соотношений (9,23) и (9,24) несколько меняется, если в среде имеется постоянное магнитное поле $\mathbf{B}_0$, создаваемое внешними источниками. В этом случае при изменении знака времени следует производить также замену $\mathbf{B}_0 \to -\mathbf{B}_0$. Поэтому вместо соотношения (9,23)

---

*) Для изотропной среды имеют место соотношения Крамерса—Кронига (9,21) как для продольной $\varepsilon^{l}(\omega, k)$, так и для поперечной $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ диэлектрических проницаемостей. Поэтому согласно (2,22) для магнитной проницаемости $\mu(\omega, k)$ получаем

$$1 - \left[\frac{1}{\mu(\omega, k)}\right]' = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \cdot \frac{\mu''(\omega', k)}{|\mu(\omega', k)|^2},$$

$$\frac{\mu''(\omega, k)}{|\mu(\omega, k)|^2} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \left\{1 - \left[\frac{1}{\mu(\omega', k)}\right]'\right\}.$$

Если функция $\mu''(\omega, k)$ при $\omega = 0$ не имеет особенностей, то из этих формул, в частности, имеем следующее соотношение для статической магнитной проницаемости изотропной среды

$$\left[\frac{1}{\mu(\omega, k)}\right]' = 1 - \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} \frac{\mu''(\omega', k)}{|\mu(\omega', k)|^2}.$$

В § 4 мы уже отмечали, что величина $\mu''(\omega, k)$, в отличие от $\varepsilon^{l''}(\omega, k)$ и $\varepsilon^{tr''}(\omega, k)$, может быть как положительной, так и отрицательной. Действительно, неравенство $\mu''(\omega, k) > 0$ (или $\mu''(\omega, k) < 0$) означало бы невозможность существования диамагнитных (или парамагнитных) сред.

получим

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{B}_0) = \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}, -\mathbf{B}_0). \qquad (9,25)$$

В случае же неограниченной и пространственно однородной среды имеем

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{B}_0) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\mathbf{k}, \mathbf{B}_0). \qquad (9,26)$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, М., Гостехиздат, 1946.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
3. М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ 22, 303 (1952).
4. В. Л. Гинзбург, Электромагнитные волны в плазме, М., Физматгиз, 1960.
5. В. П. Силин, ЖЭТФ 35, 1001 (1958).
6. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., Атомиздат, 1961.
7. J. Lindhard, Det. Kong. Danske Vid. Selskab. Dan. Mat. Fys. Medd. 28, № 8 (1954).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статическая физика, М., Гостехиздат, 1951.
9. А. А. Власов, Макроскопическая электродинамика, М., Гостехиздат, 1955.
10. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, М., Гостехиздат, 1948.
11. J. Doetsch, Theorie und Andwendung der Laplace Transformatione, 1948 (см. Г. Дёч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, М., Физматгиз, 1958).
12. В. П. Силин, Физ. металлов и металловедение 10, 942 (1960).
13. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 34, 1594 (1958).
14. В. М. Агранович, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ 35, 982 (1958).
15. С. И. Пекар, ЖЭТФ 33, 1022 (1957); 34, 1176 (1958); 35, 522 (1958); 36, 451 (1959).
16. Г. С. Ландсберг, Оптика, М., Гостехиздат, 1957.
17. И. Е. Тамм, И. М. Франк, ДАН СССР 14, 107 (1937).
18. Е. Fermi, Phys. Rev. 57, 485 (1940).
19. Н. Бор, Прохождение атомных частиц через вещество, М., ИЛ, 1950.
20. Б. М. Болотовский, УФН 62, 201 (1957).
21. А. А. Власов, Теория многих частиц, М., Гостехиздат, 1950.
22. А. И. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ 23, 161 (1952).
23. D. Pines, D. Bohm, Phys. Rev. 82, 625 (1951); 85, 338 (1955).
24. J. Hubbard, Proc. Phys. Soc. A62, 441, 977 (1955).
25. J. Neufeld, R. H. Ritchie, Phys. Rev. 98, 1632 (1955).
26. H. Fröhlich, H. Pelzer, Proc. Phys. Soc. A68, 525 (1955).
27. D. Pines, Revs. Mod. Phys. 28, 184 (1956), УФН 62, 399 (1957).
28. R. H. Ritchie, Phys. Rev. 106, 874 (1957).
29. Е. Л. Фейнберг, ЖЭТФ 34, 1125 (1958).
30. В. М. Агранович, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ 35, 1171 (1958); В. М. Агранович, В. Е. Пафомов, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ 36, 238 (1959).
31. А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Тр. Харьк. гос. ун-та 7, 5 (1958).
32. В. П. Силин, ЖЭТФ 37, 873 (1959); Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, УФН 70, 247 (1960).
33. А. И. Ларкин, ЖЭТФ 37, 264 (1959).
34. В. Л. Грановский, Электрические флуктуации, М., Гостехиздат, 1936.
35. М. А. Леонтович, С. М. Рытов, ЖЭТФ 23, 246 (1952); ДАН СССР 87, 535 (1952).
36. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, М., Изд. АН СССР, 1953.
37. М. Л. Левин, ДАН СССР 102, 53 (1955).
38. Ф. Б. Бункин, Диссертация, ФИАН (1955).
39. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ 34, 173 (1958).
40. Ф. Г. Басс, М. И. Каганов, ЖЭТФ 34, 1154 (1958).
41. В. Д. Шафранов, в сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. 4, М., Изд. АН СССР, 1958, стр. 416.
42. В. П. Силин, Изв. вузов (Радиофизика) 2, 198 (1959).
43. В. П. Силин, Изв. вузов (Радиофизика) 4 (в печати).
44. О. В. Константинов, В. И. Перель, ЖЭТФ 37, 786 (1959).