

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ

А. А. Вedenov, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев

## СОДЕРЖАНИЕ

I. Введение . . . . .	701
1. Линейная и нелинейная теории устойчивости . . . . .	703
2. Колебательная и аperiodическая неустойчивости . . . . .	704
3. Методы описания плазмы . . . . .	705
II. Аperiodическая неустойчивость плазмы . . . . .	709
4. Идеальная плазма . . . . .	709
5. Аperiodическая неустойчивость плазмы с учетом диссипативных процессов . . . . .	727
III. Колебательная неустойчивость плазмы . . . . .	732
6. Неустойчивость пучков в плазме . . . . .	732
7. Микроскопическая неустойчивость «немаксвелловской» плазмы . . . . .	738
8. Раскачка колебаний в плазме при наличии относительного движения ионов и электронов . . . . .	742
9. Микроскопические неустойчивости неоднородной плазмы . . . . .	744
10. Устойчивость течений плазмы в магнитном поле . . . . .	746
11. «Колебательная конвекция» в плазме . . . . .	750
12. Неустойчивость положительного столба газового разряда в магнитном поле . . . . .	751
IV. Вопросы нелинейной теории устойчивости . . . . .	752
13. Установившаяся конвекция в плазме и «аномальная диффузия» . . . . .	752
14. КвазILINEЙНОЕ приближение при рассмотрении колебательных неустойчивостей в разреженной плазме . . . . .	757
15. Развитая неустойчивость . . . . .	759
Приложения . . . . .	761
Цитированная литература . . . . .	765

## I. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы устойчивости состояний плазмы, которым посвящен настоящий обзор, как с теоретической, так и с практической точек зрения, играют не менее важную роль в физике плазмы, чем соответствующий вопрос устойчивости в обычной гидродинамике, а решение их, пожалуй, более трудно.

Одно из важнейших приложений теории устойчивости плазмы находит в проблеме контролируемого термоядерного синтеза. Уже само создание и нагрев плазмы в лабораторных условиях требуют ее изоляции. Изоляция может осуществляться лишь при помощи внешних или собственных полей. Эти поля должны в достаточной мере уменьшить диффузионный поток тепла и частиц из области, занятой плазмой. Такое состояние плазмы в известном смысле можно назвать метастабильным.

Однако необходимы весьма жесткие условия для того, чтобы метастабильное состояние могло существовать достаточное время. При этом не должны возбуждаться не только макроскопические степени свободы

(что привело бы к уходу плазмы как целого из занимаемой области), но и микроскопические, так как возникающие при раскачке колебаний поля резко увеличивают диффузию частиц.

Кроме того, ряд способов нагрева обычно связан с возбуждением отдельных степеней свободы плазмы. Например, нагрев плазмы, помещенной в стационарное магнитное поле, электромагнитным полем, имеющим частоту, близкую к циклотронной частоте ионов или электронов (так называемый нагрев на циклотронном резонансе), увеличивает лишь энергию вращения частиц по ларморовским орбитам в поле, нагрев током увеличивает кинетическую энергию электронов и т. д. При этом также может возникать неустойчивость и значительная часть энергии может перейти в энергию поля колебаний. Под воздействием поля опять-таки увеличивается диффузионный поток частиц.

В настоящее время существует лишь теория ламинарных движений плазмы. Теория устойчивости дает границы области ее применимости. Более того, теория устойчивости является необходимой основой для создания теории турбулентности плазмы.

С теорией устойчивости непосредственно связан вопрос о диссипации энергии в плазме за времена, значительно меньшие времени парных столкновений, т. е. вопрос о так называемой «бесстолкновительной» диссипации в плазме. Знание механизмов этой диссипации, связанных с обменом энергии между различными степенями свободы, также необходимо для построения теории турбулентной плазмы.

В настоящей статье авторы не стремились дать детальный анализ математического аппарата теории устойчивости; мы старались привести основные физические результаты теории устойчивости, получая их с помощью наглядных физических соображений. В тех немногих случаях, когда формальный подход, как нам казалось, быстрее достигает цели, мы не вдавались в качественные рассуждения.

Выбор материала и его расположение в обзоре производились таким образом, чтобы установить, насколько это возможно, внутренние связи между физическими причинами различных типов неустойчивости плазмы. Во вводной главе обсуждается постановка задачи, кратко излагаются различные подходы к вопросу об устойчивости (включая выбор приближений) и методы описания плазмы.

Гл. II посвящена так называемому аperiодическому типу неустойчивости (в этих случаях отклонение от равновесия монотонно растет со временем). Такого типа неустойчивости характерны в основном для равновесных статических конфигураций плазмы, удерживаемой давлением магнитного поля. Сюда входят, например, задачи об устойчивости плазмы в поле тяжести (проблема Крускала—Шварцшильда) и близкая к ним задача об устойчивости плазмы в «бочкообразном» магнитном поле (Лонгмайр, Розенблют), вопросы устойчивости пинча, т. е. столба плазмы с текущим по нему током и т. д. Далее рассмотрена устойчивость плазменного шнура при учете вращения, устойчивость плазмы, удерживаемой давлением высокочастотного электромагнитного поля.

Кроме того, рассмотрены некоторые типы аperiодической неустойчивости в разреженной плазме с немаксвелловским распределением скоростей в магнитном поле.

Вторая часть гл. II посвящена обсуждению влияния диссипативных эффектов на аperiодическую неустойчивость плазмы: устойчивости пинча с учетом конечной проводимости, устойчивости вращения реальной плазмы.

Колебательные типы неустойчивости плазмы и условия их возникновения описаны в гл. III (в этих случаях система, отклоняясь от началь-

ного состояния, совершает колебания с нарастающей амплитудой). Здесь изложен вопрос о так называемой «пучковой» неустойчивости разреженной плазмы и вообще о неустойчивости немаксвелловской плазмы. Выведены критерии устойчивости относительно раскачки различных типов колебаний.

Некоторые колебательные типы неустойчивости характерны для течений плазмы в магнитном поле. Рассмотрению этого вопроса в магнитогидродинамическом приближении посвящен п. 10 гл. III. В заключение коротко обсуждаются условия возникновения периодической конвекции в неравномерно нагретой плазме, помещенной в магнитное поле, и вопрос о неустойчивости положительного столба газового разряда в магнитном поле.

Последняя, гл. IV, обзора посвящена обсуждению нелинейных эффектов в теории неустойчивости плазмы. Изложен так называемый «квазилинейный» метод в применении как к задачам гидродинамики плазмы (конвекция), так и к задачам о раскачке колебаний в разреженной плазме. Эти эффекты особенно важны для того, чтобы оценить влияние неустойчивостей на процессы переноса в плазме.

Отдельные математические выкладки из разных глав вынесены в приложения.

#### 1. Л и н е й н а я и н е л и н е й н а я т е о р и я у с т о й ч и в о с т и

Устойчивость состояния какой-либо системы исследуется методом возмущений. Если начальное возмущение стационарного состояния системы растет со временем, то состояние неустойчиво по отношению к такому виду возмущений.

Фактически наиболее полно исследован вопрос об устойчивости лишь по отношению к малым возмущениям. При этом рассматриваются настолько малые отклонения от исходного стационарного состояния, что уравнения, описывающие их, допускают линеаризацию, т. е. разложение по амплитуде возмущений и отбрасывание всех членов порядка выше первого. В основном настоящий обзор посвящен именно линейной теории устойчивости.

Ввиду линейности уравнений теории естественно применить метод разложения Фурье по времени и тем пространственным направлениям, в которых система однородна. При этом задача сводится к исследованию поведения отдельной компоненты Фурье какой-нибудь физической величины. Там, где подобный анализ приводит к недоразумениям, приходится обращаться к корректному решению задачи с начальными условиями. Однако обычно можно искать решение системы уравнений просто в виде

$$F(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r}) e^{-i\omega t},$$

где  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  — комплексная частота,  $F$  — отклонение какой-либо физической величины от стационарного значения.

Линейная теория устойчивости в принципе не отличает метастабильного состояния от стабильного, т. е. неприменима в том случае, когда одно стационарное состояние отделено барьером от другого. Эта задача относится уже к нелинейной теории устойчивости. За исключением нескольких частных случаев, относящихся к обычной гидродинамике, такая «докритическая» нелинейная теория устойчивости отсутствует.

Большой успех был достигнут в развитии «надкритической» теории устойчивости. В этой теории рассматривается влияние возмущений

на средний «фон»\*) и изучается развитие малых возмущений на этом фоне. При этом используются либо энергетические соображения, либо обычные методы теории возмущений. Физический смысл этого приближения заключается в том, что искажение среднего фона под действием возмущений уменьшает перенос энергии к возмущениям. При какой-то конечной амплитуде возмущений устанавливается баланс между потоком энергии возмущения и потоком диссипируемой в них энергии. Отсюда определяется стационарная амплитуда возмущений (общую постановку задачи см. в <sup>1</sup>).

Этот метод справедлив при небольшом превышении критических условий устойчивости. Если  $\lambda$  — некоторый параметр (критическое значение которого есть  $\lambda_k$ ), то движение складывается из стационарного движения и колебаний с амплитудой, пропорциональной корню квадратному из разности  $\lambda - \lambda_k$ . При этих условиях каждая мода развивается независимо и взаимодействием мод можно пренебречь. При дальнейшем уходе от критического состояния возникает взаимодействие различных мод с обменом энергии между ними.

Вопрос о том, при каких условиях в системе может развиваться турбулентность, выходит за рамки настоящего обзора.

## 2. Колебательная и аperiodическая неустойчивости

Физически имеет смысл различать два типа неустойчивости:

- а) аperiodический уход, при котором возникает монотонно нарастающее во времени отклонение от положения равновесия, и
- б) колебания с растущей во времени амплитудой.

Математически условие того, что уход является аperiodическим, есть  $\text{Re } \omega = 0$ , так что все величины, характеризующие отклонение от равновесия, имеют вид

$$F(\mathbf{r})e^{\omega_i t},$$

где  $\omega_i$  — действительное число. Критерий такой неустойчивости удобно формулировать в энергетических терминах. Система неустойчива, если существуют возмущения, приводящие к уменьшению ее потенциальной энергии.

Неустойчивость называется колебательной, если  $\text{Re } \omega \neq 0$ , т. е. в системе существуют нарастающие во времени осциллирующие возмущения. Такой тип неустойчивости может быть вызван следующими причинами.

В ряде случаев в системе координат, двигающейся с некоторой скоростью, может осуществляться резонанс между группой частиц плазмы и волной возмущения. Такое явление, приводящее к развитию колебательной неустойчивости, мы назовем фазовым резонансом.

Колебательная неустойчивость может возникать также из-за конкуренции релаксационных процессов, таких, как, например, теплопроводность и диффузия магнитного поля при конвекции.

При изучении колебательной неустойчивости возникает вопрос об ее характере. Если малые возмущения, возникающие в некоторой конечной области пространства, растут в этой области неограниченно при  $t \rightarrow \infty$ , то мы будем называть такую неустойчивость абсолютной. Если же параллельно с ростом они выносятся из системы, то такую неустойчивость мы назовем сносовой.

\*) Термин «фон» мы используем для характеристики стационарного состояния. В данном случае стационарным является состояние, усредненное по многим периодам малых колебаний.

## 3. Методы описания плазмы

Прежде чем приступить к изложению результатов, накопившихся в обширной литературе по устойчивости плазмы, охарактеризуем вкратце исходный математический аппарат, который применяется для описания плазмы при решении задач об устойчивости тех или иных ее состояний.

В целом ряде случаев плазма, представляющая собой совокупность электронного и ионных (в плазме может быть нескольких сортов ионов) газов\*), описывается функциями распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  для каждого сорта зарядов. Эти функции распределения, в принципе, могут быть найдены из решения системы кинетических уравнений Больцмана, учитывающих, помимо парных соударений частиц, действие электрических и магнитных полей на частицы плазмы. Сами же поля связаны в свою очередь уравнениями Максвелла с пространственными плотностями тока  $e \int f \mathbf{v} d\mathbf{v}$  и заряда  $e \int f d\mathbf{v}$ .

Для получения сколько-нибудь обозримых физических результатов обычно прибегают к упрощенным математическим моделям, позволяющим при некоторых предположениях использовать вместо уравнений Больцмана значительно более простые уравнения.

Так же как и в обычном газе, если рассматривать пространственные масштабы  $L$ , значительно превышающие среднюю длину свободного пробега  $l_c$  ионов (электронов) до столкновения, можно пользоваться газодинамическим приближением.

Формально система уравнений магнитной газодинамики представляет собой систему уравнений для низших (до третьего включительно) моментов функций распределения ионов и электронов и уравнений Максвелла для самосогласованных полей в предположении квазинейтральности плазмы. Последнее предположение, справедливое для масштабов, значительно больших дебаевского радиуса, в газодинамическом случае заведомо выполняется.

При исследовании устойчивости в магнитной гидродинамике можно рассматривать плазму как идеальную жидкость, т. е. выбрасывать из исходных уравнений магнитной гидродинамики члены, связанные с диссипативными эффектами.

Это приближение имеет смысл, если интересующие нас процессы протекают за времена, значительно меньшие времени диффузии поля

$$\tau_m = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2},$$

где  $L$  — характерный размер, а  $\sigma$  — проводимость плазмы, характерного времени «диффузии скорости»

$$\tau_v = \frac{L^2}{\nu},$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость, и характерного времени диффузии температуры

$$\tau_T = \frac{L^2}{\chi},$$

---

\*) Здесь мы сразу ограничиваемся «газовым» приближением, т. е. считаем плазму почти идеальным газом, что справедливо, если дебаевский радиус ионов (электронов) значительно превышает среднее расстояние между частицами. Однако ряд результатов по устойчивости, относящихся, в особенности, к магнитогидродинамическому приближению, имеет более широкую область применения.

где  $\chi$  — коэффициент температуропроводности плазмы. Соответствующие безразмерные параметры называются магнитным числом Рейнольдса

$$\text{Re}_m = \frac{\tau_m}{\tau} = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2\tau},$$

где  $\tau$  — масштаб времени, гидродинамическим числом Рейнольдса

$$\text{Re}_g = \frac{\tau_g}{\tau} = \frac{L^2}{\nu\tau}$$

и числом Пекле

$$\text{Pe} = \frac{\tau_T}{\tau} = \frac{L^2}{\chi\tau}.$$

Итак, для применимости приближения «идеальной» плазмы необходимо, чтобы

$$\text{Re}_m \gg 1, \quad \text{Re}_g \gg 1, \quad \text{Pe} \gg 1.$$

Следует заметить, что иногда эти условия оказываются недостаточными, так как существует целый класс явлений при  $R \gg 1$ , не описываемых моделью идеальной плазмы, — явления, связанные с так называемым парадоксом нулевой и исчезающей диссипации (см. пп. 5а и 10). Получающаяся в этом приближении система уравнений идеальной магнитной гидродинамики имеет вид

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div } \varrho \mathbf{v} = 0, \quad (3,1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p + \frac{1}{4\pi\varrho c} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}], \quad (3,2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{H}], \quad (3,3)$$

$$p = p(\varrho). \quad (3,4)$$

В этой системе (3,1) — уравнение непрерывности для плотности  $\varrho$ ; (3,2) — уравнение движения, описывающее изменение средней скорости  $\mathbf{v}$  элемента плазмы под действием силы, связанной с перепадом давления  $p$ , и пондеромоторной силы  $\frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}]$ ; (3,3) — уравнение «приклеенности» силовых линий магнитного поля к идеально проводящей плазме и, наконец, (3,4) — уравнение состояния.

Пондеромоторную силу удобно записать в виде суммы двух членов:

$$\frac{1}{4\pi} [\mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{H}] = \nabla \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{H}.$$

Первый потенциальный член есть градиент «магнитного давления». Второй член дает проекцию

$$\mathbf{n} \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{H} = \frac{\mathbf{H}^2}{4\pi R},$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к силовой линии, а  $R$  — радиус кривизны последней, т. е. второй член по форме аналогичен упругой силе, возникающей при искривлении натянутой струны. Поэтому его называют «натяжением магнитных силовых линий». Эти наглядные представления будут часто использоваться в дальнейшем.

Введение диссипативных эффектов усложняет систему уравнений (3,1)–(3,4). Так, в правой части (3,2) появляется слагаемое

$$\eta \Delta \mathbf{v} + \left( \frac{\eta}{3} + \xi \right) \text{grad div } \mathbf{v},$$

обусловленное влиянием вязкости ( $\eta$ ,  $\xi$  — коэффициенты вязкости), а в правой части (3,3) появляется слагаемое, учитывающее электрическое сопротивление плазмы:

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H},$$

где  $\sigma$  — коэффициент электропроводности плазмы,  $c$  — скорость света в вакууме. Давление уже не подчиняется адиабатическому закону, и вместо (3,4) нужно пользоваться двумя уравнениями:  $p = p(\rho, T)$  и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left( \frac{v^2}{2} + c_p T \right) + \frac{H^2}{8\pi} \right\} = \\ = - \text{div} \left\{ \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + c_p T \right) + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] - (\mathbf{v} \hat{\sigma}') - \kappa \nabla T \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\sigma'_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \xi \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l},$$

$\kappa$  — коэффициент теплопроводности.  $\sigma$ ,  $\nu$ ,  $\kappa$  являются скалярными величинами лишь в том случае, если средняя длина свободного пробега значительно меньше средних ларморовских радиусов ионов (электронов).

В сильном же магнитном поле ларморовские радиусы  $r_H \sim \frac{v m c}{e H}$  ( $v$  — средняя тепловая скорость) могут стать малыми и наши уравнения усложнятся за счет неизотропии коэффициентов переноса. Сильное магнитное поле уменьшает, например, поток тепла поперек силовых линий в  $\frac{l_c^2}{r_H^2}$  раз\*).

Если интересующие нас характерные пространственные масштабы, напротив, значительно меньше длины свободного пробега, можно воспользоваться для описания плазмы кинетическими уравнениями Больцмана без интегралов столкновений, поскольку в этом предельном случае каждый ион и электрон плазмы движутся по своей траектории под действием электрического и магнитного полей, которые зависят в свою очередь от совокупного движения всех электронов и ионов:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) f + \left\{ \frac{e \mathbf{E}}{m} + \frac{e}{m c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi e \left( \int f_i d\mathbf{v} - \int f_e d\mathbf{v} \right), \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} e \left( \int f_i \mathbf{v} d\mathbf{v} - \int f_e \mathbf{v} d\mathbf{v} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (3,1)$$

В таком виде система (3, 1) практически позволяет исследовать устойчивость лишь в самых простейших случаях «однородного» или почти «однородного» фона, т. е. для таких идеализированных равновесных состояний, в которых невозмущенное распределение величин, описывающих

\*) Следует отметить, что в отличие от устойчивости механического равновесия учет диссипативных членов приводит не только к изменению скорости нарастания возмущений, но и к изменению самого условия устойчивости (причину см. в п. 5).

плазму, очень слабо зависит от пространственных координат. Практически это значит, что рассматриваются длины волн возмущений, значительно меньшие характерных масштабов невозмущенного пространственного распределения.

Система (3, I), основанная на кинетических уравнениях без учета столкновений, может быть существенно упрощена, если характерные пространственные масштабы значительно превышают средний ларморовский радиус ионов (электронов), а временные масштабы много больше периода ларморовского обращения. В этом случае траектория каждого заряда в плазме представляет собой суперпозицию медленного дрейфа поперек силовых линий, движения вдоль них и быстрого ларморовского вращения вокруг магнитного поля. Усреднив по быстрым вращениям, можно в этом приближении (называемом «дрейфовым») получить <sup>2-4</sup> простые уравнения движения центра ларморовской окружности заряда

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_{||} \frac{\mathbf{H}}{H} + c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{H}]}{H^2} + \frac{c}{eH^2} [\mathbf{F}, \mathbf{H}].$$

Здесь  $v_{||}$  — скорость вдоль силовой линии, а второе слагаемое описывает электрический дрейф.

Последнее же слагаемое описывает дрейф под действием силы

$$\mathbf{F} = -\mu \nabla H - M (\varepsilon_0 \nabla) \varepsilon_0 v_{||}^2 - \frac{d}{dt} c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{H}]}{H^2} M,$$

где  $-\mu \nabla H$  — сила, действующая на частицу с магнитным моментом  $\mu = \frac{Mv_{||}^2}{2H}$  в неоднородном магнитном поле,  $-M (\varepsilon_0 \nabla) \varepsilon_0 v_{||}^2 - \frac{d}{dt} c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{H}]}{H^2} M$  —

сила инерции,  $M$  — масса частицы. Величина магнитного момента  $\mu$  в дрейфовом приближении сохраняется. Уравнение движения вдоль силовой линии имеет вид

$$M \frac{dv_{||}}{dt} = -\mu \frac{(\nabla H, \mathbf{H})}{H} + e \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{H})}{H}.$$

В дрейфовом приближении вместо функций распределения  $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  можно ввести  $f_{др}(v_{||}, \mu, \mathbf{r}, t)$ , зависящие уже от меньшего на единицу числа независимых переменных. Кинетическое уравнение для  $f_{др}(v_{||}, \mu, \mathbf{r}, t)$  имеет, очевидно, вид уравнения непрерывности в пространстве  $v_{||}, \mu, \mathbf{r}$ :

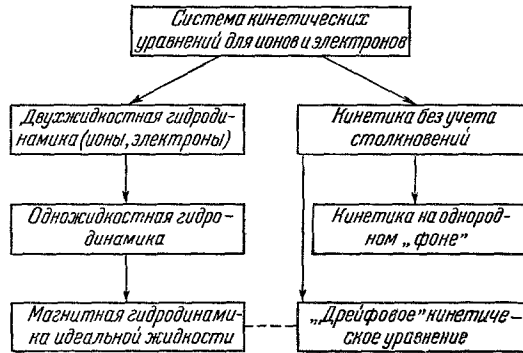
$$\frac{\partial f_{др}}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt}, f_{др} \right) + \frac{\partial}{\partial v_{||}} \frac{\partial v_{||}}{\partial t} f_{др} = 0. \quad (3, II)$$

Дрейфовое кинетическое уравнение (3, II) вместе с уравнениями Максвелла для полей  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  обладает своеобразной особенностью: в случае, когда отсутствует зависимость от пространственной координаты вдоль силовой линии, уравнения для моментов  $f_{др}$  совпадают по форме с магнитогидродинамическими с точностью до величины  $\gamma$  — показателя адиабаты, который в дрейфовом приближении равен 2. Действительно,  $p_{\perp} \sim mv_{\perp}^2 \sim \mu H \sim n^2$ , так как  $\mu$  — константа, а  $H \sim n$  вследствие «приклеенности» силовых линий. Таким образом, даже в отсутствие парных столкновений для движений поперек силовых линий формально справедливы уравнения магнитной гидродинамики <sup>5</sup>.

Различные математические модели, применяемые для описания плазмы, сопоставлены на схеме (стр. 709), позволяющей проследить «родословную» тех или иных приближенных методов и их взаимосвязь.



Тот факт, что, в конце концов, в самых противоположных предельных случаях  $L \gg l_c$  и  $L \ll l_c$  для описания плазмы применим сходный мате-



матический аппарат, позволяет часто судить об устойчивости или неустойчивости разреженной плазмы ( $L \ll l_c$ ) просто по результатам магнитогидродинамического исследования ( $L \gg l_c$ ).

## II АПЕРИОДИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ

### 4. Идеальная плазма

4а. Энергетический принцип <sup>6-8</sup>. Замечательным свойством системы линеаризованных уравнений для малых возмущений идеальной плазмы в магнитогидродинамическом приближении является их самосопряженность (это имеет место, когда в невозмущенном состоянии плазма покоится). Из уравнений (3,1)–(3,4) следует, что малое смещение плазмы из положения равновесия подчиняется уравнению движения

$$\rho \ddot{\xi} = E\{\xi\}, \quad (4a,1)$$

где

$$E\{\xi\} = \nabla \{ \gamma p \operatorname{div} \xi + \xi \nabla p \} + \\ + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}]] - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B}, \operatorname{rot} \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}]] + [\operatorname{div} p \xi] \nabla \varphi.$$

Здесь  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{B}$  — напряженность магнитного поля,  $\varphi$  — потенциал внешних сил,  $\mathbf{j}$  — плотность тока в равновесии, а  $\xi$  — смещение из положения равновесия. Самосопряженность уравнения (4a,1) вытекает из того, что сила зависит только от смещения  $\xi$ , но не от его производных по времени.

Очевидно, что выражение

$$K\{\xi, \xi\} = \frac{1}{2} \int dV \rho |\dot{\xi}|^2$$

соответствует кинетической энергии, а

$$\delta W\{\xi, \xi\} = -\frac{1}{2} \int dV \xi F\{\xi\}$$

— потенциальной. Если искать решения в виде нормальных колебаний  $\exp(-i\omega_n t)$ , то из (4a, 1) следует, что

$$-\omega_n^2 \rho \xi_n = F\{\xi_n\}. \quad (4a,2)$$

Из самосопряженности (4а,1) вытекает, что  $\omega_n^2$  — вещественная величина. Поэтому в идеальной покоящейся плазме в магнитогидродинамическом приближении может существовать только аperiodическая неустойчивость. Из-за самосопряженности (4а,2)  $\xi_n$  можно выбрать ортонормированными и составить из них полную систему, по которой можно разложить любое смещение, удовлетворяющее граничным условиям на поверхности плазмы. Поэтому для любого смещения  $\xi = \sum a_n \xi_n$ ,  $\delta W = \frac{1}{2} \sum a_n^2 \omega_n^2$ .  $\delta W$  может стать отрицательным тогда и только тогда,

когда существует по крайней мере одна мнимая частота  $\omega_n^2 < 0$ . Следовательно, решение вопроса об устойчивости сводится к определению знака  $\delta W$  при произвольных смещениях, удовлетворяющих граничным условиям, в частности непрерывности полного давления на границе.

Последнее ограничение можно снять, если ввести обобщенный энергетический принцип. Для этого, с учетом правильных граничных условий, следует записать  $\delta W$  в виде суммы объемного (по плазме) члена  $\delta W_F$ , поверхностного члена  $\delta W_S$  и члена по вакууму  $\delta W_V$ :

$$\delta W = \delta W_F + \delta W_S + \delta W_V, \quad (4а,3)$$

где

$$\delta W_F = \frac{1}{2} \int_F dV \left\{ \frac{1}{4\pi} |\operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}]|^2 - \frac{1}{c} \mathbf{j} [\operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}], \xi] + \right. \\ \left. + \gamma p (\operatorname{div} \xi)^2 + (\operatorname{div} \xi) (\xi \nabla p) - (\xi \nabla p) \operatorname{div} (p \xi) \right\}, \quad (4а,3а)$$

$$\delta W_S = \frac{1}{2} \int_S d\sigma (\mathbf{n} \xi)^2 \mathbf{n} \langle \nabla (p + B^2/8\pi) \rangle, \quad (4а,3б)$$

$$\delta W_V = \frac{1}{8\pi} \int_V dV H^2. \quad (4а,3в)$$

В первом интеграле интегрирование идет по объему, занимаемому плазмой, во втором — по поверхности раздела плазма—вакуум ( $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности, а  $\langle f \rangle$  обозначает скачок величин  $f$  при переходе через поверхность), а в третьем — по вакууму ( $H$  — поле в вакууме). Предполагается, что силовые линии не пересекают границу плазмы. Можно показать<sup>8</sup>, что необходимым и достаточным условием неустойчивости является существование таких  $\xi$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ , которые удовлетворяют на поверхности раздела только электродинамическим условиям и делают потенциальную энергию (4а,3) отрицательной.

Самосопряженное уравнение (4а,1) может быть выведено из вариационного принципа для

$$\omega^2 = \frac{\delta W \{\xi, \xi\}}{K \{\xi, \xi\}}, \quad \Delta \omega^2 = 0.$$

Пользуясь вариационным принципом, можно определить не только условия устойчивости, но и инкременты; однако энергетический принцип, не требующий условия нормировки  $K \{\xi, \xi\} = 1$ , значительно более прост в употреблении.

С помощью энергетического принципа может быть легко установлен ряд теорем сравнения. Приведем здесь следующий пример: если система II отличается от системы I тем, что часть, занятая в системе I вакуумом, занята в системе II плазмой нулевого давления, то из неустойчивости

системы II следует неустойчивость системы I. Для доказательства заметим, что  $\delta W$  для системы I отличается от  $\delta W$  для системы II тем, что для системы I в области, занятой вакуумом, вклад в  $\delta W$  дает член

$$\delta W_V = \frac{1}{8\pi} \int dV \cdot \mathbf{H}^2,$$

где  $\mathbf{H}$  — возмущения поля в вакууме, а в системе II

$$\delta W_F = \frac{1}{8\pi} \int |\text{rot} [\xi, \mathbf{B}]|^2 dV.$$

Если  $\xi$  и  $\mathbf{H}$  выбраны так, что  $\delta W_{II} < 0$ , то, выбирая для  $\delta W_I$   $\xi_I = \xi_{II}$  и  $\mathbf{H}_I = \mathbf{H}_{II}$  всюду вне области вакуума системы I и  $\mathbf{H}_I = \text{rot} [\xi, \mathbf{B}]$  в этой области, получаем, что  $\delta W_I < 0$ . Выбор возможен, так как  $\mathbf{H}_I$  удовлетворяет электродинамическим условиям на поверхности раздела.

Воспользовавшись энергетическим принципом в форме (4а,3), нетрудно показать, например, что достаточным условием устойчивости резкой границы плазмы, внутри которой нет магнитного поля, является

неравенство  $\frac{\partial H^2}{\partial n} > 0$ , т. е. для устойчивости магнитное давление должно возрастать всюду при удалении от границы плазмы.

Из энергетических соображений в общем случае следует, что наиболее опасными являются деформации, не увеличивающие энергию магнитного поля, т. е. такие, при которых силовые линии магнитного поля не «растягиваются» и не изгибаются.

Такие деформации представляют собой «желобки» вдоль силовых линий магнитного поля, так что в них  $\xi \perp \mathbf{B}_0$ .

Последнее обстоятельство приводит к тому, что энергетический принцип, формально выводимый из линеаризованных уравнений гидродинамического приближения, имеет разумный смысл и для разреженной плазмы в дрейфовом приближении. Действительно, для наиболее опасных возмущений ( $\xi \perp \mathbf{B}_0$ ) движение происходит поперек силовых линий, когда снова применима гидродинамика, но уже с неизотропным давлением. Можно показать, что критерий устойчивости, полученный из вариационного принципа в дрейфовом приближении<sup>9</sup>, несколько мягче соответствующего магнитогидродинамического критерия.

4б. Устойчивость границы плазмы. С точки зрения приложений одним из наиболее интересных вопросов (например, для проблемы контролируемого синтеза) является вопрос об устойчивости удержания плазмы магнитным полем, т. е. вопрос об устойчивости магнитной изоляции плазмы. Нагляднее всего можно разобрать этот вопрос на простейшем примере, который был исследован впервые Крускалом и Шварцшильдом<sup>10</sup>. Рассмотрим слой плазмы, граничащий с вакуумом. Граница поддерживается в равновесии давлением магнитного поля  $H^2/8\pi$ . На торцах плазма граничит с идеально проводящими пластинами, установленными перпендикулярно к магнитному полю на расстоянии  $L$  друг от друга (рис. 1)<sup>4б</sup>. Поля внутри и снаружи плазмы параллельны. Перпендикулярно к ним направлена сила  $\mathbf{f} = q\mathbf{g}$ . Поле внутри плазмы  $\mathbf{B}_0$ , снаружи  $\mathbf{H}_0$ .

Если граница плазмы смещается по вертикали на  $\delta z$ , причем возмущение имеет длину порядка  $l$  поперек поля и, естественно,  $L$  — вдоль,

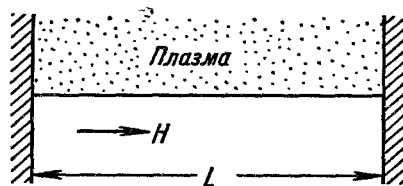


Рис. 1.

то давление на наиболее отклонившемся участке границы увеличится на вес столбика плазмы высотой  $\delta z$ :

$$\delta p = \rho g \delta z. \quad (46,1)$$

Из-за искажения магнитного поля возникает квазиупругая сила. Если эта сила больше изменения давления, то равновесие устойчиво.

В вакууме эта сила связана с изменением магнитного давления  $\delta H^2/8\pi = H_0 \delta H_{||}/4\pi$ , где  $\delta H_{||}$  — составляющая возмущений магнитного поля вдоль  $H_0$ . Поле вблизи границы идеально проводящей плазмы остается параллельным ей. Поэтому  $\delta H_{\perp} \sim H_0 \delta z/L$ . Так как движение — квазистационарное ( $v/c \rightarrow 0$ ), то вне плазмы  $\mathbf{H} = -\nabla\varphi$  и  $\Delta\varphi = 0$ . Поэтому при  $l \ll L$  характерный размер возмущения поля в направлении, перпендикулярном к границе, есть  $l$ . Следовательно,  $\delta H_{||} \sim \delta H_{\perp} \cdot l/L$  и  $\delta H^2/8\pi \sim H_0^2 l \delta z/L^2$ . Внутри плазмы поле «вморожено» и объемная сила сводится к максвелловскому натяжению  $B^2/4\pi R$ , где  $R$  — радиус кривизны силовой линии; так как  $R \sim L^2/\delta z$ , то объемная квазиупругая сила равна  $B_0^2 \delta z/L^2$ . Поэтому, если выполнено условие

$$\frac{B_0^2 + H_0^2}{L^2} > \frac{g\rho}{l}, \quad (46,2)$$

то равновесие устойчиво.

При любом поле существуют возмущения со столь малыми  $l$ , что резкая граница плазмы неустойчива относительно них. Очевидно, что такие возмущения размывают границу до ширины

$$l_{\text{гр}} \sim gQL^2/B^2.$$

Действительно, при смещении элемента неоднородной плазмы возникает квазиупругая сила  $B^2 \delta z/L^2$  и архимедова сила  $g\delta\rho$  (где  $\delta\rho$  — разность плотностей смещенного элемента и окружающей плазмы). Но

$$\delta\rho = \nabla\rho_0 \cdot \delta z, \quad (46,3)$$

так что условие устойчивости есть

$$\frac{B^2}{L^2} > g\nabla\rho_0 \sim \frac{g\rho}{l_{\text{гр}}}. \quad (46,4)$$

т. е., действительно, размытая граница плазмы шириною  $l_{\text{гр}}$  устойчива.

Если плотная плазма занимает не всю область между пластинами, а лишь часть ее длины  $L_1$  и между ней и пластинами находится редкая плазма, то в (46,4) нужно заменить  $\rho$  на «эффективную» плотность  $\rho^* = \rho L_1/L$ . Точное необходимое и достаточное условие устойчивости имеет вид

$$\frac{\pi B_0^2}{4L_1 L \rho} > \frac{g}{l}. \quad (46,5)$$

Хотя мы исходили из гидродинамической картины, результаты качественно сохраняются и для редкой плазмы.

Легко видеть, что в отсутствие стабилизирующей силы, связанной с закрепленными концами, т. е. при  $L \rightarrow \infty$ , неустойчивость, описанная выше гидродинамически, будет развиваться с инкрементом  $\omega_i \sim \sqrt{g/l^*}$ , так как при этом изменение давления (46,1) приведет

---

\*) Л. А. Арцимович обратил наше внимание на то обстоятельство, что из-за конечной проводимости материала торцов, и в особенности редкой вторичной плазмы, через которую осуществляется контакт с торцами, система останется неустойчивой (но инкременты уменьшатся).

к ускорению

$$\omega_i^2 \delta z \sim \delta \ddot{z} = \frac{\delta p}{ql} = \frac{g}{l} \delta z. \quad (46,5a)$$

Всякая перпендикулярная к магнитному полю сила, действие которой не зависит от знака заряда, вызовет вышеописанную неустойчивость; при этом проводящие торцы, так же как и в случае гравитационного поля, оказывают стабилизирующее влияние.

Такой силой может быть, во-первых, центробежная сила, связанная с движением частиц вдоль искривленной силовой линии; при этом следует заменить в (46,4)  $g$  на  $R \frac{v_{\perp}^2}{R^2}$ , где  $R$  — радиус кривизны силовой

линии. Во-вторых, эта сила может быть связана с дрейфом в неоднородном магнитном поле (см. п. 3).

При этом  $g \rightarrow \frac{R}{R^2} \frac{v_{\perp}^2}{2}$ . Складывая оба эти эффекта, получаем.

$$g \rightarrow \frac{R}{R^2} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2) \sim \frac{R}{R^2} \frac{p_{\parallel} + p_{\perp}}{q}. \quad (46,6)$$

Отсюда видно, что выпуклая граница плазмы неустойчива<sup>11</sup>. Если же на торцах системы находятся проводящие пластины, то для стабилизации необходимо, как это видно из (46,5) и (46,6), чтобы было

$$B^2 > \frac{4\bar{L}^2 q}{l_{rp}} \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2}{R}, \quad (46,7)$$

где  $\bar{L}$  — усредненное, с учетом изменения плотности плазмы вдоль силовой линии, расстояние между пластинами,  $R$  — радиус кривизны силовой линии, а  $l_{rp}$  — толщина размытой границы.

Если плазменный цилиндр находится в скрещенных электрическом и магнитном полях и, следовательно, вращается со скоростью  $v = cE/H$ , то к неустойчивости может привести центробежная сила. В этом случае

$$g_{эфф} \sim \frac{v^2}{r} \sim \frac{c^2 E^2}{r H^2}, \quad (46,8)$$

где  $r$  — радиус границы плазмы. По поводу этой неустойчивости см. пп. 4д, 5а и 10в, а по поводу физических причин, приводящих к возникновению вращения плазмы, — п. 13. Из (46,8) следует, что

$$\omega_i \sim \sqrt{\frac{g_{эфф}}{l}} \sim \frac{cE}{H \sqrt{rl}} \quad (46,9)$$

Если плазма граничит с неоднородным магнитным полем в вакууме, то, как мы уже упоминали в предыдущем параграфе, ее устойчивость зависит от того, падает или нарастает магнитное поле в вакууме при удалении от плазмы.

Если на границе является некоторое возмущение в виде «языка», пролезающего между силовыми линиями поля, то для изучения его дальнейшей судьбы можно применить уже известные рассуждения. Давление на кончике языка при его медленном движении равно давлению плазмы, т. е. равно  $H_{rp}^2/8\pi$ , где  $H_{rp}$  — напряженность магнитного поля на границе. Окружающее же давление поля есть  $H^2/8\pi$ , где  $H$  — напряженность магнитного поля на расстоянии  $\delta z$  от границы, т. е.

$$\delta p = \frac{H^2(\delta z) - H^2(0)}{8\pi} = \frac{H_{rp}}{4\pi} \frac{dH}{dz} \delta z,$$

и из (46,5а)

$$\omega_i \sim \sqrt{H \nabla H / 4\pi q l}. \quad (46,10)$$

Для постоянного магнитного поля этот вывод лишь повторяет вывод критерия (4б,6), но на макроскопическом языке магнитной гидродинамики. Однако он сохраняет смысл и для высокочастотных полей (см. п. 4ж). Критерий устойчивости с учетом закрепленных концов силовых линий легко получить по аналогии с (4б,7).

Кроме сил, не связанных со знаком заряда, может вызвать неустойчивость в плазме и электрическое поле.

Рассмотрим, например, плазму вблизи проводящей границы. Если в вакууме имеется электрическое поле  $E$ , а на границе — поверхностный заряд

$$\sigma = \frac{E}{4\pi},$$

то на смещенный участок действует сила

$$\delta p = \frac{E}{4\pi} \delta E.$$

Поэтому

$$\omega_i' \sim \frac{E}{\sqrt{4\pi q l d}},$$

где  $d$  — расстояние от плазмы до проводящей плоскости.

Однако вопрос об устойчивости границы не исчерпывается гидродинамической теорией устойчивости. Токи, текущие по границе, и резкие градиенты приводят к сильному отклонению от равновесия. Поэтому мы вернемся еще к данному вопросу, изучая микроскопические неустойчивости плазмы.

В заключение этого раздела укажем, что если плазма движется ускоренно, то аналогом «g» является ускорение границы «a». Инкремент нарастания возмущений в этом случае есть  $\omega_i \sim \sqrt{a/l}$ . Такого типа неустойчивости наблюдаются в экспериментах по сжатию плазмы аксиальным магнитным полем («θ-пинч»).

Мы ограничились изучением плотной плазмы, в которой диэлектрическая постоянная  $\epsilon = 1 + \frac{4\pi N M c^2}{B^2} \gg 1$  ( $N$  — плотность частиц, а  $M$  — масса иона в плазме). Поэтому во всех формулах неявно предполагалось, что  $\frac{4\pi N M c^2}{B^2} \gg 1$ , и в выражении для  $\epsilon$  пренебрегалось единицей. Поверхностный заряд  $\sigma$ , возникающий под действием различного дрейфа частиц в силовом поле на искривленной поверхности, вызывает в плазме электрическое поле  $E' \sim \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$ . Следовательно, при  $\epsilon \sim 1$  электрическое поле  $E'$ , а вместе с ним и скорость роста неустойчивости значительно уменьшаются:

$$\omega_i' \sim \omega_i \sqrt{\frac{4\pi N M c^2}{B^2}}.$$

4в. Конвективная неустойчивость. В отличие от предыдущего случая, в котором рассматривалась граница плазмы, обратимся к вопросу об устойчивости внутренней части плазмы с замкнутыми силовыми линиями.

Ограничимся для наглядности аксиально-симметричной конфигурацией плазмы. Пусть поле в плазме имеет только азимутальную составляющую  $B_\theta$ , т. е. по плазме течет вдоль оси ток, причем плотность тока, напряженность магнитного поля, давление и плотность плазмы зависят только от расстояния до некоторой оси.

Из-за натяжения изогнутых силовых линий магнитного поля каждая силовая трубка (рис. 2) стремится сократиться к оси. Этому противодействует градиент магнитного и газового давлений. В стационарном состоянии обе эти силы уравновешены. Если при малом радиальном смещении трубки к оси натяжение в трубке возрастает быстрее, чем градиент давления, то очевидно, равновесие неустойчиво, и наоборот.

Для исследования устойчивости плазмы вычислим полную силу, действующую на смещенную трубку. Для этого рассмотрим тонкую силовую трубку на расстоянии  $r_0$  от оси. Градиент полного давления уравновешивается натяжением магнитных силовых линий трубки (см. п. 3):

$$\frac{\partial}{\partial r}(p + B_0^2/8\pi) = -B_0^2/4\pi r_0. \quad (4в,1)$$

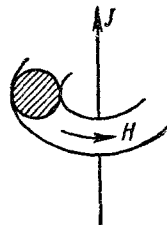


Рис. 2.

Найдем силы, действующие на трубку при смещении ее на расстояние  $\delta r$ . При таком смещении изменение поля в трубке  $B_T$  из-за сохранения полного магнитного потока через ее сечение  $S_T$  равно

$$\frac{\delta B_T}{B_T} = -\frac{\delta S_T}{S_T} = -\frac{\delta V_T}{V_T} + \frac{\delta r_T}{r_T}, \quad (4в,2)$$

где  $V_T$  — объем трубки. Но при адиабатическом движении  $\delta V_T/V_T = -\delta p/\gamma p$ . Поэтому

$$\frac{\delta B_T}{B_T} = \frac{1}{\gamma} \frac{\delta p}{p} + \frac{\delta r}{r}. \quad (4в,3)$$

С другой стороны, полное давление в трубке должно равняться внешнему давлению в точке  $r + \delta r$ :

$$p_T + B_T^2/8\pi = p_0(r + \delta r) + B_0^2(r + \delta r)/8\pi. \quad (4в,4)$$

Левая и правая части (4в,4) равны соответственно

$$p_0(r) + B_0^2(r)/8\pi + \delta p + B_0 \delta B_T/4\pi$$

и

$$p_0(r) + B_0^2(r)/8\pi + \frac{dp_0}{dr} \delta r + \frac{B_0}{4\pi} \frac{dB_0}{dr} \delta r.$$

Поэтому

$$\delta p + \frac{B_0 \delta B_T}{4\pi} = (p'_0 + B_0 B'_0/4\pi) \delta r. \quad (4в,5)$$

Подставляя  $\delta B_T$  из (4в,3), получаем:

$$\frac{\delta B_T}{B_0} = \frac{1}{\gamma p_0} \frac{p'_0 + B_0 (B'_0 - B_0/r)/4\pi}{1 + B_0^2/4\pi \gamma p} \delta r + \frac{\delta r}{r}. \quad (4в,6)$$

Изменение натяжения в магнитной трубке есть

$$\delta \frac{B_T^2}{4\pi r} = \frac{B_0 \delta B_T}{2\pi r} - \frac{B_0^2}{4\pi r^2} \delta r. \quad (4в,7)$$

Так как градиент полного давления в точке  $r + \delta r$  уравновешивает натяжение тех трубок, которые находятся в этом месте, то изменение полного градиента при смещении есть

$$\frac{B_0^2(r + \delta r)}{4\pi(r + \delta r)} - \frac{B_0^2(r)}{4\pi r} = \frac{B_0 B'_0}{2\pi r} \delta r - \frac{B_0^2}{4\pi r^2} \delta r. \quad (4в,8)$$

Полная сила, действующая на трубку, равна

$$\delta F = \delta \frac{B_T^2}{4\pi r} - \delta \frac{B_0^2}{4\pi r} = \frac{B_0^2}{2\pi r} \left( \frac{\delta B_T}{B_0} - \frac{B'_0}{B_0} \delta r \right). \quad (4в,9)$$

Из (4в,6) и (4в,9) найдем:

$$\delta F = -\frac{B_0^2}{2\pi r} \left\{ \frac{1}{\gamma p_0} \frac{p'_0 + B_0(B'_0 - B_0/r)/4\pi}{1 + B_0^2/4\pi\gamma p_0} + \frac{1}{r} - \frac{B'_0}{B_0} \right\} \delta r. \quad (4в,10)$$

Если  $\delta F/\delta r > 0$ , то трубка ускоряется и равновесие неустойчиво. Поэтому условие устойчивости относительно перестановки силовых трубок имеет вид

$$\delta F/\delta r < 0. \quad (4в,11)$$

Из (4в,1) следует, что

$$p'_0 = -\frac{B_0}{4\pi} (B'_0 + B_0/r),$$

так что плазма устойчива, если

$$-\frac{B_0^2/2\pi r \gamma p_e}{1 + B_0^2/4\pi\gamma p_0} + \frac{1}{r} - \frac{B'_0}{B_0} > 0,$$

или, в другой форме,

$$\frac{B'_0}{B_0} - \frac{1}{r} + \frac{B_0^2}{4\pi\gamma p_0} \left( \frac{B'_0}{B_0} + \frac{1}{r} \right) < 0. \quad (4в,12)$$

В несжимаемой жидкости ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы поле росло не быстрее, чем расстояние от оси. Для устойчивости же редкой плазмы (когда  $\frac{B^2}{8\pi p} = \frac{1}{\beta} \gg 1$ ) нужно, чтобы поле падало от оси быстрее, чем  $1/r$ . Последнее условие совпадает с условием, полученным в работе <sup>12</sup>. Действительно, введем величину  $U = -\int dl/B_0 = -\frac{2\pi r}{B_0}$ . Тогда, как легко видеть, (4в,12) принимает вид

$$\nabla U \nabla p < \gamma p \frac{(\nabla U)^2}{|U|}. \quad (4в,13)$$

Это условие справедливо <sup>11, 12</sup> при любой форме замкнутых силовых линий.

Если  $\beta > 2/3\gamma$ , то наиболее опасны не обладающие аксиальной симметрией возмущения равновесной конфигурации — «змейки». Условие устойчивости для них имеет вид

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r} < \frac{1}{\beta}. \quad (4в,14)$$

Условие же (4в,12) имеет вид

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r} < \frac{4\gamma}{2 + \gamma\beta}. \quad (4в,15)$$

Отсюда, действительно, вытекает, что при  $\beta > 2/3\gamma$  устойчивость определяется условием (4в,14).

4г. Устойчивость цилиндрического пинча. Устойчивость плазмы при пинч-эффекте являлась предметом многочислен-



ных исследований. Самые первые фотографии плазменного пинча, сжатого протекающим по нему собственным током, показали, что он неустойчив относительно деформаций типа перетяжек («шеек») и изгибов («змеек»).

Теоретически неустойчивость пинча с продольным током, текущим по поверхности, очевидна по той причине, что всюду от границы плазмы наружу магнитное поле спадает.

Для стабилизации такого пинча почти одновременно разными авторами<sup>13-15</sup> было предложено использовать сильное магнитное поле, направленное вдоль оси пинча. Действительно, тогда при деформациях пинча затрачивается работа на увеличение энергии этого магнитного поля, что и вызывает стабилизирующий эффект. Этот эффект резче всего прояв-

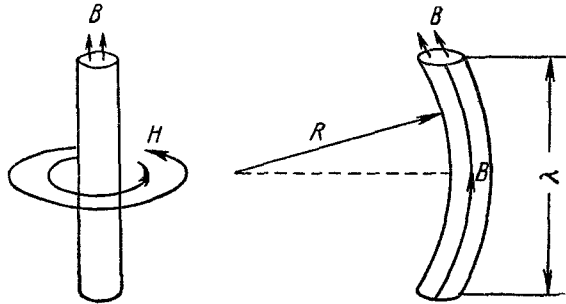


Рис. 3. Неустойчивости пинча типа «змеек».

ляется для возмущений с большим волновым вектором вдоль оси пинча. Напротив, в длинноволновых возмущениях изменения продольного магнитного поля малы, и относительно возмущений с длиной волны, значительно большей радиуса пинча, неустойчивость остается. Условие устойчивости пинча относительно «змеек» и «шеек» можно получить наглядно следующим образом.

Рассмотрим сначала змейкообразные возмущения пинча (рис. 3). Предположим, что внутри пинча радиуса  $a$  имеется замороженное осевое поле  $B$ , а снаружи — азимутально е поле  $H$  тока, текущего по его поверхности. Если пинч изгибается (длина изгиба  $\sim \lambda$ ), то силовые линии азимутального поля сгущаются с внутренней стороны и разрежаются снаружи. Поэтому на внутреннюю часть пинча (обращенную в сторону центра кривизны) действует большее магнитное давление. С другой стороны, из-за искривления силовых линий замороженного поля возникает сила, действующая в обратном направлении (квазиупругая сила).

Силу, действующую со стороны азимутального поля на единицу длины пинча, можно подсчитать следующим образом. Выделим вокруг пинча цилиндрический объем радиуса  $\sim \lambda$ , срезанный плоскостями, проходящими через центр кривизны. Так как силовые линии азимутального поля лежат в этих плоскостях, то полная сила, действующая в направлении смещения, складывается из соответствующей составляющей магнитного давления на торцах

$$2 \int_a^\lambda \frac{H^2}{8\pi} \cdot 2\pi r dr d\alpha,$$

(где угол наклона  $\alpha = \lambda/2R$ , а  $R$  — радиус кривизны) и давления на боковые поверхности, которым можно пренебречь. На расстоянии  $\sim \lambda$  возмущение поля исчезает.

Поэтому действующая на единицу длины шнура сила, вызванная возмущением поля при искривлении:

$$\frac{1}{R} \int_a^\lambda \frac{H^2}{8\pi} \cdot 2\pi r dr = \frac{H_0^2}{4R} \ln \frac{\lambda}{a} \cdot a^2,$$

где  $H_0 = H(a)$  — поле на поверхности пинча.

Объемная же квазиупругая сила

$$-\frac{B^2}{4\pi R} \pi a^2 = -\frac{B^2}{4R} a^2,$$

так что полная сила равна

$$\delta F = \frac{a^2}{4R} \left( H_0^2 \ln \frac{\lambda}{a} - B^2 \right).$$

Отсюда возникает известное условие устойчивости

$$\frac{B^2}{H^2} > \ln \frac{\lambda}{a}.$$

Так как из условия равновесия

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = \frac{H^2}{8\pi}$$

следует, что  $B^2 < H^2$ , то ясно, что пинч нельзя стабилизировать сильным внутренним продольным полем относительно длинноволновых возмущений.

Если внутри и вне шнура с аксиальным током имеется продольное магнитное поле, то полное поле оказывается винтовым. В таком поле шнур, искривившись по винтовой силовой линии, сможет пролезть между силовыми линиями поля, не искривляя их. Такая неустойчивость будет иметь место, если возмущение поверхности шнура будет винтовым и если шаг этого винта  $\lambda$  будет совпадать с шагом силовой линии на поверхности пинча  $2\pi a \frac{H_z}{H_\phi}$  или будет больше него. Следовательно, пинч будет устойчив относительно винтовых возмущений с длиной волны

$$\lambda < 2\pi a \frac{H_z}{H_\phi}.$$

Если длина волны возмущения ограничена сверху размерами системы (например, длиной тороидального пинча  $2\pi R$ ), то неустойчивость возникает при токе, большем критического тока

$$I_{кр} \sim c \frac{a^2}{R} H_z,$$

называемого иногда током Шафранова — Крускала.

Таким образом, в обоих случаях существует максимальная длина волны возмущения, еще стабилизируемого магнитным полем.

Условие устойчивости относительно «шеек» (рис. 4) можно найти следующим образом. Пусть радиус шнура изменился на  $\delta a$ . Тогда из-за сохранения потока поле внутри шнура меняется на

$$\delta B = -B_0 \frac{2\delta a}{a}.$$

С другой стороны, азимутальное поле  $H$  вне шнура

$$H = \frac{2I}{ca},$$

где  $I$  — полный ток; поэтому  $\delta H = -H_\varphi \frac{\delta a}{a}$ . Полное изменение разности магнитных давлений изнутри и снаружи пинча равно, следовательно,

$$\delta p_m = -\frac{B^2}{4\pi} \frac{2\delta a}{a} + \frac{H^2}{4\pi} \frac{\delta a}{a},$$

так что условие устойчивости имеет вид

$$B^2 > \frac{H^2}{2}.$$

Итак, достаточно сильное продольное поле подавляет «шейки», но не может стабилизировать пинч относительно длинноволновых «змеек».

Однако длинные волны можно стабилизировать, окружив плазменный шнур проводящей коаксиальной оболочкой. При смещениях шнура в оболочке должны наводиться индукционные токи, взаимодействие с которыми стремится вернуть шнур в исходное положение. Сочетание обоих этих способов стабилизации нашло применение в ряде известных экспериментальных установок для создания высокотемпературной плазмы («Зета», «Колумбус», «Альфа», «Токомак» и др.).

Если отказаться от идеализированной картины «поверхностного тока», то критерии устойчивости будут существенно зависеть от профиля распределения тока (а следовательно, и магнитного поля, давления плазмы и т. д.) по сечению пинча.

В п. 4в было получено условие, которому должен удовлетворять профиль распределения этих величин, чтобы пинч был устойчивым (в отсутствие продольного поля!). Физически, однако, такой профиль реализовать невозможно, так как он содержит особенность плотности тока на оси.

Идеализированная картина разделенных продольных и азимутальных полей в быстром разряде более или менее соответствует действительности в течение лишь небольшого промежутка времени. Затем из-за конечной проводимости плазмы поля «перемешиваются» и возникает винтовое поле в разряде. В установках же, рассчитанных на длительное удержание плазмы, как мы уже видели, для устойчивости удержания необходимо использовать винтовое поле («Стелларатор», «Токомак»). Таким образом, необходимо исследовать устойчивость равновесия плазмы в винтовом поле.

В винтовом поле невозможна обычная перестановочная неустойчивость, так как из-за того, что шаг силовой линии на каждой магнитной поверхности различен, трубки «перепутываются» при радиальном смещении и возникает квазиупругая сила. Однако в каждом данном слое трубка может передвигаться, если смещение ее однородно вдоль силовых линий. По мере ухода от своего слоя квазиупругая сила растет, поэтому возможно появление поверхностной неустойчивости, локализованной вблизи некоторой магнитной поверхности.

Для того чтобы возмущение не искривляло силовой линии, волновой вектор его должен быть к ней всюду перпендикулярен. Если искать возмущение в виде  $e^{im\varphi + ikz}$ , то это условие имеет вид

$$\mathbf{k}\mathbf{B} = \frac{m}{r} B_\varphi + k B_z = 0, \quad (4г,1)$$

где  $\mathbf{B}$  — невозмущенное винтовое поле.

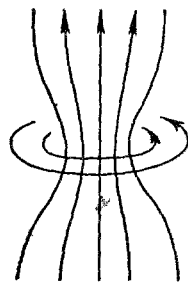


Рис. 4. Неустойчивости пинча типа «шейки».

Предположим, что это условие выполняется для данных  $m, k$  при некотором радиусе  $r_0$ . Если масштаб возмущения  $\lambda \sim \frac{1}{k} \ll r_0$ , то уравнения движения можно разложить вблизи  $r_0$ , определяемого из условия (4г,1), по  $\lambda/r_0$ . Найдем условия, при которых возможны медленные смещения трубок, т. е. границу устойчивости. Условие равновесия трубки имеет вид

$$\nabla\Phi + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}/4\pi = 0; \quad \Phi = p + B^2/8\pi, \quad (4г,2)$$

условие на  $\mathbf{B}$ :  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ .

Линеаризуя эти уравнения, получим:

$$\left. \begin{aligned} ik\mathbf{B}b_r - \frac{2B_\varphi}{r}b_\varphi - \Phi'_1 &= 0, \\ ik\mathbf{B}b_\varphi + (B'_\varphi + B_\varphi/r)b_r - \frac{im}{r}\Phi_1 &= 0, \\ ik\mathbf{B}b_z - ik\Phi_1 &= 0, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(zb_r) + ik\mathbf{b} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4г,3)$$

где  $\mathbf{b}$  и  $\Phi_1$  — возмущения поля и полного давления.

Введем переменную  $x = \frac{r}{r_0} - 1$  и разложим (4г,1) по  $\lambda/r_0$ :  $\mathbf{kB} = Sx$ , где

$$S = r_0(\mathbf{kB})'. \quad (4г,4)$$

Из системы (4г,3) получаем для  $b_r$  следующее дифференциальное уравнение:

$$b_r'' + \{-k^2 + \kappa^2/x^2\}b_r = 0, \quad (4г,5)$$

где

$$\kappa^2 = 2B_\varphi(B'_\varphi + B_\varphi/r_0)k^2r_0/S^2 = -\frac{8\pi p'/rB_z^2}{(\mu'/\mu)^2},$$

а  $\mu = B_\varphi/rB_z$  — кручение (т. е. величина, обратная радиусу кручения) силовой линии. Вообще говоря, (4г,5) неверно вблизи  $x=0$ , и для правильного описания этой области необходимо либо учесть инерцию, либо учесть диссипативные процессы. Однако формальное решение уравнения (4г,5) есть

$$b_r = b^0 \sqrt{x} K_{iv}(kx),$$

где  $v = \sqrt{\kappa^2 - 1/4}$ . При  $v^2 > 0$  функция имеет, как известно, бесконечно много нулей вблизи  $x=0$ . Поэтому решения, затухающие на бесконечности, можно сплести с любым решением вблизи  $x=0$ .

При  $v^2 < 0$  этого сделать нельзя. Поэтому критическое значение  $\kappa^2$  есть  $1/4$ . Точный учет инерции подтверждает этот результат.

Итак, условие неустойчивости плазмы в винтовом поле имеет вид  $\kappa^2 < 1/4$ , т. е.

$$\frac{r}{4} \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^2 + \frac{8\pi p'}{B_z^2} < 0. \quad (4г,6)$$

Это условие впервые было найдено в работе<sup>16</sup>. В общем случае из (4г,6) следует, что чем больше относительное изменение кручения силовых линий  $\mu'/\mu$  в радиальном направлении, тем больший градиент давления

может устойчиво удерживаться магнитным полем. Необходимое и достаточное условие устойчивости можно получить из энергетического принципа (см. п. 4а):

если пинур устойчив для  $m=1$ ,  $-\infty < k < \infty$  и для  $k \rightarrow 0$ ,  $m=0$ , то он устойчив при всех  $m$  и  $k$ .

Однако и с помощью этой теоремы исследование устойчивости пинура относительно нелокальных возмущений довольно сложно. Результаты получены лишь для некоторых частных типов распределения полей<sup>50</sup>.

4д. Устойчивость вращающейся неоднородной плазмы в магнитном поле. В целом ряде устройств типа «Гомополяра»,

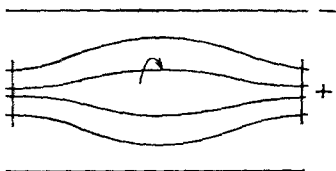


Рис. 5. Ловушка с вращающейся плазмой.

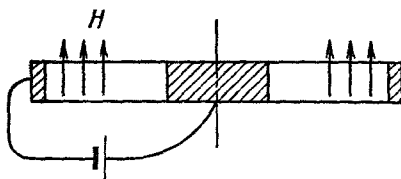


Рис. 6. Гомополяр.

плазменных магнитных конденсаторов или ловушек, в которых вращение плазмы улучшает удержание, мы имеем дело с неоднородной плазмой, вращающейся в осевом магнитном поле (рис. 5).

В системах типа «Гомополяра» на торцах плазма граничит с изоляторами (рис. 6). Поэтому, вообще говоря, возможно развитие «перестановочной» неустойчивости. Плазма может двигаться поперек поля, не возмущая его. Однако такой тип неустойчивости осуществляется только в довольно специфических условиях. Поскольку эта неустойчивость не является уже аperiodической, мы рассмотрим ее подробнее в гл. IV. Как будет следовать из гл. IV, если плотность плазмы не падает при смещении от оси, то вращение неустойчиво только в том случае, когда внутри течения существует слой, в котором ротор скорости экстремален. Если такого слоя нет, то опасны лишь возмущения с аксиальной симметрией.

Итак, получим условие устойчивости движения по отношению к возмущениям, искривляющим магнитные силовые линии.

Рассмотрим магнитную силовую трубку, концы которой закреплены на расстоянии  $2L$ , а средняя часть сдвигается на  $\delta r$  от положения равновесия (рис. 7). Каждая трубка вращается с угловой скоростью  $\Omega(r)$ . Ясно, что при достаточно медленном смещении трубки угловая скорость ее сохраняется в сколь угодно слабом поле  $B$ , так как иначе трубка «намоталась» бы при вращении и магнитное поле усилилось бы на произвольно большую величину (рис. 8). Как и ранее, ограничимся случаем малых  $\beta$ . Силы, действующие на трубку в радиальном направлении, складываются из:

а) натяжения магнитных силовых линий в трубке:

$$-\frac{B^2}{4\pi R} = -\frac{B^2}{2\pi L^2} \delta r, \quad (4д,1)$$

знак минус означает, что эта сила — возвращающая;

б) центробежной силы, связанной с вращением трубки:

$$\Omega^2 q r + \delta (\Omega_T^2 q r) = \Omega^2 q r + \Omega^2 q \delta r, \quad (4д, 2)$$

изменением плотности в трубке при малом  $\beta$  можно пренебречь;

в) градиента полного давления в точке  $r + \delta r$

$$\nabla \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = [\Omega^2 r q]_{r+\delta r} = \Omega^2 q r + \Omega^2 q' r \delta r + (\Omega^2)' q r \delta r + \Omega^2 q \delta r. \quad (4д, 3)$$

Из (4д, 2) — (4д, 3) получаем

$$\frac{\delta F_m}{\delta r} = - \left\{ \frac{B^2}{2\pi L^2} + r \frac{d\Omega^2}{dr} \right\}, \quad (4д, 4)$$

так что условие устойчивости имеет вид

$$\frac{B^2}{2\pi L^2} > - r \frac{d\Omega^2}{dr}. \quad (4д, 5)$$

Отличие от аналогичной задачи об устойчивости в отсутствие поля заключается в том, что без поля сохраняется момент количества движения элемента жидкости<sup>1</sup>, а в поле — угловая скорость. Последняя сохраняется при сколь угодно слабом поле, пока не начнут сказываться диссипативные процессы, т. е. «отклеивание» плазмы от силовых линий магнитного поля. Для несжимаемой жидкости, подробнее см.<sup>17</sup>.

Если через вращающуюся плазму течет азимутальный ток, то центробежный эффект накладывается на магнитную конвективную неустойчивость.

В невязкой жидкости сохраняется момент количества движения тороидальной магнитной силовой трубки при ее радиальном однородном движении (расширении или сжатии), т. е.  $M = q \Omega r^2 = \text{const}$ .

Из (4в, 5) следует, что изменение магнитного поля в трубке определяется как

$$\frac{\delta B}{B} = \frac{1}{\gamma p} \frac{p' + B(B' - B/r)/4\pi}{1 + B^2/4\pi\gamma p} \delta r + \frac{\delta r}{r},$$

а изменение давления —

$$\delta p = \frac{p' + B(B' - B/r)/4\pi}{1 + B^2/4\pi\gamma p}.$$

С другой стороны, при адиабатическом движении трубки

$$\frac{\delta q}{q} = \frac{1}{\gamma} \frac{\delta p}{p}.$$

Поэтому полная сила, действующая на смещенную трубку, равная сумме изменения центробежной силы, натяжения магнитных силовых линий и градиента полного давления, есть

$$\begin{aligned} \delta F &= \delta F_{\text{ц}} - \delta F_m - \delta \nabla \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \\ &= \left\{ - \frac{(\Omega r)^2 + B^2/2\pi q}{c_T^2 r} \frac{p' + B(B' - B/r)/4\pi}{1 + B^2/4\pi\gamma p} - \frac{p' \Omega^2 r \gamma}{c_T^2} + \frac{B(B' - B/r)}{2\pi r} - \frac{2q\Omega(\Omega r^2)}{r} \right\}. \end{aligned}$$

Первые два члена связаны со сжимаемостью трубки, третий — с изменением натяжения магнитных силовых линий в трубке, а последний — с эффектом центробежной силы.

Достаточное условие устойчивости есть  $\delta F/\delta r < 0$  в каждой точке вращающейся плазмы.

4е. А п е р и о д и ч е с к а я н е у с т о й ч и в о с т ь н е м а к с в е л о в с к о й п л а з м ы. Любопытный тип аperiodической неустойчивости может возникнуть в однородной плазме, помещенной в постоянное магнитное поле, если плазма не находится в состоянии термодинамического равновесия, т. е. распределение частиц по скоростям отлично от максвелловского<sup>18-20</sup>. Эта неустойчивость развивается за времена, значительно меньшие времени парных столкновений, так что при дальнейшем рассмотрении столкновениями частиц мы будем пренебрегать.

Рассмотрим возмущения с длинами волн  $\lambda$ , много большими средних ларморовских радиусов электронов и ионов (и характерным временем изменения, значительно превышающим периоды обращения частиц в магнитном поле). При этом для расчета можно пользоваться дрейфовым приближением, в рамках которого плазма рассматривается как совокупность квазичастиц — «ларморовских кружков» с сохраняющимся магнитным моментом  $\mu = \varepsilon_{\perp}/H$ . Распределение частиц описывается функцией  $f(\mu, v_{\parallel})$ , где  $v_{\parallel}$  — скорость вдоль постоянного магнитного поля,  $\varepsilon_{\perp}$  — энергия вращения.

Неустойчивость в рассматриваемом нами случае может возникать на волнах, распространяющихся под произвольным углом к магнитному полю. Для простоты мы рассмотрим два предельных случая: волна, распространяющаяся строго вдоль магнитного поля (альфвеновская волна)\*), и магнитозвуковая волна, распространяющаяся почти перпендикулярно к магнитному полю.

1. *Неустойчивость альфвеновской волны.* Как известно, альфвеновские волны можно наглядно представить как колебания «упругих нитей» — силовых линий магнитного поля. Для выяснения условий неустойчивости рассмотрим силы, возникающие при искривлении силовой линии (рис. 9). Так как частицы «привязаны» к силовым линиям, при движении по искривленному участку силовой линии возникает центробежная сила

$$F_{\text{ц}} = \int f \frac{mv_{\parallel}^2}{R} dv_{\parallel} d\mu,$$



Рис. 9.

стремящаяся увеличить искривление.

Поскольку, кроме того, каждая «квазичастица» обладает магнитным моментом  $-\mu e_0$ , ориентированным против магнитного поля  $\varepsilon_0 H$ , то на частицу в неоднородном магнитном поле будет действовать сила, связанная с наличием тока намагничивания  $\mathbf{j}_{\mu} = c \operatorname{rot} \int \mu f dv_{\parallel} d\mu$

$$\mathbf{F}_{\mu} = \frac{[\mathbf{j}_{\mu}, \mathbf{H}]}{c} = \left[ \operatorname{rot} \int \mu f(\mu, v_{\parallel}) dv_{\parallel} d\mu, \mathbf{H} \right]. \quad (4e,1)$$

Эта сила вместе с силой «натяжения» линий магнитного поля

$$\mathbf{F}_H = \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{H}]}{c} = \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}] \quad (4e,2)$$

стремится вернуть силовую линию в положение равновесия.

\*) В действительности при выполнении приведенного ниже критерия неустойчивости возмущение не носит волнового характера (формально это проявляется в том, что  $\omega^2$  становится отрицательным). Тем не менее мы будем говорить для краткости о «неустойчивости на альфвеновской волне», имея в виду, что при уменьшении анизотропии рассматриваемый тип возмущений непрерывно переходит в альфвеновские волны.

Если  $F_{\perp} > F_{\mu} + F_H$ , система уходит от положения равновесия, т. е. возникает неустойчивость. В рассматриваемом возмущении отлична от нуля лишь компонента  $k_{\parallel}$  волнового вектора. Подставляя в (4е,1) — (4е,2)  $\nabla = \{0, 0, ik_{\parallel}\}$ , получим следующее условие неустойчивости:

$$p_{\parallel} - p_{\perp} > \frac{H^2}{8\pi}, \quad (4е,3)$$

где

$$p_{\parallel} = \int m v_{\parallel}^2 f dv_{\parallel} d\mu, \\ p_{\perp} = \int \mu H f dv_{\parallel} d\mu.$$

Поскольку при выполнении условия (4е,3) сила все время уводит систему от положения равновесия, неустойчивость носит аperiodический характер  $\exp(\gamma t)$ .

Инкремент  $\gamma$  легко найти, приравняв сумму сил  $F_{\perp} - F_{\mu} - F_H$  произведению массы элемента плазмы на ускорение

$$\dot{v} = \frac{d}{dt} \frac{cE}{H_0}.$$

Поскольку из уравнений Максвелла следует, что  $E = H\gamma/c k$ , ускорение равно  $\dot{v} = \gamma^2 H/k H_0$ . Подставляя значения сил  $F$ , получим:

$$-\gamma^2 = 2k^2 \left( \frac{H^2}{8\pi} + p_{\perp} - p_{\parallel} \right) / \varrho_0.$$

2. «Неустойчивость на магнитозвуковых волнах», распространяющихся почти перпендикулярно к магнитному полю. Границу устойчивости мы получим, приравняв полную силу  $F$ , действующую на элемент плазмы при почти поперечном возмущении ( $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ ) силе

$$F_{\perp} = -\nabla_{\perp} p - \frac{[\mathbf{H}_0, \text{rot } \mathbf{H}]_{\perp}}{4\pi} = 0. \quad (4е,4)$$

Здесь  $p$  — поправка к поперечному давлению, равная

$$\int m v_{\perp}^2 f_1 dv, \quad (4е,5)$$

где  $f_1$  — поправка к функции распределения, а  $H$  — поправка к магнитному полю. Линеаризованное кинетическое уравнение дает для поправки  $f_1$ , являющейся в дрейфовом приближении функцией  $\mu = m v_{\perp}^2 / 2H$  и  $v_{\parallel}$ , следующее выражение (на границе устойчивости  $\omega = 0$ ):

$$f_1 = f_0 \frac{H}{H_0} + \frac{\mu H}{m} \frac{\partial f_0}{v_{\parallel} \partial v_{\parallel}} *).$$

Представляя  $f_1$  в (4е,2) и учитывая, что в почти поперечной волне

$$[\mathbf{H}_0, \text{rot } \mathbf{H}]_{\perp} = i k_{\perp} H_0 H,$$

получим из (4е,1) границу устойчивости

$$1 + \frac{p_{\perp}^0}{H_0^2 / 8\pi} + 4\pi \int \mu^2 \frac{\partial f_0}{\partial \left( \frac{m v_{\perp}^2}{2} \right)} d\mu dv_{\parallel} = 0, \quad (4е,6)$$

где  $p_{\perp}^0 = \int \mu H f_0 dv$  — равновесное значение поперечного давления.

\*) При этом мы для простоты не учитываем изменения функции распределения, обусловленного продольным электрическим полем. Это справедливо, если электроны являются «холодными» и поэтому уничтожают продольное поле.



Для равновесной максвелловской функции распределения, которая заведомо является устойчивой, два последних члена в (4е,3) взаимно уничтожаются; следовательно, для устойчивости плазмы относительно возмущений рассмотренного типа левая часть (4е,3) должна быть положительной. В частном случае «неизотропной максвелловской» функции распределения  $T_{\perp} > T_{\parallel}$  критерий устойчивости имеет вид

$$1 + \frac{n_0 T_{\perp} (1 - T_{\perp}/T_{\parallel})}{H_0^2/8\pi} > 0. \quad (4е,7)$$

Из формул (4е,3) — (4е,7) видно, что рассмотренные в этом разделе типы неустойчивости возникают в плазме низкого давления (т. е. при  $p \ll H^2/8\pi$ ) лишь при достаточно большой анизотропии. Так, например, согласно (4е,7)  $(T_{\perp} - T_{\parallel})/T_{\parallel}$  должно достигать значения, превышающего  $H^2/8\pi p_{\perp}$ , для того чтобы в плазме могла развиваться аperiодическая неустойчивость. В этих условиях практически гораздо раньше должна проявиться колебательная неустойчивость, которая будет рассмотрена ниже, в п. 7.

4ж. Устойчивость плазмы, удерживаемой давлением высокочастотного электромагнитного поля. Специфические типы неустойчивости присущи плазменным конфигурациям, образующимся при высокочастотном (в.ч.) удержании плазмы, т. е. когда для изоляции плазмы используется давление переменного электромагнитного поля. В основе возможности такого удержания лежит тот факт, что переменное электромагнитное поле не проникает в проводник (каковым, в частности, может являться и плазма для частот  $\omega < \omega_0$ ) и тем самым создает перепад давления  $\bar{H}^2/8\pi$  у границ проводника.

Наиболее просто рассмотреть устойчивость относительно возмущений, мало меняющихся за время одного колебания удерживающего в.ч. поля. В этом случае можно провести усреднение по быстрым осцилляциям в.ч. поля и ввести в рассмотрение среднее давление  $\bar{H}^2/8\pi$ .

Картина станет еще проще, если в.ч. поле квазистационарно, т. е. токами смещения можно пренебречь. Действительно, тогда магнитное поле связано с плотностью тока так же, как и в «статическом» случае, и в области магнитогидродинамического описания плазмы справедливы все результаты энергетического подхода (см. п. 4а). Такая система будет наиболее устойчивой, если  $\bar{H}^2/8\pi$  возрастает наружу от границы плазмы. В отличие от «статического» случая с помощью в.ч. удержания гораздо легче\*), в принципе, отыскать геометрию магнитной ловушки, обеспечивающую устойчивость.

Для того чтобы в.ч. поле могло устойчиво удерживать плазму против действия внешней силы (гравитационной, центробежной и т. д.), необходимо, чтобы «языки» плазмы не могли проникать между силовыми линиями поля. Чтобы избежать этого, можно «вращать» поляризацию волн, «заглаживая» языки. При этом, однако, может возникнуть увлечение плазмы и, следовательно, дополнительная дестабилизация.

Если в удерживающем в.ч. поле существенны ток смещения и связанные с ним волновые эффекты (т. е. если длина волны удерживающего в.ч. поля сравнима с характерным размером ловушки), может проявиться следующий «резонансный» эффект.

Рассмотрим для простоты плоскую границу плазмы, удерживаемой давлением электромагнитной волны (например, стоячей), которая возбуждается в слое толщины  $l$ , ограниченном с одной стороны поверхностью

\*) На практике же создание в. ч. магнитного поля достаточно большой амплитуды упирается в огромные затраты энергии на питание в. ч. устройства

плазмы, а с другой — какой-нибудь проводящей поверхностью (рис. 10). Пусть амплитуды  $E_0$  и  $H_0$  в.ч. полей  $E$  и  $H$  в равновесии распределены в пространстве по закону

$$\left. \begin{aligned} E_y^0 &= E^0 \sin \frac{\omega}{c} x, \\ H_z^0 &= H^0 \cos \frac{\omega}{c} x, \end{aligned} \right\} \quad (4ж,1)$$

где

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{e}, \quad E^0 = -H^0.$$

При появлении волнообразного возмущения границы плазмы ( $\sim \exp(ikz)$ ) изменяется и пространственное распределение в.ч. поля,

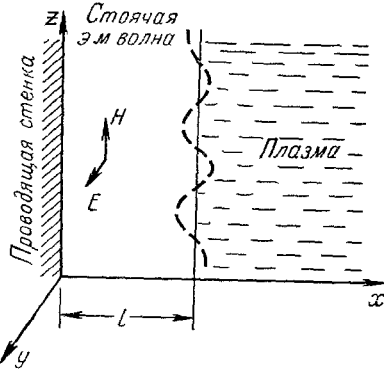


Рис. 10.

а тем самым и распределение его давления  $\bar{H}^2/8\pi$  вдоль границы плазмы. Если в местах выпуклости границы плазмы давление возросло, система устойчива (стремится вернуться в исходное состояние). В обратном случае плазма будет уходить от положения равновесия (имеет место аperiodическая неустойчивость). Уравнения Максвелла для поправок к амплитуде стоячей волны имеют вид

$$H_z^1 = -\frac{c}{\omega} \frac{dE_y^1}{dx},$$

$$\frac{d^2 E_y^1}{dx^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_y^1 = 0, \quad (4ж,2)$$

а граничные условия требуют обращения в нуль тангенциальной компоненты  $E$  на обеих границах: при  $x=0$  и при  $x=l+\xi$ , где  $\xi$  — малое смещение границы плазмы. Первое условие дает просто  $E_y^1|_{x=0} = 0$ , а второе, с точностью до величин первого порядка малости, есть

$$E_y^1|_{x=l+\xi} + \xi \frac{dE_y^1}{dx} \Big|_{x=l} = 0. \quad (4ж,3)$$

Решение уравнений (4ж,2) — (4ж,3), удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$E_y^1 = -\frac{\omega}{c} E^0 \xi \frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l}, \quad H_z^1 = E^0 \xi \alpha \frac{\cos \alpha x}{\sin \alpha l},$$

где

$$\alpha = \sqrt{\omega^2/c^2 - k^2}.$$

Поправка к давлению на границе плазмы пропорциональна  $H^0 H^1 \sim -\xi \frac{H^0{}^2}{4\pi} \alpha \operatorname{ctg} \alpha l$ . Для устойчивости необходимо, чтобы при отрицательных  $\xi$ , т. е. в местах выпуклости границы плазмы, давление возрастало. Следовательно, плазма устойчива, если

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\omega^2/c^2 - k^2} \cdot l > 0$$

или <sup>21</sup>

$$k^2 > \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{l^2}.$$

Отсюда видно, что неустойчивость появляется в области длинных волн возмущений поверхности  $2\pi/k$ , сравнимых с длиной электромагнитной стоячей волны. Если же размеры плазменного образования значительно меньше  $c/\omega$ , то такой неустойчивости не будет.

Рассмотренную неустойчивость качественно можно интерпретировать как геометрический резонанс, возникающий в случае, когда длина волны возмущения сравнивается с длиной удерживающей электромагнитной волны.

Здесь для простоты мы рассмотрели лишь простейший тип деформации границы плазмы ( $\sim \exp ikz$ ) — волны вдоль направления в.ч. магнитного поля. Учет более общих деформаций вида  $\exp i(k_z z + k_y y)$  мало меняет критерий устойчивости, а именно, система устойчива, если

$$k_z^2 > \frac{\pi^2}{l^2}.$$

### 5. Аперидическая неустойчивость плазмы с учетом диссипативных процессов

Диссипативные процессы — вязкость, проводимость и теплопроводность — могут в принципе привести к тому, что аперидическая неустойчивость перейдет в колебания с нарастающей амплитудой, так как задача уже не является самосопряженной. Однако в некоторых случаях можно показать, что и с учетом конечной диссипации граница неустойчивости определится условием  $\omega \neq 0$ , т. е. система аперидически уходит от равновесия. В этом случае, по аналогии с идеальной плазмой, можно ввести вариационный критерий устойчивости и воспользоваться им для численного расчета.

В настоящем разделе мы рассмотрим задачи, в которых осуществляется такая ситуация: вращение и магнитную конвекцию в плазме при учете диссипативных процессов.

Аперидическая тепловая конвекция в плазме подробно рассматривается в п. 13, где найдены как условия возникновения конвекции, так и «надкритическая» конвекция.

5а. Устойчивость вращения плазмы. В этом разделе мы продолжим изучение устойчивости вращающейся плазмы по отношению к аксиально-симметричным возмущениям. Для простоты ограничимся моделью несжимаемой жидкости с конечной проводимостью; в настоящее время подробно исследован только этот случай.

Как мы видели в п. 4д, влияние магнитного поля на устойчивость вращения идеальной плазмы заключается в том, что перестает выполняться закон сохранения момента количества движения для смещения малых частей плазмы, а сохраняется их угловая скорость. Для движения однородной идеально проводящей плазмы, вызванного вращением ограничивающих плазму цилиндров (угловые скорости  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , радиусы  $R_1, R_2$ ;  $R_2 > R_1$ ), изменение границы устойчивости показано на рис. 11 для случая слабого магнитного поля. С учетом магнитной квазиупругой силы

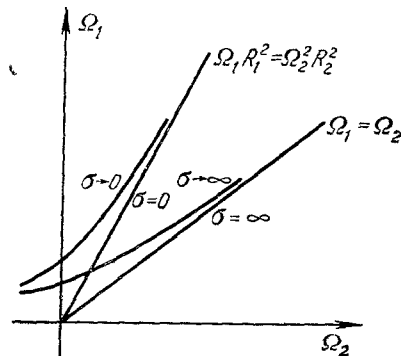


Рис. 11.

условие устойчивости есть

$$\frac{B^2}{L^2} + r \frac{d\Omega^2 \varrho}{dr} > 0, \quad (5a,1)$$

т. е. область устойчивости несколько шире, чем указано на рис. 11.

С уменьшением проводимости область устойчивости расширяется. Это происходит из-за того, что появляется затухание, обусловленное джоулевым нагревом плазмы и плазма «отклеивается» от магнитных силовых линий; это приводит к смещению границы неустойчивости по направлению к границе Рэлея ( $\Omega_1 R_1^2 = \Omega_2 R_2^2$ ).

При некоторой конечной проводимости начинает проявляться стабилизирующий эффект магнитного поля — джоулевы потери начинают превышать влияние «магнитного раскручивания». Рассмотрим этот эффект для плохо проводящей жидкости  $\frac{B}{\sqrt{4\pi\varrho}} \frac{R_2 - R_1}{c^2} 4\pi\sigma < 1$ . Как известно, в этом случае движение плазмы слабо возмущает магнитное поле. Поэтому влияние последнего сводится к появлению тормозящей силы

$$\frac{1}{c} \frac{H}{c} \sim \sigma \frac{vH}{c} \frac{H}{c} = \frac{\sigma v H^2}{c^2}. \quad (5a,2)$$

Найдем условия существования (т. е. границу устойчивости) стационарного движения в плазме, поддерживаемого градиентом центробежной силы.

Как мы видели (п. 4д), при быстром (по сравнению с выравниванием скорости) смещении элемента плазмы на него действует разность изменения полного градиента давления и центробежной силы

$$\delta F = -\frac{2\varrho\Omega}{r} (\Omega r^2)' \delta r, \quad (5a,3)$$

где  $\Omega$  — угловая скорость вращения слоя, из которого начал двигаться элемент,  $r$  — расстояние этого слоя от оси вращения, а  $\varrho$  — плотность.

Время смещения можно оценить, приравняв эту силу силе электромагнитного торможения и силе вязкого трения.

$$-\frac{2\varrho\Omega}{r} (\Omega r^2)' \delta r = \frac{\sigma H^2}{c^2} \frac{\delta r}{\delta t} + \frac{\eta}{\lambda^2} \frac{\delta r}{\delta t}, \quad (5a,4)$$

где  $\lambda$  — характерный размер возмущений, откуда

$$\delta t_1 \cong \frac{\frac{\sigma H^2}{c^2} + \frac{\eta}{\lambda^2}}{-\frac{2\varrho\Omega}{r} (\Omega r^2)'}. \quad (5a,4')$$

С другой стороны, за это время не должна успеть выравниваться скорость вращения элемента и скорость окружающей плазмы. Скорость выравнивания определяется приближенным равенством

$$\varrho \frac{\delta v}{\delta t_2} \cong \frac{\sigma H^2}{c^2} \delta v + \frac{\eta}{\lambda^2} \delta v. \quad (5a,5)$$

Приравнявая  $\delta t_1$  и  $\delta t_2$ , найдем границу устойчивости:

$$-\frac{2\Omega}{r} (\Omega r^2)' \sim \left( \frac{v}{\lambda^2} + \frac{\sigma H^2}{c^2 \varrho} \right)^2, \quad (5a,6)$$

или

$$T_{\text{кр}} = -\frac{2\Omega (\Omega r^2)' (R_2 - R_1)^4}{r v^2} \sim \frac{(R_2 - R_1)^4}{\lambda^4} \left( 1 + \frac{\sigma H^2 \lambda^2}{c^2 \varrho v} \right)^2, \quad (5a,7)$$

где  $T$  — число Тейлора.

Для твердых цилиндров  $T_{кр} \rightarrow T_0^{кр} = 1700$  при  $H \rightarrow 0$ . Обозначая

$$\frac{\sigma H^2}{c^2 q v} (R_2 - R_1)^2 = \Gamma^2,$$

где  $\Gamma$  — число Гартмана, мы видим, что

$$\frac{T_{кр}}{T_0^{кр}} \sim \left( 1 + \Gamma^2 \frac{\lambda^2}{(R_2 - R_1)^2} \right)^2 \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4}. \quad (5a, 8)$$

Фигурирующая во всех этих выражениях длина  $\lambda$  есть некий средний размер возмущения

$$\lambda \approx (R_2 - R_1) A,$$

а точное значение численного множителя  $A$  зависит от граничных условий.

В сильном поле ( $\Gamma \gg 1$ ) граница устойчивости определится безразмерным параметром

$$\Lambda = -\frac{2q^2\Omega(\Omega r^2)'c^4}{\sigma^2 H^4 r}, \quad \Lambda^{кр} \approx 1. \quad (5a, 9)$$

На рис. 12 дана зависимость  $T_{кр}$  от  $\Gamma$ . Начальный участок кривой получен численно в работе <sup>22</sup>. При  $T > T_{кр}$  вращение неустойчиво.

5б. Устойчивость пинча. 1. Если учесть, что продольный ток течет в реальной плотной плазме (мы рассмотрим плотную плазму,

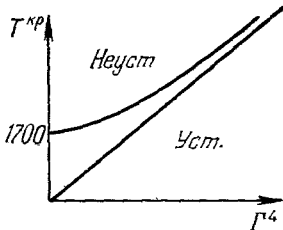


Рис. 12.



Рис. 13.

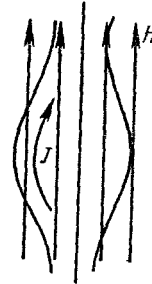


Рис. 14.

длина свободного пробега в которой много меньше размеров прибора), то необходимо принять во внимание конечную величину проводимости и вязкости плазмы.

Рассмотрим качественно два типа явлений, на которых сказывается конечная проводимость плазмы: а) устойчивость шнура разряда как целого, б) внутреннюю (магнитную конвективную) устойчивость шнура.

Ясно, что и с учетом конечной проводимости остаются в силе все прежние выводы об устойчивости шнура относительно «шеек» и «змеек», так как ток всегда остается внутри него. Однако если включить продольное магнитное поле, то картина существенно изменится.

Рассмотрим, например, винтовое искривление всего шнура в целом. Если при идеальной проводимости силовые линии магнитного поля увлекались шнуром, то при плохой проводимости плазмы можно пренебречь искажением внешнего поля. Поэтому на  $\varphi$ -ую компоненту тока со стороны поля действует радиальная сила. Ясно, что из двух возможных винтов один приводит к неустойчивости — прижиманию шнура к стенке (рис. 13—14).

В шейкообразных возмущениях основным эффектом является возникновение  $z$ -го момента из-за силы  $j_r H_z / c$ . Этот момент приводит к общему вращению шнура. Возникает центробежная сила. Если шнур помещен в вакуум, то она оказывает резко дестабилизирующий эффект — «разбрызгивает» шнур.

Если же шнур окружен атмосферой холодного (и плотного) газа, то центробежный эффект, как и в центрифуге, приведет к стабилизации шнура. Шнур будет находиться в некотором «динамически устойчивом» состоянии, вращаясь с такой скоростью, чтобы нарастание градиента давления в холодной «шубе» из-за центробежной силы компенсировало падение магнитного давления, а работа тока во внешнем поле — работу вязких сил.

Внутренняя устойчивость шнура связана с тем, насколько велико затухание из-за вязкости и конечной проводимости.

Действительно, рассмотрим конвективную неустойчивость, изученную в п. 4г, с учетом вязкости и конечной проводимости плазмы. Трубка магнитных силовых линий, движущаяся ускоренно под действием разности между градиентом полного давления и собственным магнитным натяжением,

$$\delta F = -\frac{B_0^2}{2\pi r_0} \left\{ \frac{1}{\gamma p_0} \frac{p'_0 + \frac{B_0}{4\pi}(B'_0 - B_0/r)}{1 + B_0^2/4\pi\gamma p_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{B'_0}{B_0} \right\} \delta r \quad (56,1)$$

(см. (4в, 10)), с учетом конечной вязкости движется со скоростью

$$v \cong \frac{\delta r}{\delta t} \cong \frac{\delta F}{\eta} \lambda^2, \quad (56,2)$$

где  $\lambda$  — размер трубки.

Если за это время поле в трубке и вне ее не успеет выравниваться, т. е.

$$\delta t < \frac{4\pi\sigma\lambda^2}{c^2}, \quad (56,3)$$

то конвекция развивается. Критические условия для возникновения магнитной конвекции получим, подставив в (56,3)  $\delta t$  из (56,2):

$$\begin{aligned} T_m = \frac{\delta F}{\delta r} \frac{4\pi\sigma d^4}{\eta c^2} &= -\frac{2B_0^2\sigma}{\eta c^2 r} \left\{ \frac{1}{\gamma p} \frac{p' + \frac{B_0}{4\pi}(B_0 - B_0/r)}{1 + B_0^2/4\pi\gamma p} + \frac{1}{r} - \frac{B'_0}{B_0} \right\} d^4 > \\ &> T_m^{\text{кр}} \sim \frac{d^4}{\lambda^4}. \end{aligned} \quad (56,4)$$

Точное значение критического магнитного числа Тейлора  $T_m^{\text{кр}}$  зависит от граничных условий и равно 1700 для конвекции между изолирующими стенками в тонком цилиндрическом слое радиуса кривизны  $r$  и толщины  $d$  и 657 при конвекции в слое со свободными поверхностями.

Для разреженной плазмы ( $\beta = \frac{8\pi p}{B^2} \ll 1$ ) это условие дает:

$$T_m = \frac{8\pi p' \sigma}{\eta c^2 r} d^4 \sim \frac{8\pi\sigma d^3}{c^2 r v} \frac{p}{\eta} \sim \frac{6}{\gamma} \frac{4\pi e^2}{mc^2} n d^2 \frac{d}{r} \sqrt{\frac{M}{m}} \left( \frac{l_s}{r_{\lambda i}} \right)^2;$$

предполагается, что плазма обладает «замагниченной» вязкостью. Эта величина обычно очень велика, так что конвекция является сильно «закритической», т. е., по-видимому, развитой турбулентной.

С другой стороны, в холодной и плотной плазме ( $l_s \ll r_{\lambda i}$ ), типа плазмы в плазмотронах и стабилизированных дугах, конвекция может не возникать.

При наличии внутри шнура продольного магнитного поля могут появиться новые эффекты, учет которых, однако, провести в общем виде практически невозможно. Противоположный предельный случай, когда продольное магнитное поле настолько велико, что можно пренебречь азимутальным магнитным полем и давлением плазмы (по сравнению с  $\frac{H_z^2}{8\pi}$ ), допускает тем не менее простое рассмотрение<sup>46</sup>. Предположим, что в равновесии вдоль  $z$  приложено электрическое поле  $E_0$ , создающее ток  $j_0 = \sigma_0 E_0$ , причем проводимость  $\sigma_0$  меняется в пространстве вдоль координаты  $x$  (для простоты выберем не цилиндрическую, а плоскую геометрию). Рассмотрим возмущения вида  $\exp\{i(k_y y + k_z z) + i\omega t\}$ , развивающиеся с такими частотами  $\omega$ , что искажением магнитного поля можно пренебречь.

$$\text{rot } \mathbf{E} \approx 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} \approx 0 \quad (56,5)$$

(это означает, что фазовая скорость возмущений  $\frac{\omega}{k}$  должны быть значительно меньше характерной скорости, связанной с величиной магнитного поля,  $\frac{H}{\sqrt{4\pi q}}$ ).

Скорость движения вдоль  $x$  возмущенной трубки с током будет

$$v_x = c \frac{E_y}{H_0}. \quad (56,6)$$

Возмущение же электрического поля найдем из условия

$$j = \sigma E_0 + \sigma_0 E_z = 0. \quad (56,7)$$

Если пренебречь теплопроводностью, то изменение проводимости  $\sigma$  будет связано только с движением плазмы

$$\sigma = \frac{d\sigma_0}{dx} \xi_x, \quad (56,8)$$

где  $\xi_x$  — смещение токовой трубы. Комбинируя (56,6) — (56,8) и учитывая, что  $E_y = \frac{k_y}{k_z} E_z$  из (56,5), найдем связь между скоростью  $v$  и смещением  $\xi_x$

$$v_x = c \frac{k_y}{k_z} \frac{E_0}{H_0} \frac{d \ln \sigma_0}{dx} \xi_x. \quad (56,9)$$

Выбирая нужный знак  $\frac{k_y}{k_z}$ , можно построить возмущения, экспоненциально нарастающие во времени  $e^{vt}$  ( $v_x$  направлено в сторону смещения  $\xi_x$ ). Инкремент нарастания такой неустойчивости будет

$$i\omega = v = \frac{v_x}{\xi_x} = c \frac{k_y}{k_z} \frac{E_0}{H_0} \frac{d \ln \sigma_0}{dx}. \quad (56,10)$$

При таком идеализированном рассмотрении всякое равновесие, в котором проводимость  $\sigma_0$ , а значит и температура плазмы (и плотность, если плазма не полностью ионизована) меняются в пространстве, должно быть неустойчиво. На самом деле учет выравнивающего действия теплопроводности (например, вдоль силовых линий) дал бы вместо (56,10) следующую формулу для инкремента<sup>46</sup>:

$$v = -k_z^2 \chi + c \frac{k_y}{k_z} \frac{E_0}{H_0} \frac{d \ln \sigma_0}{dx}. \quad (56,11)$$

В связи с рассмотренной неустойчивостью интересно отметить, что при нагревании плазмы джоулевым теплом, выделяемым протекающим по ней током, может оказаться существенной тенденция к самопроизвольному нарастанию неравномерности в пространственном распределении температуры. Это обусловлено тем, что в локальном объеме с большой температурой проводимость  $\sigma$  больше, тем самым и выделение джоулева тепла  $\sigma E^2$  больше среднего уровня. Таким образом, возникает своеобразная «тепловая» неустойчивость.

### III. КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ

Переходя к изучению колебательной неустойчивости плазмы, мы рассмотрим в п. 6 неустойчивость пучков, в п. 7 — микроскопическую неустойчивость «немаксвелловской» плазмы, связанную с фазовым резонансом между волнами возмущения и отдельными группами частиц, в пп. 8, 9 — микроскопическую неустойчивость неоднородной плазмы, связанную с фазовым резонансом между волнами возмущений и дрейфом частиц, в п. 10 — неустойчивость течений плазмы в магнитном поле, связанную с фазовым резонансом между волнами возмущений и отдельными слоями потока, и в п. 11 — «периодическую конвекцию» в плазме, т. е. неустойчивость тяжелой плазмы, подогреваемой снизу, при условии  $4\pi\sigma\chi/c^2 > 1$ , т. е. когда магнитное поле выравнивается медленнее, чем температура. Возникновение неустойчивости типа альфвеновских колебаний с нарастающей амплитудой связано в этом последнем случае с конкуренцией двух различных процессов диффузии.

#### 6. Неустойчивость пучков в плазме

Из-за того, что длина свободного пробега частиц в плазме во многих случаях может быть значительно больше размеров прибора, в ней в одном и том же месте могут существовать группы частиц с различными средними скоростями — пучки. Эти пучки могут вводиться в плазму искусственно (электронные пучки в электронно-лучевых усилителях, ионные пучки при инжекции в ловушке) или возникать в плазме под влиянием внешних полей (например, «убегающие» электроны). В ряде случаев саму плазму можно рассматривать как несколько взаимно проникающих электронных и ионных пучков. В этом разделе нас будут интересовать преимущественно почти моноэнергетические пучки (разброс скоростей частиц в пучке много меньше средней скорости). Механизм неустойчивости размытых пучков рассматривается в п. 6а.

Интересным общим свойством почти моноэнергетических пучков является интенсивная потеря энергии, не объяснимая с точки зрения теории парных столкновений<sup>23</sup>. По-видимому, этот экспериментальный факт в ряде случаев хорошо согласуется с теорией неустойчивости пучков.

В нашем обзоре мы не имеем возможности остановиться на всех результатах этой теории<sup>23-25</sup> и поэтому ограничимся изучением однородных, бесконечно протяженных пучков, не рассматривая эффектов, связанных с их конечными поперечными размерами. Кроме этого, мы рассматриваем только квазинейтральные пучки. Как известно, почти моноэнергетические пучки хорошо описываются гидродинамическим приближением; в этом разделе мы будем пользоваться только им.

В п. 6а рассмотрена неустойчивость двух пучков, в п. 6б кратко разобран вопрос о характере этой неустойчивости, в п. 6в изучена неустойчивость двух ионных пучков в плазме с горячими электронами и, наконец, в п. 6г рассмотрено влияние магнитного поля на пучковую неустойчивость.



ба. Неустойчивость двух пучков. Рассмотрим два пучка частиц с зарядами  $e_1$  и  $e_2$ , массами  $m_1$  и  $m_2$ , плотностью  $N_1$  и  $N_2$  с разбросом скоростей  $c_1$  и  $c_2$ . Первый пучок покоится, а второй движется со скоростью  $V$ .

Уравнение, связывающее комплексную частоту  $\omega$  с волновым числом  $k$  (выводится в приложении I), имеет вид

$$F\left(\frac{\omega}{k}\right) = \frac{\omega_1^2}{\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 - c_1^2} + \frac{\omega_2^2}{\left(\frac{\omega}{k} - V\right)^2 - c_2^2} = k^2, \quad (6a,1)$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{4\pi e_1^2 N_1}{m_1} \quad \text{и} \quad \omega_2^2 = \frac{4\pi e_2^2 N_2}{m_2}.$$

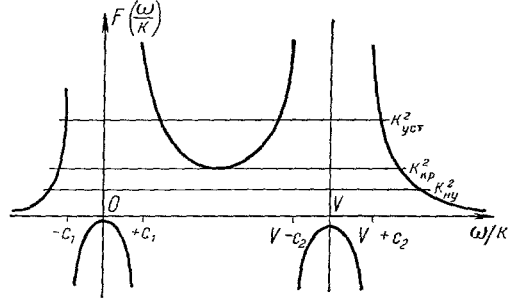


Рис. 15.

На рис. 15 построена левая часть (6a,1) как функция  $\omega/k$  для двух случаев: а)  $c_1 + c_2 < V$ , б)  $c_1 + c_2 > V$ .

Если прямая  $k^2$  пересекает  $F\left(\frac{\omega}{k}\right)$  в четырех точках, то (6a,1) имеет четыре действительных корня и возмущения являются чисто периодическими, т. е. относительно возмущений с таким волновым числом пучки устойчивы.

На рис. 15 прямая  $k_{уст}^2$  соответствует ненарастающим возмущениям,  $k_{ну}^2$  — возмущениям, амплитуда которых со временем растет. Прямая  $k_{кр}^2$  отделяет область устойчивости от области неустойчивости.

Из рис. 16 следует, что если  $c_1 + c_2 > V$ , то пучки устойчивы.

К неустойчивости при  $c_1 + c_2 < V$  приводят лишь достаточно длинноволновые возмущения. Для моноэнергетических пучков из (6a,1) следует, что

$$k_{кр}^2 = \frac{\omega_{p1}^2}{V^2} \left\{ 1 + \left( \frac{\omega_{2n}}{\omega_{1p}} \right)^{2/3} \right\}^3. \quad (6a,2)$$

Из четырех возможных волн две волны не нарастают. Эти две волны аналогичны обычным ленгмюровским колебаниям. Две другие волны не нарастают, если они достаточно длинные.

Рассмотрим подробнее механизм «электростатической» неустойчивости (так иногда называют неустойчивость системы относительно возмущений типа продольных плазменных колебаний).

В качестве примера выберем сильно различающиеся пучки — электронный пучок,двигающийся через покоящийся ионный газ (или, совершенно аналогично, плотный пучок,двигающийся через редкий). Предположим, что в плазме в начальный момент времени создано длинноволновое возбуждение ( $k \ll \omega_2/V$ , где  $\omega_2$  — плазменная частота электронов). Так как нас не интересуют быстрые колебания, то это начальное возмущение должно быть квазинейтральным. Предположим, однако, что в нем имеется небольшой избыточный отрицательный заряд. Тогда в поле этого заряда

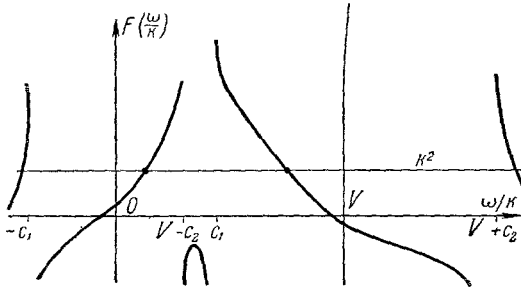


Рис. 16.

начнут собираться ионы. С другой стороны, движущиеся электроны в нем тормозятся и в области отрицательного объемного заряда их плотность также увеличивается. Поэтому начальное квазинейтральное возмущение нарастает. Характерное время нарастания такого возмущения можно найти из следующих соображений.

Из сохранения энергии движущихся электронов следует, что

$$Vv_e - \frac{e}{m} \varphi = \text{const}$$

(константу можно положить равной нулю). Здесь  $v_e$  — возмущение скорости электронов, а  $\varphi$  — потенциал. Из сохранения потока электронов следует, что

$$n_e = -\frac{N_e v_e}{V_0} = -\frac{N_e e}{mV^2} \varphi,$$

где  $n_e$  — возмущение плотности электронов. Уравнение Пуассона тогда даст следующее выражение для возмущения плотности ионов

$$n_i = \frac{1}{4\pi e} \left\{ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{4\pi e^2 N}{mV^2} \varphi \right\}. \quad (6a,3)$$

Отсюда следует, что для достаточно длинных волн, как мы уже видели выше, в области отрицательного объемного заряда увеличена как плотность электронов, так и плотность ионов. Из уравнения движения ионов в поле  $\varphi$  и уравнения непрерывности следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} &= -\frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} &= -N_i \frac{\partial v_i}{\partial x}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} = \frac{N_i e}{M} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (6a,4)$$

Из (6a,4) и (6a,3) для синусоидального в пространстве возмущения получим

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} = -\frac{4\pi e^2 N_i}{M} \frac{k^2}{k^2 - \frac{4\pi e^2 N}{mV^2}} n_i.$$

Характерное время нарастания

$$t_{\text{нар}} = \left\{ \frac{\frac{4\pi e^2 N}{mV^2} - k^2}{\frac{4\pi e^2 N}{M} k^2} \right\}^{1/2} \sim \frac{1}{kV} \left( \frac{M}{m} \right)^{1/2}. \quad (6a,5)$$

Чем ближе длина волны к «резонансной» ( $k_{\text{рез}} = \frac{\omega_e}{V}$ ), тем быстрее нарастают возмущения.

Наименьшее время нарастания — нарастание в резонансе — получаем из (6a,1), подставляя туда  $k = \omega_e/V$  и пренебрегая  $\omega/\omega_e$  по сравнению с единицей.

$$t_{\text{нар}} \sim \frac{1}{\omega_i} = \left( \frac{2M}{m} \right)^{1/2} \frac{2}{\omega_e V^3}. \quad (6a,6)$$

Здесь  $\omega_i$  — мнимая часть  $\omega$  (инкремент).

В слабых пучках время (6a,6) значительно меньше, чем полученное из (6a,5). Поэтому разброс скоростей в пучке значительно уменьшает инкремент еще до полного исчезновения неустойчивости. Можно пока-

зять, что при  $c_e/V \sim (m/M)^{1/3}$  более существенным для раскачки пучка становится механизм, описанный в следующем параграфе.

**6б. Абсолютная и сносовая неустойчивости пучков.** Как уже упоминалось во введении, имеет смысл различать абсолютную и сносовую неустойчивости. Система является абсолютно неустойчивой в том случае, если малое возмущение, возникшее в ограниченной области пространства в какой-то момент, неограниченно возрастает при  $t \rightarrow \infty$  в той же области. Если же возмущение переносится и возрастает, а в исходной точке уменьшается со временем, то такая неустойчивость называется сносовой. Таким образом, сама постановка задачи имеет смысл только в рамках линейного приближения и только по отношению к одному частному виду возмущений — возмущениям, отличным от нуля в начальный момент времени лишь в ограниченной области пространства.

Абсолютно неустойчивые системы могут употребляться только как генераторы. Системы же, в которых существует сносовая неустойчивость, могут использоваться в качестве усилителей.

Для ответа на вопрос нужно решить задачу с начальными условиями для систем уравнений, описывающих малые возмущения пучка. Пучок в покоящейся плазме и пучки, движущиеся в одном направлении, оказываются, не являются абсолютно неустойчивыми.

Пучки, движущиеся в противоположных направлениях, абсолютно неустойчивы. Физические основания этого лежат в существовании обратной связи между источником возмущения и возмущением, нарастающим при распространении.

**6в. Устойчивость ионных пучков в плазме.** Рассмотрим ионно-электронную плазму, в которой имеется ионный пучок. Для простоты предположим, что температура ионов много меньше электронной температуры.

Введем следующие обозначения:  $\omega_{p1}$  — ленгмюровская частота ионов плазмы (первый пучок),  $\omega_{p2}$  — ленгмюровская частота ионов пучка (второй пучок),  $\omega_e$  — ленгмюровская частота электронов,  $V$  — скорость ионов второго пучка,  $k$  — волновое число возмущений,  $c_e = \sqrt{\gamma T/m}$  — тепловая скорость электронов.

Дисперсионное уравнение, полученное в приложении I, имеет вид

$$F\left(\frac{\omega}{k}\right) = \frac{\omega_{p1}^2}{(\omega/k)^2} + \frac{\omega_{p2}^2}{(\omega/k - V)^2} + \frac{\omega_e^2}{(\omega/k)^2 - c_e^2} = k^2. \quad (6в,1)$$

Предполагая, что  $V < c_e$ , получаем зависимость левой части от  $\omega/k$ , указанную на рис. 17. Очевидно, что корни 1, 2, 3, 4, полученные пересечением кривых с прямой « $k^2$ », параллельной оси абсцисс, представляют собой чисто периодические возмущения, не приводящие к неустойчивости.

Устойчивость или неустойчивость пучков зависит от того, пересекает ли эта прямая ветвь  $F(\omega/k)$  при  $0 < \omega/k < V$ . Для этого достаточно знать, имеет ли  $F(\omega/k)$  в диапазоне  $0 - V$  нули. Итак, пучки неустойчивы, если  $F = 0$  имеет два действительных корня, и устойчивы, если этих корней четыре. Рассмотрим частный случай  $V \ll c_e$ . Тогда в (6в,1) можно пренебречь  $\omega/k$  по сравнению с  $c_e$ , и мы получаем уравнение

$$\frac{\omega_{p1}^2}{(\omega/k)^2} + \frac{\omega_{p2}^2}{(\omega/k - V)^2} = \frac{\omega_e^2}{c_e^2}. \quad (6в,2)$$

Это уравнение в точности эквивалентно (6а,1). Поэтому из (6а,2) получаем условие устойчивости

$$\frac{V^2}{c_e^2} > \frac{\omega_{p2}^2}{\omega_e^2} \left\{ 1 + \left( \frac{\omega_{p1}}{\omega_{p2}} \right)^{2/3} \right\}^3.$$

С другой стороны, наше рассмотрение справедливо только при  $V^2 < c_e^2$ . При нарушении этого условия возникает электростатическая неустойчивость на электронной ветви. Поэтому условие устойчивости относительно возбуждения рассмотренных возмущений имеет вид

$$1 > \frac{V^2}{c_e^2} > \frac{\omega_{p2}^2}{\omega_{e1}^2} \left\{ 1 + \left( \frac{\omega_{p1}}{\omega_{p2}} \right)^{2/3} \right\}^3. \quad (6в,3)$$

Здесь мы рассмотрели лишь частный тип возмущений — колебания вдоль направления скорости пучка. При учете «косых» возмущений ( $k \neq V$ ) ионные пучки всегда неустойчивы. Однако если в плазме имеется достаточно сильное магнитное поле, направленное вдоль скорости пучка, то критерий

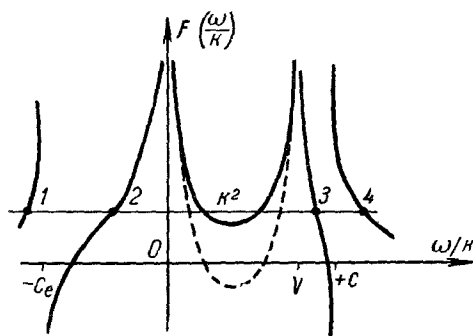


Рис 17

(6в,3) остается в силе, т. е. достаточно быстрые ионные пучки устойчивы. Это связано с тем, что магнитное поле «подавляет» колебания, перпендикулярные к  $\mathbf{H}$ , и поэтому компонента волнового вектора  $k_{\perp}$  выпадает из уравнений

6г. Влияние магнитного поля на неустойчивость пучков. Наличие магнитного поля, перпендикулярного к направлению движения пучка, может существенно изменить вывод предыдущего раздела.

Магнитное поле влияет на движение ионов в волне в том случае, если  $\lambda \gtrsim r_{\lambda i}$ , где  $\lambda$  — длина волны, а  $r_{\lambda i}$  — ларморовский радиус иона, для «резонансной» длины волны  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi V/\omega_{pi}$ . С другой стороны,  $r_{\lambda i} \sim v_{Ti}/\omega_{Hi}$ , где  $v_{Ti}$  — тепловая скорость, а  $\omega_{Hi}$  — гирочастота ионов.

Поэтому поле влияет на движение ионов в возмущении только в том случае, если

$$V/v_{Ti} > \frac{\omega_{pi}}{\omega_{Hi}} = \sqrt{4\pi N M c^2 / H^2}. \quad (6г,1)$$

Последняя величина очень велика для плотной плазмы. Поэтому в ней поле влияет на движение ионов только при возмущении очень узких пучков.

Рассмотрим пучок в достаточно слабом поле, т. е. будем считать, что  $V/v_{Ti} < \sqrt{4\pi N M c^2 / H^2}$ . В этом случае поле влияет лишь на электроны. Если «резонансная» длина волны возмущений больше ларморовского радиуса электронов, то это влияние существенно. При этом условие (6г,1) заменяется на

$$\frac{V}{c_e} > \frac{\omega_{pi}}{\omega_{He}}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{V}{v_{Ti}} > \left\{ \frac{T_e}{T_i} \frac{4\pi N m c^2}{H^2} \right\}^{1/2}. \quad (6г,2)$$

В обратном случае  $\frac{V}{v_{Ti}} > \left\{ \frac{T_e}{T_i} \frac{Nmc^2 \cdot 4\pi}{H^2} \right\}$  поле вообще не влияет на возмущения. Если же

$$\left\{ \frac{4\pi NMc^2}{H^2} \right\}^{1/2} > \frac{V}{v_{Ti}} > \left\{ \frac{T_e}{T_i} \frac{4\pi Nmc^2}{H^2} \right\}^{1/2}, \quad (6г,3)$$

то электроны «замагничены», т. е. они дрейфуют под действием электрического поля волны возмущения.

Поэтому возмущение  $x$ -й скорости электронов (ось  $x$  направлена, как и всюду в этом параграфе, вдоль скорости ионного пучка) согласно п. 3

$$v_{ex} \sim -\frac{c^2 m}{eH^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (6г,4)$$

Из уравнения непрерывности для электронов следует, что

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -N_e \frac{\partial v_{ex}}{\partial x} = \frac{c^2 m N_e}{e^2 H^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial x}, \quad (6г,5)$$

т. е.

$$n_e \cong \frac{c^2 m N_e}{eH^2} \frac{\partial E_x}{\partial x}.$$

Электрическое поле в продольной волне определяется выражением

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -4\pi e n_e + 4\pi e n_i = -\frac{4\pi m N}{H^2} c^2 \frac{\partial E_x}{\partial x} + 4\pi e n_i.$$

Подставив  $n_i$  из приложения I и пренебрегая левой частью, получим:

$$\frac{4\pi Nmc^2}{H^2} k^2 = \frac{\omega_{i1}^2}{(\omega/k)^2 - v_{Ti1}^2} + \frac{\omega_{i2}^2}{(\omega/k - V)^2 - v_{Ti2}^2}. \quad (6г,6)$$

Качественно это уравнение полностью соответствует уравнению (6а.1). Поэтому по-прежнему условие устойчивости имеет вид  $V > v_{T1} + v_{T2}$  и кинетический механизм неустойчивости становится более существенным при

$$\frac{v_{Ti}}{V} > \left( \frac{\omega_{i1}}{\omega_{i2}} \right)^{2/3} \quad \text{для} \quad \frac{\omega_{i1}}{\omega_{i2}} \ll 1.$$

Резонансная длина волны при этом равна

$$k_{\text{рез}} = \frac{\omega_{i2} \omega_H}{\omega_e V} \cong \frac{V \omega_{Hi} \omega_{He}}{V} (\omega_{i2} \gg \omega_{i1}),$$

т. е. резонанс происходит на «среднегеометрической» частоте.

Формула (6г, 6) перестает быть справедливой, когда скорость пучка  $V$ , значительно превысив тепловую скорость ионов, приближается к альфвеновской скорости  $\frac{H}{V 4\pi Q}$ . При больших скоростях, как показывает расчет, пучок неустойчив относительно косых возмущений  $k \neq V$ .

Если пучки заряженных частиц двигаются вдоль поля, то при превышении относительной скорости пучка фазовых скоростей волн начинается черенковское излучение этих волн. Кроме этого, происходит интенсивное взаимодействие частиц пучка и волн в том случае, если частота волны, измененная из-за Доплер-эффекта, совпадает с обертонами ларморовской частоты вращения частиц в продольном поле. Качественно картина взаимодействия подробно рассмотрена в п. 7.

## 7. Микроскопическая неустойчивость «немасвелловской» плазмы

В п. 4е рассматривалась аperiodическая неустойчивость разреженной плазмы с немасвелловским распределением частиц по скоростям. Вообще говоря, отклонение распределения частиц от равновесного распределения (масвелловского) может привести и к раскачке волн в плазме, т. е. к появлению колебательной неустойчивости. Критерий возникновения такой неустойчивости, т. е. условие изменения знака мнимой части  $\omega_i$  частоты  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ , можно легко получить с помощью рассмотрения баланса обмена энергией между какой-нибудь плазменной волной, возникшей в результате флуктуации, и частицами плазмы. При очень малых  $\omega_i$  ( $\omega_i \ll \omega_r$ ) волна с данной  $\omega$  и соответствующим волновым вектором  $k$  является почти периодической. Ионы (электроны) плазмы, осциллируя в периодическом поле волны, в среднем не изменяют своей энергии. Исключение составляют те частицы из распределения по скоростям, для которых выполнено условие резонанса с волной. При отсутствии магнитного поля в невозмущенной плазме в резонансе находятся лишь те частицы, скорость которых близка к фазовой скорости волны  $\omega/k$  (условие резонанса:  $\omega - kv = 0$ ). При наличии постоянного внешнего магнитного поля эффективно взаимодействовать с волной будут также и те частицы, для которых в их собственной системе координат частота волны  $\omega' = \omega - k_{||}v_{||}$  из-за эффекта Доплера будет близка к циклотронной частоте  $\omega_H = eH/mc$  (или к одной из ее гармоник  $n\omega_H$ ):  $\omega - k_{||}v_{||} - n\omega_H = 0$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Частицы, у которых составляющая скорость вдоль магнитного поля  $v_{||}$  удовлетворяет этому условию, будут непрерывно ускоряться полем волны, подобно тому как ускоряются ионы в циклотроне.

Рассмотрим конкретные условия раскачки различных волн в плазме.

1. При отсутствии постоянного магнитного поля в однородной плазме могут распространяться либо чисто поперечные, либо чисто продольные волны. Поперечные волны мы не будем рассматривать, поскольку их фазовая скорость превышает скорость света ( $\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ ). Что же касается продольных лэнгмюровских электронных колебаний, их фазовая скорость ограничена снизу величиной порядка тепловой скорости электронов (соответствующая минимальная длина волны порядка дебаевского радиуса) и растет с увеличением длины волны. Рассмотрим лэнгмюровскую волну с частотой  $\omega$  (и фазовой скоростью  $\omega/k$ ); в системе координат, движущейся относительно лабораторной со скоростью  $\omega/k$ , профиль изменения электростатического потенциала представляет собой неподвижную синусоиду амплитуды  $\phi_0$ ; чередование потенциальных «ям» и «горбов» для электронов. Те электроны из распределения по скоростям, скорость которых заметно отличается от  $\omega/k$ , будут свободно двигаться в этом периодическом поле, сохраняя в среднем свою энергию. Электроны же, скорость которых  $v$  отличается от  $\omega/k$  на величину, меньшую  $\sqrt{2e\phi_0/m}$ , будут отражаться от потенциальных «горбов». Эти электроны можно разбить на две группы: скорость одних превышает  $\omega/k$ , другие — имеют меньшую, чем  $\omega/k$ , скорость. Электроны первой группы, догоняя «горбы» потенциала, отражаются назад, тем самым отдавая энергию волне; электроны второй группы «подхлестываются» волной, получая от нее энергию. Амплитуда волны будет расти, если в целом энергия переходит от электронов к волне, а это имеет место, если число электронов первой группы больше, чем второй, т. е. если

$$\left( \frac{\partial f_0}{\partial v} \right)_{v=\frac{\omega}{k}} > 0$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы функция распределения электронов по скоростям имела по меньшей мере один дополнительный максимум в области скоростей, превышающих тепловую. Если же всюду  $\partial f_0/\partial v < 0$ ,  $\omega_i < 0$ , т. е. волна затухает («затухание Ландау»). Величину  $\omega_i$  можно получить (с точностью до числового множителя) вблизи границы устойчивости ( $\omega_i \ll \omega$ ) с помощью простого рассмотрения обмена энергией между волной и резонансными частицами. Как известно,

$$\omega_i \equiv \gamma = \frac{1}{2\mathcal{E}} \frac{d\mathcal{E}}{dt},$$

где  $\mathcal{E}$  — плотность энергии в волне, равная в нашем случае сумме энергии электрического поля и кинетической энергии  $E_0^2/8\pi + \frac{m}{2} \sum_i v_i^2$  ( $E_0$  — амплитуда электрического поля,  $v_i$  — амплитуда скорости  $i$ -го электрона в волне).

Для лэнгмюровских колебаний с частотой  $\omega$ , близкой к  $\omega_0$ , кинетическая энергия равна энергии электрического поля, так что

$$\mathcal{E} = E_0^2/4\pi = k^2\varphi_0^2/4\pi.$$

Скорость изменения плотности энергии  $d\mathcal{E}/dt$  складывается из энергии, отдаваемой в единицу времени волне электронами первой группы

$$\dot{\mathcal{E}}_1 = n \frac{m}{2} \int_{\omega/k}^{\omega/k + \sqrt{2e\varphi_0/m}} \left[ \frac{v^2}{2} - \frac{(2\omega/k - v)^2}{2} \right] \frac{-\frac{\omega}{k} + v}{\lambda} f_0(v) dv,$$

и энергии, получаемой электронами второй группы от волны

$$\dot{\mathcal{E}}_2 = n \frac{m}{2} \int_{\omega/k - \sqrt{2e\varphi_0/m}}^{\omega/k} \left[ \frac{v^2}{2} - \frac{(2\omega/k - v)^2}{2} \right] \frac{v - \omega/k}{\lambda} f_0(v) dv.$$

Для волны малой амплитуды,  $e\varphi_0 \ll m \left( \frac{\omega}{k} \right)^2$ , интегралы легко вычисляются с помощью разложения  $f_0(v)$  вблизи  $v = \omega/k$ . При этом

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \dot{\mathcal{E}}_1 + \dot{\mathcal{E}}_2 \simeq \varphi_0^2 \omega_0^3 \left( \frac{df_0}{dv} \right)_{\omega/k}$$

и

$$\gamma \sim \frac{\omega_0^3}{k^2} \left( \frac{df_0}{dv} \right)_{v=\omega/k}.$$

2. При наличии постоянного магнитного поля имеется много ветвей плазменных колебаний. При частотах  $\omega \ll \omega_{Hv}$  могут распространяться альфвеновские и магнитозвуковые волны. Рассмотрим сначала раскочку магнитозвуковой волны, распространяющейся под углом к магнитному полю. При  $\omega \ll \omega_{Hv}$  сохраняются магнитные моменты электронов и ионов  $\mu$ . В неоднородном магнитном поле волны на эти моменты действует сила  $-\mu \nabla H$ . Волна с заданными  $\omega$  и  $k$  создает периодическую картину сгущений и разрежений силовых линий магнитного поля, движущуюся с фазовой скоростью волны  $\omega/k$ . Под влиянием силы  $-\mu \nabla H$  частицы, двигаясь вдоль  $H$ , будут отражаться от областей сгущения силовых линий, если составляющая скорости частицы в направлении магнитного поля не слишком сильно отличается от соответствующей проекции фазовой скорости волны:

$$v_{||} \sim \omega/k_{||}.$$

Рассуждения, аналогичные изложенным в п. 1, приводят к почти такому же критерию неустойчивости

$$\int \mu \left( \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \right)_{\omega/k_{\parallel}} d\mu > 0.$$

Фазовая скорость магнитозвуковых волн, как известно, по порядку величины равна  $H/\sqrt{4\pi\rho}$ : в достаточно сильном магнитном поле эта скорость значительно превышает тепловую скорость частиц, так что в целом ряде типичных экспериментальных устройств для удержания плазмы неустойчивость относительно раскачки магнитозвуковых волн не опасна.

3. Рассмотрим раскачку, обусловленную циклотронным резонансом. В первых двух разделах мы рассматривали раскачку разных типов колебаний; ответственными за неустойчивость в обоих случаях являются частицы, движущиеся со скоростью, близкой к фазовой скорости волны.

Теперь мы рассмотрим появление неустойчивости за счет группы частиц, находящихся в циклотронном резонансе с волной ( $\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} = n\omega_H$ ). Следует отметить, что в случае волн, распространяющихся под углом к магнитному полю, когда имеются как продольная, так и поперечная (по отношению к постоянному магнитному полю) компоненты электрического поля волны, критерий устойчивости для раскачки волны определяется обоими механизмами. Для того чтобы изучить роль циклотронного резонанса в чистом виде, мы рассмотрим простейший тип волн, распространяющихся вдоль постоянного магнитного поля ( $k_{\perp} = 0$ ), с поперечной поляризацией. Эффективно взаимодействовать с такой волной будут частицы, скорость которых определяется равенством

$$v_{\parallel} = (\omega - \omega_H)/k.$$

Для вывода критерия устойчивости плазмы относительно раскачки поперечных волн с  $k_{\perp} = 0$  оценим работу, совершаемую электрическим полем волны над частицами плазмы:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \sim \bar{\mathbf{v}}\mathbf{E} \sim \bar{v}E,$$

где

$$\bar{v} = \int f_1 v dv,$$

а  $f_1$  — поправка к невозмущенной функции распределения  $f_0$ , обусловленная действием волны на частицы, линейная по полю волны и пропорциональная величине

$$\left( \mathbf{E} + \frac{[\mathbf{v}, \mathbf{H}]}{c} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (7,1)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — электрическое и магнитное поля волны, связанные между собой соотношением

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k}, \mathbf{E}].$$

Поскольку в рассматриваемой нами поперечной волне вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен к постоянному магнитному полю  $\mathbf{H}_0$ , выражение (7,1) можно записать в виде

$$-Ev_{\perp} \left[ \left( 1 - \frac{k_{\parallel}v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} + \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial (mv_{\parallel})} \right] \quad (7,2)$$

(в предположении, что  $f_0 = f_0(\varepsilon_{\perp}, v_{\parallel})$ , где  $\varepsilon_{\perp} = mv_{\perp}^2/2$ ).



Поскольку эффективно взаимодействуют с волной частицы с продольной скоростью  $v_{||}$ , удовлетворяющей условию  $v_{||} = \frac{\omega - \omega_H}{k}$ , то в (7,2) нужно подставить  $v_{||} = \frac{\omega - \omega_H}{k}$ . Интегрируя затем (7,2) по  $\varepsilon_{\perp}$ , получим условие, при выполнении которого частицы отдают энергию полю волны, т. е. имеет место неустойчивость:

$$\int \varepsilon_{\perp} \left[ \left( 1 - \frac{k_{||} v_{||}}{\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} + \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial (m v_{||})} \right]_{v_{||} = \frac{\omega - \omega_H}{k}} d\varepsilon_{\perp} > 0. \quad (7,3)$$

Рассмотрим, например, «неизотропное максвелловское» распределение с разными температурами  $T_{||}$  и  $T_{\perp}$ :

$$f_0 \sim e^{-\frac{\varepsilon_{\perp}}{T_{\perp}} - \frac{m v_{||}^2}{2 T_{||}}},$$

критерий неустойчивости (7,3) в этом случае будет иметь вид

$$\frac{T_{\perp}}{T_{||}} + \frac{\omega_H}{\omega} (1 - T_{\perp}/T_{||}) < 0. \quad (7,4)$$

Для изотропной плазмы  $T_{\perp} = T_{||}$  и второй член обращается в нуль; если степень неизотропии невелика (т. е.  $\left| 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{||}} \right| \ll 1$ ), то неустойчивость может возникнуть лишь для волн с частотами  $\omega$ , значительно меньшими циклотронной частоты  $\omega_H$ .

Как известно, поперечные волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля  $H_0$ , имеют круговую поляризацию; направление вращения вектора поляризации в наших формулах определяется знаком частоты  $\omega$ . Поэтому неустойчивость может возникнуть при любом знаке анизотропии  $1 - T_{\perp}/T_{||}$ , с возбуждением право- или левополяризованной волны, в зависимости от знака  $1 - T_{\perp}/T_{||}$ .

Из (7,4) следует, что неустойчивость имеет место даже при очень малой анизотропии температур  $\frac{|T_{\perp} - T_{||}|}{T}$ ; при этом, однако, инкремент  $\omega_i$  оказывается экспоненциально малым. Действительно, частота  $\omega_i$  пропорциональна

$$f_0 \left( v_{||} \left| \frac{\omega - \omega_H}{k} \right| \right) \sim \exp \left[ -\frac{m}{2} \frac{(\omega - \omega_H)^2}{T k^2} \right].$$

При  $\omega \ll \omega_H$ ,  $k^2 = \omega^2/c_H^2$ , где  $c_H^2 = H^2/4\pi\rho$ ; так как согласно (7,4) неустойчивость имеет место для  $\omega \leq \omega_H \frac{T_{||} - T_{\perp}}{T}$ , для наиболее «опасных» волн инкремент  $\omega_i$  будет пропорционален

$$\exp \left\{ -\frac{m}{2} \frac{c_H^2}{T} \left( \frac{T}{T_{||} - T_{\perp}} \right)^2 \right\}.$$

Следует заметить, что в реальной ситуации при малой анизотропии рассмотренная неустойчивость может и не возникнуть, так как в «обрезанном» максвелловском распределении (которое, по-видимому, реализуется в эксперименте) отсутствуют частицы с большими продольными скоростями  $v_{||} \sim \sqrt{T/M} \frac{T}{|T_{||} - T_{\perp}|}$ , ответственные за раскачку колебаний.

Это приводит к тому, что на практике нарастание волн вследствие подобной неустойчивости может быть заметным лишь при достаточно большой степени неізотропии, тем большей, чем больше отношение магнитного давления к плазменному. Пусть, например,  $T_{\perp} > T_{\parallel}$ . Оценим, при какой степени неізотропии экспонента  $\exp \left\{ -\frac{m}{2} \frac{(\omega - \omega_H)^2}{T_{\parallel} k^2} \right\}$ , входящая в выражение для инкремента, станет порядка единицы

$$\frac{m(\omega - \omega_H)^2}{T_{\parallel} k^2} \sim 1. \quad (7,5)$$

Квадрат волнового вектора  $k^2$  можно выразить через  $\omega$  с помощью следующего хорошо известного дисперсионного соотношения для «холодной» плазмы:

$$N^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_{0i}^2}{\omega_{Hi}(\omega_{Hi} - \omega)},$$

если речь идет о волне, вектор поляризации которой вращается в направлении вращения ионов в магнитном поле. Подставляя  $k^2 = \omega_{0i}^2 \omega^2 / c^2 \omega_{Hi}(\omega_{Hi} - \omega)$  в (7,5) и учитывая, что согласно (7,4) для неустойчивости необходимо  $\omega \ll \omega_{Hi}(1 - T_{\parallel i}/T_{\perp i})$ , получим  $T_{\perp i}/T_{\parallel i} \gtrsim \sqrt{H^2/8\pi n T_{\perp i}}$ . При этом условии инкремент неустойчивости становится заметным. Аналогичное условие имеет место и для волны, поляризованной в направлении вращения электронов:  $\frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} \gtrsim \sqrt{H^2/8\pi n T_{\perp e}}$ . Ясно, что при прочих равных условиях электронная ветвь должна иметь больший инкремент. Возвращаясь к результатам п. 4е, где выводились условия аperiодической неустойчивости неізотропной плазмы, заметим, что при больших  $H^2/8\pi n T$  колебательная неустойчивость должна возникать при гораздо меньшей анизотропии.

Здесь рассматривался, по существу, самый простой случай поперечно поляризованной волны, распространяющейся вдоль постоянного магнитного поля. В косой волне ( $\mathbf{k} \nparallel \mathbf{H}_0$ ) картина возникновения неустойчивости усложняется, так как нужно учитывать также частицы, находящиеся в кратном циклотронном резонансе с волной  $\omega \pm n\omega_H + k_{\parallel}v_{\parallel} = 0$ , где  $n$  — любое целое число. Подобная задача рассматривалась для весьма идеализированных функций распределения «фона» в работе <sup>27</sup>. В работе <sup>28</sup> исследовалась неустойчивость из-за неізотропии на «ионной звуковой» ветви. Ионный звук, как известно (см. п. 8), может существовать лишь в сильно неізотермической плазме:  $T_e \gg T_i$ . В согласии с этим в работе <sup>28</sup> было показано, что соответствующая неустойчивость должна возникнуть (например, если  $T_{e\parallel} > 5T_{i\parallel}$ ) при  $T_{i\perp} > 2T_{i\parallel}$ .

## 8. Раскачка колебаний в плазме при наличии относительного движения ионов и электронов

Плазма может быть неустойчивой и в том случае, когда и электроны и ионы имеют максвелловское распределение скоростей но движутся друг относительно друга с некоторой скоростью  $u$ , т. е. имеется ток. Здесь естественно ожидать появления неустойчивости типа пучковой (см. п. 6), если, например, рассматривать движущиеся относительно ионов электроны как «пучок». Появление неустойчивости должно быть связано с переходом  $u$  через некоторое критическое значение, порядка фазовой скорости соответствующей волны.

Рассмотрим, для простоты, случай отсутствия магнитного поля (все рассуждения легко провести и в случае, когда имеется постоянное

магнитное поле, но колебания происходят вдоль силовых линий). Наименьшей фазовой скоростью  $v_\phi \sim \sqrt{\frac{T_e + T_i}{M}}$  обладают ионные продольные колебания (ионный звук). Однако, если  $\omega/k$  не слишком превосходит среднюю тепловую скорость ионов  $\sqrt{T_i/M}$ , эти колебания быстро (практически за несколько периодов) затухают, передавая свою энергию ионам, движущимся со скоростью порядка фазовой скорости волны. Для реального же существования этих колебаний необходимо, чтобы было выполнено условие  $ZT_e \gg T_i$ . На практике это условие часто бывает выполнено даже для плазмы с  $Z \sim 1$  ( $Ze$  — заряд иона).

Найдем критерий неустойчивости плазмы относительно раскочки ионных «звуковых» колебаний с помощью рассмотрения взаимодействия частиц с потенциальными «горбами» так же, как это было сделано в п. 7.

Пусть в системе координат, в которой средняя скорость ионов отсутствует, функции распределения ионов  $f_i$  и электронов  $f_e$  имеют вид

$$f_i = (2\pi T_i/M)^{-1/2} \exp\{-Mv^2/2T_i\},$$

$$f_e = (2\pi T_e/m)^{-1/2} \exp\{-m(v-u)^2/2T_e\},$$

$f_i$  и  $f_e$  представляют собой полные функции распределения, проинтегрированные по поперечным скоростям. Баланс обмена энергией между частицами плазмы и волной определяется передачей энергии за единицу времени электронами волне

$$\frac{d\mathcal{E}_e}{dt} \sim \Phi_0^2 \omega_0^2 \omega \left( \frac{df_e}{dv} \right)_{v=\omega/k} \quad (8,1)$$

и передачей энергии от волны к ионам

$$\frac{d\mathcal{E}_i}{dt} \sim \Phi_0^2 \Omega_0^2 \omega \left( \frac{df_i}{dv} \right)_{v=\omega/k}. \quad (8,2)$$

Условие неустойчивости для раскочки ионного звука принимает вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_e}{dt} - \frac{d\mathcal{E}_i}{dt} > 0,$$

т. е.

$$\frac{u - \omega/k}{\omega/k} > \sqrt{\frac{M}{m}} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{T_e}{T_i} + 3 \right) \right\}, \quad Z = 1. \quad (8,3)$$

Из (8,3) видно, что для неустойчивости необходимо, чтобы  $u$  было больше  $\omega/k$ ; при увеличении  $T_e/T_i$  необходимое для раскочки ионного звука превышение  $u$  над фазовой скоростью  $\omega/k$  уменьшается.

Для наглядности приведем таблицу зависимости величины

$y = \left( u_c - \frac{\omega}{k} \right) / \frac{\omega}{k}$  (где  $u_c$  — необхо-

димая для возникновения неустойчивости скорость относительного движения) от отношения  $x = T_e/T_i$  для плазмы с  $Z = 1$  и  $M/m = 3600$ .

С помощью (8,1) и (8,2) легко оценить величину инкремента  $\gamma = \dot{\mathcal{E}}/2\mathcal{E}$ , поделив скорость передачи энергии частицами волне на плотность энергии в волне

$$\mathcal{E} \sim \frac{n}{M} \frac{e^2 \Phi_0}{(\omega/k)^2}, \quad (8,4)$$

$$\omega_i \sim \omega \left\{ \frac{\left( u - \frac{\omega}{k} \right)}{\omega/k} \frac{\sqrt{m}}{T_e^{3/2}} - \frac{\sqrt{M}}{T_i^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{T_e}{T_i} + 3 \right)} \right\} \frac{T_e^{3/2}}{\sqrt{M}}.$$

$x$	8	9	10	11	13
$y$	5	4	3	2	1

Спектр частот ионных колебаний ограничен сверху величиной порядка ионной ленгмюровской частоты  $\Omega_i = \sqrt{4\pi n e^2 / M}$ . Фазовая скорость  $\omega/k$  остается приблизительно равной  $\sqrt{Z T_e + T_i / M}$  во всей области спектра. Следовательно, инкремент  $\omega_i$  растет пропорционально частоте, и быстрее всего будут возбуждаться короткие волны с длиной волны порядка нескольких дебаевских радиусов ионов.

### 9. Микроскопические неустойчивости неоднородной плазмы

В п. 6 мы видели, что наличие «пучка», проходящего через плазму, может привести к ее неустойчивости. Специфический вид такой «пучковой» неустойчивости может иметь место в неоднородной плазме при наличии тока  $\mathbf{j}_0 = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H}_0 \neq 0$ . Электроны и ионы, участвующие в создании тока  $\mathbf{j}_0$ , представляют собой в известном смысле «пучок».

1. Особенно отчетливо такой эффект может проявиться в тонком пограничном слое между областью магнитного поля и натекающим на нее потоком плазмы (задача Чэпмена — Ферраро). Электроны, попадая в область магнитного поля, «отражаются» от него, проникая лишь на расстояние порядка своего ларморовского радиуса  $r_H$ . Ионы же практически не испытывают действия магнитного поля и удерживаются электростатическими силами.

В таком пограничном слое толщиной  $\delta \sim r_H$  должен течь электрический ток, обеспечивающий равенство давлений плазмы и магнитного поля

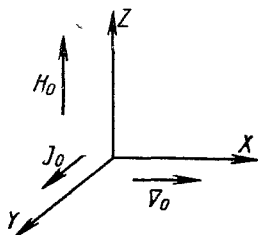


Рис. 18.

$$p = \frac{H^2}{8\pi}, \quad j \sim \frac{c}{4\pi} \frac{H}{\delta}.$$

Относительная скорость ионов и электронов, переносящих ток, внутри этого слоя имеет порядок

$$v_0 = \frac{j}{en} \sim \frac{c}{4\pi} \frac{H}{en\delta} \sim \sqrt{\frac{p}{nm}}.$$

Таким образом, внутри слоя Чэпмена — Ферраро относительная скорость электронов порядка средней тепловой скорости и возможна «пучковая» неустойчивость, описанная в п. 6.

2. При малых неоднородностях (т. е. при малых плотностях тока) скорость «пучка» будет весьма малой и он сможет взаимодействовать лишь с самыми медленными из волн, распространяющихся в плазме.

Рассмотрим простейший вид равновесия плазмы, удерживаемой давлением магнитного поля, всюду направленного в одну и ту же сторону, например по оси  $z$  (рис. 18).

Пусть в равновесии все величины зависят только от  $x$ . Ток  $\mathbf{j}_0$  направлен поперек осей  $z$  и  $x$  по оси  $y$ . Рассмотрим взаимодействие частиц с какой-либо волной, распространяющейся поперек  $\mathbf{H}_0$  в направлении оси  $y$ . Эффективно взаимодействовать с волной будут частицы, скорость дрейфа которых  $v_{\text{др}}$  близка к фазовой скорости волны  $\omega/k$ . Поскольку такие электроны (ионы) находятся все время в одной фазе с волной, на них будет действовать постоянная сила. Под действием  $y$ -ой компоненты этой силы частицы будут дрейфовать с постоянной скоростью  $c[\mathbf{F}_y, \mathbf{H}_0]/eH_0^2$  вдоль  $x$ . Те электроны (ионы), которые при этом будут попадать в более слабое магнитное поле, будут терять энергию, адиабатически раз магничиваясь (так как из условия  $\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2H} = \text{const}$  следует  $mv_{\perp}^2 \sim H$ ).

Наоборот, заряды, попадающие в область более сильного поля, будут приобретать энергию. Первая тенденция преобладает, если в области более сильного поля больше электронов (ионов) нужной энергии ( $v_{др}$  зависит от  $v_{\perp}^2 m/2$ , а именно  $v_{др} = c \frac{E_0}{H_0} + \frac{c}{eH_0^2} \frac{dH_0}{dx} \frac{mv_{\perp}^2}{2}$ ), т. е. при

$$H'_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{j_0}{H_0} \right)_{v_{др}=\omega/k} < 0. \quad (9,1)$$

В этом случае в целом энергия плазмы уменьшится и соответственно возрастет энергия волны (т. е. имеет место неустойчивость). Для максвелловской функции распределения в слабо неоднородной плазме (9,1) эквивалентно условию <sup>29,30</sup>

$$\frac{d \ln T}{d \ln H} > 1.$$

Однако при малых неоднородностях  $H'_0/H_0 \ll 1/r_{Hi}$  средние скорости дрейфа частиц очень малы в сравнении с тепловыми скоростями. В резонанс с волной могут попадать лишь частицы с энергией, много большей средней тепловой. Инкремент, пропорциональный доле таких частиц, будет, следовательно, экспоненциально малым.

В принципе, из-за явления аномальной дисперсии при частотах, близких к кратным циклотронным, можно найти волны, распространяющиеся со сколь угодно малой фазовой скоростью поперек магнитного поля. Такие волны могли бы эффективно взаимодействовать с частицами, переносящими электрический ток, даже в слабо неоднородной плазме. Вряд ли это явление может, однако, привести к «универсальной» неустойчивости всякой неоднородной плазмы, поскольку аномальная дисперсия всегда сопровождается аномальным поглощением (на кратных циклотронных частотах), обеспечивающим «запас» устойчивости.

3. В неоднородной плазме при некоторых условиях может иметь место самопроизвольное нарастание ионных звуковых колебаний, рассмотренных в п. 8. Причину такой неустойчивости наглядно можно было бы представить следующим образом. Как известно, в однородной плазме, помещенной в сильное магнитное поле, частота ионных звуковых колебаний не зависит от компоненты волнового вектора, поперечной магнитному полю, если  $\omega \ll eH/Mc$  (магнитное поле подавляет поперечные движения). Если же невозмущенная плазма неоднородна, например имеет температуру, меняющуюся в направлении поперек силовых линий, то поперечные движения в волне будут сопровождаться потоками тепла ( $v \text{ grad } T_0$ ). Ионную звуковую волну можно представить себе как чередование областей сжатия (повышения температуры) и разрежения (понижения температуры), перемещающиеся в пространстве со скоростью  $\sim \sqrt{\frac{T}{M}}$ . В зависимости от знака отношения компонент волнового вектора  $\frac{k_{||}}{k_{\perp}}$  (вдоль и поперек магнитного поля) поперечный приток тепла из-за неоднородности начальной температуры будет приходиться либо на область сжатия, либо на область разрежения. Оказывается, что в первом случае, если поперечное движение достаточно велико ( $k_{\perp} \gg k_{||}$ ), ионный звук неустойчив. Критерий неустойчивости (см. приложение IV) имеет вид

$$\frac{k_{\perp}}{k_{||}} > \frac{a}{r_{Hi}}.$$

Здесь  $r_{Hi}$  — средний ларморовский радиус ионов,  $a$  — расстояние, на котором существенно меняется температура.

# 10. Устойчивость течений плазмы в магнитном поле

Магнитное поле двояко влияет на устойчивость движущейся плазмы. Во-первых, оно изменяет пространственное распределение скорости течения. А от профиля скорости, как известно, в большой степени зависит устойчивость. Во-вторых, поле оказывает и прямое воздействие на возмущения, т. е. на устойчивость. Если при возмущении течения за инерционные времена поле не успевает продиффундировать из возмущений, т. е.  $Re_m = \frac{4\pi\sigma Lv}{c^2} \gg 1$ , то прямое воздействие поля на возмущения заключается в появлении квазиупругой силы, связанной с деформацией магнитных силовых линий. Степень воздействия в этом случае, естественно, определяется отношением плотности магнитной энергии к плотности энергии гидродинамической, т. е. безразмерным числом  $A = \left(\frac{H^2/8\pi}{\rho v^2/2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{H^2}{4\pi\rho v^2}}$  — так называемым

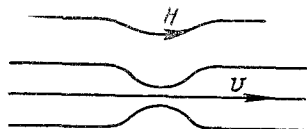


Рис. 19

числом Альфвена. Если же поле не возмущается, т. е.  $Re_m < 1$ , то влияние его на возмущения сводится к появлению силы электромагнитного торможения

$$f_m = \frac{IH}{c} \sim \frac{\sigma v H}{c} \frac{H}{c}.$$

Отношение плотности этой силы к плотности сил инерции дает параметр — число Стюарта, — определяющий степень воздействия поля на плохо проводящую жидкость

$$St = \frac{\sigma v H^2}{c^2} \frac{L}{\rho v^2} = \frac{\sigma H^2 L}{c^2 \rho v},$$

где  $L$  — характерный размер системы.

Особенность воздействия магнитного поля заключается в том, что оно не оказывает влияния на коротковолновые возмущения, так как  $Re_m^{(b)} \rightarrow 0$  и  $St^{(b)} \rightarrow 0$  при  $L^{(b)} \rightarrow 0$ , где  $L^{(b)}$  — характерный размер возмущений.

Перейдем теперь к изучению устойчивости конкретных течений. Прежде всего рассмотрим такие течения, в которых при включении магнитного поля распределение скорости не меняется. К таким течениям относятся плоские слоистые течения вдоль поля.

10а. Устойчивость плоских течений. 1. Самым простым примером плоского течения в продольном поле является отдельная струйка в покоящейся жидкости (рис. 19).

Рассмотрим длинноволновые возмущения в струйке. При этом можно пренебречь электрическим сопротивлением плазмы и натяжением искривленных силовых линий  $(H\nabla)H$  и ограничиться рассмотрением потенциальных членов. Вне струйки распределение давления и поле также возмущаются мало. При квазистационарном искривлении

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = w = \text{const.}$$

Для простоты ограничимся несжимаемой жидкостью. Тогда  $\rho v^2/2 = (\rho v_0^2/2)(\Sigma_0^2/\Sigma^2)$ , где  $\Sigma$  — сечение трубки. Поперечное полное давление

при этом будет равно

$$\Phi = \omega + \frac{H_0^2}{8\pi} \Sigma_0^2 / \Sigma^2 - \frac{Qv_0^2}{2} \Sigma_0^2 / \Sigma^2 = \Phi_0 + \frac{\Sigma_0^2}{\Sigma^2} \left( \frac{H_0^2}{8\pi} - \frac{Qv_0^2}{2} \right).$$

Условие устойчивости заключается в том, чтобы при увеличении сечения давление внутри трубки падало, т. е.  $\partial\Phi/\partial\Sigma < 0$ . Но

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} = -\frac{2\Sigma_0^2}{\Sigma_0^3} \left( \frac{H_0^2}{8\pi} - \frac{Qv^2}{2} \right),$$

так что условие устойчивости есть  $A > 1$ .

Для коротковолновых возмущений поверхности ( $\lambda \ll \sqrt{\Sigma_0}$ ) мы приходим к задаче об устойчивости тангенциального разрыва; легко видеть, что здесь квазиупругая сила, возмущение внешнего и внутреннего магнитного давления — величины одного порядка. Как показано в работе <sup>31</sup>, условие устойчивости при  $Re_m \gg 1$  имеет вид

$$(H_1^2 + H_2^2)/4\pi \geq v_0^2 Q_1 Q_2 / (Q_1 + Q_2),$$

где  $H_{1,2}$ ,  $Q_{1,2}$  — поле и плотность по одну и другую сторону от тангенциального разрыва. При одинаковых плотностях  $Q_1 = Q_2$  и поле  $H_1 = H_2$  это условие переходит в  $A > 1/2$ . Как показано в работе <sup>31</sup>, сжимаемость мало влияет на этот результат.

Для еще более коротких волн  $Re_m \rightarrow 0$ , и поле перестает их стабилизировать при любом  $A$ . Вопрос о том, опасны ли такие волны, связан с реальной структурой слоя, определяемой вязкостью.

2. Рассмотрим влияние поля на устойчивость плоских продольных течений с непрерывным распределением скорости. Профиль скорости таких течений определяется вязкими и инерционными силами (рис. 20).

Как известно <sup>35</sup>, в отсутствие поля устойчивость такого течения связана с наличием точки, в которой  $v_0(z) = 0$ , т. е.

$$\nabla \text{rot}_y \mathbf{v}_0 = 0.$$

Это условие, впервые полученное Рэлеем, допускает простую интерпретацию. Если вихревая трубка выходит из слоя, в котором она двигалась, то возникает ускорение, направленное против ее движения, пропорциональное

$$\int \int [v'(\tau, y)]^2 \nabla \text{rot}_y \mathbf{v}_0 dx dy,$$

поэтому трубка возвращается в прежний слой.

Если же где-то в течении  $\nabla \text{rot}_y \mathbf{v}_0 = 0$ , то ничто не препятствует движению трубки вблизи этого слоя. По другую же сторону слоя ускорение меняет знак и трубка продолжает двигаться дальше. Тем самым начальное возмущение «разбалтывается», и энергия переходит от основного течения к возмущениям.

На такие инерционно-неустойчивые течения магнитное поле должно оказывать стабилизирующее влияние при  $A \sim 1$ , если  $Re_m \gg 1$ , и при  $St \sim 1$ , если  $Re_m \ll 1$ .

Если внутри течения ротор скорости нигде не имеет экстремума, то неустойчивость течения может быть связана только с влиянием вязкости, как это было показано впервые в работе <sup>32</sup>. Рассмотрим взаимодействие отдельной волны возмущения с потоком. Очевидно, что при больших

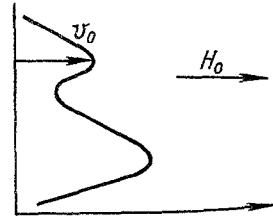


Рис. 20. Слоистые продольные течения.

числах Рейнольдса вязкость может сказаться только в слое, в котором фазовая скорость возмущения равна скорости течения. Именно вблизи этого слоя происходит обмен энергией между возмущением и потоком. Элементы жидкости могут медленно переходить с одной стороны слоя на другую и раскручиваться потоком. Неустойчивость имеет колебательный характер и, как мы видим, связана с фазовым резонансом.

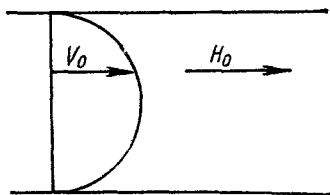


Рис. 21. Течение Пуазейля в продольном поле.

Наиболее подробно изучена устойчивость плоского течения Пуазейля между параллельными бесконечными пластинами. Если  $Re_m \gg 1$ , то фазовый резонанс возникает между течением и альфвеновскими волнами. В работе <sup>33</sup> показано, что с увеличением  $A^2 = H^2/4\pi q_0 v_0^2$  критическое число Рейнольдса растет и при  $A = 0,1$  течение Пуазейля становится полностью устойчивым (рис. 21).

С уменьшением проводимости необходимое для стабилизации течения поле возрастает, как показано в работе <sup>34</sup>. При  $Re_m \rightarrow 0$  (плохая проводимость) влияние поля, как мы уже видели, сводится к электромагнитной силе торможения

$$jH/c \sim \sigma H^2 v^2/c^2.$$

Величина этой силы не зависит от размеров возмущения. Как известно из обычной гидродинамики, быстрее всего нарастают возмущения с длиной волны порядка поперечных размеров потока. Для более коротких волн растет стабилизирующая роль вязкости, а для более

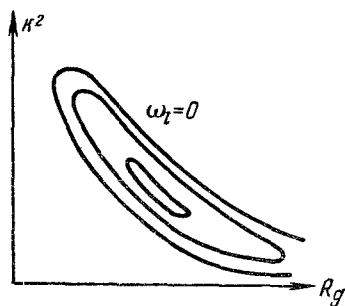


Рис. 22.

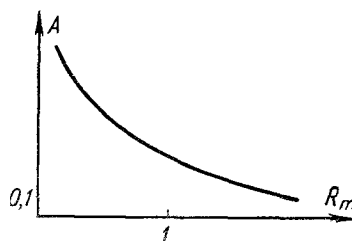


Рис. 23.

длинных — падает дестабилизирующая. Кривые, отделяющие область устойчивости от области неустойчивости на плоскости  $(k, Re_g)$ , где  $k = 2\pi/\lambda$ , а  $\lambda$  — длина волны возмущений, показаны на рис. 22. Они подобны кривым равного инкремента, полученным в работе <sup>35</sup>. Критическое число Рейнольдса медленно растет с ростом числа Стюарта. Но при  $St \rightarrow 0,1$  область неустойчивости потока стягивается в точку.

Зависимость критического числа Альфвена  $A = \sqrt{H^2/4\pi q v_0^2}$  от магнитного числа Рейнольдса показана на рис. 23.

$$\begin{aligned} \text{При } Re_m \rightarrow 0 \quad A^2 &\rightarrow 0,1/Re_m, \\ \text{при } Re_m \rightarrow \infty \quad A &\rightarrow 0,1. \end{aligned}$$

Таким образом, при плохой проводимости  $Re_m$  является как бы мерой воздействия поля на течение.



10б. Устойчивость течений, перпендикулярных к полю. Как известно, если скорость жидкости перпендикулярна к направлению магнитного поля, то вблизи стенки, перпендикулярной к полю, образуется гартмановский пограничный слой. Толщина его определяется равенством вязких и магнитных сил:

$$\frac{\eta v}{L^2 \rho} \simeq \frac{\sigma H^2 v}{\rho c^2},$$

т. е.

$$L_\Gamma = \left( \frac{\eta c^2}{\sigma H^2} \right)^{1/2}.$$

Если же стенка параллельна полю, то толщина пограничного слоя  $\sim L/\Gamma^{1/2}$ , где  $\Gamma = (\sigma H^2 L^2 / \eta c^2)^{1/2}$  — число Гартмана, а  $L$  — характерный размер течения.

В первом пограничном слое во всех внутренних процессах, естественно, преобладают вязкие силы. Поэтому эффект влияния поля на течение ограничивается влиянием на профиль скорости. Критическое число Рейнольдса есть

$$\text{Re}_g^{\text{кр}} = v L_\Gamma / \nu = (v L / \nu) (1/\Gamma) \simeq 50\,000,$$

т. е. число Рейнольдса, рассчитанное по характерному размеру течения порядка

$$\text{Re}_g^{\text{кр}} \sim 50\,000 \Gamma.$$

Число 50 000 — критическое число Рейнольдса для экспоненциального пограничного слоя, известное из обычной гидродинамики.

Во втором типе пограничного слоя

$$\text{Re}_g^{\text{кр}} = v L / \nu \sqrt{\Gamma} \simeq 50\,000.$$

Таким образом, магнитное поле, перпендикулярное к течению, в большинстве случаев увеличивает его устойчивость, собирая градиенты вблизи стенок. Особенно этот эффект существен для течения типа диффузора, где в отсутствие поля возможны обратные потоки. Однако следует отметить, что поле может привести к дестабилизации течения. Действительно, если без поля  $\text{Re}_g$  лежит в области, расположенной левее области неустойчивости на рис. 22 (случай малых градиентов и большой вязкости), то поле, увеличив градиент скорости, может дестабилизировать течение, если  $\text{Re}_g$  попадает в область неустойчивости.

10в. Устойчивость вращающейся плазмы. В п. 4д рассматривалась устойчивость вращающейся плазмы по отношению к аксиально-симметричным возмущениям. Такие возмущения искривляют магнитные силовые линии, и устойчивость зависит от соотношения квазиупругой силы, действующей со стороны возмущенного поля, и силы, вызванной более быстрым убыванием стационарного градиента давления по сравнению с центробежной силой, действующей на возмущенные силовые трубки.

В большом магнитном поле квазиупругая сила подавляет неустойчивость. Однако поле не влияет на «желообразные» возмущения, однородные вдоль оси вращения (рис. 24).

Если плотность плазмы падает от оси вращения, то возникает неустойчивость типа изученной в п. 4б неустойчивости границы плазмы в поле тяжести. Поэтому такое вращение, как показано в приложении I для  $\beta = 8\pi\rho/H^2 \ll 1$ , абсолютно неустойчиво.

Если плазма вращается как твердое тело, то быстрее всего вылезают два «языка» с противоположных сторон.

Однако если скорость вращения изменяется быстрее, чем плотность, то неустойчивы лишь очень мелкомасштабные возмущения. Но их эффективно подавляет вязкость (или они могут быть запрещены из-за конечной величины ларморовского радиуса в разреженной плазме), так что вращение может оказаться устойчивым.



Рис. 24. Желобообразная неустойчивость вращающейся плазмы.

Если плотность плазмы постоянна, то вопрос об устойчивости вращения сводится к уже рассмотренному в п. 10а вопросу об устойчивости плоских течений. Необходимым условием неустойчивости, как мы видели, является наличие в плазме слоя с экстремальным ротором скорости, т. е. слоя, в котором в некоторой точке

$$\frac{d}{dr} \text{rot}_z \mathbf{v} = \frac{d}{dr} (v' + v/r) = 0.$$

Если же вращение инерциально устойчиво, то конечная вязкость может, по-видимому, привести к его неустойчивости при больших числах Рейнольдса, как это обычно происходит в плоских течениях.

#### 11. «Колебательная конвекция» в плазме

Как уже упоминалось в п. 5, в том случае, если в плазме существует магнитное поле, диффузия которого протекает медленнее, чем теплообмен, т. е.

$$4\pi\sigma\chi/c^2 > 1, \quad (11,1)$$

где  $\chi$  — коэффициент температуропроводности, то, как было показано впервые в работе <sup>36</sup>, в тяжелой плазме, подогреваемой снизу, при некотором критическом градиенте температуры возникают альфвеновские волны с нарастающей во времени амплитудой (рис. 25). Это связано с тем, что из-за квазиупругой силы элемент плазмы как бы «привязан» к силовой линии. Под действием силы Архимеда, он растягивает ее, вследствие чего замедляется и успевает выравнять свою температуру с температурой окружающей среды. При этом архимедова сила уменьшается, а магнитная квазиупругая сила возвращает элемент обратно, где он опять нагревается. Развитие такой осциллирующей неустойчивости увеличивает перенос тепла, так же как и развитие аperiodической конвекции. Условиями возникновения периодической неустойчивости в плазме, подогреваемой снизу, с учетом вязкости являются:

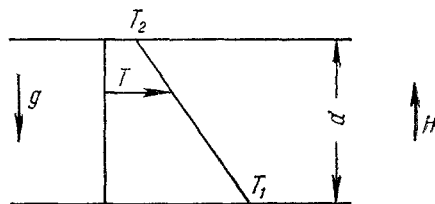


Рис. 25. Слой плазмы, подогреваемый снизу, в поле тяготения.

$$\text{Ra}^{\text{кр}} = \frac{27}{4} \pi^4 \frac{S_1 S_2 - \chi v c^2 / 4\pi\sigma}{\chi v (\chi + v)}, \quad \Gamma^2 \rightarrow 0, \quad (11,2)$$

$$\text{Ra}^{\text{кр}} = \pi^2 \frac{(c^2/4\pi\sigma)(v + c^2/4\pi\sigma)}{\chi(\chi + v)}, \quad \Gamma^2 \rightarrow \infty \quad (11,3)$$

для свободной границы.

Здесь

$$\begin{aligned} \text{Ra} &= \frac{\alpha g (T_1 - T_2)}{\chi \nu} d^3, \\ S_1 &= \chi + \nu + c^2/4\pi\sigma, \\ S_2 &= \chi\nu + \nu c^2/4\pi\sigma + \chi c^2/4\pi\sigma. \end{aligned}$$

$\nu$  — кинематическая вязкость плазмы,  $\chi$  — температуропроводность, а  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения (пп. 4—5). Как известно, без поля  $\text{Ra}^{\text{кр}} = \frac{27}{4}\pi^4$  для свободной границы (1700 для твердой). Отсюда видно, что кривая  $\text{Ra}^{\text{кр}}(\Gamma)$  для колебательной неустойчивости в слабых полях лежит всегда выше, чем кривая  $\text{Ra}^{\text{кр}}(\Gamma)$  для аperiодической.

В сильных полях при  $\chi > c^2/4\pi\sigma$ , как следует из (11,3), аperiодическая неустойчивость наступает при меньших числах Рэлея, чем колебательная, т. е. при меньших градиентах температуры.

## 12. Неустойчивость положительного столба газового разряда в магнитном поле <sup>37,38</sup>

Наблюдая изменение коэффициента диффузии не полностью ионизованной плазмы из положительного столба газового разряда в длинной трубке при изменении внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси разряда, Ленерт обнаружил, что при увеличении поля выше некоторого критического значения в плазменном столбе возникают колебания и одновременно возрастает диффузия плазмы на стенки трубки.

Условие возникновения неустойчивости и развития колебаний в плазменном столбе (более подробно рассмотренное в приложении II) можно получить для очень длинных волн следующим образом. Наиболее опасными возмущениями являются те, в которых плотность электронов почти не меняется:  $dn/dt=0$ ; такие возмущения накапливаются и растут со временем. Полная производная  $d/dt$  для рассматриваемых медленно меняющихся возмущений приближенно равна  $\mathbf{v}\nabla$ , где  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$  — скорость электронов в стационарном распределении, складывающаяся из скорости вдоль трубки  $v_{\parallel}$  (создающей ток разряда) и скорости дрейфового движения

$$\mathbf{v}_{\perp} = \frac{c}{eH^2} [\mathbf{H}\mathbf{F}]$$

под действием электростатической силы  $e\nabla\varphi$  и градиента давления электронного газа  $\nabla(nT_e)$ :

$$\mathbf{F} = e\nabla\varphi + T_e\nabla n/n.$$

Если пространственная зависимость возмущения имеет вид  $\exp\{i(kz + m\theta)\}$ , то условие  $(\mathbf{v}\nabla)n=0$  дает:

$$kv_{\parallel} + \frac{m}{r} \frac{c\Phi'}{H} = 0, \quad (12,1)$$

где  $\Phi' = T_e N'/eN$  — радиальное электрическое поле, а  $N$  — плотность электронов в стационарном распределении. Очевидно, что это условие совпадает с уравнением (III,6) в пределе очень длинных волн  $k \rightarrow 0$ . Однако при малых  $v_{\parallel}$  для его выполнения нужны уже большие  $k$ , для которых необходимо учитывать влияние диффузии. Учет диффузии приводит к появлению в (12,1) члена, пропорционального  $k^4$  (см. приложение II); получающийся при этом критерий устойчивости плазменного

столба имеет вид

$$v_{||} < v_{||}^{\text{кр}}.$$

Критическая скорость электронов с точностью до численного множителя равна

$$v_{||}^{\text{кр}} \sim \frac{D}{a} \sqrt{\frac{|m|}{\Omega \tau}},$$

где  $D$  — коэффициент диффузии, а  $a$  — радиус трубки,  $\Omega = eH/mc$ ,  $\tau^{-1}$  — частота столкновений электронов с молекулами.

При увеличении магнитного поля  $v_{||}^{\text{кр}}$  падает и при

$$v_{||}^{\text{кр}} < v_{||}$$

в плазменном столбе возникают колебания, приводящие к увеличению диффузионного потока частиц на стенки трубки.

#### IV. ВОПРОСЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

В настоящей главе рассмотрен квазилинейный подход к «надкритическому» состоянию плазмы, используемый ниже для изучения поведения плазмы вблизи границы устойчивости. Квазилинейный подход заключается в учете обратного влияния возмущений конечной амплитуды на средний фон, в пренебрежении взаимодействием между различными модами возмущений (т. е. переносом энергии между возмущениями с различными масштабами). Естественно, что этот подход справедлив лишь при малой «надкритичности» и сводится, по сути дела, к теории возмущений с разложением по малому параметру

$$(\Lambda - \Lambda_{\text{кр}})/\Lambda_{\text{кр}},$$

где  $\Lambda$  — безразмерный параметр, характеризующий состояние плазмы.

В п. 13 рассмотрена «надкритическая» конвекция в плазме, а в п. 14 — «надкритическая» колебательная неустойчивость в немаксвелловской плазме.

#### 13. У с т а н о в и в ш а я с я   к о н в е к ц и я   в   п л а з м е и   « а н о м а л ь н а я   д и ф ф у з и я »

В работе <sup>36</sup> найдены условия возникновения конвекции в проводящей, тяжелой жидкости, подогреваемой снизу. Показано, что при  $4\pi\sigma\chi/c^2 < 1$  (где  $\chi$  — температуропроводность, а  $\sigma$  — электропроводность жидкости) конвекция носит аperiодический характер, а влияние магнитного поля сводится к действию силы электромагнитного торможения.

Аperiодическое возникновение конвекции означает то, что при надкритических условиях (например, при градиенте температуры, превышающем некоторое критическое значение) возникает стационарное движение жидкости — ячейки Бенара. Такое надкритическое стационарное движение изучалось в отсутствие магнитного поля в работах <sup>39, 40</sup>, а с учетом магнитного поля — в работе <sup>41</sup>. В настоящем разделе мы оценим амплитуду скорости и перенос тепла конвективным движением при  $4\pi\sigma\chi/c^2 < 1$ .

Рассмотрим для этого упрощенную модель конвекции — движение жидкости в тонкой трубке тока с размерами, указанными на рис. 26. Очевидно, что скорости жидкости вдоль и поперек магнитного поля

связаны соотношением

$$v_{||}/\lambda_{||} \sim v_{\perp}/\lambda_{\perp}.$$

За единицу времени вязкие силы совершают следующую работу в единице объема:

$$\eta |\Delta| v_{||}^2 + \eta |\Delta| v_{\perp}^2 = \eta |\Delta| v_{||}^2 (1 + \lambda_{\perp}^2/\lambda_{||}^2), \quad (13,1)$$

$$|\Delta| = \frac{1}{\lambda_{||}^2} + \frac{1}{\lambda_{\perp}^2}.$$

Сила электромагнитного торможения совершает работу

$$j \frac{H}{c} v_{\perp} \sim \frac{\sigma H^2}{c^2} v_{\perp}^2 \cong \frac{\sigma H^2}{c^2} v_{||}^2 \lambda_{\perp}^2 / \lambda_{||}^2, \quad (13,1a)$$

сила Архимеда — работу

$$(\varrho - \langle \varrho \rangle) g v_{||} = \alpha \langle \varrho \rangle (T - \langle T \rangle) g v_{||}, \quad (13,2)$$

где  $\alpha$  — объемный коэффициент расширения жидкости, а  $\langle T \rangle$  — температура, усредненная по всем трубкам на данной высоте.

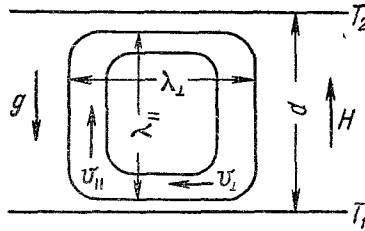


Рис. 26. Модель конвективной ячейки.

Усредненное по всем трубкам уравнение теплопроводности дает

$$\langle \mathbf{v}_{||} \nabla (T - \langle T \rangle) \rangle = \chi \Delta \langle T \rangle, \quad (13,3)$$

с другой стороны, внутри отдельной трубки

$$\Delta (T - \langle T \rangle) = \frac{1}{\chi} \mathbf{v}_{||} \nabla \langle T \rangle. \quad (13,4)$$

Из (13,3) следует, что

$$\nabla \langle T \rangle = \frac{v_{||} (T - \langle T \rangle)}{\chi} + \text{const.} \quad (13,5)$$

Подставляя (13,5) в (13,4), получаем

$$\nabla \langle T \rangle = \text{const} \left( 1 - \frac{v_{||}^2}{\chi^2} \frac{1}{|\Delta|} \right). \quad (13,6)$$

Константа определится из условия:

$$\int_0^d \nabla \langle T \rangle dz = T_2 - T_1.$$

Поэтому

$$\nabla \langle T \rangle = \frac{T_2 - T_1}{d} \left\{ 1 + \frac{\langle v_{||}^2 \rangle - v_{||}^2}{\chi^2 |\Delta|} \right\}, \quad \langle v_{||}^2 \rangle \equiv \frac{1}{d} \int_0^d v_{||}^2 dz \quad (13,7)$$

и из (13,4):

$$T - \langle T \rangle = -\frac{1}{|\Delta|} \frac{v_{||}}{\chi} \frac{T_2 - T_1}{d} \left\{ 1 + \frac{\langle v_{||}^2 \rangle - v_{||}^2}{\chi^2 |\Delta|} \right\}. \quad (13,8)$$

Из (13,7) следует, что градиент температуры увеличивается около стенок, где  $v_{||} \rightarrow 0$  и действует молекулярный перенос, и падает в центре, где тепло передается конвекцией, как показано на рис. 27. Такое изменение профиля температуры, во-первых, уменьшает работу силы Архимеда, т. е. приводит к установлению конечной амплитуды конвекции, и, во-вторых, увеличивает поток тепла.

Действительно, вблизи стенки \*)

$$q = -\kappa \nabla \langle T \rangle = \kappa \frac{T_1 - T_2}{d} \left\{ 1 + \frac{\langle v_{||}^2 \rangle}{\chi^2 |\Delta|} \right\}. \quad (13,9)$$

Рис. 27.

Подставляя (13,8) в (13,2) и приравнявая работу архимедовой силы работе вязкой силы и силы электромагнитного торможения, получаем квадрат предельной амплитуды конвекции

$$\langle v_{||}^2 \rangle = \frac{\chi^2}{A} \frac{(\lambda_{\perp}/\lambda_{||})^2 + 1}{(\lambda_{\perp}/\lambda_{||})^2} \left\{ \frac{Ra - Ra^{кр}}{Ra} \right\} \lambda_{||}^{-2}. \quad (13,10)$$

Здесь  $A = \langle v_{||}^4 \rangle / \langle v_{||}^2 \rangle^2 - 1$ , а  $Ra = \frac{-\alpha g (T_2 - T_1)}{\chi \eta} d^3$  — число Рэлея, критическое значение которого  $Ra^{кр}$  равно

$$Ra^{кр} = \frac{\lambda_{||}^{-2}}{|\Delta|^{-1}} d^4 \{ |\Delta| \lambda_{||}^2 (1 + \lambda_{\perp}^2/\lambda_{||}^2) + \Gamma^2 (\lambda_{\perp}^2/\lambda_{||}^2) (\lambda_{||}^2/d^2) \}, \quad (13,11)$$

$$\Gamma^2 = \frac{H^2 \sigma d^2}{c^2 \eta}. \quad (13,12)$$

Параметр  $A$  и отношение  $(d/\lambda_{||})$  определяются граничными условиями (вообще говоря,  $d/\lambda_{||} \sim \pi$ ).

Подставляя (13,10) в (13,9), получаем поток тепла

$$\frac{q}{q_{кр}} = \left( 1 + \frac{1}{A} \right) \frac{Ra}{Ra^{кр}} - \frac{1}{A}, \quad Ra > Ra^{кр}, \quad (13,13)$$

и

$$\frac{q}{q_{кр}} = \frac{Ra}{Ra^{кр}}, \quad Ra < Ra^{кр},$$

где  $q_{кр}$  — поток тепла в критическом режиме.

Поток тепла, переносимый конвекцией, можно записать в форме

$$q_{конв} = \frac{1}{A} \frac{Ra - Ra^{кр}}{Ra^{кр}} q_{кр}.$$

Форму ячеек Бенара и зависимость критического числа Рэлея  $Ra^{кр}$  от магнитного поля можно найти с помощью минимизации правой части (13,11). Из нашей грубой модели

$$\lambda_{\perp}/\lambda_{||} \sim \Gamma^{-1/3},$$

\*)  $\kappa$  — теплопроводность плазмы.

т. е. с ростом магнитного поля ячейки вытягиваются по вертикали и

$$Ra_{кр} \sim \frac{d^2}{\lambda_{||}^2} \Gamma^2 \sim \pi^2 \Gamma^2, \quad \Gamma \rightarrow \infty.$$

При  $\Gamma \rightarrow 0$  для конвекции между твердыми пластинами  $Ra_{кр} = 1700$ .

Из (13,13) следует, что при  $\Gamma \rightarrow \infty$   $q/q_{кр} \sim \Gamma^{-2}$ , т. е. поле эффективно уменьшает конвективный поток тепла.

Точные значения  $A$  и  $Ra_{кр}$  в зависимости от  $\Gamma$  приведены в работе <sup>41</sup>. При больших  $\Gamma^2$  параметр  $A$  слабо зависит от вида границы и приближается к  $1/2$ . При этом  $Ra_{кр} \rightarrow \pi^2 \Gamma^2$ .

С увеличением  $Ra$  вышеописанная конвекция становится неустойчивой, появляются новые моды, число свободных фаз увеличивается и развивается турбулентная конвекция.

Мы рассматривали динамику жидкости с уравнением состояния  $\varrho = \varrho_0 \{1 - \alpha(T - T_0)\}$ , как это обычно делается во всех работах по конвекции. Не представляет труда обобщить наше рассмотрение на реальную плазму. Это сводится к замене в числе Рэлея градиента температуры  $\frac{T_2 - T_1}{d}$  на разность этого градиента и адиабатического градиента температуры, т. е. для плазмы

$$Ra = - \left( \nabla T + \frac{g}{c_p} \right) \frac{g \varrho}{T} \frac{d^4}{\chi \eta}.$$

Итак, наше рассмотрение справедливо при

$$|\nabla T| > \frac{g}{c_p},$$

где  $c_p$  — теплоемкости при постоянном давлении.

Аналогично можно исследовать и надкритическое течение во вращающейся плазме — вихри Тейлора, поскольку задачи математически и физически весьма схожи. Разница заключается в том, что роль вязкости становится двойственной. С одной стороны, вязкость тормозит конвекцию из-за переноса количества движения, с другой стороны, она же приводит к диффузии ротора скорости, уменьшая тем самым центробежный эффект. Аналогом числа Рэлея является число Тейлора. Средняя амплитуда скорости согласно (13,10) есть:

$$V \langle v^2 \rangle = \text{const} (T - T_{кр})^{1/2}.$$

Как показано в п. 5,

$$T_{кр} \sim \Gamma^4 \text{ при } \Gamma \rightarrow \infty.$$

Изменение формы вихрей Тейлора, естественно, совпадает с изменением формы ячеек Бенара — они вытягиваются по полю. Без магнитного поля задача решена в работе <sup>39</sup>.

При магнитной конвекции в плазме с замкнутыми силовыми линиями амплитуда ограничивается из-за перераспределения тока. Аналогом числа Рэлея является магнитное число Тейлора. Средняя квадратичная скорость движения магнитных силовых трубок есть

$$V \langle v^2 \rangle = \text{const} \cdot (T_m - T_m^{кр})^{1/2}.$$

Если с конвекцией связан перенос частиц и тепла, как это происходит, например, вблизи поглощающей границы или диафрагмы, то время ухода частиц из объема в надкритическом режиме пропорционально скорости трубок и обратно пропорционально размерам системы, а не квадрату этих размеров, как было бы при молекулярной или развитой

турбулентной диффузии. Эта зависимость может позволить выяснить истинную картину диффузии на эксперименте (рис. 28).

Если силовые трубки в плазме не замкнуты, то картина надкритического движения усложняется из-за появления квазиупругих сил, которые, очевидно, ограничивают движение трубок. Картина развития слабонадкритической неустойчивости при этом сводится к следующей. Пусть в каком-то месте плазмы нарушается локальное условие п. 4г:

$$r \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^2 + \frac{32\pi p}{H^2} > 0.$$

Тогда поверхностные колебания в этом слое уменьшают градиент давления и неустойчивость переместится в соседний слой. Хотя в каждом слое неустойчивость носит локальный характер, во всей плазме, охваченной развившимися колебаниями, резко увеличится диффузия частиц.

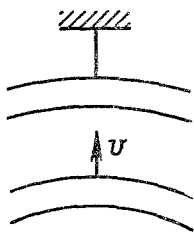


Рис. 28.

К вышеупомянутым вопросам тесно примыкает проблема «аномальной диффузии». Кавычки мы ставим здесь для того, чтобы отметить тот факт, что во всех описанных ниже экспериментах «аномальный» характер диффузии при некотором критическом поле связан, по-видимому, с макроскопической неустойчивостью основного состояния, в котором идет классическая диффузия. В случае плазмы без тока это явление наблюдалось экспериментально.

В п. 12 и приложении III рассмотрен вопрос об устойчивости разряда в газе в длинной трубе в продольном поле. При некотором критическом поле, как показано в приложении III, разряд становится неустойчивым. Возникшие колебания искажают средний фон и увеличивают поток частиц поперек магнитного поля на стенку. В этом случае неустойчивость разряда и увеличение диффузии принципиально связаны с наличием продольного тока.

Однако существует целый ряд экспериментов, в которых отсутствует ток. В принципе, отвлекаясь от способа создания плазмы, можно сказать, что в этих устройствах имеется продольное поле, эквипотенциальная стенка 1 и область, занятая плазмой, 2 (рис. 29). Оказывается, что при некотором критическом поле, зависящем от рода и давления плазмы и остаточного газа в устройстве, обычная диффузия резко нарушается и поток частиц на стенку увеличивается. Это явление объясняется следующим. Из-за большей подвижности электронов между плазмой и кожухом возникает разность потенциалов порядка температуры электронов в плазме. В радиальном электрическом и осевом магнитном полях плазма вращается с некоторой средней угловой скоростью

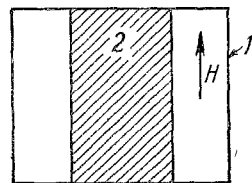


Рис. 29.

$$\langle \Omega \rangle \sim \frac{cE}{\langle r \rangle H} \sim \frac{c\Phi_0}{\langle r^2 \rangle H},$$

где  $\Phi_0$  — потенциал плазмы, а  $\langle r \rangle$  — среднее расстояние до оси. Так как плотность плазмы падает от оси, то согласно выводам п. 10 вращение плазмы неустойчиво. Время ухода плазмы  $\sim 1/\Omega \sim H/\Phi_0 \sim H/T_e$ . С другой стороны, время выравнивания плотности (связанного с обычной диффузией)  $\sim H^2$ . Поэтому существует некоторое критическое поле  $H_{кр} \sim 1/T_e$ , в котором может развиваться неустойчивость. При  $H > H_{кр}$  наступает резкое увеличение скорости ухода плазмы на стенки. Собственно, развиваю-



щийся при этом процесс уже не есть диффузия. «Языки» вращающейся плазмы просто «пролезают» между силовыми линиями и уходят на стенку. Электронная температура  $T_e$  и критическое магнитное поле  $H_{кр}$  зависят от давления в камере и наполняющего ее газа.

#### 14. Квазилинейное приближение при рассмотрении колебательных неустойчивостей в разреженной плазме

В пп. 4е, 7 и 8 было рассмотрено в линейном приближении возникновение периодической неустойчивости, обусловленной отклонением функции распределения частиц плазмы от максвелловского. Если это отклонение мало и инкремент значительно меньше частоты, можно попытаться, учитывая члены второго порядка малости, приближенно рассмотреть процесс установления равновесия в системе и оценить время релаксации.

Мы предположим, что функцию распределения можно представить в виде суммы быстро осциллирующей части  $f^1$  и медленно меняющейся функции  $f^0$ . При этом электрическое и магнитное поля колебаний будут иметь вид произведений быстро осциллирующих в пространстве и времени функций на медленно изменяющиеся амплитуды.

Рассмотрим для простоты случай продольных колебаний в плазме в случае, когда внешнее магнитное поле отсутствует. Функция распределения имеет вид

$$f = f^0 + f^1,$$

где

$$f^1 = \sum_k f_k^1 e^{ikr - i\omega_k t}, \quad f_k^1 = \frac{(e/m) E_k}{-i\omega_k + ikv} \nabla_v f^0,$$

а  $E_k$  — компонента Фурье электрического поля.

Подставляя это значение  $f^1$  в кинетическое уравнение и производя усреднение по быстрым осцилляциям в пространстве и времени, получим уравнение для функции распределения «фона»  $f^0$ , который медленно искажается под влиянием колебаний:

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} + \left\langle \frac{e}{m} E \nabla_v f^1 \right\rangle^{(r, t)} = \frac{\partial f^0}{\partial t} + \nabla_v (A \nabla_v f^0) = 0, \quad (14,1)$$

где

$$A(v) = -\frac{e^2}{m^2} \sum_k |E_k|^2 \pi \delta_{\omega_k - kv}.$$

В соответствии с соображениями, изложенными в п. 7, колебания эффективно взаимодействуют с частицами, движущимися в резонансе с фазовой скоростью волны

$$\omega = kv.$$

Эти частицы и ответственны за искажение «фона».

Амплитуда электрического поля волны  $|E_k|$  удовлетворяет (здесь достаточно линейное приближение) уравнению \*)

$$\frac{d|E_k|^2}{dt} = 2\gamma |E_k|^2, \quad (14,2)$$

\*) В квазилинейную схему нетрудно включить и излучение колебаний за счет флуктуаций. Для этого к правой части уравнения (14,2) нужно приписать слагаемое  $I_k$  — интенсивность такого излучения. В приближении идеального газа каждый электрон излучает независимо и поэтому для получения полной интенсивности

где  $\gamma$  — инкремент, являющийся функционалом «фона»  $f^0$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_k^3}{k^2} (df^0/dv)_{v=\omega/k}. \quad (14,3)$$

Соответственно  $\omega_k$  есть функция  $k$ , определяемая дисперсионным уравнением линейного приближения.

Следует заметить для уяснения смысла использованного приближения, что оно, в сущности, аналогично известному методу Ван-дер-Поля, в котором движение ангармонического осциллятора представляется в виде суперпозиции быстро осциллирующей и медленно меняющейся функций. При этом уравнение для медленно меняющейся части получается усреднением исходных уравнений с учетом квадратичных членов по быстро осциллирующей функции, которая в свою очередь находится из линейного приближения. Для применимости такого метода необходима не только малость амплитуды колебаний, но и «быстрота» осцилляций. Оказывается, последнее условие приводит к тому, что квазилинейное приближение неприменимо к монохроматической волне сколь угодно малой амплитуды. Оно применимо при рассмотрении волновых пакетов, «ширина» которых не слишком мала,  $\Delta \frac{\omega}{k} \gg \sqrt{\frac{e\Phi}{m}}$  (здесь  $\Phi$  — амплитуда потенциала в волне). Это ограничение легко понять, если перейти к системе координат, связанной с резонансными частицами  $v = \frac{\omega}{k}$ . В монохроматической волне резонанс

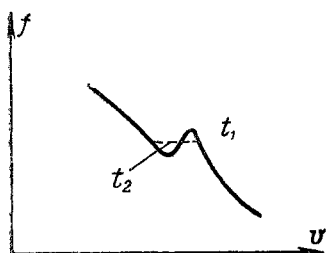


Рис. 30.

имеет место лишь при одном значении скорости, а соответствующая частота в движущейся системе координат равна нулю. Ясно, что здесь нарушается условие «быстроты» осцилляций для частиц, ответственных за искажение функции распределения.

Для оценки времени релаксации плазмы, неустойчивой в исходном состоянии относительно раскачки плазменных колебаний, воспользуемся уравнениями (14,1) — (14,2). По истечении некоторого времени  $\tau$  после возникновения колебаний «фон» изменится таким образом, что дальнейший рост колебаний прекратится (установится квазистационарное распределение), так что  $\partial f^0/\partial t = 0$ .

Интегрируя (14,1) по времени от  $t_1 = 0$  до  $t_2 \sim \tau$ , получим, используя (14,2), приближенное равенство

$$\Delta f^0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \nabla_v (A \nabla_v f^0) \sim \frac{A_0 \nabla_v^2 f^0}{\gamma} e^{\gamma \tau}, \quad (14,4)$$

необходимо просуммировать вклады отдельных электронов  $I_k = \int \mathcal{J}_k f^0(v) dv$ . Спектральная интенсивность излучения плазменных волн отдельным электроном равна  $\mathcal{J}_k = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{k^2} \delta(\omega - kv)$ . Окончательно получим  $I_k = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{k^2} e^2 \int f^0 \left( v_x, v_y, \frac{\omega}{k} \right) dv_x dv_y$ . С помощью этой добавки из (14,2) можно получить, например, стационарный флуктуационный уровень колебаний, полагая  $\frac{d}{dt} |E_k|^2 = 0$ . Естественно, что такой уровень существует лишь в области устойчивости ( $\frac{df^0}{dv} < 0$ ). При приближении к границе устойчивости ( $\frac{df^0}{dv} \rightarrow 0$ ) амплитуда шума возрастает.

где  $\Delta f^0 = f^0(t_2) - f^0(t_1)$  — полное изменение «фона», а  $A_0$  — значение  $A$  в начальный момент.

Соотношение (14,4) определяет по порядку величины время релаксации <sup>42</sup>

$$\tau \sim \gamma^{-1} \ln \frac{\gamma \Delta f^0}{A_0 \nabla_v^2 f_0},$$

$$\tau \sim \frac{2}{\pi} \frac{k^2}{\omega_k^3} \frac{1}{(\partial f_0 / \partial v)_{v=\omega/k}} \ln \frac{\gamma \Delta f^0}{A_0 \nabla_v^2 f_0}. \quad (14,5)$$

Вид «фона» в конечном состоянии (после релаксации) определяется уравнением

$$\nabla_v (A \nabla_v f^0) = 0.$$

Неустойчивость возникает, как известно (см. п. 7), в случае если  $(\partial f_0 / \partial v)_{v=\omega/k} > 0$ , т. е. функция распределения имеет, кроме основного, по крайней мере еще один максимум. Квазистационарное состояние устанавливается тогда, когда этот дополнительный максимум, уменьшаясь, превращается в «плато» (рис. 30).

## 15. Развитая неустойчивость

Приближенные методы типа использованных в пп. 13 и 14 позволяют исследовать «закритический режим» лишь при небольшом отклонении от границы устойчивости. Если же исходное невозмущенное состояние плазмы находится далеко за границей устойчивости, развитие неустойчивости может привести плазму к состоянию, в котором ее движение будет турбулентным; существенной его чертой является взаимодействие между различными масштабами, иначе говоря, различными  $k$ . Это взаимодействие приводит к «дроблению масштабов» и перекачке энергии из больших в меньшие масштабы.

Теория турбулентности наталкивается на огромные трудности даже в гидродинамическом приближении. Практически удается рассмотреть лишь однородный изотропный случай. Надежные размерностные соображения удается развить и для локальной изотропной турбулентности (соотношения Колмогорова—Обухова). Ясно, что магнитное поле может нарушить изотропию. В кинетическом рассмотрении появляется еще одна трудность, заключающаяся в следующем. В гидродинамике спектр турбулентности сверху всегда ограничен:  $k \ll \frac{1}{l}$  (точнее, минимальным масштабом турбулентности служит длина свободного пробега  $l$ , умноженная на  $\frac{\langle v \rangle}{v_0} \text{Re}_g^{-1/4}$ , где  $\frac{\langle v \rangle}{v_0}$  — отношение тепловой скорости к направленной). Что же принять за минимальный масштаб турбулентности в разреженной плазме, когда с самого начала  $1/k$  принимается значительно меньшим  $l$ ? Вопрос достаточно серьезен, поскольку речь идет о механизме диссипации, ограничивающем «дробление» масштабов. Таким механизмом в разреженной плазме не может служить обычная вязкость, так как мы уже пренебрегли парными столкновениями. Если привлечь «бесстолкновительные» механизмы затухания (наподобие рассмотренного в п. 7), которые опять-таки изучены лишь в линеаризованной теории, то таких характерных длин будет несколько: дебаевский радиус  $v_T/\omega_0$ , ларморовские радиусы электронов  $v_{Te}/\omega_{He}$  и ионов  $v_{Ti}/\omega_{Hi}$ . (Известно, что при приближении к таким значениям длин волн различных колебаний последние аномально поглощаются.)

Дополнительным эффектом затухания мелкомасштабных возмущений является хаотизирующий эффект «пересечения траекторий»<sup>43</sup>.

Рассмотрим подробнее некоторые характерные черты распада спектра плазменных колебаний из-за взаимодействия между различными гармониками. Если амплитуда колебаний мала, можно воспользоваться разложением по амплитуде. В первом приближении существуют не взаимодействующие между собой гармоники

$$f_{\mathbf{k}}^{(1)} \sim e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}.$$

Во втором приближении (учитывая квадратичные по амплитуде члены) рождение новых гармоник описывается уравнением типа

$$Lf^{(2)} \cong \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} f_{\mathbf{k}_1}^{(1)} f_{\mathbf{k}_2}^{(1)*} e^{-i\{\omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2}\}t + i\{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2\}\mathbf{x}},$$

где  $L$  — дифференциальный оператор, спектр которого  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega(\mathbf{k})$ . Выражение в правой части можно рассматривать как «вынуждающую силу», действующую на осциллятор. Если сила находится в резонансе с собственным колебанием осциллятора, т. е.  $\omega_2 = \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2}$  является собственной частотой, соответствующей волновому вектору  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ , то под действием этой силы возбуждается (рождается) новая гармоника  $\omega_2(\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ .

Если  $\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_2$  (одномерный спектр), то это возможно, вообще говоря, только для линейного закона дисперсии  $\omega = ck$ . В общем случае возможность такого распада зависит от вида функции  $\omega(\mathbf{k})$  (рис. 31).

Для дисперсионной кривой 1 очевидно, что  $|\mathbf{k}| < |\mathbf{k}_1| + |\mathbf{k}_2|$ , поэтому из  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  можно составить треугольник. Для кривой 3 этого сделать нельзя. Поэтому распад возможен лишь для возмущений типа 1.

Лэнгмюровские колебания, например (см. п. 7), относятся к типу 3. Поэтому распад во втором порядке для них невозможен. В третьем порядке вынуждающая сила будет иметь вид

$$\sim \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} f_{\mathbf{k}_1} f_{\mathbf{k}_2} f_{\mathbf{k}_3} e^{-i\{\omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} + \omega_{\mathbf{k}_3}\}t + i\{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3\}\mathbf{x}}.$$

Легко видеть, что при любом законе дисперсии уравнения

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} + \omega_{\mathbf{k}_3},$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$$

имеют решение. Поэтому время распада произвольного спектра, вообще говоря, обратно пропорционально квадрату амплитуды. Приведенные соображения показывают<sup>44</sup>, что можно рассматривать распад спектра как следствие столкновений квазичастиц-гармоник, при которых выполняются законы сохранения «энергии»  $\omega = \sum \omega_i$  и «импульса»  $\mathbf{k} = \sum \mathbf{k}_i$ .

Под действием электрического и магнитного полей колебаний ионы и электроны плазмы будут совершать «броуновское» движение. Зная спектр этих колебаний, можно было бы, в принципе, легко найти и соответствующие коэффициенты диффузии. Пока это сделано, к сожалению, для малоинтересного случая равновесных тепловых колебаний, так как нахождение неравновесного спектра связано с большими трудностями.

## ПРИЛОЖЕНИЕ I

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПУЧКОВ В ПЛАЗМЕ

Рассмотрим несколько пучков, движущихся со скоростями  $V_i$  и состоящих из частиц с зарядом  $e_i$  и массой  $m_i$ . Температура частиц в пучках —  $T_i$ , плотность частиц —  $N_i$ . Уравнение Эйлера для малых возмущений имеет вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{1}{m_i N_i} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{e_i}{m_i} E, \quad (\text{I},1)$$

уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial n_i}{\partial x} + N_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0, \quad (\text{I},2)$$

уравнение для продольного электрического поля:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi \sum_i e_i n_i. \quad (\text{I},3)$$

В этих уравнениях  $v_i$ ,  $n_i$ ,  $p_i$  — возмущения скорости, плотности и давления частиц в  $i$ -м пучке, а  $E$  — напряженность электрического поля возмущений. Как известно, для идеального газа частиц в каждом из пучков

$$\frac{1}{m_i} p_i = \frac{\gamma_i T_i}{m_i} n_i, \quad (\text{I},4)$$

где  $\gamma_i$  — некий эффективный показатель адиабаты, который определяется из точной кинетической теории.

Как обычно, возмущения ищем в виде  $e^{-i\omega t + ikx}$ , связь  $\omega$  с  $k$  получаем из (I,3), подставляя в него (I,1), (I,2) и (I,4):

$$k^2 = \sum_i \frac{\omega_i^2}{(\omega/k - V_i)^2 - c_i^2},$$

где

$$\omega_i^2 = \frac{4\pi e_i^2 N_i}{m_i}, \quad c_i^2 = \gamma_i \frac{T_i}{m_i}.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ II

## УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ

Получим условия устойчивости вращения плазмы, приведенные в п. 10в.

На торках системы могут существовать электрические поля (из-за того, что плазма граничит с вакуумом), следовательно, возможно появление «перестановочной» неустойчивости (см. пп. 4б и 4в), т. е. неустойчивости плазмы с  $m \neq 0$ . При этом плазма как бы пролезает «языками» между сплошными линиями магнитного поля, не искривляя их. Ниже найдены условия устойчивости вращения по отношению к возмущениям такого типа. Сравнимся случаем сильного магнитного поля ( $\frac{8\pi Q}{H^2} \gg 1$ ).

Движение плазмы в таком поле подобно движению несжимаемой жидкости. Из уравнений гл. II получаем уравнение для возмущения радиальной компоненты скорости вращения

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \ln'(Qr) \frac{d}{dr} + \frac{\ln'(\Delta + Q) \Delta_+}{\frac{\omega r}{m} - V_0} + \frac{V_0^2}{r} - \frac{\ln' Q}{\left(\frac{\omega r}{m} - V_0\right)^2} - \frac{m^2}{r^2} \right\} v_r = 0 \quad (\text{II},1)$$

с граничными условиями

$$v_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1, R_2.$$

Заменяя  $v_r$  на  $u = \sqrt{q} r^{3/2} v_r$ , получим из (II,1)

$$u'' + u \left\{ -\frac{1}{2} \ln''(qr) - \frac{1}{4} \ln'^2(qr) + \frac{\ln'(q\Delta_+) \Delta_+}{\frac{\omega r}{m} - V_0} + \frac{V_0^2}{r} \frac{\ln' q}{\left(\frac{\omega r}{m} - V_0\right)^2} - \frac{m^2}{r^2} \right\} u = 0. \quad (\text{II},2)$$

В этих уравнениях  $v_r$  — радиальная компонента возмущения скорости плазмы,  $q(r)$  — плотность плазмы,  $V_0(r)$  — скорость плазмы, направленная по азимуту,  $\Delta_+ = V_0'(r) + V_0/r$  — ротор скорости плазмы, а штрих означает дифференцирование по радиусу.

Третий член в фигурной скобке связан с обычным сохранением ротора скорости в потоке, а четвертый содержит в числителе  $\frac{qV_0^2}{r} \nabla q = -\nabla p \nabla q$ , т. е. связан с тейлоровской неустойчивостью тяжелой жидкости, поддерживаемой легкой, в поле центробежных сил.

Рассмотрим несколько частных примеров.

а) Однородное вращение плазмы. Пусть вся плазма вращается с угловой скоростью  $\Omega$ . Из (II,2) следует, что в этом случае

$$u''_{\xi\xi} + u \left\{ -\xi^2 + 2E - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\xi^2} \right\} = 0, \quad (\text{II},3)$$

где

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{2a}}, \quad E = \frac{2(\omega - m\Omega)^2 - \omega^2}{(\omega - m\Omega)^2}$$

и предполагается, что  $q = q_0 \exp\{-r^2/2a^2\}$ . Уравнение (II,3) есть уравнение Шредингера для трехмерного изотропного осциллятора с  $l = m - 1/2$ . Поэтому возможны локальные решения при

$$E = m - \frac{1}{2} + n + \frac{3}{2} = m + n + 1, \quad (\text{II},4)$$

где

$$n = 0, 1 \dots$$

Решая соответствующее дисперсионное уравнение, получим:

$$\omega_i = \frac{m\Omega \sqrt{E-2}}{E-1}, \quad \omega_r = \frac{\Omega m (E-2)}{E-1}. \quad (\text{II},5)$$

Очевидно, что  $\omega_i$  максимально при  $E=3$ ,  $m=2$ . Вращение всегда неустойчиво, причем быстрее всего вылезает два «языка» с противоположных сторон. Наличие внешней или внутренней стенок лишь меняет распределение уровней в эффективной потенциальной яме, как показано на рис. 1.

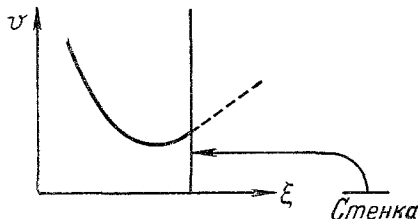


Рис. 1.

б) Вращение плазмы под действием электрического поля в цилиндрическом конденсаторе. Если к электродам приложена разность потенциалов  $\Phi_0$ , то поле между ними

$$E = \frac{\Phi_0}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{M}{r}. \quad (\text{II},6)$$

Легко видеть, что в этом случае  $\Delta_+ = 0$ . Умножая (II,4) на  $(rv_r)^*$  и интегрируя

то частям, получим из условия равенства нулю действительной части интеграла:

$$\omega_i^2 = -m^2 \frac{\int_{R_1}^{R_2} \left\{ |rv_r'|^2 + \left[ \frac{m^2}{r^2} - \frac{V_0^2 Q'}{rQ} \frac{\left( \frac{\omega_r r}{m} - V_0 \right)^2}{|\omega_r/m - V_0|^4} \right] |rv_r|^2 \right\} r dr}{\int_{R_1}^{R_2} |rv_r|^2 r^2 V_0^2 Q' \frac{dr}{|\omega_r/m - V_0|^4}}, \quad (\text{II}, 7)$$

где предположено, что  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ .

Из (II,7) следует, что при  $Q' < 0$  вращение неустойчиво для любых  $\Phi_0$ . Это связано с отсутствием стабилизирующей силы. Если же скорость вращения (или, соответственно, в нашем примере электрическое поле) в силу каких-то причин (например, пространственного заряда) изменяется быстрее, чем  $r^{-1}$ , то появляется стабилизирующая сила. Для простоты предположим, что плазма заключена в тонком зазоре между цилиндрическими стенками (ширина зазора  $\lambda$  много меньше радиуса  $r$ ). Дисперсионное уравнение в этом случае имеет вид

$$\frac{\pi^2}{\lambda^2} = -\frac{1}{2} \ln''(qr) - \frac{1}{4} \ln'^2(qr) + \frac{\ln'(q\Delta_+) \Delta_+}{\frac{\omega r}{m} - V_0} + \frac{V_0^2}{r} \frac{\ln' Q}{\left( \frac{\omega r}{m} - V_0 \right)^2} - \frac{m^2}{r^2}, \quad (\text{II}, 8)$$

$$\omega = \frac{m}{r} \left\{ V_0 + \frac{\Delta_+ \ln'(q\Delta_+)}{2A} \pm \sqrt{\frac{[\Delta_+ \ln'(q\Delta_+)]^2}{4A^2} + \frac{V_0^2}{r} \frac{\ln' Q}{A}} \right\}, \quad (\text{II}, 9)$$

где  $r$  — средний радиус плазменного слоя и

$$A = \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \frac{m^2}{r^2} + \frac{1}{2} \ln''(qr) + \frac{1}{4} \ln'^2(qr). \quad (\text{II}, 10)$$

Вращение неустойчиво, если плотность падает от оси настолько быстро по сравнению с изменением скорости (независимо от знака), что

$$-\frac{Q'}{Q} > \frac{r}{4AV_0^2} \left\{ \frac{[Q(V_0' + V_0/r)]'}{Q} \right\}^2. \quad (\text{II}, 11)$$

Если  $Q'/Q \sim -\frac{1}{2}$  и  $V_0'/V_0 \sim -\frac{1}{L}$ , то вращение неустойчиво при выполнении неравенства

$$\frac{\frac{r}{L}}{\left[ \frac{L}{l} + 1 \right]^2} > \frac{r}{4AL^3}. \quad (\text{II}, 12)$$

Из (II,10) следует, что при  $m \rightarrow \infty$   $\omega$  имеет мнимую часть, если  $Q' < 0$ . В этом случае вращение плазмы с падающей плотностью неустойчиво. Однако если диссипативные процессы (или конечный ларморовский радиус иона) приносят к ограничениям размеров возмущений (так, что  $m$  не может быть очень большим), то вращение может оказаться устойчивым, если скорость вращения изменяется быстрее, чем плотность, как это указано в тексте (п. 10в).

### ПРИЛОЖЕНИЕ III

#### УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО СТОЛБА <sup>38</sup>

Рассмотрим более подробно возникновение неустойчивости в плазме положительного столба газового разряда в длинной трубке при наложении достаточно большого постоянного магнитного поля, направленного по оси разряда.

Исходными уравнениями задачи являются уравнения баланса числа ионов  $n_i$  и электронов  $n_e$  в единице объема плазмы (при этом в силу квазинейтральности  $n_i = n_e = n$ )

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla n v_i = \alpha n, \quad (\text{III}, 1a)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla n v_e = \alpha n, \quad (\text{III}, 16)$$

где  $\alpha$  — число заряженных частиц, образуемых за секунду одним электроном

Скорость ионов  $\mathbf{v}_i$  определяется их подвижностью  $b_i$  и электрическим полем  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ :

$$\mathbf{v}_i = -b_i \nabla\varphi,$$

что же касается электронов, то они в присутствии сильного продольного магнитного поля  $H$  совершают дрейфовое движение в поперечной плоскости

$$\mathbf{v}_{e\perp} = \frac{c}{eH} [\mathbf{h}, \mathbf{F}] \quad (\text{III } 2a)$$

и, кроме того, движутся вдоль магнитного поля со скоростью

$$v_{e\parallel} = b_e \frac{\mathbf{h}\mathbf{F}}{e}. \quad (\text{III } 2b)$$

Фигурирующая в этих формулах полная сила  $\mathbf{F}$ , действующая на электрон, состоит из электростатической силы  $e\nabla\varphi$  и отнесенного к одной частице градиента давления электронного газа  $\nabla(nT_e)$ :

$$\mathbf{F} = e\nabla\varphi + T_e \frac{\nabla n}{n}. \quad (\text{III } 3)$$

Мы рассмотрим случай исчезающе малой подвижности ионов  $b_i$ , когда диффузионный поток на стенки и скорость ионизации  $\alpha$  стремятся к нулю. При этом можно опустить члены  $an$  в уравнениях (III,1) после их линеаризации. Кроме того, мы будем рассматривать низкочастотные колебания в плазменном столбе и поэтому пренебрежем слагаемым  $on/\partial t$  в (III,1б). Тогда, обозначая равновесные плотности и потенциал плазмы через  $N$  и  $\Phi$ , а скорость электронов  $V$  и сохраняя обозначения  $n, \varphi, v$  для отклонений этих величин от  $N, \Phi, V$ , получим в результате линеаризации (III,1)

$$\frac{\partial n}{\partial t} - b_i \nabla (N \nabla \varphi + n \nabla \Phi) = 0, \quad \nabla (N v + n V) = 0. \quad (\text{III } 4)$$

Рассмотрим винтовое возмущение плотности и потенциала вида  $f(r) \exp(-i\omega t + im\theta + ikz)$  ( $z$  — координата вдоль оси разряда,  $\theta$  — азимут) и будем считать для простоты  $|m| \gg 1$ . Подставляя возмущение в (III,4) и используя (III,2), (III,3), получим с точностью до членов  $\sim 1/m$  два алгебраических уравнения для  $n, \varphi$ :

$$An - B\varphi = 0, \quad -i\omega n + C\varphi = 0, \quad (\text{III } 5a)$$

где

$$A = iku + \frac{im}{r} \frac{b_e}{\Omega\tau} \Phi' + k^2 D, \quad B = k^2 b_e N + \frac{im}{r} \frac{b_e}{\Omega\tau} N', \quad C = b_i \frac{m^2}{r^2}, \quad (\text{III } 5b)$$

$\Omega = \frac{eH}{mc}$ ,  $u$  — стационарная скорость электронов вдоль оси разряда, а штрих означает дифференцирование по радиусу.

Находя из (III,5a) частоту  $\omega$ , определим теперь границу устойчивости плазменного столба из условия  $\text{Im } \omega = 0$ :

$$\text{Im } \omega = \text{Re } i\omega = \frac{1}{c} \text{Re } AB^* = 0$$

Подставляя сюда значения  $A$  и  $B$  из (III,5b), получим следующее уравнение\*) для волнового вектора  $k$ :

$$(kr)^4 + (kr) \frac{ur}{D} \frac{m}{\Omega\tau} \frac{rN'}{N} + \left( \frac{m}{\Omega\tau} \frac{rN'}{N} \right)^2 = 0 \quad (\text{III } 6)$$

Неустойчивость для возмущения с  $k = k_{\text{кр}}$  и  $m < 0$  возникает, если продольная скорость электронов становится больше  $u_{\text{кр}}$ . Значения  $k_{\text{кр}}, u_{\text{кр}}$  можно найти из (III,6) и уравнения, получающегося дифференцированием (III,6) по  $k_{\text{кр}}$ . Учитывая, что  $rN'/N \sim 1$ , получим с точностью до коэффициентов порядка единицы

$$\frac{u_{\text{кр}} r}{D} \sim k_{\text{кр}} r \sim \sqrt{|m|/\Omega\tau}. \quad (\text{III } 7)$$

\*) Заметим, что если пренебречь в этой формуле последним членом (рассматривая случай очень больших  $\Omega\tau$ ), критерий устойчивости (III,6) совпадает с критерием устойчивости при наличии градиента проводимости плазмы (58,11).



Если выразить теперь продольную скорость электронов  $u$  через электрическое поле  $E$ , из (III,7) можно получить связь между значениями продольных электрического  $E_{кр}$  и магнитного  $H_{кр}$  полей, при которых положительный столб теряет устойчивость:

$$\frac{\alpha e E_{кр}}{T_e} = \lambda \left( \frac{|m|}{\Omega_{кр} \tau} \right)^{1/2}, \quad \Omega_{кр} = \frac{e H_{кр}}{mc}, \quad (\text{III},8)$$

$\alpha$  — радиус столба,  $\lambda$  — числовой множитель порядка единицы.

В эксперименте неустойчивость возникает, если магнитное поле  $H$  превышает критическое значение  $H_{кр}$ , определяемое формулой (III,8).

#### ПРИЛОЖЕНИЕ IV

#### ИОННЫЙ ЗВУК В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ <sup>47</sup>

Выведем дисперсионное уравнение для ионных звуковых колебаний в неоднородной плазме. Магнитное поле  $H_0$  направим вдоль оси  $z$  и предположим, что давление плазмы значительно меньше магнитного  $p_0 \ll \frac{H_0^2}{8\pi}$ ; пусть равновесное распределение электронов и ионов зависит от координаты  $x$ . Для возмущений вида  $\exp i(k_y y + k_z z)$  поправки к функциям распределения  $f_0(v, x)$  будут иметь вид (в предположении, что  $\omega \ll \frac{eH_0}{Mc}$  — дрейфовое приближение)

$$f_{i,e} = i \frac{1}{\omega + k_z v_z} \left\{ c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f_{0i,e}}{\partial x} + \frac{e_{i,e}}{m_{i,e}} E_z \frac{\partial f_{0i,e}}{\partial v_z} \right\}. \quad (\text{IV},1)$$

Электрическое поле можно с достаточной точностью считать потенциальным  $E = -\text{grad} \phi$ . Тогда дисперсионное уравнение можно получить из условия

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{j} &\approx i k_z j_z \approx 0, \\ j_z &= \sum_{i,e} e_{i,e} \int v_z f_{i,e} dv_z. \end{aligned} \quad (\text{IV},2)$$

(Поперечные компоненты плотности тока подавлены магнитным полем и не оказывают влияния на критерий устойчивости. Однако их надо учитывать при определении пространственной зависимости возмущения — собственной функции.)

Дисперсионное уравнение принимает вид

$$\sum_{i,e} \int \frac{v dv_z}{\omega + k_z v_z} \left\{ \frac{c}{H_0} \frac{k_y}{k_z} \frac{\partial f_{0i,e}}{\partial x} + \frac{e_{i,e}}{m_{i,e}} \frac{\partial f_{0i,e}}{\partial v_z} \right\} = 0. \quad (\text{IV},3)$$

Для максвелловских функций распределения ионов и электронов с температурой, зависящей от  $x$ , нетрудно получить из (IV,3) простое выражение

$$\omega^2 - 2k_z^2 k_y \frac{c T_0 \frac{d}{dx} T_0}{e M H_0} \approx 0, \quad (\text{IV},4)$$

имеющее место при выполнении условия

$$\frac{k_y}{k_z} \gg \frac{e H_0}{c \sqrt{T_0 M} \frac{d \ln T_0}{dx}}. \quad (\text{IV},5)$$

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1953.
2. Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, Укр. матем. ж. 7, 69 (1955).
3. Л. Спитцер, Физика полностью ионизованного газа. М., ИЛ, 1957.
4. Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев, Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. III, М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 268.
5. G. Chew, M. Goldberger, F. Low, Proc. Roy. Soc. A236, 112 (1956).

6. S. Lundquist, Phys. Rev. 83, 307 (1951).
7. K. Hain, R. Lüst, A. Schlüter, Naturforsch. 12a, 833 (1957).
8. I. Bernstein, E. Frieman, M. Kruskal, R. Kulsrud, Proc. Roy. Soc. A244, 1236 (1958).
9. M. Kruskal, L. Oberman, 2-я Женевская конференция, доклад № 365, 1958 г., Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. М., Атомиздат, 1959, стр. 42.
10. M. Kruskal, M. Schwarzschild, Proc. Roy. Soc. A233, 348 (1954).
11. L. Longmire, M. Rosenbluth, Ann. Phys. 1, 120 (1957).
12. Б. Б. Кадомцев, Сб. «Физика плазмы...», т. IV, 1958, стр. 16, 353.
13. В. Д. Шафранов, Атомная энергия 5, 38 (1956).
14. R. J. Tayler, Proc. Roy. Soc. B70, 31 (1957).
15. M. Rosenbluth, Proc of 3rd Conf. on ionisation phenomena in gases, Venice, Rep. № 903, 1957.
16. В. Суудат, 2-я Женевская конференция, доклад № 354, Физика горячей плазмы..., М., Атомиздат, 1959, стр. 49.
17. Е. П. Велихов, ЖЭТФ 36, 1398 (1959).
18. S. Chandrasekhar, A. Kaufman, K. Watson, Proc. Roy. Soc. A245, 435 (1958).
19. А. А. Веденов, Р. З. Сагдеев, Сб. «Физика плазмы...», т. III, 1958, стр. 278.
20. Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев, Сб. «Физика плазмы...», т. IV, 1958, стр. 54.
21. Р. З. Сагдеев, Сб. «Физика плазмы...», т. III, 1958, стр. 446.
22. S. Chandrasekhar, Proc. Roy. Soc. A216, 293 (1953).
23. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ДАН СССР, 69, 21 (1949); Я. Б. Файнберг, Диссертация, ФИАН (1960).
24. Р. В. Половин, Н. Л. Цинцадзе, ЖТФ 29, 831 (1959).
25. Б. Б. Кадомцев, Сб. «Физика плазмы...», т. IV, 1958, стр. 364.
26. Р. З. Сагдеев, В. Д. Шафранов, ЖЭТФ 39, 181 (1960).
27. M. Haggis, Phys. Rev. Lett. 2, 34 (1959).
28. В. Тимофеев, ЖЭТФ (в печати).
29. Ю. А. Церковников, ЖЭТФ 32, 67 (1957).
30. Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев, ЖЭТФ 37, 1337 (1959).
31. С. И. Сыроватский, ЖЭТФ 24, 622 (1953).
32. W. Heisenberg, Ann. der Phys. (4) 74, 577 (1924).
33. Е. П. Велихов, ЖЭТФ 36, 4 (1959).
34. Ю. А. Тарасов, ЖЭТФ 37, 1708 (1959).
35. Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, М., ИЛ, 1958.
36. W. V. Thomson, Phil. Mag. (7) 42, 1417 (1951).
37. В. Lehnert, 2-я Женевская конференция, 1958, стр. 146.
38. Б. Б. Кадомцев, А. Недоспасов, J. Plasma Phys. (1961) (в печати).
39. J. T. Stuart, J. Fluid. Mech. 4, 1 (1958).
40. Л. П. Горьков, ЖЭТФ 33, 402 (1957).
41. Y. Nakagawa, Phys. Fluids 3, 82, 87 (1960).
42. Г. Ф. Филиппов, Ю. А. Романов ЖЭТФ 40, 123 (1961).
43. J. Dawson, Phys. Rev. 113, 383 (1959).
44. P. Sturrock, Proc. Roy. Soc. A242, 277 (1957).
45. О. Вунemann, Phys. Rev. 115, 503 (1959).
46. Б. Б. Кадомцев (в печати).
47. Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев ДАН СССР (1961).
48. Е. П. Велихов, ЖТФ 2, 56 (1961).
49. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез 2, 11 (1961).
50. M. Rosenbluth, 2-я Женевская конференция, 1958 г., Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. М., Атомиздат, 1959, стр. 42, 347.