

ПРИНЦИПЫ ФОРМИРОВАНИЯ И ФОКУСИРОВКИ ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. П. Игнатенко

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	243
§ 2. Основные предположения о свойствах интенсивных пучков	245
§ 3. Виды фокусировки. Специальные вопросы теории	246
§ 4. Основные законы сохранения в гидродинамической теории интенсивных потоков	248
§ 5. Стационарные нерелятивистские пучки в отсутствие магнитных полей	249
§ 6. Формирование пучков с помощью электродов Пирса	251
§ 7. Интенсивные пучки заряженных частиц в магнитном поле	258
§ 8. Методы центробежной и периодической фокусировки	260
§ 9. Приближенные методы расчета интенсивных пучков	265
§ 10. Влияние релятивистских эффектов и начальных скоростей	267
§ 11. Применение счетно-решающих систем и методы моделирования интен- сивных пучков	268
§ 12. Сравнение различных методов фокусировки	271
Цитированная литература	272

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Почти все научные и технические открытия нашего времени связаны с использованием электровакуумных приборов. Это, например, ускорители заряженных частиц в ядерной физике, высокочастотные усилительные и генераторные лампы, электронный микроскоп, фотоумножители, электронно-лучевые приборы и т. п.

Основой всякого электровакуумного прибора является пучок заряженных частиц; в большинстве случаев им служит поток электронов. В таком пучке, как в любом статистическом ансамбле частиц, должны действовать особые внутренние силы. Эти силы могут проявляться в тех или иных условиях, но могут совсем и не учитываться, причем в последнем случае пучок считается состоящим из ряда невзаимодействующих заряженных частиц. Такое пренебрежение внутренними силами пучка имеет место в электронной микроскопии и большинстве задач электронной оптики. С развитием техники все большее применение находят длинные пучки заряженных частиц с большой плотностью тока в них. Получение, а главное, фокусировка таких пучков на значительной длине отличаются рядом особенностей, которые вызваны влиянием взаимодействия заряженных частиц друг с другом, так называемым «эффектом пространственного заряда».

Пучки заряженных частиц, в которых внутренние силы играют существенную роль, и последними нельзя пренебречь, называют интенсивными. Очевидно, что введение понятия интенсивных пучков чисто условное, хотя

и очень удобное с практической точки зрения. Так, величина пространственного заряда характеризуется отношением силы тока I , переносимого пучком, к напряжению (или энергии) ϕ пучка в степени $3/2$ и носит название первеанса пучка. Расчет показывает, что в пучках электронов, первеанс которых меньше $10^{-7} \text{ а/э}^{3/2}$, влияние пространственного заряда можно не учитывать.

Для получения интенсивных пучков могут быть использованы обычные термоионные и оксидные катоды, мощные L -катоды ^{1,2}, а также явление поверхностной ионизации ³, состоящее в образовании ионов при пропускании нейтральных атомов вблизи нагретых металлических поверхностей. Фокусировка пучков с большой плотностью пространственного заряда представляет значительные трудности. При этом уже нельзя говорить о фокусировке в том смысле, в каком она понимается в электронной оптике. Термин «фокусировка интенсивного пучка» следует понимать в смысле формирования потока частиц в пучки с более или менее резко выраженной границей и, по возможности, с ламинарным движением частиц, а также в смысле сохранения заданной конфигурации потока на заданной длине, предохранения его от разрушающего действия пространственного заряда и различных возмущений на пути движения частиц. Форма интенсивных пучков и распределение частиц по их сечению во многих случаях могут быть найдены с помощью системы электрических зондов и зарегистрированы на обычной фотопластинке ⁴. Это объясняется тем, что интенсивный пучок вдоль своей траектории даже при относительно низких давлениях остаточных газов производит сильную ионизацию. Происходящая при этом рекомбинация частиц с противоположными зарядами создает заметное свечение ионизованной области.

Хотя методы формирования и фокусировки пучков в электровакуумных системах тесно связаны с механизмом взаимодействия пучка с управляющими электромагнитными полями сеток, замедляющих структур и резонаторов, имеется ряд общих требований к пучкам, что позволяет отвлечься от механизма взаимодействия и рассматривать различные системы фокусировок с единой точки зрения.

Теоретический анализ поведения интенсивных пучков в электромагнитных полях связан с решением систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, т. е. является весьма сложной математической задачей. На протяжении ряда последних лет получено большое количество приближенных решений и предложено несколько удачных конструкций для получения и фокусировки интенсивных пучков. В развитии этого важного направления электроники существенную роль сыграли работы С. А. Богуславского и В. Р. Бурсиана по изучению влияния объемного заряда на движение потоков заряженных частиц, В. С. Лукошкова по изучению методов моделирования интенсивных пучков, Я. И. Френкеля, С. А. Бобковского, М. М. Бредова и С. М. Брагинского по вопросам нейтрализации объемного заряда в пучках, В. Т. Овчарова и Э. С. Чернова по теории и новым методам фокусировки непрямолинейных потоков. Из иностранных работ следует отметить обзорные и оригинальные работы Дж. Пирса и Г. Иви, а также работы П. Кирстайна, Б. Мельцера, Г. Уокера и др.

Цель настоящего обзора — собрать и подытожить результаты работ по формированию и сохранению интенсивных пучков заряженных частиц, приведенные в многочисленных журналах и книгах, и указать на ряд проблем, еще ожидающих своего решения.

Существующие обзоры литературы ⁵⁻¹² по эффектам пространственного заряда лишь косвенно затрагивают вопросы формирования и фокусировки интенсивных пучков и уже устарели.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О СВОЙСТВАХ ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ

Отдельная заряженная частица в пучке на своем пути подвергается воздействию следующих основных типов электромагнитных полей: 1) внешних, обычно стационарных, электрических и магнитных полей; 2) некоторого усредненного поля, возникающего в результате воздействия на частицу остальных частиц пучка, а также остаточных газов и ионов в системе; 3) переменных электромагнитных полей, возникающих при соударениях частиц или флуктуациях плотности тока в пучке.

Обычно считается, что напряженности электромагнитных полей удовлетворяют уравнениям Максвелла, а движение отдельной частицы описывается либо законами Ньютона, если скорости частиц малы, либо уравнениями Эйнштейна, в случае релятивистских скоростей. Однако, если поля меняются существенным образом на расстояниях, сравнимых с длиной волны де-Бройля $\lambda = h/p$ ($h = 6,624 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек — постоянная Планка, p — импульс частицы), то поведение частицы не может быть описано с помощью понятия траектории движения, а требует учета волновых свойств частицы. Кроме того, нужно учитывать, что каждая заряженная частица обладает¹³ собственным орбитальным и магнитным моментами количества движения. Наконец, в любой электровакуумной системе присутствуют молекулы остаточных газов, с которыми будут взаимодействовать частицы пучка, причем это взаимодействие рассчитывается по законам квантовой механики.

В большинстве практических конструкций степень откачки системы столь высока, что можно пренебречь столкновениями частиц пучка с молекулами остаточных газов. Влияние остаточного газа проявляется в дополнительной фокусировке пучка частицами противоположного заряда^{14, 15} и колебательном характере плотности тока в пучке¹⁶⁻²⁰ (рис. 1). Эта фокусировка объясняется тем, что образующиеся в результате ионизации остаточных газов частицы противоположного заряда захватываются внутрь пучка и удерживаются там электростатическими силами притяжения. Такая компенсация пространственного заряда наиболее проста и наблюдается при давлениях от 10^{-2} до 10^{-7} тор. Однако процессы ионизации и улавливания заряженных частиц подвержены сильным флуктуациям по длине пучка²¹⁻²³. Кроме того, наличие остаточных газов в системе увеличивает разрушение электродов вследствие бомбардировки их ионами остаточных газов.

Длина волны де-Бройля λ в применяющихся в настоящее время системах имеет величину порядка $10^{-8} \div 10^{-9}$ см, что позволяет^{24, 25} не учитывать квантовых эффектов. Однако эти эффекты накладывают предел разрешающей способности электронных микроскопов. Последовательного квантовомеханического анализа поведения интенсивных пучков заряженных частиц в настоящее время нет.

Как было отмечено Мельцером²⁶⁻²⁷ и Уинвудом²⁸, магнитным взаимодействием частиц в пучке можно пренебречь только в случае нерелятивистских скоростей и при малых отношениях ширины пучка к его длине. Рассмотрим, например, поток электронов в бесконечном плоском конденсаторе. Выберем в этом потоке трубку тока радиусом r . По закону Ампера вокруг выделенной нами трубки тока возникнет

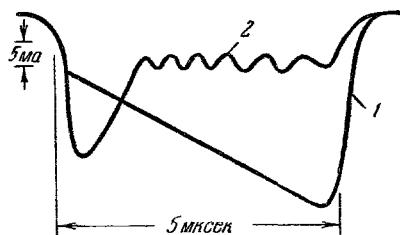


Рис. 1. Осциллограмма тока на оси пучка.

Давление в системе $5 \cdot 10^{-7}$ тор. С увеличением давления импульс (1) принимает форму (2), причем давление в этот момент равно $\sim 10^{-4}$ тор.

магнитное поле, которое будет оказывать фокусирующее действие на поток, нарушая характер его движения и распределение частиц в нем. Магнитными силами можно пренебречь только в том случае²⁷, если $r/l \ll 6(c/v)^2$, где r/l — отношение радиуса пучка к его длине, v — максимальная скорость частиц, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек — скорость света. Если, например, ускоряющее напряжение равно 50 кВ, то r/l должно быть меньше 30. Основные эффекты, связанные с учетом магнитных взаимодействий в пучке, обсуждены в работах²⁹⁻³¹.

При изучении интенсивных пучков получили широкое распространение гидродинамические аналогии. Например, часто можно в потоке заряженных частиц выделить ряд непересекающихся между собой слоев, причем поведение потока в каждой точке выделенного слоя в любой момент времени будет характеризоваться одним вектором скорости. Такие потоки называют, по аналогии с гидродинамикой, ламинарными. При этом обычно считается, что отдельная частица пучка движется не в дискретной среде, а в сплошной, электрически заряженной среде. Однако в экспериментальных работах встречается ряд явлений, которые не могут быть описаны с помощью понятия ламинарных потоков. Это, например, образование полостей в пучках, беспорядочные флуктуации плотности тока вдоль пучка, аномальное распределение скоростей частиц и т. п. Изучались условия нарушения ламинарного характера течения в сильных магнитных полях^{32, 33} и, вследствие неоднородного распределения скоростей^{32, 34} по сечению пучка, переменной плотности заряда^{35, 36}, различных тепловых эффектов³⁷⁻³⁹ и т. п.

§ 3. ВИДЫ ФОКУСИРОВКИ. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

Интенсивные пучки желаемых геометрических размеров и формы могут быть получены только при использовании внешних ограничивающих сил, которые должны компенсировать расталкивающие силы пространственного заряда. Такими силами могут быть силы внешних электростатических полей, внешних магнитных полей или силы поля частиц противоположного заряда, образующихся по мере прохождения интенсивного пучка в остаточном газе системы. В соответствии с этим различают три способа фокусировки интенсивных пучков: электростатический, магнитный и газовый. Существуют и комбинированные методы фокусировки^{40, 41}. Например, в M - и O -типах карсинотронов для фокусировки электронного пучка применяются⁴²⁻⁴⁴ взаимно перпендикулярные электрические и магнитные поля. Однако попытки создания высокоэффективной электронной пушки такого типа наталкиваются на серьезные трудности, связанные с учетом переменных электромагнитных полей, действующих при входе пучка в фокусирующую систему. Кроме того, фокусировка скрещенными электрическими и магнитными полями тесно связана с механизмом отбора энергии от пучка, поэтому эффект фокусировки в этом случае не может рассматриваться изолированно от способов отбора высокочастотной энергии.

Методы газовой фокусировки оказывают существенное влияние на электронные пучки, но с увеличением массы заряженных частиц эти эффекты быстро уменьшаются вследствие сильной утечки электронов из области ионного пучка. Во втором параграфе мы обсуждали основные явления, сопровождающие нейтрализацию пространственного заряда пучка. Хороший обзор литературы по этим вопросам можно найти в работе⁴⁵.

Методы фокусировки электрическими и магнитными полями в свою очередь можно разделить на фокусировку однородными и периодическими полями. В первом случае фокусирующие поля не меняются по длине пуч-

ка, во втором — конфигурация пучка сохраняется за счет прохождения его через набор магнитных или электростатических линз, призм или зеркал.

Попытки найти вид формирующих и фокусирующих электродов аналитическим путем приводят к решению уравнения Лапласа, дающему распределение потенциала вне некоторой, вообще говоря, незамкнутой поверхности, на которой известно значение потенциала и поставлено условие отсутствия нормальных к поверхности сил. В математической физике такая задача носит название задачи Коши для эллиптических уравнений. Как известно⁴⁶, эта задача в обычном смысле некорректна, т. е. ее решение очень чувствительно к малым изменениям граничных условий. Например, если точное значение потенциала задано в двух точках координатной оси x , удаленных друг от друга на расстояние a , а в промежуточных точках оси x значение потенциала известно с ошибкой $\varepsilon \sin \frac{\pi x}{a}$, то можно показать, что в области $y > 0$ ошибка в решении будет определяться величиной $\varepsilon \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a}$, т. е. с увеличением y ошибка будет быстро возрастать. При увеличении точности в определении граничных значений, т. е. при уменьшении a , ошибка будет осциллировать, увеличиваясь по абсолютной величине. С такой неустойчивостью решения встретились в своих работах Брюэр⁴⁷, Хехтель⁴⁸ и Берц⁴⁹. В работе⁴⁸, например, значение потенциала на границе пучка разлагалось в степенной ряд, причем при использовании трех членов разложения была получена форма электродов, соответствующая физическому смыслу; однако эти электроды резко изменили свой вид, когда использовалось шесть членов ряда.

Можно показать^{50, 51}, что задача Коши имеет решение, выраженное в аналитических функциях, только в ограниченных случаях. Рассмотрим идеально проводящую плоскость, находящуюся под нулевым потенциалом, и несколько изолированных друг от друга областей скопления электрических зарядов. Тогда по индукции на плоскости также возникнет распределение зарядов, плотность которых в произвольной точке плоскости определяется величиной нормальной производной от потенциала. Если теперь отвлекаясь от того, как было создано такое распределение зарядов на плоскости, и найти значение потенциала в произвольной точке вне плоскости, то для этого потребуются решить уравнение Лапласа с граничными условиями типа Коши. Однако это решение заведомо было бы несправедливо в областях скопления электрических зарядов, поскольку там оно должно было бы удовлетворять и уравнению Пуассона, куда входит плотность зарядов в таком скоплении.

Устойчивость плоской задачи Коши для уравнений Лапласа установлена Карлеманом⁵². Оценки, характеризующие устойчивость пространственной задачи Коши, были получены М. М. Лаврентьевым^{53, 54} для функций, заданных в произвольной области с достаточно гладкой границей, и Е. М. Ландисом⁵⁵ для эллиптических уравнений второго порядка с ограничением, наложенным на коэффициенты уравнения. В работе Рэдди⁵⁶ показано, как можно найти решение задачи Коши с помощью сходящихся рядов.

С практической точки зрения неустойчивость решения имеет и свою положительную сторону, поскольку даже значительные неточности в изготовлении электродов будут вызывать лишь небольшие возмущения потока на его границе. Это позволяет применить выводы, полученные для бесконечных электродов, к реальным фокусирующим системам конечных размеров.

§ 4. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИНТЕНСИВНЫХ ПОТОКОВ

Уравнение движения отдельной частицы в пучке согласно Лоренцу имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \right) \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = -\eta \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \}, \quad (1)$$

причем напряженности электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{B} полей удовлетворяют законам Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu \mathbf{qv}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где ρ — плотность заряда, ε и μ — электрическая и магнитная проницаемости вакуума, \mathbf{v} — вектор скорости частицы, η — удельный заряд частицы.

Вместо напряженности полей пользуются векторным \mathbf{A} и скалярным φ потенциалами, причем

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3)$$

Аналогично тому, что имеет место в гидродинамике, можно получить следующие основные законы сохранения.

Закон сохранения заряда:

$$\operatorname{div} \mathbf{qv} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

В случае консервативных полей, т. е. при φ и \mathbf{A} , не зависящих от времени, вдоль любой траектории заряженной частицы выполняется закон сохранения энергии:

$$\frac{c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - \eta \varphi = \text{const}, \quad (5)$$

или, в нерелятивистском случае,

$$v^2 - 2\eta \varphi = \text{const}. \quad (6)$$

Как показано Габором⁵⁸, для интенсивных потоков справедлива теория Лагранжа: вдоль замкнутого контура C , охватывающего трубку тока, величина интеграла

$$\oint_C (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) d\mathbf{l} \quad (7)$$

остаётся постоянной для данной трубки тока. Очевидно, что если трубка тока выходит из одной точки, то инвариант Лагранжа равен нулю. В случае отсутствия магнитного поля и для нерелятивистских скоростей из теоремы Лагранжа следует известная в гидродинамике⁵⁹ теорема Томсона:

$$\oint_C \mathbf{v} d\mathbf{l} = \text{const}. \quad (8)$$

При исследовании неламинарных потоков с различным статистическим распределением скоростей частиц в пучке пользуются теоремой Лиувилля (см. работы^{60, 61}). В этом случае движение отдельной частицы рассматривается как движение в фазовом пространстве, характеризующемся тремя координатами x, y, z и соответствующими значениями импульса p_x, p_y, p_z , причем плотность зарядов в фазовом пространстве, движущемся

вместе с частицей, не меняется со временем, т. е. выполняется равенство

$$\int dx dy dz dp_x dp_y dp_z = \text{const} \quad (9)$$

вдоль траектории заряженной частицы.

Перечисленные основные законы сохранения позволяют во многих случаях упростить расчеты и быстро получить необходимые связи между различными параметрами интенсивных потоков. Так, изучение одномерных потоков заряженных частиц (расчет плоских, цилиндрических и сферических диодов) основано на законах сохранения заряда и энергии и на теореме Гаусса, позволяющей найти величину напряженности поля E . При создании электронно-оптических систем большую пользу оказывает теорема Лагранжа и ее частный случай — теорема Буша (см. ⁶²). Изучение распространения электромагнитных волн пространственного заряда ^{63, 64} вдоль интенсивных пучков в линейном приближении основано на уравнениях Максвелла и общих уравнениях движения. Исследование различных моделей статистического распределения начальных скоростей частиц ^{60, 61} и нахождение пределов фокусировки пучка как функции температуры катода основано главным образом на теореме Лиувилля.

§ 5. СТАЦИОНАРНЫЕ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПУЧКИ В ОТСУТСТВИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Если в уравнениях (1) и (2) положить $v^2/c^2 \ll 1$ и $\mathbf{B} = 0$, то будут выполняться следующие уравнения, описывающие движение отдельной частицы в таких пучках:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\eta\mathbf{E}, \\ \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Чтобы система (10) была замкнутой, необходимо задать связь между скоростью и плотностью заряда. Для этого используется уравнение сохранения заряда (4), которое в данном случае имеет вид

$$\text{div } q\mathbf{v} = 0. \quad (11)$$

Система уравнений (10) и (11) может быть разрешена относительно скорости:

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \{\mathbf{v}\nabla (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\} &= 0, \\ \text{rot } \{(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если пренебречь начальными скоростями частиц и потенциал катода считать постоянным, то все частицы в пучке будут иметь одинаковую энергию. Такие пучки называют «нормальными»; необходимым и достаточным условием их существования будет ⁶⁵

$$[\mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{v}] = 0, \quad \text{т. е.} \quad (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2. \quad (13)$$

Таким образом, для нормальных пучков второе уравнение из системы (12) тождественно выполняется и решение сводится к одному скалярному уравнению

$$\text{div } \{\mathbf{v} \Delta v^2\} = 0. \quad (14)$$

Дальнейшие упрощения уравнения (14) были сделаны Шпангенбергом ⁶⁶ и Уокером ⁶⁷ с помощью теоремы Томсона (8). Условием существования

ламинарных потоков, где все частицы в сечении пучка движутся с одинаковой скоростью, является соотношение

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{v} = \nabla W, \quad (15)$$

где W — скалярная функция, называемая функцией действия (в гидродинамике ее называют потенциалом скорости). Тогда уравнение (14) можно заменить одним нелинейным дифференциальным уравнением четвертого порядка в частных производных, для определения одной скалярной функции W . Остальные параметры пучка определяются через W следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \text{потенциал} \quad \varphi &= \frac{(\nabla W)^2}{2\eta}, \\ \text{плотность заряда} \quad \rho &= -\frac{\varepsilon}{2\eta} \Delta (\nabla W)^2, \\ \text{траектория движения} \quad \frac{dx}{\partial W} &= \frac{dy}{\partial W} = \frac{dz}{\partial W}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Для исследования уравнений (14) и (15) выберем ортогональные криволинейные координаты x_1, x_2, x_3 так, чтобы поверхность $x_1 = \text{const}$ соответствовала $W = \text{const}$. Как известно⁶⁸, элементарный квадрат длины ds^2 в такой системе координат выражается через коэффициенты Лямэ h_1, h_2, h_3 следующим образом:

$$ds^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2. \quad (17)$$

Необходимым и достаточным условием существования одномерного ламинарного потока заряженных частиц, т. е. таких потоков, для которых на поверхности $x_1 = \text{const}$ все параметры пучка имеют постоянное значение, а вектор скорости перпендикулярен к x_1 , будет⁶⁹⁻⁷¹ равенство

$$\frac{h_2 h_3}{h_1^3} W' [(W')^2]'' + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1^3} \right) W' [(W')^2]' + \frac{h_2 h_3}{h_1} \Delta \frac{(W')^3}{h_1^3} = F(x_2 x_3),$$

где F — произвольная функция переменных x_2, x_3 , а штрихом обозначена производная по x_1 .

Следовательно, поток возможен только в тех случаях, когда либо

$$\left. \begin{aligned} \frac{h_2 h_3}{h_1} \Delta \frac{1}{h_1^2} &= F(x_2 x_3), \quad \text{т. е.} \quad W' = \text{const}, \\ \text{либо} \quad \frac{h_2 h_3}{h_1} &= M(x_1) N(x_2 x_3) + \sum_i M_i(x_1) N_i(x_1 x_2 x_3), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где M, M_i, N_i — произвольные функции соответствующих переменных.

Аналогичному исследованию недавно подверглись⁴⁰ двумерные потоки заряженных частиц в системах с внешним магнитным полем.

Общих методов решения уравнений (14) и (15) в настоящее время не существует. Поэтому исследуются только частные случаи. Так, в работах^{67, 82} применялся метод разделения переменных к задаче о распределении интенсивного потока заряженных частиц между непараллельными плоскими электродами и между двумя прямыми коаксиальными конусами с общей вершиной. В работах⁸³⁻⁸⁵ метод разделения переменных применялся к системам с цилиндрической и сферической симметриями. Для нахождения функции действия иногда можно пользоваться мето-

дами конформных отображений^{79, 86}. Однако, как отмечает Мельцер⁸⁷, в многоэлектродных системах параметры пучка не могут быть выражены через аналитические функции. В таких системах предлагается искать решение в форме Адамара (см. ^{46, 54, 55}).

§ 6. ФОРМИРОВАНИЕ ПУЧКОВ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОДОВ ПИРСА

Распыливание пучков под действием сил пространственного заряда может быть нейтрализовано внешними электростатическими полями. Практически приемлемый метод достижения такого результата впервые был предложен Пирсом^{5, 88}. Этот метод состоит в следующем. Если, например, в плоском диоде, полностью заполненном пространственным зарядом, выделить часть потока заряженных частиц, то на границе образовавшегося пучка расталкивающие силы пространственного заряда будут скомпенсированы объемным зарядом остальных частиц. Тот же результат, очевидно, можно получить, если область пространства вне пучка свободна от зарядов, но электродам придана такая геометрическая форма и их потенциалы так подобраны, чтобы положение краев пучка осталось неизменным. Для этого необходимы, вообще говоря, только два электрода, находящиеся соответственно под потенциалами катода и анода. Такая система электродов получила название «пучки Пирса» а сами электроды — электроды Пирса.

Эта задача компенсации расталкивающих сил пространственного заряда на границе пучка внешним электрическим полем может быть решена в общем случае, если известно распределение потенциала вдоль границы пучка. В математической физике такая задача носит название задачи Коши для эллиптических уравнений, а все трудности, связанные с ее решением, обсуждались нами в § 3. Нужное распределение потенциала вдоль границы пучка может быть найдено путем решения уравнения Пуассона внутри пучка или из экспериментов. Ниже приводятся формы электродов, полученные аналитическим путем для различных типов пучков.

а) Ленточный пучок^{5, 88}:

$$\varphi(r, \vartheta) = r^{4/3} \cos \frac{4}{3} \vartheta. \quad (19)$$

Форма электродов приведена на рис. 2.

б) Клиновидный пучок^{58, 89}:

$$\varphi(r, \vartheta) = \operatorname{Re} \left\{ \omega^{4/3} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \omega^k \right\}, \quad (20)$$

где

$$\omega = \ln \frac{r_k}{r} + i(\vartheta - \vartheta_0).$$

Форма электродов приведена на рис. 3.

в) Цилиндрический пучок⁹⁰:

$$\varphi(r, z) = Az^{4/3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{a}{z} \right)^{2k} \Phi_{2k} \left(\frac{r}{a} \right), \quad (24)$$

где a — радиус пучка. В области у края пучка

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 1, \quad \Phi_2 \left(\frac{r}{a} \right) = \frac{1}{9} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^2 - 2 \ln \frac{r}{a} - 1 \right\}, \\ \Phi_4 \left(\frac{r}{a} \right) &= \frac{10}{1296} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^4 - 8 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left[\ln \frac{r}{a} - \frac{1}{r} \right] - 4 \ln \frac{r}{a} - 5 \right\} \dots, \end{aligned}$$

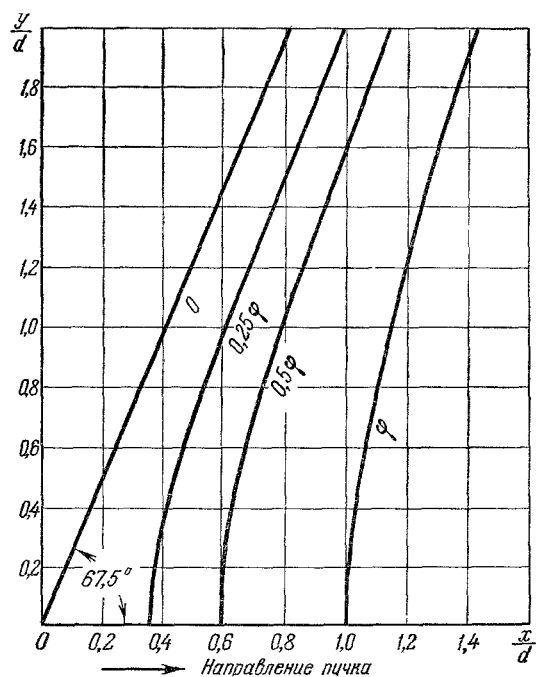


Рис. 2. Эквипотенциальные линии поля, необходимого для создания параллельного пучка прямоугольного сечения.
 x, y — декартовы координаты, d — межэлектродный промежуток.

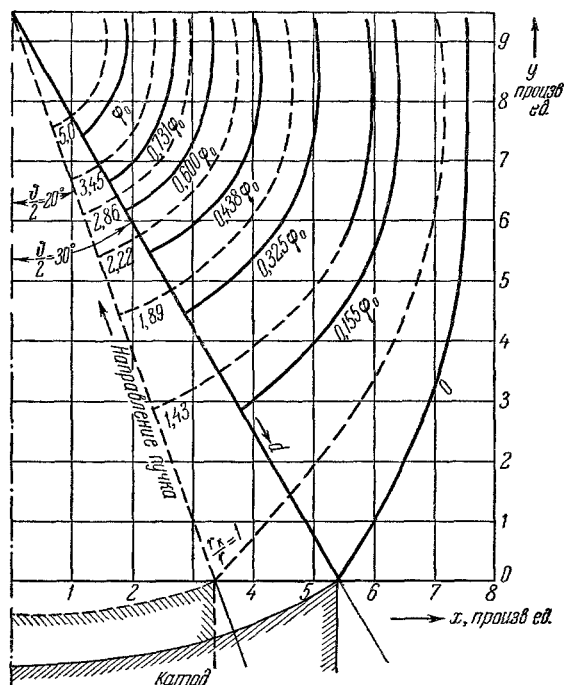


Рис. 3. Эквипотенциальные линии поля, необходимого для создания клиновидного пучка при различных углах ϕ (40 и 60°).
 d — межэлектродный промежуток, x — расстояние от катода до фиксированной точки пучка, ϕ — потенциал анода, r_K/r — отношение радиуса катода к фиксированному радиусу, y — расстояние от катода по оси пучка.

а в области $R < a^2$

$$\varphi(r, z) = R^{2/3} \cos \frac{4}{3} \vartheta + \frac{R^{5/3}}{4a} \left\{ \sin \frac{\vartheta}{3} - \frac{1}{7} \sin \frac{7}{3} \vartheta \right\} + \dots, \quad (22)$$

где

$$R = z^2 + (r - a)^2, \quad \vartheta = \arctg \frac{r - a}{z}.$$

Форма электродов приведена на рис. 4.

г) Трубчатый цилиндрический пучок⁹⁰.

Если внутренний и внешний радиусы пучка равны соответственно a и b , то в области вне пучка форма эквипотенциалей описывается уравне-

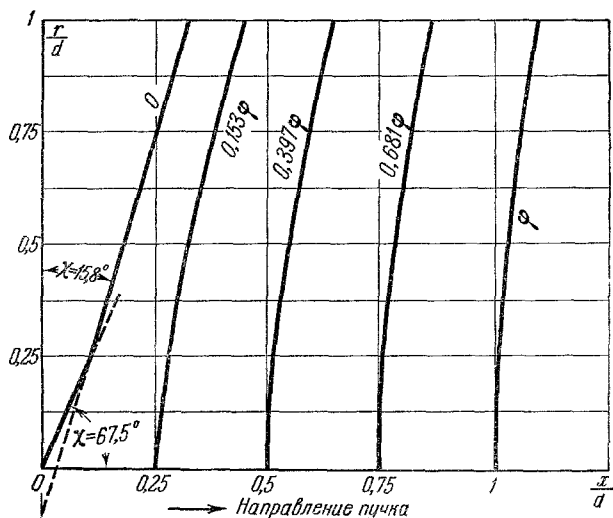


Рис. 4. Эквипотенциальные линии поля, необходимого для формирования плоского цилиндрического пучка.
 χ — угол наклона формирующего электрода к пучку.

ниями (21) и (22), причем для области внутри пучка необходимо заменить a на b .

д) Конический пучок^{56, 91}:

$$\varphi(r, \vartheta) = \left(\frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta} \right)^{1/2} \omega^{4/3} \left\{ \cos \frac{4}{3} \psi - \frac{2}{5} \omega \cos \frac{7}{3} \psi + \right. \\ \left. + \frac{3}{7} \omega \frac{7 \operatorname{ctg} \vartheta_0 + \operatorname{ctg} \vartheta}{8} \sin \frac{7}{3} \psi + O(\omega^2) \right\}, \quad (23)$$

где

$$\omega = \left| \ln \frac{r}{r_K} + i(\vartheta - \vartheta_0) \right|, \quad \psi = \arctg \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\ln(r_K/r)}.$$

Форма электродов для различных углов сходимости ϑ_0 приведена на рис. 5.

е) Азимутальный цилиндрический пучок^{78, 79}:

$$\varphi(r, \vartheta) = -2^{-4/3} a^{-2} \left[1,402 + \frac{4 \cos \left(\vartheta + \frac{2}{3} \pi \right)}{r} - \frac{5}{18} \frac{\cos \left(4\vartheta + \frac{2}{3} \pi \right)}{r^4} + \dots \right], \quad (24)$$

если $r > 1$, и

$$\varphi(r, \vartheta) = 2^{-4/3} a^{-2} \left[\frac{2 \cos \left(2\vartheta - \frac{2}{3} \pi \right)}{r^2} + 1,402 + \frac{4}{3} r \cos \left(\vartheta + \frac{2}{3} \pi \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} r^4 \cos \left(4\vartheta + \frac{2}{3} \pi \right) + \dots \right], \quad (25)$$

если $r < 1$.

Форма электродов приведена на рис. 6, причем a — радиус граничной траектории пучка.

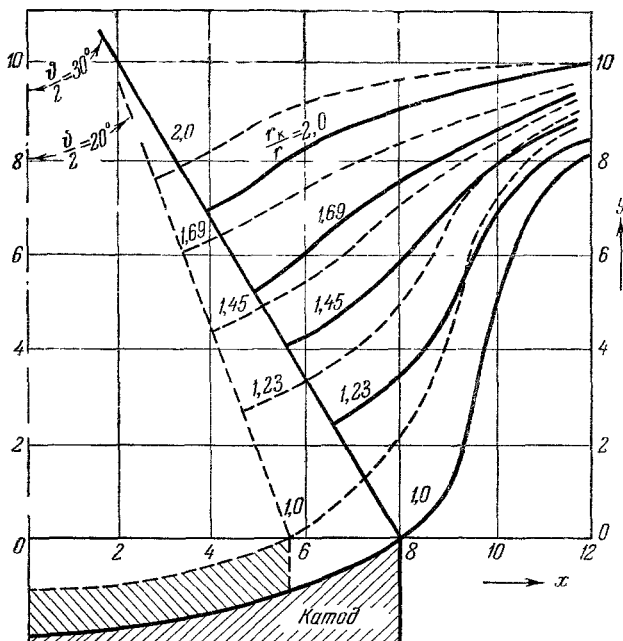


Рис. 5. Форма эквипотенциальных электродов, при которой образуется сходящийся конический пучок с углом раствора ϑ (40 и 60°).

ж) Азимутальный сферический пучок⁷⁴:

$$\varphi(r, \vartheta) = \theta(\vartheta, \vartheta_0) \left\{ 1 + 2 \left(1 - \frac{r}{a} \right) + [3 - (2\vartheta^{3/2} \sin \vartheta)^{-1}] \left(1 - \frac{r}{a} \right)^2 + \right. \\ \left. + [4 - (\vartheta^{3/2} \sin \vartheta)^{-1}] \left(1 - \frac{r}{a} \right)^3 + \dots \right\}, \quad (26)$$

где $\theta(\vartheta, \vartheta_0)$ — функция, табулированная в работе⁷⁴, a — радиус граничной траектории пучка. Форма электродов для частного угла ϑ_0 приведена в работе⁷⁴.

Записав уравнение Лапласа в ортогональных криволинейных координатах для малой прикатодной области, Рэдли показал⁵⁶, что фокусирующий электрод нулевого потенциала должен составлять в общем случае угол в 67,5° с границей пучка. Изменение этого угла приводит⁹² к изменению угла, под которым пучок покидает катод, а также к изменению плотности тока вблизи точки пересечения электрода с пучком. На рис. 7 приведена зависимость угла β , который составляет катодный формирующий электрод с вертикалью (отсчитывается от вертикали по часовой стрелке), от угла α между электродами и границей пучка.

Если известна конструкция пушки двухэлектродной системы, то можно ³³ использовать это решение для создания триодной электронной пушки Пирса. Рассмотрим, например, типичную систему эквипотенциальных линий, найденных аналитическим путем или с помощью различных моделирующих устройств и показанных схематически на рис. 8. Если продолжить электрод нулевого потенциала по эквипотенциалам C_1D_1 и C_2D_2 , а электрод с анодным потенциалом—по эквипотенциалам A_1B_1 и A_2B_2 , то силы пространственного заряда пучка будут скомпенсированы внешним электростатическим полем. Очевидно, что граница пучка не изменит своей формы, если 1) на место какой-нибудь эквипотенциали G_1H_1 и G_2H_2 поместить электрод с соответствующим положительным потенциалом φ_2 ; 2) электроды C_1D_1 и C_2D_2 заменить другой парой электродов с нулевым потенциалом, расположенных вдоль эквипотенциалей C_1C_3 и C_2C_4 , а на место эквипотенциалей E_1F_1 и E_2F_2 поместить электроды с соответствующим отрицательным потенциалом φ_1 . В первом случае мы получим триод с положительным смещением на сетке, во втором— с отрицательным смещением. Поэтому в общем случае предлагается поступать так: сначала

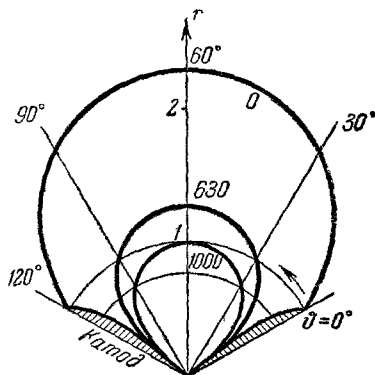


Рис. 6. Форма эквипотенциальных электродов для получения азимутального цилиндрического пучка в полярной системе координат.

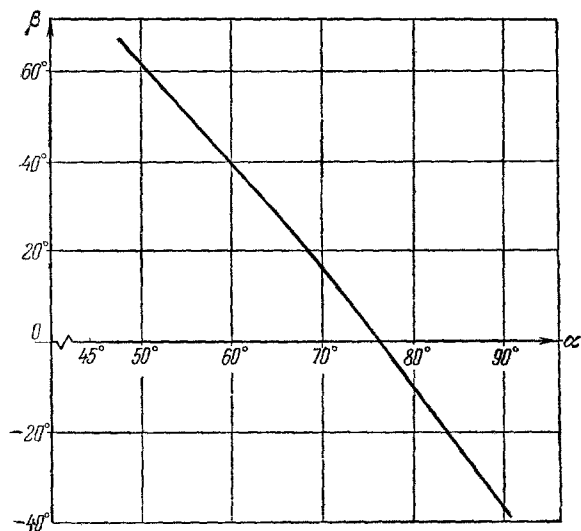


Рис. 7. Зависимость угла β , который составляет катодный формирующий электрод с вертикалью, от угла α между электродом и границей пучка прямоугольного сечения.

Угол β отсчитывается от вертикали по часовой стрелке

сталкивающие силы пространственного заряда будут скомпенсированы.

Приведенные формы электродов Пирса, строго говоря, справедливы только для сплошных бесконечных электродов. Однако на практике системы Пирса используются для вывода интенсивных пучков через анодное отверстие на экраны осциллографических трубок, в область высокочастотного

в триодной системе находится положение нулевой эквипотенциали; затем эта эквипотенциаль принимается за катод новой формирующей системы, анодом которой служит анод триода; с помощью различных приближенных методов находится форма эквипотенциальных кривых в полученной двухэлектродной системе. Если теперь заменить электроды с нулевым потенциалом другой парой электродов, расположенных вдоль найденных эквипотенциалей нулевого потенциала, и вставить на место соответствующей эквипотенциали электрод с потенциалом сетки триода, то в образующейся формирующей системе рас-

поля, для получения реактивной тяги⁹⁴ и т. п. При этом расфокусировка пучка в анодном отверстии находится по формулам электронной оптики^{62, 95-97}, либо по эмпирическим результатам Глюва⁹⁸. Положение и величина минимального сечения пучка за анодным отверстием для случая сходящихся цилиндрических пучков были найдены Пирсом⁵. Аналогичным методом недавно были рассмотрены^{89, 99} клиновидные пучки в системах с цилиндрическим катодом. Была найдена область частичной (пучок уменьшается по ширине, но не достигает оси) и полной (пучок пересекает ось системы) фокусировки клиновидных потоков в системах с эксцентрическими цилиндрическими электродами и в системах

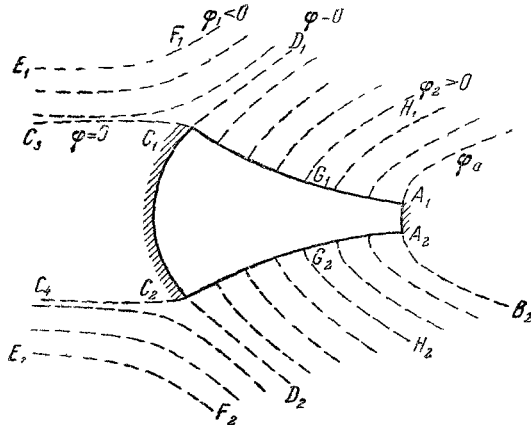


Рис. 8. Вид эквипотенциальных кривых в двухэлектродной пушке Пирса.

со стержневым анодом (рис. 9), а также исследована форма электродов, необходимых для формирования таких пучков.

Формулы электронной оптики справедливы^{100, 101} только для тонких линз и неприменимы для формирующих систем, диаметр анодного отверстия которых сравним с межэлектродным расстоянием. Копленд¹⁰² попытался заменить анодные отверстия толстыми электростатическими линзами, но эта замена оказалась очень грубой. Если отверстие велико, то силы пространственного заряда оказываются наиболее существенными в области анода, что приводит к нарушению граничных условий и расфокусировке пучка перед анодным отверстием. Было предложено^{103, 104} учитывать влияние конечных размеров анодного отверстия путем расчета емкости формирующей системы и сравнения ее с емкостью аналогичной системы сплошных электродов. Таким путем может быть определен первеанс любой сложной формирующей системы. Наиболее полный перечень эффектов, связанных с расходимостью интенсивных пучков в анодных отверстиях, дан в работе⁹¹ для значений первеанса $1 \div 8 \cdot 10^{-7} a/e^{3/2}$, где показано с помощью трудоемких расчетов, что фокусное расстояние

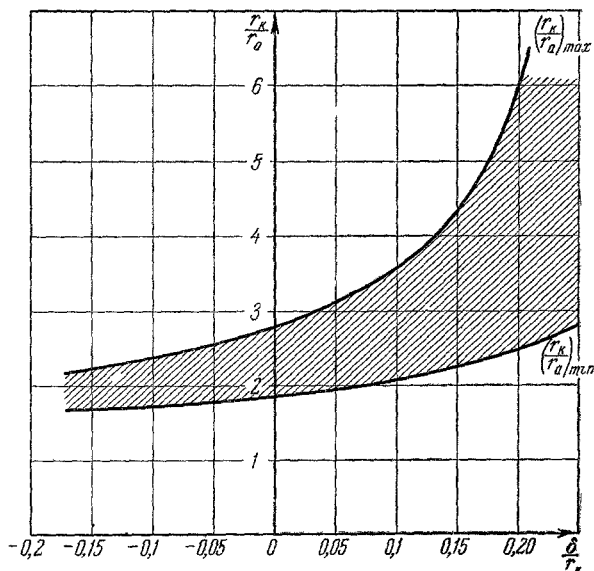


Рис. 9. Область фокусировки клиновидных пучков в системе эксцентрических цилиндрических электродов.

r_k и r_a — радиусы катода и анода соответственно, δ — расстояние между центрами кривизны электродов, знак δ выбирается положительным, если центр анода находится слева от центра кривизны катода. Область частичной фокусировки заштрихована.

обычно на 10 % меньше тех значений, которые получаются из теории тонких линз. В работе приведен богатый графический материал.

Для уменьшения влияния анодного отверстия на фокусировку пучков предлагается ряд оригинальных конструкций. Так, в работе¹⁰⁶ был использован дополнительный анод (рис. 10, б), потенциал которого выше потен-

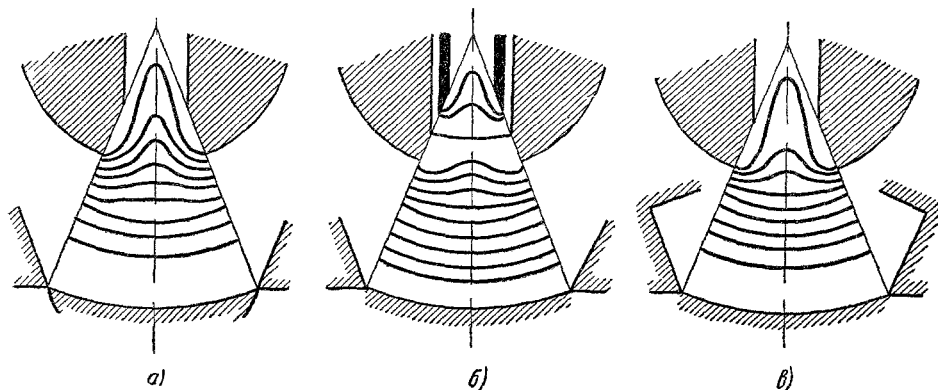


Рис 10. Влияние анодного отверстия на форму конического пучка электронов.

Первеанс системы $\sim 2,2 \cdot 10^{-6} a/e^{3/2}$.

а) случай Лэнгмюра, б) метод дополнительного анода; в) метод дополнительного формирующего катодного электрода

циала основного анода для формирования конического электронного пучка с первеансом $2,2 \cdot 10^{-6} a/e^{3/2}$. В другой конструкции предложено изменить форму катодного формирующего электрода (рис. 10, в), причем распределение потенциала вдоль границы пучка должно удовлетворять закону Лэнгмюра^{72, 73} вплоть до расстояний, равных 0,6 от межэлектродного промежутка, а затем асимптотически приближаться к распределению потенциала в цилиндрической диоде с радиусом анода, составляющем $2/3$ от истинного радиуса.

На рис. 11 показана формирующая система с эллипсоидальным катодом¹⁰⁷. В этом случае эффект сферических aberrаций анодного отверстия уравновешен неоднородным распределением плотности пространственного заряда по сечению пучка. Такая система электродов очень чувствительна к выбору размеров ее отдельных элементов. Ниже приводятся наиболее характерные размеры фокусирующей системы с эллипсоидальным катодом, которая имела¹⁰⁸ первеанс $3 \cdot 10^{-6} a/e^{3/2}$ и отношение минимального диаметра пучка к его размеру на катоде равным 75:

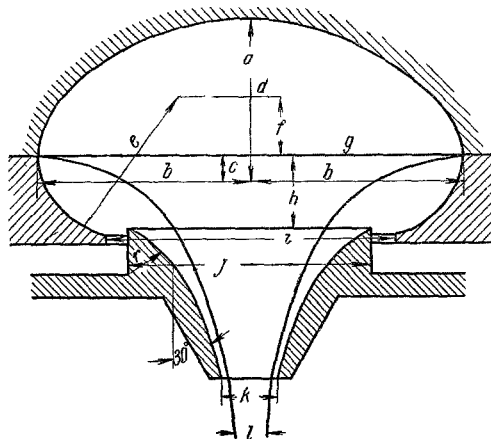


Рис. 11. Электронная пучка с эллипсоидальным катодом.

$a = 1,0,$	$f = 0,360,$	$j = 1,655,$
$b = 1,3,$	$g = 1,283,$	$k = 0,40,$
$c = 0,152,$	$h = 0,424,$	$l = 0,234,$
$d = 0,292,$	$i = 1,931,$	$r = 0,276.$
$e = 1,055,$		

Еще в 1922 г. был предложен¹⁰⁹ способ защиты катода электровакуумных систем от ионной бомбардировки путем применения трубчатых пучков. С развитием исследований в области СВЧ-диапазона выяснилось еще одно преимущество трубчатых пучков: взаимодействие пучка с замедляющими системами наиболее эффективно с краю пучка и уменьшается к его оси. Наибольшие возмущения, вызываемые анодным отверстием, сказываются также на оси пучка, а поэтому несущественны для полых пучков. Однако применение полых пучков наталкивается на серьезные трудности—для устойчивой фокусировки таких пучков требуется, чтобы плотность тока в пучке менялась обратно пропорционально четвертой степени радиуса пучка.

Недостатком систем Пирса является также необходимость тепловых зазоров между катодом и формирующими электродами нулевого потенциала. Эксперименты показали¹¹⁰, что плотность тока на катоде, а следовательно, и условия фокусировки, в значительной мере зависят от величины и формы зазоров. Теоретического обоснования этих явлений пока не существует.

§ 7. ИНТЕНСИВНЫЕ ПУЧКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Для компенсации электростатических сил пространственного заряда можно использовать и внешние магнитные поля. Такая фокусировка пучка хорошо изучена только для систем, катод которых экранирован от магнитного поля, и для пучков с однородным распределением скоростей частиц по сечению пучка. Проблемы магнитной экранировки катода обсуждались в работах¹¹¹⁻¹¹⁴, где показано, что как из теоретических, так и экспериментальных соображений оптимальное положение магнитного экрана должно быть таково, чтобы в точке максимального сужения пучка величина продольной составляющей магнитного поля составляла около 70 % от своей максимальной величины. Если интенсивный пучок поместить в достаточно сильное продольное магнитное поле, которое может быть создано соленоидом или постоянным магнитом, то заряженные частицы будут перемещаться вдоль магнитных силовых линий. Метод продольного магнитного поля позволяет получить очень жесткую фокусировку, т. е. сохранить заданную конфигурацию пучка при наличии больших возмущений движения заряженных частиц в потоке. Однако этот метод обладает существенными недостатками, к которым следует отнести: 1) необходимость громоздких и тяжелых постоянных магнитов или соленоидов, на подмагничивание которых требуется дополнительная мощность; 2) точность юстировки и согласования отдельных элементов фокусирующих систем; 3) требование строгой однородности и ламинарности интенсивного потока; 4) чувствительность к небольшим температурным изменениям и т. п. Все эти недостатки тормозят применение методов фокусировки продольным магнитным полем в современных СВЧ-приборах.

Дальнейшим развитием методов фокусировки магнитным полем является «поток Бриллюэна»¹¹⁵⁻¹¹⁷. Такой поток вращается как одно целое во внешнем магнитном поле. На частицы пучка действует радиальная сила, которая в некоторых случаях может уравновесить центробежную силу и расталкивающие силы пространственного заряда. Условия получения устойчивого бриллюэновского потока выводятся из общей теории фокусировки потоков, разработанной В. Т. Овчаровым¹¹⁸.

Для круглого цилиндрического пучка радиусом r , который распространяется в цилиндре радиусом R , имеющем потенциал φ_a , эти условия приводят к тому, что максимальная величина тока I , который можно провести

в таком пучке, должна быть равна

$$I = I_B \left(1 + 2 \ln \frac{R}{r} \right)^{-1}, \quad (27)$$

а величина магнитного поля H должна быть выбрана равной

$$H = H_B \left(1 + 2 \ln \frac{R}{r} \right)^{-1/2}, \quad (28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_B &= \frac{8\pi e}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \eta \Phi_a^{3/2}, \\ H_B &= \frac{4}{r} \sqrt{\frac{\Phi_a}{3\eta}}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Величины I/I_B и H/H_B как функции r/R приведены на рис. 12; в работах ^{116, 117, 119-121} рассмотрена фокусировка трубчатых пучков в магнитном поле. Если внутренний и внешний радиусы пучка равны соответственно r_1 и r , а потенциал на внешней границе равен Φ_a , то максимальный ток I и напряженность магнитного поля H равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} I &= I_B \frac{(r/r_1)^2 - 1}{(r/r_1)^2 + 1}, \\ H &= H_B (1 - (r_1/r)^2)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где I_B и H_B определяются выражениями ⁽²⁹⁾.

Как показано Хайнсом ¹²², для бриллюэновской фокусировки сходящихся интенсивных пучков необходимы неоднородные магнитные поля. При малых углах сходимости Φ_0 это поле может быть создано параболическими полюсными наконечниками. Максимальная величина тока в таком пучке находится из выражения (29), а магнитное поле должно иметь следующие составляющие:

$$H_r = \frac{8}{x\Phi_0} \left(\frac{\Phi_a}{3\eta} \right)^{1/2}, \quad H_\Phi = -\frac{4}{x} \frac{\Phi}{\Phi_0} \left(\frac{\Phi_a}{3\eta} \right)^{1/2}, \quad (31)$$

где x — расстояние, отсчитываемое от фокуса.

Фокусировка ленточных пучков шириною a магнитным полем напряженностью H между плоскими параллельными электродами, расположенными на расстоянии d друг от друга, была рассмотрена Пирсом ⁵ и Бриллюэном ¹¹⁶. Если Φ_a — потенциал электродов, то максимальная величина тока, переносимого в таком пучке, и соответствующее значение напряженности магнитного поля H имеют следующие значения:

$$I = I_B \frac{a}{2d-a}, \quad H = H_B \left(\frac{a}{2d-a} \right)^{1/2}, \quad (32)$$

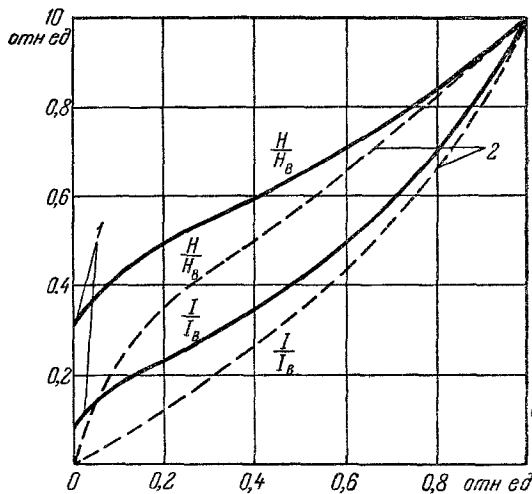


Рис. 12. Фокусировка пучков в магнитном поле. Сплошные линии соответствуют фокусировке цилиндрических пучков, пунктир — фокусировке ленточных пучков. По оси абсцисс отложено отношение геометрического параметра пучка к соответствующей величине для ускоряющего электрода 1) r_K/R и 2) a/d ; по оси ординат — величины I/I_B и H/H_B .

причем величины I_B и H_B задаются уравнениями:

$$I_B = \frac{16\pi}{3a} \left(\frac{2}{3} \eta \right)^{1/2} \Phi_a^{3/2}, \quad H_B = \frac{4}{a} \left(\frac{\Phi_a}{3\eta} \right)^{1/2}. \quad (32')$$

Графики зависимостей I/I_B и H/H_B от отношения a/d нанесены на рис. 12 пунктиром.

В практике исследований идеальный бриллюэновский поток получить не удастся: обычно для устойчивой фокусировки пучка требуются магнитные поля в 1,5–2 раза более сильные, чем предсказываемые теорией. Это объясняется неоднородностью и неламинарностью потока при входе его в фокусирующую систему. С практической точки зрения поток Бриллюэна позволил лишь несколько снизить величину необходимого для фокусировки магнитного поля, но сохранил и в ряде случаев углубил недостатки фокусировки продольным магнитным полем.

Другой характерной особенностью поведения интенсивных пучков в магнитных полях являются их ярко выраженные турбулентные свойства⁷⁵. Так, при некоторой величине тока, зависящей от геометрии пучка, поток становится неустойчивым^{123–125}. Было обнаружено^{32–36, 126, 127}, что при увеличении магнитного поля пучок менял форму, образуя периодические стреловидные участки, или распадался на несколько вихрей движущихся в межэлектродном пространстве.

§ 8. МЕТОДЫ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ И ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФОКУСИРОВКИ

От любой фокусирующей системы (особенно от фокусирующей системы высокочастотного электронного прибора) требуется, с одной стороны, надежная и длительная работа, с другой, — компактность и небольшой вес. Рассмотренные системы электростатической фокусировки весьма громоздки и обладают малой продолжительностью работы в режимах с большой плотностью тока. Системы магнитной фокусировки могут обеспечить продолжительную фокусировку интенсивных пучков с большой плотностью тока, но при этом габариты и вес этих систем оказываются чрезвычайно большими. Поэтому методы магнитной фокусировки в настоящее время применяются исключительно в лабораторных моделях электронных приборов. Таким образом, одна из актуальнейших задач современной электроники заключается в отыскании новых эффективных методов электростатической фокусировки и уменьшении веса и габаритов магнитных фокусирующих систем. Эта задача частично решается с помощью методов центробежно-электростатической и периодической фокусировки.

Пространственный заряд пучка сильно подвержен различным нерегулярным флуктуациям, что должно учитываться при конструировании фокусирующих систем. Поэтому в фокусирующие системы специально вводят устройства, создающие дополнительные дефокусирующие силы, на фоне которых расталкивающие силы пространственного заряда становятся малыми. Такие системы более надежны и гибки в управлении. Дополнительной дефокусирующей силой обычно служит центробежная сила, возникающая при вращении пучка в однородном или периодическом внешнем поле. Если внешним полем служит однородное электростатическое поле, то такой метод фокусировки называют центробежно-электростатическим^{128, 129}. Он основан на устойчивости движения заряженной частицы в радиальном поле цилиндрического конденсатора¹²⁹. В этом случае система электродов состоит из электронной пушки и двух коаксиальных цилиндров (рис. 13), между которыми приложено напряжение, причем внутренний цилиндр имеет более высокий потенциал. Электрон, вследствие спиральных срезов у катода и анода, получает вращательный момент

и, будучи введен в поле цилиндрического конденсатора под углом к оси, начинает движение по спиральным траекториям. Приборы, в которых применяется такой способ фокусировки, носят название «спиратронов». Расчет устойчивости пучков в таких системах²⁸ указывает на возможность проведения через систему значительных токов. Экспериментально получены пучки с током в несколько десятков миллиампер и коэффициентом токопрохождения 90—98%. Центробежно-электростатическая фокусировка может применяться¹³¹ в лампах с обратной волной.

Преимуществами метода центробежно-электростатической фокусировки являются: 1) отсутствие внешних громоздких фокусирующих систем и дополнительного расхода мощности на фокусировку; 2) возможность обойтись без строгой юстировки системы; 3) простота и надежность управления током и формой пучка; 4) большая эффективность взаимодействия пучка с высокочастотными полями замедляющих структур; 5) увеличение срока службы эмитирующих электродов, их защищенность от бомбардировки ионами остаточных газов и т. п. Недостатком таких систем фокусировки является необходимость вводить дополнительные электроды в замедляющие структуры, что иногда невозможно выполнить.

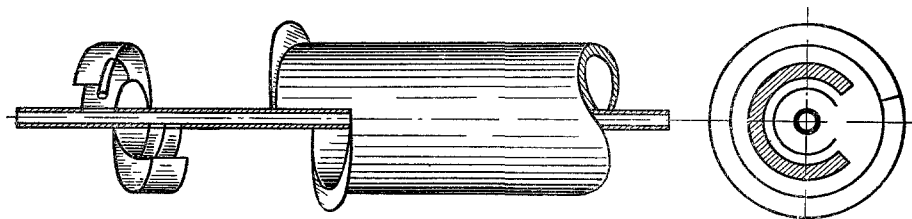


Рис. 13. Электронно-оптическая система с центробежно-электростатической фокусировкой.

Другим методом центробежной фокусировки является метод Харриса—Крамли^{132—133} для фокусировки трубчатых пучков. В этом случае трубчатый пучок формируется в магнитоэкранированной пушке, а затем вводится в поле цилиндрического конденсатора. Начальное закручивание электронов по спиральным траекториям осуществляется в переходной области, где трубчатый пучок пронизывается радиальным магнитным полем. Недостаток такой системы состоит в необходимости вводить в вакуумную систему громоздкий магнитопровод и тщательно подбирать величину и конфигурацию фокусирующих электрических и магнитных полей в переходной области.

Наряду с методами фокусировки интенсивных пучков однородными электрическими и магнитными полями для фокусирующих целей применяют также поля, периодически меняющиеся с расстоянием. В этом случае пучок попеременно то сходится, то расходится, проходя через систему магнитных или электростатических линз, призм или зеркал. Устойчивость пучка определяется устойчивостью колебательного движения, которое совершают частицы пучка при прохождении через систему чередующихся полей. Характерно, что такой колебательный процесс приводит к серии стабильных и нестабильных зон.

Периодическая электростатическая фокусировка^{134—140, 167, 213} осуществляется за счет компенсации дефокусирующих сил пространственного заряда радиальной составляющей внешнего, периодического по длине пучка, электрического поля. Простейшая система электродов состоит из ряда круглых дисков с отверстиями, обладающими попеременно то высоким, то более низким потенциалом. Пучок заряженных частиц проходит вдоль оси системы и периодически сужается и расширяется в ней. Условия

стабильности сплошных и полых пучков в таких фокусирующих системах обсуждались в работах ^{140—142}. По сравнению с фокусировкой однородными полями периодическая электростатическая фокусировка позволяет получить при определенных условиях почти параллельный пучок, причем длина такого пучка может быть значительной, поскольку периодическое поле может быть легко продолжено добавлением электростатических линз. Основной недостаток этих систем состоит в том, что фокусировка пучка получается слабой и пучок разрушается от небольших возмущений. Достижение повышенной жесткости предложено Ченом в виде бипериодической системы ¹⁴³ и системы с вращающимся пучком ¹⁴⁴.

В первом случае пучок фокусируется под влиянием двух внешних электростатических полей, быстро меняющих свое направление. Примером такой фокусирующей системы может служить бифилярная спираль. Обычные методы фокусировки с помощью периодических полей основаны на периодическом воздействии на пучок внешних электрических сил, причем период и величина этих сил медленно изменяются по длине пучка. Поэтому возникшие в пучке возмущения пространственного заряда могут оказаться нескомпенсированными медленно нарастающими фокусирующими силами. Выходом из такого положения является уменьшение периода изменения электрических фокусирующих полей. Однако сокращение периода фокусирующей системы приводит к перекрестному взаимодействию электрических полей двух соседних линз. Такого взаимного влияния соседних электростатических линз можно избежать, если добиться крутого спада электрического поля на концах каждой фокусирующей ячейки. Последнее достигается в системе с биспиралью, вследствие взаимодействия электрических полей двух спиралей. Система с биспиралью может обладать очень маленьким периодом и экспоненциально убывающим (или соответственно нарастающим) электрическим фокусирующим полем. По расчетам Чена система с биспиралью может обеспечить стабильную фокусировку электронных пучков с первеансом вплоть до $10^{-5} \text{ а/с}^{3/2}$. Экспериментально получена фокусировка пучка с первеансом, равным $2 \cdot 10^{-6} \text{ а/с}^{3/2}$ и полным током 4 ма при коэффициенте токопрохождения, равном 97 %.

Упомянутое достижение повышенной жесткости в системах с вращающимся пучком сводится к введению в систему дополнительных дефокусирующих сил с тем, чтобы в балансе сил расталкивающие силы пространственного заряда играли незначительную роль. Начальное вращение пучка задается обычно с помощью радиального магнитного поля, расположенного в области входа пучка в фокусирующую систему. Возникающая в результате такого закручивания пучка центробежная сила уравновешивается фокусирующей силой периодического электрического поля биспирали. Хотя теория и указывает на существенные преимущества такой системы с более жесткой фокусировкой перед обычными периодическими системами, однако в экспериментальных образцах полученные величины тока пучка (около 1 ма) практически равны предельным токам фокусировки обычными периодическими полями. Кроме того, совмещение методов электрической фокусировки с магнитным закручиванием пучка в одной системе нерационально и конструктивно сложно.

Оригинальную периодическую электростатическую фокусировку предложил Компфнер ^{145, 146}. Эта фокусировка получила название «слалом»-фокусировки и схематически изображена на рис. 14. В этом случае пучок движется через систему чередующихся электростатических призм, совершая волнообразное движение, последовательно огибая фокусирующие стержни. В каждой ячейке движение пучка похоже на движение в отклоняющем поле цилиндрического конденсатора. Фокусирующими стержнями могут служить элементы замедляющей линии СВЧ-приборов типа ЛБВ.

Вопросы стабильности «слалом»-пучка обсуждались в работе ¹⁴⁷. Экспериментальный генератор обратной волны, использующий этот тип фокусировки, позволил получить непрерывную перестройку частоты в диапазоне 3300—4700 Мгц при коэффициенте прохождения тока, равном 97 %. Положительной стороной «слалом»-фокусировки является большая эффективность взаимодействия пучка с электромагнитным полем замедляющей линии, поскольку пучок в такой системе целиком огибает замедляющую линию. К недостаткам такой фокусировки следует отнести необходимость иметь монохроматичный пучок и точную юстировку периодической системы.

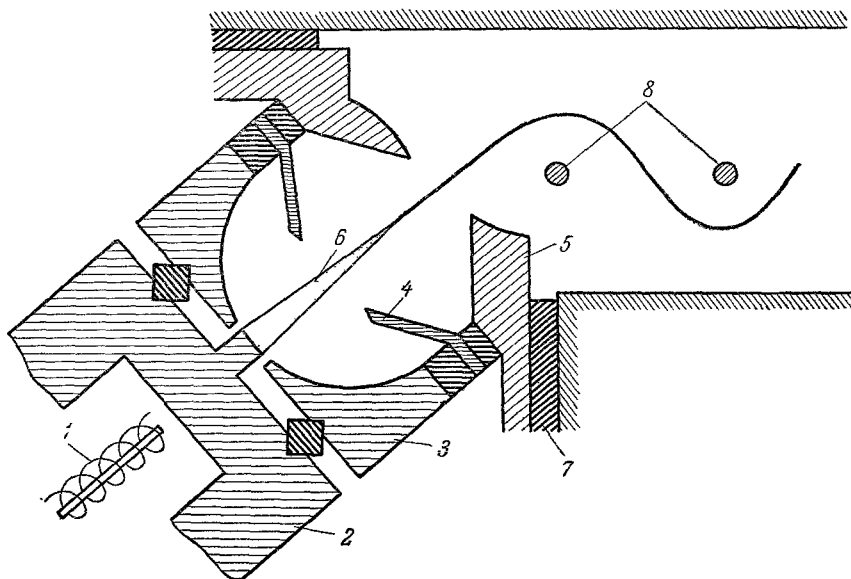


Рис. 14. Электронно-оптическая система с фокусировкой типа «слалом». 1 — подогреватель, 2 — катод; 3 — фокусирующий электрод, 4 — 1-й анод; 5 — 2-й анод; 6 — пучок; 7 — изолятор; 8 — фокусирующий стержень.

В работе Хогга ¹⁴⁸ предложен другой вид бипериодической электростатической фокусировки, названной автором «сдвоенной лестницей». Система представляет собой две расположенные параллельно длинные электрически связанные прямоугольные пластины с поперечными щелями, причем щель одной пластины находится против перемычки другой. На некотором расстоянии от этих пластин расположены еще две сплошные пластины, находящиеся под одинаковым фокусирующим потенциалом, отрицательным относительно потенциала внутренних пластин. Пучок проходит попеременно мимо щелей и отклоняется в фокусирующем поле. Максимальное токопрохождение в приборах с такой фокусировкой достигало 70 % при напряжении пучка, равном 750 в, фокусирующем напряжении 300 в и угле пучка на входе в систему, равном 21°.

На практике гораздо чаще используются методы периодической магнитной фокусировки ^{106, 139, 149-152, 211-212}. Это объясняется тем, что в таких системах можно провести гораздо большие токи, чем в системах с электростатической фокусировкой. Методы периодической магнитной фокусировки основаны на собирающем действии последовательности коротких или длинных магнитных линз. Такая фокусировка характеризуется наличием устойчивых и неустойчивых областей ^{153, 154} и зависит от способа ввода пучка в магнитное поле, т. е. от того, насколько катод системы

экранирован от магнитного поля¹⁵⁵. Устойчивость пучка при периодической магнитной фокусировке зависит от двух параметров: одного — связанного с плотностью пространственного заряда пучка и равного $a=1540 K (L/d)^2$ (где K — первеанс пучка, d — начальный диаметр пучка, L — период магнитного поля), и второго, связанного с магнитным полем $b=5,58 \cdot 10^{-4} \times \sqrt{H^2 L^2 / \varphi}$ (где $\overline{H^2}$ — среднее значение квадрата напряженности магнитного поля, выраженной в гауссах, φ — напряжение пучка в вольтах). Если b мало, то амплитуда и период колебаний огибающей пучка довольно велики, однако при отсутствии помех пучок приобретает прежний диаметр. С увеличением b уменьшаются период и амплитуда колебаний, а при $b=a$ поток становится приблизительно параллельным. Если $b > a$, то пространственным зарядом можно пренебречь, возрастает амплитуда колебаний и нарушается ламинарность потока. Пути электронов пересекаются с осью, но сами электроны еще не уходят из пучка, хотя колебания могут быть большими. При $b \approx 0,7$ поток становится неустойчивым и пучок быстро теряет электроны, а при $b > 0,7$ появляются новые зоны устойчивости и неустойчивости пучка. В этих зонах устойчивости орбиты электронов часто пересекают ось.

По сравнению с фокусировкой однородными полями периодическая магнитная фокусировка обладает рядом преимуществ; некоторые из них необходимо отметить: 1) увеличение предельного первеанса пучка и 2) уменьшение веса и габаритов фокусирующей системы. Например, в маломощной лампе с бегущей волной значение первеанса примерно равно $1,5 \times 10^{-7} a / \epsilon^{3/2}$. Предельное значение первеанса⁵, при котором возможна фокусировка в трубе или спирали диаметром D и длиной l , равно $3,9 \cdot 10^{-5} (D/l)^2$. Если рассматриваемый пучок фокусируется при помощи n магнитных линз, расстояние между которыми равно $L=l/n$, то предельный первеанс такой системы будет пропорционален квадрату числа фокусирующих линз. Поэтому типичное значение первеанса ЛБВ можно получить при $n=2$ и $l/D=32$.

Далее, пусть имеется постоянный магнит, создающий на определенной длине однородное поле, и мы хотим увеличить пространство с такой напряженностью магнитного поля в n раз. Для этого потребуется все размеры магнита увеличить в n раз, а в случае периодической фокусировки достаточно только увеличить длину в n раз. Следствием этого будет то, что вес периодической системы будет в n^2 раз меньше веса соответствующей однородной структуры. Эксперименты показали¹⁵⁶, что для работы 100-ваттной ЛБВ требовалась периодическая фокусирующая система весом в 1,5 кг, либо однородная магнитная система весом 25 кг.

К недостаткам периодических магнитных систем фокусировки относятся: 1) более сложная регулировка магнитной системы; 2) наличие областей неустойчивых состояний потока; 3) большая чувствительность к температурным изменениям; 4) необходимость специальных магнитных материалов, и ряд других. Так, например, при значениях первеанса, превышающих $2 \cdot 10^{-6}$, необходимо располагать линзы на таком расстоянии друг от друга, что их поля начинают сказываться на величине поля в соседних линзах, зоны устойчивости пучка резко уменьшаются, а контроль за фокусирующей системой усложняется. Существенным требованием к потоку является необходимость однородного и строго ламинарного пучка при входе его в фокусирующую систему. Однако на практике это условие трудно выполнить, и поэтому величина фокусирующих полей обычно на 50—100 % превышает расчетную.

С помощью квадрупольных магнитных полей в систему можно ввести центробежную дефокусирующую силу и тем увеличить жесткость фокусировки. Такая фокусировка получила название «меандр»-фокусировки

(показана схематически на рис. 15). За счет применения квадрупольных магнитов поле имеет противоположное направление по разные стороны от оси. Электрон, введенный в такую систему в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, будет двигаться по зигзагообразной кривой,

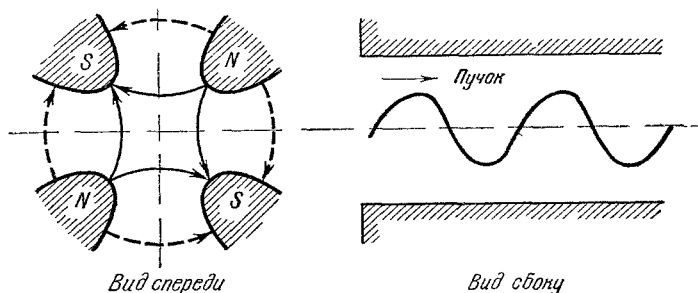


Рис. 15. Схема «меандр»-фокусировки пучка.

периодически пересекая ось. Подобный пучок был использован для возбуждения высокочастотных колебаний в резонаторе. Первая зона неустойчивости в этом случае начинается ¹³⁹ со значения параметра магнитного поля $b=0,44$.

§ 9. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ

Общие дифференциальные уравнения движения заряженных частиц в стационарных полях с учетом пространственного заряда, как мы видели, являются слишком сложными для широкого применения. Если, однако, ограничиться рассмотрением путей частиц, движущихся вблизи оси системы и составляющих с ней небольшой угол, так называемых «параксиальных лучей», то дифференциальные уравнения принимают сравнительно простой вид. Методы параксиальной оптики нашли широкое применение в электронике для исследования сложных электростатических и магнитных линз и с успехом применялись в работах Стеррока и Керстейна ^{158, 159} при изучении эффектов пространственного заряда в криволинейных пучках. В работе Уотерса ³⁸ метод параксиальной оптики применялся для исследования периодической фокусировки пучков.

Рассмотрим кратко сущность этого метода. Пусть вдоль некоторой траектории S заряженной частицы известно распределение потенциала. В параксиальной области вблизи кривой S можно считать все траектории заряженных частиц параллельными S . Выберем ортогональную криволинейную систему координат с осью x вдоль S и осью y в направлении нормали к траектории. В этой системе координат функцию действия представим в виде ряда

$$W = \sum_{k=0} y^k w_k(x)$$

и подставим W в уравнения (14) и (15). Собирая коэффициенты при нулевых степенях переменной y , получим основное уравнение параксиального луча

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2w_2 z}{w_0}, \quad (33)$$

где $z = RQ_0 w_0'$, а R — расстояние от заданной точки на S до оси системы. Коэффициенты при высших степенях y дадут уравнения, описывающие поправки к параксиальным траекториям.

Если задать границы пучка уравнениями $y = \pm y_1(x)$, то с учетом $\frac{dy_1}{dx} = \frac{2\omega_2 y_1}{\omega_1}$ получим важное соотношение для пучка $y_1 z = \text{const.}$ Поскольку сходимость пучка определяется отношением $y_1(0)/y_1(x) = z(x)/z(0)$, то она может быть найдена с помощью решения одного «параксиального» уравнения (33).

В работе ¹⁵⁹ проведено сравнение результатов точного и параксиального расчетов траекторий трубчатых пучков заряженных частиц в системах с кольцевым катодом. Результаты такого сравнения приведены на рис. 16, причем сплошными линиями обозначены траектории частиц, най-

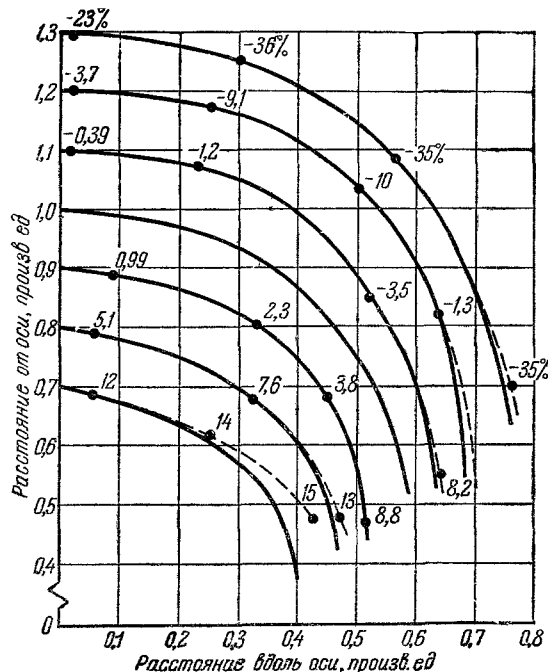


Рис. 16. Форма траекторий заряженных частиц в трубчатом цилиндрическом пучке, полученных по методу параксиальной оптики (пунктир) и точным расчетом (сплошные кривые).

Цифры вдоль траекторий отвечают процентной величине ошибки в определении потенциала. Цифрами вдоль траекторий (в %) обозначены относительные ошибки к значению потенциала на соответствующей траектории.

мушения не только известных решений дифференциальных уравнений, но также и возмущение метрики пространства. Этим способом он получил решение уравнений пространственного заряда в системе с тороидальным катодом, используя соответствующее решение для круглого цилиндрического пучка.

Из других приближенных методов следует отметить метод эквивалентного диода ^{86, 161}, основанный на предположении о том, что формы эквипотенциальных поверхностей в системах с цилиндрическим или сферическим катодом одинаковы как при наличии пространственного заряда, так и при его отсутствии, а различаются только величиной потенциала каждой поверхности в обоих случаях. В этом методе анод сложной конфигурации заменяется фиктивным электродом такой геометрии, чтобы он образовал вместе с катодом диод с прямолинейными траекториями движе-

денные при точном решении ^{83, 84} дифференциальных уравнений, а пунктиром — параксиальные траектории. Таким образом, при расчетах фокусирующих систем нет необходимости в аналитическом задании кривой S и распределения потенциала на ней — достаточно численное задание этих данных вдоль кривой, за исключением небольшой области у катода.

Сравнительно недавно Стюарт и Мельцер ¹⁶⁰ предложили использовать методы теории возмущений для исследования стационарных интенсивных пучков заряженных частиц. Если считать, что параметры пучка мало отличаются от значений, которые легко могут быть найдены аналитическим путем, то поправки к этим значениям могут быть найдены решением обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения уравнений пространственного заряда Кирстейн ⁸⁰ применил более общий метод, включающий воз-

ния частиц, а размеры анода подбираются так, чтобы эквивалентный диод обладал той же емкостью, что и реальный. При определении емкости всей системы используются обычные методы конформного отображения. В работах Иви¹⁶² табулированы 27 случаев расчета сложных конфигураций электродов с цилиндрическим и сферическим внешним и внутренним катодами по этому методу.

Таким же образом приближенно рассчитывается^{103, 104} влияние большого отверстия в ускоряющем электроде фокусирующей системы. Сначала рассматривается эквивалентная система электродов, не имеющая анодного отверстия, причем емкость такой системы должна быть равна емкости соответствующей реальной системы электродов. После того как эквивалентная система электродов найдена, определяется ее первеанс и затем, с помощью простых соотношений, первеанс реальной системы электродов. Наиболее полная сводка примеров расчета эффектов анодных отверстий по данному методу можно найти в работе¹⁰⁵.

§ 10. ВЛИЯНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭФФЕКТОВ И НАЧАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ

Релятивистские эффекты проявляются в увеличении массы заряженных частиц с ростом их скорости и тем самым в снижении тока пучка, а также в увеличении магнитного взаимодействия отдельных частиц в пучке. Как показано в работах¹⁶³⁻¹⁶⁶, распределение потенциала при релятивистских скоростях частиц пучка в системах с плоской, цилиндрической и сферической симметрией значительно отличается от известных лэнгмюровских решений. С увеличением ускоряющего напряжения увеличивается¹⁶³⁻¹⁷⁰ магнитное поле, создаваемое током пучка, которое само оказывает фокусирующее действие на пучок. Это сказывается в том, что через пучок может быть проведен ток в $(1 + (\eta\phi/2c^2))^{3/2}$ раз больше той величины, которая была получена без учета релятивистских эффектов. Так, при напряжении 50 кВ это увеличение электронного тока составляет 1,07, а при напряжении 500 кВ — достигает 1,82. Релятивистские эффекты проявляются в увеличении фокусных расстояний электростатических и магнитных линз.

Вообще, нужно отметить, что с приближением скорости заряженных частиц к скорости света их взаимодействие друг с другом (т. е. эффекты пространственного заряда) уменьшается до нуля. Однако это взаимодействие не может изменить знак¹⁷¹, а пучок не может стать самофокусирующимся. Очевидно, что изменение распределения потенциала на границе пучка и увеличение магнитного взаимодействия частиц приведет к изменению найденных ранее форм электродов Пирса.

В случае магнитной фокусировки интенсивных пучков релятивистские эффекты приводят к уменьшению величины величины бриллюэновского поля H_B в $(1 + (\eta\phi_a/2c^2))^{-1/4}$ раз¹²⁰.

Влияние начальных скоростей частиц на параметры интенсивных пучков связано главным образом с тем, что заряженные частицы покидают катод в направлениях, не перпендикулярных к его поверхности. Это проявляется в неоднородном распределении скоростей частиц по сечению пучка^{60, 61, 172-174}. В потоке бриллюэновского типа, например, влияние тепловых скоростей частиц сказывается в том, что часть тока пучка выходит за пределы расчетного радиуса. Пирс и Уокер^{5, 57} нашли зависимость доли полного заряда пучка, находящегося за пределами радиуса r , от величины отношения r/r_B и параметра $\mu = 1,76 \cdot 10^{-8} (r_B/r_k)^2 \times (I/TV\phi)$, где r_B — бриллюэновский радиус, r_k — радиус катода,

T — температура катода ($^{\circ}\text{K}$), I — полный ток пучка в амперах, ϕ — потенциал анода в вольтах. Эта зависимость показана на рис. 17.

Влияние начальных скоростей частиц сказывается на качестве фокусирующих систем. Помимо искажений изображения, тепловые скорости ограничивают величину тока, который может быть перенесен пучком, что увеличивает размеры пучка. Решение уравнений пространственного заряда с заданным распределением скоростей частиц на катоде довольно сложно и приводит к громоздким результатам, из которых следует отметить решения Ван-дер-Циля¹⁷⁵ и Лэвгмюра¹⁷⁶ для плоских электродов и решения этой задачи в системах с цилиндрической и сферической симметрией^{176–180}, а также исследование интенсивных пучков с неоднородным

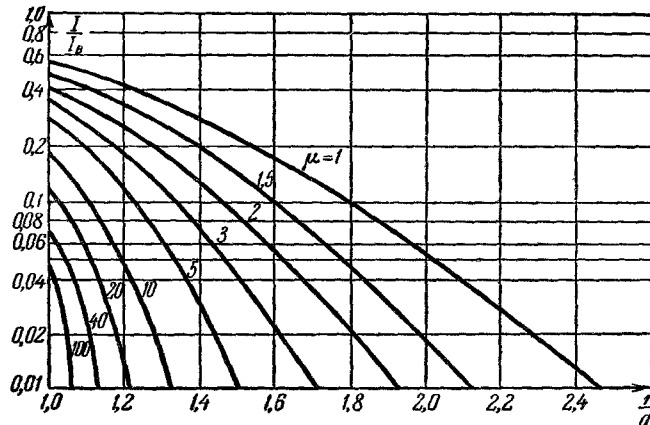


Рис. 17. Влияние начальных скоростей частиц на фокусировку цилиндрических пучков в магнитном поле.

распределением скоростей частиц методом матрицы плотности состояний¹⁸¹. Интересны исследования различных видов статистического распределения начальных скоростей частиц в интенсивном пучке, проведенные Мельцером⁶¹.

На практике учет начальных скоростей обычно выполняется по методу Пирса⁵: сначала находится условие фокусировки пучка в отсутствие пространственного заряда, но с учетом начальных скоростей частиц, а затем оно сравнивается с результатами, полученными в пренебрежении начальными скоростями частиц, но с учетом эффектов пространственного заряда. При высоких анодных напряжениях минимальные размеры пучков и абберрации фокусирующих систем определяются главным образом действием пространственного заряда, при низких напряжениях — тепловыми скоростями частиц^{5, 99}.

§ 11. ПРИМЕНЕНИЕ СЧЕТНО-РЕШАЮЩИХ СИСТЕМ И МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ

Быстрое развитие радиолокационной техники во время второй мировой войны во многом связано с использованием методов самосогласованного поля в задачах пространственного заряда. Метод самосогласованного поля, нашедший широкое применение в квантовой физике¹³ и физике твердого тела¹⁸², заключается в следующем. Из физических соображений задается начальное распределение потенциала, по которому численно рассчитываются траектории заряженных частиц и распределение плотности заряда в этом поле. По найденным значениям плотности заряда находится

решение уравнения Пуассона при нужных граничных условиях. С найденным решением уравнения Пуассона повторяется та же процедура до тех пор, пока изменения в функции распределения в двух последовательных циклах не будут соответствовать заданной степени точности. Оказалось¹⁸³, что этот метод последовательных приближений сходится очень медленно. Применение метода во многом ограничено скоростью счета и величиной «памяти» современных электронно-счетных машин.

Значительно более сходящимся оказывается метод «электрических аналогий»^{76, 184-189}. В этом случае реальная система электродов заменяется набором сопротивлений, электрически связанных между собой. Падение напряжения на сопротивлениях подбирается так, чтобы они соответствовали потенциалам, под которыми находятся электроды системы. Потенциал в произвольной точке образованной электрической цепи будет соответствовать падению напряжения в межэлектродном промежутке и может быть легко измерен. Пространственный заряд в такой системе моделируется подводом в цепь электрического тока, причем точка подвода и величина тока находятся методом последовательных приближений в соответствии с граничными условиями задачи.

Из других методов моделирования наиболее распространенными оказались методы электролитической ванны: 1) метод профилированного дна¹⁹⁰⁻¹⁹², 2) метод тоководящих элементов^{100 194-196} и 3) метод трехмерного электролита¹⁹⁷. В первом методе дно ванны делается из резины, что позволяет легко менять глубину электролита $h(x, y)$ в ванне. Так как проводимость σ однородного электролита пропорциональна глубине электролита, то в стационарном случае из закона Ома следует, что $\operatorname{div}(\sigma \nabla \varphi) = 0$ и, следовательно,

$$\Delta \varphi + (\nabla \varphi) \nabla \ln h = 0. \quad (34)$$

Обозначив через $\frac{d}{ds}$ производную вдоль силовой линии электрического поля и вводя абсолютное значение напряженности поля $|\nabla \varphi|$, правую часть выражения (34) можно записать в виде

$$\Delta \varphi = \frac{d \ln h}{ds} |\nabla \varphi|.$$

Очевидно, что для решения уравнения Пуассона методом электролитической ванны нужно, помимо создания в ванне соответствующих граничных условий, придать ей одну такую форму, чтобы было справедливо выражение

$$\frac{d \ln h}{ds} |\nabla \varphi| = -\frac{q}{\varepsilon}. \quad (35)$$

Для практических расчетов удобнее записать уравнение (35) в интегральной форме

$$\ln h = - \int_{s_0}^s \frac{q ds}{\varepsilon |\nabla \varphi|}. \quad (36)$$

Имея достаточно «плотный» пучок снятых в ванне силовых линий, покрывающих изучаемую область, и вычисляя интеграл по каждой из них, можно найти распределение $h(x, y)$ по всей интересующей нас области дна ванны. Очевидно, что уравнение $\Delta \varphi = -q/\varepsilon$ может быть решено описываемым методом только с использованием последовательных приближений, так как для вычисления распределения $h(x, y)$ по дну ванны нужно знать $|\nabla \varphi|$ и распределение силовых линий, за которые могут быть приняты соответствующие величины, снятые в ванне в каждом предыдущем приближении. Этот метод требует очень трудоемких расчетов и оказывается медленно сходящимся.

В методе токовводящих элементов пространственный заряд моделируется проволочными прутками, соединенными с внешними электрическими элементами. Путем многократного отражения в наклонном дне ванны и на поверхности электролита создается модель дискретного облака пространственного заряда. Чтобы избежать разрыва потенциала на токовводящих элементах, они выполняются в виде проволочек, едва выходящих из дна ванны, либо просто в виде отверстий в дне ванны, заполненных электролитом¹⁹⁸, причем форма катода моделируется пластинчатым электродом, плоскость которого составляет угол $3\pi/8$ с поверхностью электролита.

В методе трехмерного электролита моделирование ведется с помощью электролита с неизотропной проводимостью, что позволяет значительно ускорить сходимость метода последовательных приближений.

Следует также отметить метод резиновой мембраны^{77, 199-202} и метод токопроводящей бумаги^{203, 204}. В первом — пространственный заряд моделируется распределенной нагрузкой, пропорциональной в каждой точке мембраны плотности объемного заряда, а сосредоточенная нагрузка вдоль определенных линий мембраны моделирует потенциалы внешних электродов. С помощью тяжелых стальных шариков и стробоскопического освещения определяются траектории и скорости частиц в нулевом приближении, по которым вычисляется новое распределение объемного заряда, и добиваются требуемой точности последовательными приближениями. Для решения трехмерных задач с пространственным зарядом по этому методу предлагается²⁰¹ частично откачивать воздух под мембраной.

Если в бумажную массу добавить небольшое количество сажи и графита, то можно получить целый набор разнообразных значений удельных сопротивлений слоя бумаги от десятков *ом* до десятков *Мом* на каждый квадрат. Моделирование электрического поля с областями различной проводимости может производиться с помощью такой бумаги либо путем перфорации, либо путем склеивания участков, вырезанных из различных сортов бумаги, в соответствии с заданным отношением проводимостей. Для изменения сопротивления применяется также подкрашивание и ретуширование бумаги. Электроды для проводящей бумаги изготавливаются из тонкой фольги, или наносятся на бумагу с помощью серебряной краски — суспензии, которая имеет высокую проводимость. Подобные суспензии применяются для изготовления печатных радиосхем и представляют собой смесь металлического серебра, бакелитового лака и спирта. В качестве зонда используют твердый графитовый карандаш или острую металлическую иглу. Сам процесс моделирования пространственного заряда осуществляется описанным выше способом токовводящих элементов, представляющих собой набор игл, расположенных на бумаге соответствующим образом. Возможно применение моделирующей системы с подводом токов переменной величины к различным точкам бумаги²⁰³, а также с фиксированным значением тока, но с переменным числом моделирующих элементов²¹⁴. На практике обычно пользуются изотропной проводящей бумагой. Однако по мере усовершенствования технологии изготовления бумаги находят применение и анизотропные проводящие бумаги. К недостаткам электропроводной бумаги относится ее довольно большой отрицательный температурный коэффициент сопротивления.

В системах моделирования объемного заряда пучков большое применение находят графические методы расчета траекторий заряженных частиц с учетом их взаимодействия друг с другом^{81, 152, 205-209}.

В работе²¹⁰ описана оригинальная электролитическая ванна с устройством для автоматического построения траекторий заряженных частиц в электрических и магнитных полях с осевой симметрией. Точность построения траекторий достигала 1 %.

§ 12. СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ ФОКУСИРОВКИ

Сравнивая магнитные и электростатические системы фокусировки, следует отметить, что по принципу действия электростатические системы имеют очевидное преимущество перед магнитными, заключающееся в том, что вес, габариты и расход мощности на фокусировку в таких системах значительно меньше. Однако разработанные в настоящее время электростатические методы еще недостаточно совершенны и не могут вытеснить магнитную фокусировку в наиболее важных приборах на СВЧ. Так, для практически допустимой фокусировки интенсивного пучка с плотностью тока в $1000 \div 10\,000$ а/см² известными в настоящее время методами потребовались бы магнитные поля в десятки тысяч гауссов, либо электростатические поля в миллионы в/см, которые пока еще не могут быть созданы. Поэтому разработка новых методов фокусировки, особенно электростатических, является одной из актуальнейших задач электроники.

Что касается сравнения методов фокусировки с помощью однородных и периодических полей, то в последних требуется строгое соблюдение геометрических размеров и равенства амплитуд полей в каждом периоде системы. Эта задача выполнима труднее, чем создание однородного по длине пучка фокусирующего поля, хотя в последнем случае требуется гораздо больший вес установки. Поэтому в лабораторных моделях, а иногда и в практических конструкциях, предпочитают пользоваться фокусировкой с помощью однородных полей.

Длинный стабильный пучок заряженных частиц можно было бы создать, скомпенсировав все радиальные силы, действующие на частицы пучка. Однако в реальных условиях частицы пучка испытывают различные возмущения при входе в фокусирующую систему и при прохождении через нее. Поэтому к фокусировке предъявляется также требование получить устойчивый к случайным возмущениям интенсивный поток. Другими словами, закон изменения фокусирующих и дефокусирующих сил в системе должен быть таков, чтобы при случайном смещении заряженной частицы от равновесной траектории возникла необходимая возвращающая сила. Чем быстрее будет нарастать эта сила с изменением радиуса пучка, тем, при прочих равных условиях, фокусировка будет жестче. На рис. 18 дан график изменения возвращающей силы для различных методов фокусировки (для удобства в точке равновесия дефокусирующая сила всюду предполагалась равной одному и тому же значению). Степень жесткости системы фокусировки характеризуется не только быстротой нарастания, но и величиной возвращающей силы при случайных смещениях заряженных частиц

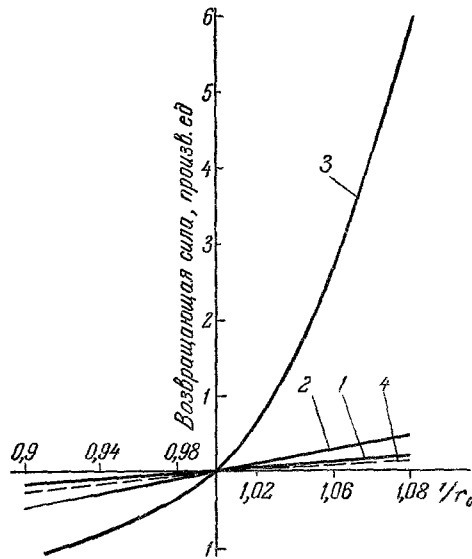


Рис. 18. Зависимость возвращающей силы от смещения заряженной частицы от равновесной траектории в системах с различной фокусировкой.

1 — бриллюэновский поток; 2 — интенсивный поток в продольном магнитном поле; 3 — система с периодической электростатической фокусировкой и вращающимся трубчатым пучком; 4 — система с центробежной электростатической фокусировкой.

от равновесного радиуса. Как видно из графика, быстрота нарастания возвращающей силы в бриллюэновском потоке и в методе центробежной фокусировки почти одинакова; она максимальна у систем с периодической электростатической фокусировкой и в магнитно-ограниченных пучках. Все же величина этой возвращающей силы в случае периодической фокусировки очень мала. Поэтому, хотя в этом случае на пучок, покидающий равновесную траекторию, и начинают быстро действовать возвращающие силы, величина этих сил оказывается равной по порядку величины силам пространственного заряда. В результате периодическая электростатическая фокусировка обладает очень малой жесткостью. Для увеличения жесткости такой системы, как мы видели в § 8, требуется, чтобы распределение плотности заряда по сечению пучка было неоднородным. Жесткость фокусирующих систем может быть увеличена, если ввести в систему дополнительные дефокусирующие силы, на фоне которых действие пространственного заряда и его случайных флуктуаций сглаживается. Поэтому жесткость центробежных методов фокусировки всегда больше, и такие системы более надежны и гибки в управлении.

Рассмотренные принципы формирования и фокусировки интенсивных пучков, конечно, не охватывают всего многообразия тех процессов, которые происходят в интенсивных потоках заряженных частиц. Мы рассмотрели только наиболее важные методы фокусировок, которые с успехом применяются в современной электронике; они, может быть, помогут разработке новых, еще более совершенных фокусирующих систем.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. H. J. Lemmens a. o., Philips Techn. Rev. 11, 341 (1950).
2. R. Levi, J. Appl. Phys. 24, 233 (1953); 26, 639 (1955).
3. Э. Я. Зандберг, Н. И. Ионов, УФН 67, 581 (1959).
4. J. T. Wallmark, J. Appl. Phys. 24, 590 (1953).
5. Дж. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, М., изд. «Сов. радио», 1956.
6. H. F. Ivey, Advances in Electronics and Electron Phys. 6, 137 (1954); см. перевод: ПСФ 6,3(1956).
7. М. Д. Габович, УФН 56, 215 (1955).
8. В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, М., Гостехиздат, 1953.
9. Н. С. Зинченко, Курс лекций по электронной оптике, изд. Харьк. гос. ун-та, 1958.
10. З. С. Чернов, Радиотехника и электроника 3, 1227 (1958).
11. H. Rothe, W. Kleen, Grundlagen und Kennlinien der Elektronenroehren, Leipzig, 1943.
12. J. E. Picquendar et al., Les effets de la charge dans les canons à electrons, Compagnie Française de Thomson, Houston, Paris, 1956.
13. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Квантовая механика, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
14. Я. Френкель, С. Соболевский, Phys. Z. USSR 5, 464 (1934).
15. P. F. Little, A. Engel, Proc. Phys. Soc. B65, 459 (1952).
16. E. G. Linder, K. G. Hernquist, J. Appl. Phys. 21, 1088 (1950).
17. T. Mihran, Trans. IRE ED3, 117 (1956).
18. M. Hines et al., J. Appl. Phys. 26, 1157 (1955).
19. J. T. Senise, J. Appl. Phys. 29, 839 (1958).
20. N. C. Barford, J. Electr. Control 3, 63 (1957).
21. В. И. Давыдов, С. И. Брагинский, сборнике, посвященном 70-летию акад. А. Ф. Иоффе, М., изд. АН СССР, 1950, стр. 72.
22. М. М. Бредов, там же, стр. 155.
23. J. D. Lawson, J. Electr. Control 3, 587 (1957); 5, 146 (1958).
24. W. S. Bartlett, Phys. Rev. 37, 379, 979 (1931).
25. N. H. Frank, Phys. Rev. 39, 226 (1932).
26. B. Meltzer, J. Electr. Control 4, 350 (1958).
27. B. Meltzer, J. Electr. Control 5, 348 (1958); 6, 550 (1959).
28. J. M. Winwood, J. Electr. Control 5, 161 (1958); 6, 258 (1959).
29. B. Meltzer, Nature 181, 1332 (1958).
30. A. R. Lucas, J. Electr. Control 5, 245 (1958).

31. M. Chodorow a. o., Proc. IRE 41, 1584 (1953).
32. T. W. Johnston, J. Appl. Phys. 30, 1456 (1959).
33. H. F. Webster, J. Appl. Phys. 28, 1388 (1957).
34. C. C. Cutler, M. E. Hines, Proc. IRE 43, 307 (1955).
35. T. W. Johnston, Paper given at IEE Microwave Convention, N 2694, London, 1958.
36. T. W. Johnston, J. Electr. Control 6, 75 (1959).
37. G. Herrmann, J. Appl. Phys. 29, 127 (1958).
38. W. E. Waters, J. Appl. Phys. 29, 100 (1958).
39. D. O. North a. o., RCA Rev. 3, 463 (1940).
40. P. T. Kirstein, J. Electr. Control 4, 425 (1958).
41. К. Я. Лиждвой, Радиотехника и электроника 4, 120 (1959).
42. J. Dain, Proc. Phys. Soc. B67, 449 (1954).
43. R. Warnescke, Proc. IRE 43, 413 (1955).
44. D. H. Davies, K. F. Sander, J. Electr. Control 5, 114 (1959).
45. C. C. Cutler, Proc. IRE 44, 61 (1956).
46. J. Hadamard, Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, N. Y., Dover Publ. Inc., 1952.
47. G. R. Brewer, J. Appl. Phys. 28, 634 (1957).
48. R. Hechtel, Telefunken Ztg. 28, 222 (1955).
49. F. Berz, Philos. Mag. 41, 209 (1950).
50. P. T. Kirstein, Proc. IRE 46, 1716 (1958).
51. P. T. Kirstein, J. Electr. Control 5, 163 (1958).
52. T. Carleman, Les fonctions quasi-analytiques, Paris, 1926.
53. М. М. Лаврентьев, О задаче Коши для эллиптических уравнений, Диссертация, Матем. ин-т им. Стеклова, М., 1957.
54. М. М. Лаврентьев, ДАН СССР 106, 389 (1956).
55. Е. М. Ландис, ДАН СССР 107, 640 (1956).
56. D. E. Radley, J. Electr. Control 4, 125 (1958).
57. J. R. Pierce, L. Walker, J. Appl. Phys. 24, 1328 (1953).
58. D. Gabor, Proc. IRE 33, 792 (1945).
59. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидродинамика, т. 1, М., Гостехиздат, 1948.
60. J. R. Pierce, J. Appl. Phys. 10, 715 (1939).
61. B. Meltzer, J. Electr. Control 3, 355 (1957).
62. В. Глазер, Основы электронной оптики, М., Гостехиздат, 1957.
63. A. W. Beck, Space-charge waves, Pergamon press, Inc., N.Y., 1958.
64. D. H. Trevena, J. Electr. Control 6, 50 (1959).
65. B. Metzger, Proc. Phys. Soc. B62, 431, 813 (1949).
66. K. Spangenberg, J. Franklin Inst. 232, 365 (1941).
67. G. B. Walker, Proc. Phys. Soc. B63, 1017 (1950).
68. Н. И. Мухомелишвили, Курс аналитической геометрии, М., Гостехиздат, 1947.
69. A. R. Lucas, B. Meltzer, J. Electr. Control 4, 160, 454 (1958).
70. P. T. Kirstein, J. Electr. Control 4, 457 (1958).
71. W. W. Mueller, J. Electr. Control 6, 499 (1959); 8, 111 (1960).
72. I. Langmuir, K. Blodgett, Phys. Rev. 22, 347 (1923).
73. K. Blodgett, I. Langmuir, Phys. Rev. 24, 49 (1924).
74. W. E. Waters, J. Appl. Phys. 30, 368 (1959).
75. T. W. Johnston, J. Appl. Phys. 30, 1456 (1959).
76. M. E. Haine, J. Vine, Proc. Instn. Electr. Engng. 106b, 517 (1959).
77. К. Г. Уткин, Приборы и техн. экпер. 5, 111 (1959).
78. B. Meltzer, J. Electr. Control 2, 118 (1956).
79. R. J. Lomax, J. Electr. Control 3, 367 (1958); 7, 482 (1959).
80. P. T. Kirstein, J. Electr. Control 5, 33 (1958).
81. Н. И. Штепа, ЖТФ 26, 2281 (1956).
82. H. F. Ivey, Phys. Rev. 23, 240 (1952); 24, 227 (1953).
83. P. T. Kirstein, G. S. Kino, J. Appl. Phys. 29, 1758 (1958).
84. P. T. Kirstein, Microwave Lab., Stanford Univ., N 440 R, 1958.
85. R. Lomax, J. Electr. Control 7, 482 (1959).
86. M. Matricon, S. Trouve, Onde Electr. 30, 510 (1950).
87. B. Meltzer, Brit. J. Appl. Phys. 10, 391 (1959).
88. J. R. Pierce, J. Appl. Phys. 11, 548 (1940).
89. В. П. Игнатенко, Получение сходящихся ленточных пучков заряженных частиц, ЖТФ 31, 287 (1961).
90. P. N. Daykin, Brit. J. Appl. Phys. 6, 248 (1955).
91. W. E. Danielson a. o., Bell Syst. Techn. J. 35, 375 (1956).
92. R. J. Lomax, J. Electr. Control 6, 39 (1959).
93. B. Meltzer, J. Electr. Control 7, 491 (1959).

94. Ю. Я. Стависский и др., ЖТФ 29, 962 (1959).
95. C. J. Davidson, C. J. Callbick, Phys. Rev. 38, 585 (1931); 42, 580 (1932).
96. A. L. Samuel, Proc. IRE 33, 233 (1945).
97. L. A. Harris, Proc. IRE 46, 615, 1655 (1958).
98. C. W. Glewe, Thesis, Univ. Minnesota, Minneapolis, 1955.
99. В. П. Игнатенко, ЖТФ 30, 1353 (1960).
100. G. R. Brewer, J. Appl. Phys. 28, 7 (1957).
101. K. Poeschl, W. Veith, Arch. Electr. Uebertrag. 12, 45 (1958).
102. P. L. Copeland, Amer. J. Phys. 10, 236 (1942).
103. M. Mueller, Arch. Electr. Uebertrag. 9, 20 (1955).
104. M. Mueller, J. Brit. IRE 16, 65 (1956).
105. C. C. Johnson, Trans. IRE ED6, 409 (1959).
106. C. Suesskind, Advances in Electronics and Electron. Phys. 8, 363 (1956).
107. O. Neil, J. J. Ebers, Proc. IRE 38, 645 (1950).
108. E. D. Reed, Bell Syst. Techn. J. 34, 563 (1955).
109. J. B. Johnson, J. Opt. Soc. Amer. 6, 701 (1922).
110. C. C. Cutler, J. A. Saloom, Proc. IRE 43, 299 (1955).
111. Ю. П. Гудзенко, Изв. Киевск. политехн. ин-та 21, 49 (1956).
112. И. В. Алямовский, Радиотехника и электроника 4, 841 (1959).
113. M. M. Mueller, Telef. Ztg. 26, 95 (1953).
114. J. E. Picquendar, Ann. telecom. 7, 173 (1953).
115. J. R. Pierce, Bell Syst. Techn. J. 30, 825 (1951).
116. L. Brillouin, Phys. Rev. 67, 260 (1945).
117. J. Molhar, C. Moster, Bell Teleph. Lab. Repts. 1, 2940, 2960 (1951).
118. В. Т. Овчаров, Радиотехника и электроника 2, 696 (1957).
119. A. L. Samuel, Proc. IRE 37, 1252 (1949).
120. C. C. Wang, Proc. IRE 38, 135 (1950).
121. L. Harris, Proc. IRE 40, 700 (1952).
122. M. E. Hines, Proc. IRE 40, 61 (1952).
123. A. V. Haeff, Proc. IRE 27, 586 (1939).
124. L. P. Smith, P. L. Hartman, J. Appl. Phys. 11, 220 (1940).
125. N. Wax, J. Appl. Phys. 20, 242 (1949).
126. A. Ashkin, J. Appl. Phys. 29, 1594 (1958).
127. K. J. Harker, J. Appl. Phys. 28, 645 (1957).
128. З. С. Чернов, Радиотехника и электроника 1, 1428 (1956).
129. З. С. Чернов, Международный конгресс по лампам СВЧ (Париж), М., 1956.
130. Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, АН СССР, М. — Л., 1948, гл. 8.
131. Г. А. Бернашевский, Т. А. Новикова, Радиотехника и электроника 3, 1218 (1958); 4, 1499 (1959).
132. L. A. Harris, Proc. IRE 40, 700 (1952).
133. C. B. Crumly, Trans. IRE ED3, 62 (1956).
134. A. F. Harvey, Proc. Instn. Electr. Engng. 343, 30 (1951).
135. W. Hahn, G. Metcalf, Proc. IRE 27, 106 (1939).
136. R. Adler a. o., Proc. IRE 43, 339 (1955); 44, 82 (1956).
137. E. Courant a. o., Phys. Rev. 88, 1190 (1952).
138. P. K. Tien, J. Appl. Phys. 25, 1281 (1954).
139. A. Glogston, H. Heffner, J. Appl. Phys. 25, 436 (1954).
140. K. Chang, J. Appl. Phys. 27, 1527 (1956).
141. W. Siekanowicz, F. Vaccaro, Proc. IRE 47, 451 (1959).
142. C. Johnson, Trans. IEE ED5, 233 (1958).
143. K. Chang, Proc. IRE 45, 1522 (1957).
144. K. Chang, Proc. IRE 45, 66 (1957).
145. J. S. Cook, R. Kompfner, W. Yocom, Proc. IRE 45, 1517 (1957).
146. R. Kompfner, 2 Ann. Tech. Meeting, Washington, 1956.
147. J. Cook, W. Louisel, W. Yocom, J. Appl. Phys. 29, 583 (1958).
148. H. Hogg, Proc. Instn. Electr. Engng. B105, 1016 (1958).
149. J. Mendel, C. Quate, W. Yocom, Proc. IRE 42, 800 (1954).
150. A. V. Haeff, L. S. Nergaard, Proc. IRE 28, 126 (1940).
151. O. Cahen, Ann. telecom. 11, 142 (1956).
152. G. R. Brewer, J. Appl. Phys. 25, 243 (1954).
153. J. Sterrett, H. Heffner, Trans. IRE ED5, 35 (1958).
154. P. Cioffi, Bell Lab. Rept. 36, 172 (1958).
155. J. Mendel, Proc. IRE 43, 327 (1955).
156. W. Siekanowicz, F. Sterzer, Proc. IRE 44, 55 (1956).
157. H. Alfvén, Onde Electr. 37, 168 (1957).
158. P. A. Sturrock, Static and dynamic electron optics, Cambridge, Univ. Press, N. Y., 1955.

159. P. T. Kirstein, *J. Appl. Phys.* **30**, 967 (1959).
160. G. A. Stuart, B. Meltzer, *J. Electr. Control* **3**, 51 (1957).
161. W. G. Dow, *Fundamentals of engineering elements*, N. Y., J. Wiley and Sons, 1952.
162. H. F. Ivey, *J. Appl. Phys.* **24**, 1466 (1953); **25**, 543 (1954).
163. H. F. Ivey, *J. Appl. Phys.* **23**, 208 (1952).
164. S. Visvanathan, *Canad. J. Phys.* **29**, 159 (1951).
165. E. W. Acton, *J. Electr. Control* **3**, 203 (1957).
166. L. Gold, *J. Electr. Control* **3**, 564 (1957).
167. P. A. Sturrock, *J. Electr. Control* **7**, 162 (1959).
168. W. W. Hartman, *Proc. IRE* **37**, 1038 (1949).
169. S. V. Yadavalli, *J. Electr. Control* **3**, 65 (1957).
170. R. J. Lomax, *J. Electr. Control* **5**, 563 (1958).
171. R. E. Burgess, *Wireless Engng.* **23**, 178 (1946).
172. К. Р. Шпангенбергер, Вакуумные лампы, М., «Сов. радио», 1953.
173. J. R. Pierce, *Bell Syst. Techn. J.* **24**, 305 (1945).
174. Электронные лампы. Под. ред. Оболенского, т. 2, М., «Сов. радио», 1954.
175. A. Van der Ziel, *Philips Res. Rep.* **1**, 91 (1946).
176. I. Langmuir, *Phys. Rev.* **21**, 419 (1923).
177. I. Langmuir, K. Compton, *Rev. Mod. Phys.* **3**, 273 (1931).
178. A. Gehrts, *Phys. Rev.* **40**, 434 (1932).
179. E. L. Wheatcraft, *J. IEE* **86**, 473 (1940); **87**, 691 (1940).
180. P. A. Lindsay, *J. Electr. Control* **6**, 415 (1959).
181. A. E. Siegmann, *J. Appl. Phys.* **28**, 1132 (1957).
182. F. Seitz, *The modern theory of solids*, McGraw-Hill Book Co., N. Y., 1940.
183. B. Melter, I. Brown, *Nature* **181**, 1384 (1957).
184. G. Liebmann, *Nature* **164**, 149 (1949).
185. G. Liebmann, *Proc. Inst. Electr. Engng.* **99**, 260 (1952).
186. R. Hechtel, K. John, *Proc. IRE* **B105**, 917, 941 (1958).
187. T. K. Hogan, *J. Inst. Engng. Australia*, **15**, 89 (1943).
188. S. C. Redshaw, *Proc. Inst. Mech. Engng.* **159**, 55 (1948).
189. D. C. De Pack, *Rev. Sci. Instr.* **18**, 798 (1947).
190. G. Goudet, R. Musson-Genon, *J. phys. et radium* **6**, 175 (1945).
191. R. Musson-Genon, *Onde Electr.* **28**, 236 (1948).
192. R. Musson-Genon, *Ann. telecom.* **2**, № 8, 9, 10 (1947).
193. T. Kuwabara, *Ohio Univ. Research Foundation, Techn. Note* **3**, AF-18-980 (1955).
194. В. С. Лукошков, *Электроника*, № 7, 8 (1958).
195. D. L. Hollway, *Australien J. Appl. Phys.* **8**, 74 (1955).
196. T. Van Duser, G. R. Brewer, *J. Appl. Phys.* **30**, 291 (1959).
197. В. М. Брейтман, Межвуз. конференция по применению физич. моделирования, М., Госэнергоиздат, 1957.
198. K. F. Sander, J. G. Jates, *J. Inst. Electr. Engng.* **100**, 167 (1953).
199. Б. В. Бобыкин и др., *ЖТФ* **22**, 736 (1952).
200. G. Almaa o., *Philips Techn. Rev.* **14**, 336 (1953).
201. B. J. Mayo, *Brit. J. Appl. Phys.* **6**, 141 (1955).
202. О. И. Семан, *Радиотехника и электроника* **3**, 845 (1958).
203. R. Fox, Paper presented at Amer. Rocket Soc. 14 ann. meeting, Washington, 1959.
204. И. М. Тетельбаум, Электрическое моделирование, М., Физматгиз, 1959.
205. W. Walchef, *Z. angew. Phys.* **3**, 409 (1951).
206. В. П. Тараненко, *Изв. Киевск. политехн. ин-та* **21**, 54 (1956).
207. А. М. Страшкевич, *Радиотехника и электроника* **3**, 969 (1958).
208. M. R. Barber, K. F. Sander, *J. Electr. Control* **7**, 465 (1959).
209. Н. И. Штепа, *Радиотехника и электроника* **4**, 695 (1959).
210. O. Cahen, *Onde Electr.* **37**, 1098 (1957).
211. K. Chang, *RCA Rev.* **16**, 423, 465 (1955).
212. K. Chang, *Proc. IRE* **43**, 62 (1955).
213. L. P. Smith, P. L. Hartman, *J. Appl. Phys.* **2**, 220 (1940).
214. W. J. Karplus, *Analog simulation solution of field problems*, McGraw-Hill Book Comp., Inc, N. Y., 1958.

