1961 г. Январь *Т. LXXIII, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

А. И. Алексеев

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы большое внимание уделяется квантовомеханической теории многих частиц. Серьезные успехи в этой области явились результатом удачного применения хорошо разработанных методов квантовой теории поля к исследованию систем, состоящих из большого числа взаимодействующих частиц. Поскольку в кратком обзоре невозможно охватить все разнообразные направления, развиваемые в настоящее время, мы в основном изложим (как самый перспективный) метод функций Грина [1], который в применении к задачам многих тел наиболее интенсивное развитие получил в работах советских авторов [2-11], а также в работах [12-13]. Преимущество методики функций Грина состоит не только в ясной постановке задач и существовании гибких методов их решения, но и в возможности обобщения результата на случай температур, отличных от абсолютного нуля. В связи с этим в последнее время появилось множество работ, посвященных исследованию важных задач статистической физики на основе методики функций Грина[14-35].

В настоящем обзоре дается более или менее подробное изложение указанной методики в применении к статистике. При этом за основу был взят получивший широкое признание метод Мацубары [14], существенно улучшенный в недавних работах советских авторов [15, 16-20].

В первом параграфе на основе методов квантовой теории поля излагается новая термодинамическая теория возмущений и в то же время освещаются основные пути применения математического аппарата квантовой теории поля для целей статистической физики. Изложение ведется достаточно подробно. Содержание этого параграфа убедительно показывает преимущество новой термодинамической теории возмущений. Если в старой термодинамической теории возмущений из-за математических усложнений не удавалось продвинуться дальше первых (одного-двух) приближений по взаимодействию между частицами, то в новой формулировке с использованием диаграммной техники построение ряда теории возмущений настолько наглядно, что дает возможность производить выборочное

суммирование бесконечного числа членов этого ряда. Такое выборочное суммирование приводит к физическим приближениям, выходящим за рамки самой теории возмущений.

Второй параграф посвящен вычислениям без использования теории возмущений, основанным на использовании термодинамических функций Грина. Здесь особое внимание уделяется методам работы с функциями Грина. Объем статьи не позволил с должной полнотой остановиться на приложениях к конкретным задачам. Однако необходимые приложения всегда можно найти в рекомендуемых ссылках на оригинальную литературу. Это же замечание относится и к третьему параграфу, посвященному временным температурным функциям Грина.

В четвертом параграфе рассмотрено применение изложенных принципов к некоторому кругу задач кинетики. В качестве иллюстрации рассматривается торможение частицы при прохождении через плазму. Однако излагаемый метод обладает настолько большой общностью, что без труда может быть распространен на другие подобные задачи, а именно: тормозное излучение и образование пар при прохождении частиц через плазму, излучение плазмы, торможение электронов в металле и т. д.

§ 1. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Ряд теории возмущений. Рассмотрим квазизамкнутую статистическую систему, которая может состоять, вообще говоря, из нескольких сортов фермионов и бозонов. Однако ради простоты записи будем считать, что система включает в себя только один сорт соответственно фермионов и бозонов, поскольку обобщение результатов на случай многокомпонентной системы не представляет затруднений. Частицы — фермионы и бозоны — рассматриваем как кванты соответственно фермионного и бозонного полей, так что гамильтониан статистической (например, электронно-фононной) системы в шредингеровском представлении (Мацубара [14]) имеет следующий вид:

$$H = H_0 + H_1, \tag{1,1а}$$

$$H_0 = \sum_{\mathbf{p},\, r} \varepsilon_{\mathbf{p}} a^+_{\mathbf{p}r} a_{\mathbf{p}r} + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} b^+_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}, \tag{1,1б}$$

$$H_1 = g \sum_{\mathbf{p},\, r,\, \mathbf{k}} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2V}\right)^{1/2} (a^+_{\mathbf{p}+\mathbf{k},r} a_{\mathbf{p}r} b_{\mathbf{k}} + a^+_{\mathbf{p}-\mathbf{k},r} a_{\mathbf{p}r} b^+_{\mathbf{k}}), \tag{1,1в}$$

где H_0 — гамильтониан невзаимодействующих электронного и фононного полей, H_1 — оператор взаимодействия этих полей, $a_{\mathbf{p}r}$ и $a^+_{\mathbf{p}r}$ — операторы соответственно поглощения и рождения электрона с импульсом $\mathbf{p}$, поляризацией r и энергией $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m$, $b_{\mathbf{k}}$ и $b^+_{\mathbf{k}}$ — аналогичные операторы для фонона с импульсом $\mathbf{k}$ и энергией $\omega_{\mathbf{k}} = \hbar\,|\mathbf{k}|\,s$, V — объем статистической системы, а постоянная связи g дается выражением

$$g = \left(\frac{VC^2}{N'Ms^2}\right)^{1/2},$$

в котором M и N' обозначают соответственно массу и полное число ионов решетки, C — обычная константа взаимодействия электрона и решетки, а s — скорость звука. Операторы рождения и поглощения частиц удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\begin{gathered}[a_{\mathbf{p}r}, a^+_{\mathbf{p}'r'}]_+ \equiv a_{\mathbf{p}r} a^+_{\mathbf{p}'r'} + a^+_{\mathbf{p}'r'} a_{\mathbf{p}r} = \delta_{rr'}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad [a_{\mathbf{p}r}, a_{\mathbf{p}'r'}]_+ = [a^+_{\mathbf{p}r}, a^+_{\mathbf{p}'r'}]_+ = 0, \\ [b_{\mathbf{k}}, b^+_{\mathbf{k}'}]_- = b_{\mathbf{k}} b^+_{\mathbf{k}'} - b^+_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}]_- = [b^+_{\mathbf{k}}, b^+_{\mathbf{k}'}]_- = 0.\end{gathered} \tag{1,2}$$

При помощи операторов свободного электронного $\psi(\mathbf{x})$ и фононного $\varphi(\mathbf{x})$ полей

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}) = V^{-1/2}\sum_{\mathbf{p},r} a_{\mathbf{p}r}u_\alpha^r e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar},\quad \psi_\alpha^+(\mathbf{x}) = V^{-1/2}\sum_{\mathbf{p},r} a_{\mathbf{p}r}^+ u_\alpha^{r+} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar}, \tag{1,3а}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}}\left(\frac{\omega_\mathbf{k}}{2V}\right)^{1/2}(b_\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}/\hbar} + b_\mathbf{k}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}/\hbar}), \tag{1,3б}$$

где u^r, $r = 1, 2$ — спиновые волновые функции электрона, соответствующие двум различным проекциям спина, оператор взаимодействия H_1 удобно записать в следующем виде:

$$H_1 = g\int \psi_\alpha^+(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\psi_\alpha(\mathbf{x})\,d^3x. \tag{1,4}$$

Все введенные выше операторы действуют на шредингеровскую волновую функцию Φ_{nN}, которая в случае идеальной замкнутости рассматриваемой системы удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Phi_{nN}}{\partial t} = H\Phi_{nN}, \tag{1,5}$$

где индекс n нумерует энергетические уровни системы, состоящей из фононов и N электронов. Из вида H_1 следует, что оператор полного числа электронов

$$N = \sum_{\mathbf{p},r} a_{\mathbf{p}r}^+ a_{\mathbf{p}r} \tag{1,6}$$

коммутирует с гамильтонианом H (оператор полного числа частиц N и его собственные значения будут в дальнейшем изображаться одним и тем же символом). Следовательно, наряду с полной энергией замкнутой системы сохраняется так же и число электронов, поэтому каждое состояние системы Φ_{nN} характеризуется не только энергетическим квантовым числом n, но и указанием числа электронов N. При этом энергетические уровни E_{nN} системы тоже различны при разных N. Если рассматриваемая система квазизамкнута, то как энергия, так и полное число электронов системы будут флуктуировать около своего среднего значения. Для описания поведения такой системы при термодинамическом равновесии используют распределение Гиббса с переменным числом частиц, согласно которому вероятность W_{nN} у системы содержать N электронов и находиться при этом в состоянии с энергией E_{nN} дается выражением (см., например, книгу Ландау и Лифшица [36])

$$W_{nN} = e^{(\Omega+\mu N-E_{nN})\beta}, \tag{1,7}$$

где $\beta = 1/kT$, Ω — термодинамический потенциал системы, а μ — химический потенциал электронов.

Для определения термодинамических характеристик системы достаточно вычислить статистическую сумму

$$Z = \sum_{nN} e^{(\mu N-E_{nN})\beta} = \sum_{nN}\Phi_{nN}^+ e^{(\mu N-H)\beta}\Phi_{nN} = \mathrm{Sp}\, e^{(\mu N-H)\beta}, \tag{1,8}$$

где операторы N и H, стоящие под знаком Sp, определены соответственно в (1,6) и (1,1а) — (1,1в). Например, термодинамический потенциал системы Ω имеет вид

$$\Omega = -\beta^{-1}\ln \mathrm{Sp}\, e^{(\mu N-H)\beta}. \tag{1,9}$$

Если F — некоторый оператор, относящийся ко всей системе, то статистическое среднее значение этого оператора по ансамблю взаимодействующих

частиц $[F]_{\text{ср}}$ равно

$$[F]_{\text{ср}} = \sum_{nN} W_{nN} \Phi^{+}_{nN} F \Phi_{nN} = \operatorname{Sp}\left(e^{(\mu N - H)\beta} F\right) / \operatorname{Sp} e^{(\mu N - H)\beta}. \tag{1,10}$$

Легко видеть, что матрица плотности

$$\varrho = e^{(\mu N - H)\beta}, \tag{1,11}$$

появляющаяся в выражениях (1,8)—(1,10), удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \beta} = (\mu N - H)\varrho. \tag{1,12}$$

Следуя работе Мацубары [14], представим матрицу плотности (1,11) в виде

$$\varrho = e^{(\mu N - H_0)\beta} S(\beta), \tag{1,13}$$

из чего вытекает, что оператор $S(\beta)$ определяется в виде решения уравнения

$$-\frac{\partial S}{\partial \beta} = H_1(\beta) S \tag{1,14}$$

с начальным условием $S(0) = 1$, причем

$$H_1(\tau) = e^{-(\mu N - H_0)\tau} H_1 e^{(\mu N - H_0)\tau}. \tag{1,15}$$

Преобразование (1,15) от шредингеровского оператора H_1 к оператору $H_1(\tau)$, зависящему от τ, представляет собой переход к своеобразному «представлению взаимодействия». Зависимость операторов от τ (1,15) отличается от таковой в известной работе Мацубары [14] наличием химического потенциала μ. Как будет видно из дальнейшего, присутствие в (1,15) параметра μ вносит большое облегчение в расчеты и позволяет обобщить значительно дальше метод Мацубары [14]. Впервые зависимость операторов от μ по формуле (1,15) была независимо введена в работах Абрикосова, Горькова и Дзялошинского [15] и Фрадкина [16, 18, 19].

Как известно (см., например, книгу Ахиезера и Берестецкого [37]), решение уравнения (1,14) с начальным условием $S(0) = 1$ может быть записано в виде ряда

$$S(\beta) = T e^{-\int_0^\beta H_1(\tau)\, d\tau} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \ldots \int_0^\beta d\tau_n\, T\left[H_1(\tau_1) H_1(\tau_2) \ldots H_1(\tau_n)\right], \tag{1,16}$$

в котором оператор $H_1(\tau)$ согласно (1,15) и (1,4) равен

$$H_1(\tau) = g \int \psi^{+}_{\alpha}(x)\, \varphi(x)\, \psi_{\alpha}(x)\, d^3x, \tag{1,17}$$

где переменное x обозначает совокупность $\mathbf{x}$ и τ, причем зависимость операторов $\psi^{+}(x)$, $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ от переменной τ такая же, как в $H_1(\tau)$ (1, 15); например,

$$\psi^{+}(x) = e^{-(\mu N - H_0)\tau} \psi^{+}(\mathbf{x})\, e^{(\mu N - H_0)\tau}, \tag{1,18}$$

т. е. операторы полей в (1,17) написаны в «представлении взаимодействия». Символ T, стоящий перед любыми операторами $A(\tau_1) B(\tau_2) \ldots F(\tau_n)$, указывает на T-произведение этих операторов, которое по определению имеет вид (Вик [38])

$$T\left[A(\tau_1) B(\tau_2) \ldots F(\tau_n)\right] = \delta_p B(\tau_2) F(\tau_n) \ldots A(\tau_1), \tag{1,19}$$

где $B(\tau_2) F(\tau_n) \ldots A(\tau_1)$ — та же совокупность операторов, что и

$A(\tau_1)B(\tau_2)\ldots F(\tau_n)$, но расположенная таким образом, что численное значение τ у операторов возрастает справа налево. $\delta_p = +1$ или -1 в зависимости от четности произведенной при этом перестановки фермионных операторов.

Если обозначить статистическое среднее значение произвольного оператора F при отсутствии взаимодействия между частицами $H_1 = 0$ следующим образом:

$$\langle F\rangle = \mathrm{Sp}\,(e^{(\mu N - H_0)\beta} F)/\mathrm{Sp}\, e^{(\mu N - H_0)\beta}, \tag{1,20}$$

то статистическая сумма (1,8) согласно (1,11), (1,13) и (1,16)—(1,17) представится в виде бесконечного ряда, каждый член которого является статистическим средним от T-произведений операторов поля по ансамблю невзаимодействующих частиц

$$Z = Z_0 \langle S(\beta)\rangle, \tag{1,21}$$

$$\langle S(\beta)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \ldots \int d^4x_n \langle T[(\psi^+(x_1)\varphi(x_1)\psi(x_1)) \times$$
$$\times (\psi^+(x_2)\varphi(x_2)\psi(x_2))\ldots(\psi^+(x_n)\varphi(x_n)\psi(x_n)]\rangle, \tag{1,22}$$

где $d^4x = d^3x\, d\tau$ и интегрирование по $\mathbf{x}$ ведется в пределах объема системы, тогда как интеграл по переменной τ берется в пределах от 0 до β.

Аналогично для термодинамического потенциала имеем

$$\Omega = \Omega_0 - \beta^{-1} \ln \langle S(\beta)\rangle, \tag{1,23}$$

где логарифм от $\langle S(\beta)\rangle$ может быть также представлен в виде ряда (см. ниже).

Индексом 0 везде отмечаются величины, относящиеся к системе невзаимодействующих частиц. В случае быстрой сходимости ряды (1,21)—(1,23) могут служить основой для вычисления всех термодинамических характеристик системы, что и является главным содержанием новой термодинамической теории возмущений (см. также интересный вариант новой термодинамической теории возмущений в работах Гугенгольца [39] и Чень Чунь-сяня [40]).

Правила вычисления членов ряда. Полученный ряд (1,22) для оператора $S(\beta)$ имеет большое формальное сходство с рядом S-матрицы в квантовой теории поля, математический аппарат которой хорошо разработан. Однако, в отличие от квантовой теории поля, в (1,22) необходимо вычислять среднее значение от T-произведений операторов свободных полей не по основному состоянию (вакууму), а по состояниям системы, содержащей произвольно большое число частиц (статистическое среднее). Это обстоятельство заставляет заново пересмотреть известные положения математического аппарата квантовой теории поля в применении к вычислению статистических средних от T-произведений операторов.

Поскольку статистические средние в (1,22) берутся по системе невзаимодействующих частиц, то операторы свободных полей, входящие в (1,22), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{p},s} a_{\mathbf{p}s} u^s e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar - (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)\tau}, \\ \psi^+(x) &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{p},s} a_{\mathbf{p}s} u^{s+} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar + (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)\tau}, \end{aligned} \tag{1,24}$$

$$\varphi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2V}\right)^{1/2} (b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}/\hbar - \omega_{\mathbf{k}}\tau} + b_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}/\hbar - \omega_{\mathbf{k}}\tau}). \tag{1,25}$$

Представим ψ, ψ^+ и φ в виде суммы двух частей

$$\psi(x) = v_1(x) + v_2^+(x), \qquad \psi^+(x) = v_1^+(x) + v_2(x), \tag{1,26}$$

$$\varphi(x) = \varphi_-(x) + \varphi_+(x), \tag{1,27}$$

где

$$\begin{aligned} v_1(x) &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{p},\, r} (1 - q_{\mathbf{p}r})\, a_{\mathbf{p}r} u^r e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar - (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)\tau}, \\ v_1^+(x) &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{p},\, r} (1 - q_{\mathbf{p}r})\, a_{\mathbf{p}r}^+ u^r e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar + (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)\tau}, \end{aligned} \tag{1,28}$$

$$\varphi_-(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2V}\right)^{1/2} [(1 - f_{1\mathbf{k}})\, b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}/\hbar - \omega_{\mathbf{k}}\tau} + f_{2\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}/\hbar + \omega_{\mathbf{k}}\tau}], \tag{1,29}$$

а операторы $v_2(x)$, $v_2^+(x)$ и $\varphi_+(x)$ находятся из (1,26)—(1,29) простым вычитанием. Согласно работе Вика [38] определим $\mathcal{N}$-произведение операторов $v_1(x)\, v_2(x)\, v_1^+(x)\, v_2^+(x) \ldots \varphi_-(x)\, \varphi_+(x) \ldots$ как такое произведение, в котором все v_1^+ стоят левее всех v_1, v_2 и v_2^+, все v_2^+ — левее всех v_1 и v_2, а все v_2 — левее всех v_1, наконец, все φ_+ стоят левее всех φ_-; именно:

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(v_1(x)\, v_2(x)\, v_1^+(x)\, v_2^+(x) \ldots \varphi_-(x)\, \varphi_+(x) \ldots) = \\ &\quad = \delta_p v_1^+(x)\, v_1^+(x') \ldots v_2^+(x)\, v_2^+(x') \ldots v_2(x)\, v_2(x') \ldots \\ &\qquad \ldots v_1(x)\, v_1(x') \ldots \varphi_+(x)\, \varphi_+(x') \ldots \varphi_-(x)\, \varphi_-(x') \ldots, \end{aligned} \tag{1,30}$$

где знаковый символ δ_p равен ± 1 в зависимости от четности произведенной при этом перестановки фермионных операторов. T- и $\mathcal{N}$-произведение от суммы операторов равно сумме T- и $\mathcal{N}$-произведений отдельных слагаемых, поэтому для раскрытия выражения вида

$$\mathcal{N}(\psi\psi^+ \ldots \varphi \ldots) \quad \text{или} \quad T(\psi\psi^+ \ldots \varphi \ldots) \tag{1,31}$$

следует воспользоваться формулами (1,26), (1,27) и (1,30). При таком определении $\mathcal{N}$-произведения операторы фермионного поля (1,24) антикоммутируют под знаком $\mathcal{N}$-произведения, а бозонные операторы (1,25) — коммутируют. Разность T- и $\mathcal{N}$-произведении двух операторов A и B из (1,24)—(1,27) называется сверткой $\underline{AB}$

$$T(AB) - \mathcal{N}(AB) = \underline{AB}. \tag{1,32}$$

Как известно, для T- и $\mathcal{N}$-произведений (1,19) и (1,30)—(1,31) операторов $ABCDE \ldots F$ справедлива алгебраическая теорема Вика [38], согласно которой T-произведение операторов равно сумме всех $\mathcal{N}$-произведений этих же операторов со всевозможными свертками

$$\begin{aligned} T(ABCDE \ldots F) &= \mathcal{N}(ABCDE \ldots F) + \mathcal{N}(\underline{AB}\, CDE \ldots F) + \ldots \\ &\quad \ldots + \mathcal{N}(\underline{ABCDE} \ldots F) + \ldots + \mathcal{N}(\underline{AB}\,\underline{CD}\,\underline{E} \ldots \underline{F}). \end{aligned} \tag{1,33}$$

Так как нас интересуют только статистические средние от T-произведений операторов (1,24)—(1,25) по системе невзаимодействующих частиц, то попытаемся подобрать константы $q_{\mathbf{p}r}$, $f_{1\mathbf{k}}$ и $f_{2\mathbf{k}}$ в (1,28)—(1,29) таким образом, чтобы все статистические средние от $\mathcal{N}$-произведении

$$\langle \mathcal{N}(\psi\psi^+ \ldots \varphi \ldots) \rangle = 0. \tag{1,34}$$

Тогда теорема Вика (1,33) для операторов $ABCDE \ldots F$ свободных полей

(1,24) — (1,25) будет читаться так:

$$\langle T(ABCDE\ldots F)\rangle = \underbrace{A\underbrace{BC}_{}D\underbrace{E}_{}\ldots\underbrace{F}_{}} + \ldots, \tag{1,35}$$

где справа стоит сумма произведений операторов со всевозможными свертками. Выражение (1,35) отлично от нуля только в том случае, если под знаком T-произведения стоит четное число бозонных операторов φ, а фермионные операторы ψ и ψ^+ входят парами. Это обстоятельство является следствием того, что при произвольных значениях $q_{\mathbf{p}r}$, $f_{1\mathbf{k}}$ и $f_{2\mathbf{k}}$ для операторов (1,24) — (1,25) не равны нулю только две свертки:

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)\psi^+_\beta(x')} \equiv \mathcal{G}_{0\alpha\beta}(x-x') = \begin{cases} V^{-1}\sum\limits_{\mathbf{p},r}(1-|q_{\mathbf{p}r}|^2)\,u^r_\alpha u^{r*}_\beta e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar-(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)(\tau-\tau')}, & \tau>\tau', \\ -V^{-1}\sum\limits_{\mathbf{p},r}|q_{\mathbf{p}r}|^2\,u^r_\alpha u^{r*}_\beta e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar-(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)(\tau-\tau')}, & \tau<\tau', \end{cases} \tag{1,36}$$

$$\underbrace{\varphi(x)\varphi(x')} \equiv \mathcal{D}_0(x-x') = \begin{cases} \sum\limits_{\mathbf{k}}(\omega_{\mathbf{k}}/2V)\,[(1-f_{1\mathbf{k}})(1-f_{2\mathbf{k}})\,e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar-\omega_{\mathbf{k}}(\tau-\tau')} - \\ -f_{1\mathbf{k}}f_{2\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar+\omega_{\mathbf{k}}(\tau-\tau')}], & \tau>\tau', \\ \sum\limits_{\mathbf{k}}(\omega_{\mathbf{k}}/2V)\,[(1-f_{1\mathbf{k}}f_{2\mathbf{k}})\,e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})/\hbar-\omega_{\mathbf{k}}(\tau'-\tau)} + \\ +(f_{1\mathbf{k}}f_{2\mathbf{k}}-f_{1\mathbf{k}}-f_{2\mathbf{k}})\,e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})/\hbar+\omega_{\mathbf{k}}(\tau'-\tau)}], & \tau'>\tau. \end{cases} \tag{1,37}$$

С другой стороны, используя (1,24) — (1,25), легко проверить, что

$$\langle T(\psi_\alpha(x)\psi^+_\beta(x'))\rangle = \begin{cases} V^{-1}\sum\limits_{\mathbf{p},r}(1-\langle a^+_{\mathbf{p}r}a_{\mathbf{p}r}\rangle)\,u^r_\alpha u^{r*}_\beta e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar-(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)(\tau-\tau')}, & \tau>\tau', \\ -V^{-1}\sum\limits_{\mathbf{p},r}\langle a^+_{\mathbf{p}r}a_{\mathbf{p}r}\rangle\,u^r_\alpha u^{r*}_\beta e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar-(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)(\tau-\tau')}, & \tau<\tau', \end{cases} \tag{1,38}$$

$$\langle T(\varphi(x)\varphi(x'))\rangle = \sum_{\mathbf{k}}\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2V}[(1+\langle b^+_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}\rangle)\,e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar-\omega_{\mathbf{k}}|\tau-\tau'|}+\langle b^+_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}\rangle\,e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar+\omega_{\mathbf{k}}|\tau-\tau'|}], \tag{1,39}$$

где $\langle a^+_{\mathbf{p}r}a_{\mathbf{p}r}\rangle$ и $\langle b^+_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}\rangle$ — статистические средние числа электронов с энергией $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ и поляризацией r и фононов с энергией $\omega_{\mathbf{k}}$ при отсутствии взаимодействия между частицами. Чтобы вычислить $\langle a^+_{\mathbf{p}r}a_{\mathbf{p}r}\rangle$ и $\langle b^+_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}\rangle$, рассмотрим

$$Z_0 = \mathrm{Sp}\, e^{(\mu N-H_0)\beta} \tag{1,40}$$

и статистический оператор W_0 системы невзаимодействующих частиц[41]

$$W_0 = e^{(\Omega_0+\mu N-H_0)\beta} = Z_0^{-1}e^{(\mu N-H_0)\beta}, \tag{1,41}$$

где

$$\mu N - H_0 = \sum_{\mathbf{p},r}(\mu-\varepsilon_{\mathbf{p}})\,a^+_{\mathbf{p}r}a_{\mathbf{p}r} + \sum_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}b^+_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}. \tag{1,42}$$

Поскольку различные слагаемые сумм (1,42) коммутируют между собой, статистический оператор (1,41) можно представить в виде произведения статистических операторов, относящихся к каждому отдельному состоянию электрона и фонона (к отдельному осциллятору поля):

$$W_0 = \prod_{\mathbf{p},r}Z^{-1}_{\mathbf{p}r}e^{(\mu-\varepsilon_{\mathbf{p}})\beta\hat{n}_{\mathbf{p}r}}\prod_{\mathbf{k}}Z^{-1}_{\mathbf{k}}e^{-\omega_{\mathbf{k}}\beta\hat{n}_{\mathbf{k}}} \equiv \prod_{\mathbf{p},r}W_{\mathbf{p}r}\prod_{\mathbf{k}}W_{\mathbf{k}}, \tag{1,43}$$

где

$$\hat{n}_{\mathbf{p}r} = a^+_{\mathbf{p}r} a_{\mathbf{p}r}, \qquad \hat{n}_{\mathbf{k}} = b^+_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}, \qquad Z_0 = \prod_{\mathbf{p},\, r} Z_{\mathbf{p}r} \prod_{\mathbf{k}} Z_{\mathbf{k}}. \tag{1,44}$$

Используя нормировку статистических операторов $\mathrm{Sp}\, W_{\mathbf{p}r} = 1$, $\mathrm{Sp}\, W_{\mathbf{k}} = 1$, а также диагональные значения операторов $\hat{n}_{\mathbf{p}r}$ и $\hat{n}_{\mathbf{k}}$, которые равны соответственно 0; 1 и 0, 1, 2, ..., ∞, легко находим

$$Z_{\mathbf{p}r} = 1 + e^{(\mu - \varepsilon_{\mathbf{p}})\beta}, \qquad Z_{\mathbf{k}} = (1 - e^{-\omega_{\mathbf{k}}\beta})^{-1}. \tag{1,45}$$

Из (1,45) и (1,44) получаем, между прочим, известное выражение для термодинамического потенциала Ω_0 электронно-фононной системы при отсутствии взаимодействия между частицами

$$\Omega_0 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3 \beta} \int \ln (1 - e^{-\omega_{\mathbf{k}}\beta})\, d^3k - \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3 \beta} \int \ln (1 + e^{(\mu - \varepsilon_{\mathbf{p}})\beta})\, d^3p, \tag{1,46}$$

где при переходе от суммы к интегралу использовано соотношение

$$\sum_{\mathbf{p},\, r} = \frac{2V\, d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{1,46a}$$

Знание статистических операторов $W_{\mathbf{p}r}$ и $W_{\mathbf{k}}$, относящихся к состоянию каждой отдельной частицы, позволяет вычислить функции распределения невзаимодействующих электронов $n_{\mathbf{p}r}$ и фононов $n_{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{p}r} &= \langle a^+_{\mathbf{p}r} a_{\mathbf{p}r} \rangle = (1 + e^{(\mu - \varepsilon_{\mathbf{p}})\beta})^{-1}\, \mathrm{Sp}\, e^{(\mu - \varepsilon_{\mathbf{p}})\beta \hat{n}_{\mathbf{p}r}} \hat{n}_{\mathbf{p}r} = (e^{(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)\beta} + 1)^{-1}, \\ n_{\mathbf{k}} &= \langle b^+_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} \rangle = (1 - e^{-\omega_{\mathbf{k}}\beta})\, \mathrm{Sp}\, e^{-\omega_{\mathbf{k}}\beta \hat{n}_{\mathbf{k}}} \hat{n}_{\mathbf{k}} = (e^{\omega_{\mathbf{k}}\beta} - 1)^{-1}. \end{aligned} \tag{1,47}$$

Среднее число электронов с данной энергией $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ (1,47) не зависит от спинового состояния электрона. Поэтому индекс r у функции распределения (1,47) будем в дальнейшем опускать: $n_{\mathbf{p}r} \equiv n_{\mathbf{p}}$.

Итак, если в качестве констант $q_{\mathbf{p}r}$, $f_{1\mathbf{k}}$ и $f_{2\mathbf{k}}$ взять соответственно

$$|q_{\mathbf{p}r}|^2 = (e^{(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)\beta} + 1)^{-1}, \tag{1,48}$$

$$f_{1\mathbf{k}} = (1 + e^{\omega_{\mathbf{k}}\beta/2})^{-1}, \quad f_{2\mathbf{k}} = (1 - e^{\omega_{\mathbf{k}}\beta/2})^{-1}, \tag{1,49}$$

то согласно (1,36) — (1,37) и (1,38) — (1,39) (Мацубара [14]) имеем

$$\langle \mathcal{N}^* (\psi(x)\, \psi^+(x')) \rangle = 0, \qquad \langle \mathcal{N}^* (\varphi(x)\, \varphi(x')) \rangle = 0, \tag{1,50}$$

а свертка операторов равняется статистическому среднему от T-произведения данных операторов.

Если вместо $\psi(x)$ и $\psi^+(x)$ поставить их разложения в ряды (1,24), то в силу статистической независимости отдельных состояний частиц (1,43) теорема (1,50) будет верна также для каждого слагаемого полученной суммы, например:

$$\langle \mathcal{N}^* (a^+_{\mathbf{p}r} a_{\mathbf{p}r}) \rangle = 0, \tag{1,51}$$

где $\mathcal{N}^*$-произведение по-прежнему понимается в смысле (1,30), а роль v_1, v_1^+, v_2 и v_2^+ играют их отдельные слагаемые, соответственно $\alpha_{1\mathbf{p}r}$, $\alpha^+_{1\mathbf{p}r}$, $\alpha_{2\mathbf{p}r}$ и $\alpha^+_{2\mathbf{p}r}$, которые равны (Таулес [42])

$$\begin{aligned} \alpha_{1\mathbf{p}r} &= (1 - q_{\mathbf{p}r})\, a_{\mathbf{p}r}, \quad & \alpha_{2\mathbf{p}r} &= q^+_{\mathbf{p}r} a^+_{\mathbf{p}r}, \\ a_{\mathbf{p}r} &= \alpha_{1\mathbf{p}r} + \alpha^+_{2\mathbf{p}r}, \quad & a^+_{\mathbf{p}r} &= \alpha^+_{1\mathbf{p}r} - \alpha_{2\mathbf{p}r}. \end{aligned} \tag{1,52}$$

В (1,51) — (1,52) опущены несущественные множители.

$\mathscr{N}$-произведение большего числа сомножителей $\psi\psi^+$ раскладывается на сумму $\mathscr{N}$-произведений операторов $a_{\mathbf{p}r}a^+_{\mathbf{p}'r'}\ldots$ Если все фермиевские операторы $a_{\mathbf{p}r}$ и $a^+_{\mathbf{p}'r'}$ или их пары $a_{\mathbf{p}r}a^+_{\mathbf{p}r}$ относятся к различным состояниям электрона, то среднее от такого $\mathscr{N}$-произведения равно нулю в силу (1,51). Если среди операторов $a_{\mathbf{p}r}$ (или $a^+_{\mathbf{p}'r'}$) имеются хотя бы два одинаковые, то из-за их антикоммутации $\mathscr{N}$-произведение обращается в нуль. Следовательно, при выполнении (1,50) — (1,51) среднее от $\mathscr{N}$-произведения, содержащего произвольное число фермионных операторов $\psi(x)$ и $\psi^+(x)$, равняется нулю. Последнее утверждение справедливо также для бозонных операторов $\varphi(x)$ (Таулес [42]). Для этого согласно (1,35) достаточно доказать, что среднее от T-произведения любого числа бозонных операторов (1,25) равно тождественно сумме всех произведений этих операторов со всевозможными свертками, понимая при этом под сверткой выражение (1,37) с (1,49).

Статистический оператор W_0 (1,43), определяющий среднее значение, факторизован. Поэтому доказательство теоремы можно провести по отношению к каждому отдельному состоянию бозона. Выражение $\langle T(\varphi_{\mathbf{k}}(x)\varphi_{\mathbf{k}}(x')\varphi_{\mathbf{k}}(x')\ldots)\rangle$, где $\varphi_{\mathbf{k}}(x)$ — член суммы (1,25) $\varphi(x)=\sum\limits_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}(x)$, относящийся к состоянию бозона с энергией $\omega_{\mathbf{k}}$, разбивается на сумму слагаемых, содержащих $\langle b^{+l}_{\mathbf{k}}b^m_{\mathbf{k}}\rangle$. Из-за ортогональности волновых функций Φ_{nN}, по которым ведется усреднение, отличными от нуля будут только те члены, которые содержали равное число операторов рождения $b^+_{\mathbf{k}}$ и поглощения $b_{\mathbf{k}}$ $(l=m)$.

Операторы чисел заполнения $\hat{n}_{\mathbf{k}}=b^+_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}$ согласно (1,2) удовлетворяют следующим соотношениям (Блох и Де-Доминичис [41]):

$$\begin{aligned}
\hat{n}_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}} &= b_{\mathbf{k}}(\hat{n}_{\mathbf{k}}-1),\\
\hat{n}_{\mathbf{k}}b^2_{\mathbf{k}} &= b^2_{\mathbf{k}}(\hat{n}_{\mathbf{k}}-2),\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\hat{n}_{\mathbf{k}}b^m_{\mathbf{k}} &= b^m_{\mathbf{k}}(\hat{n}_{\mathbf{k}}-m),
\end{aligned}\tag{1,53}$$

откуда

$$\begin{aligned}
b^{+(m)}_{\mathbf{k}}b^m_{\mathbf{k}} &= b^{+(m-1)}_{\mathbf{k}}\hat{n}_{\mathbf{k}}b^{(m-1)}_{\mathbf{k}} = b^{+(m-1)}_{\mathbf{k}}b^{(m-1)}_{\mathbf{k}}(\hat{n}_{\mathbf{k}}-m+1)=\\
&= b^{+(m-2)}_{\mathbf{k}}b^{m-2}_{\mathbf{k}}(\hat{n}_{\mathbf{k}}-m+2)(\hat{n}_{\mathbf{k}}-m+1)=\hat{n}_{\mathbf{k}}(\hat{n}_{\mathbf{k}}-1)\ldots(\hat{n}_{\mathbf{k}}-m+1).
\end{aligned}\tag{1,54}$$

Усредняя (1,54) при помощи статистического оператора $W_{\mathbf{k}}$ (1,43) — (1,45)

$$W_{\mathbf{k}}=(1-e^{-\omega_{\mathbf{k}}\beta})\,e^{-\omega_{\mathbf{k}}\beta\hat{n}_{\mathbf{k}}}\equiv(1-Z)\,Z^{\hat{n}_{\mathbf{k}}},\tag{1,55}$$

получим

$$\begin{aligned}
\langle b^{+(m)}_{\mathbf{k}}b^m_{\mathbf{k}}\rangle &= (1-Z)\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\ldots(n-m+1)Z^n=\\
&= (1-Z)Z^m\left(\frac{d}{dZ}\right)^m\sum_{n=0}^{\infty}Z^n=(1-Z)Z^m\left(\frac{d}{dZ}\right)^m\frac{1}{1-Z}=\\
&= m!\left(\frac{Z}{1-Z}\right)^m\equiv m!\,\langle b^+_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}\rangle^m,
\end{aligned}\tag{1,56}$$

т. е. при усреднении $\langle b^{+(m)}_{\mathbf{k}}b^m_{\mathbf{k}}\rangle$ первый множитель $b^+_{\mathbf{k}}$ может быть объединен в пару с любым из m множителей $b_{\mathbf{k}}$, второй множитель $b^+_{\mathbf{k}}$ объединяется в пару с любым из $m-1$ оставшихся множителей $b_{\mathbf{k}}$ и т. д. — всего $m!$ комбинаций.

Результат (1,56) в применении к $\langle T(\varphi_{\mathbf{k}}(x)\varphi_{\mathbf{k}}(x')\varphi_{\mathbf{k}}(x'')\ldots)\rangle$ означает, что среднее от T-произведения любого числа бозонных операторов $\varphi_{\mathbf{k}}(x)$, $\varphi_{\mathbf{k}}(x')$, $\varphi_{\mathbf{k}}(x'')$, ... равняется сумме всех произведений этих операторов со всевозможными свертками, которые, как и в (1,37), (1,49), равны [42]

$$\underbrace{\varphi_{\mathbf{k}}(x)\varphi_{\mathbf{k}}(x')} = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2V}[(1+\langle b_{\mathbf{k}}^{+}b_{\mathbf{k}}\rangle)\, e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar-\omega_{\mathbf{k}}|\tau-\tau'|} + \\ + \langle b_{\mathbf{k}}^{+}b_{\mathbf{k}}\rangle\, e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar+\omega_{\mathbf{k}}|\tau-\tau'|}. \quad (1,57)$$

Диаграммная техника. Отдельные члены ряда теории возмущений (1,22) представляют собой среднее от T-произведений операторов свободных полей. Так как среднее от T-произведения отлично от нуля только для четного числа бозонных операторов $\varphi(x)$, то сумма (1,22) содержит члены с четным индексом суммирования. При разложении T-произведения в сумму произведений со всевозможными свертками не следует свертывать операторы $\psi(x)$ и $\psi^{+}(x)$, имеющие одну и ту же переменную интегрирования, ибо член с такой сверткой обращается в нуль [14] —

$$\int \underbrace{(\underbrace{\psi^{+}(x)\varphi(x)}\psi(x))}\ldots\underbrace{(\psi^{+}(x')\varphi(x')\underbrace{\psi(x'))}}\ldots d^4x\, d^4x' = \\ = \int \mathcal{G}_0(x-x)\mathcal{D}_0(x-x')\ldots\underbrace{(\psi^{+}(x')\underbrace{\psi(x')}}\ldots d^4x\, d^4x' = \\ = \mathcal{G}_0(0)\int \mathcal{D}_0(x)\, d^4x \int \ldots\underbrace{(\psi^{+}(x')\underbrace{\psi(x')}}\ldots d^4x', \quad (1,58)$$

где интеграл от функции $\mathcal{D}_0(x)$ по всему пространству $\mathbf{x}$ равен нулю, так как сумма (1,37) не содержит слагаемого с импульсом фонона $\mathbf{k}=0$.

Отдельный член разложения среднего от T-произведения (1,22) удобно изображать графиком по следующему правилу (аналогичная методика построения графиков в квантовой электродинамике подробно описана, например, в цитированной книге Ахиезера и Берестецкого [37]). Каждой переменной интегрирования x_i соответствует на графике точка — вершина графика. Поскольку переменную x_i содержат три оператора $\psi^{+}(x_i)\varphi(x_i)\psi(x_i)$, то в вершине графика сходятся три линии — две сплошные, соответствующие операторам $\psi^{+}(x_i)$ и $\psi(x_i)$ и одна пунктирная, соответствующая $\varphi(x_i)$.

Операторы ψ^{+}, ψ и φ входят только в виде сверток. Поэтому сплошные и пунктирные линии будут начинаться и заканчиваться в вершинах графика, причем свертке фермионных операторов $\mathcal{G}_0(x-x')$ соответствует на графике сплошная линия, идущая из вершины x' в вершину x, а свертке бозонных операторов $\mathcal{D}_0(x-x')$ соответствует на графике пунктирная линия, соединяющая вершины x и x'. Операторы $\psi^{+}(x')$ и $\psi(x)$, входящие в $\mathcal{G}_0(x-x')$, содержат только операторы соответственно рождения и поглощения. Поэтому говорят, что сплошная линия, идущая из вершины x' в вершину x, описывает движение виртуального электрона, рожденного в точке x' и поглощенного в x, а $\mathcal{G}_0(x-x')$ называют функцией распространения электрона. Аналогично $\mathcal{D}_0(x-x')$ называется функцией распространения фонона. Как отмечалось выше, графики состоят из четного числа вершин. Например, имеется только один член ряда (1,22) g^2-порядка

$$-\frac{g^2}{2}\int d^4x_1\, d^4x_2\, \mathcal{G}_0(x_1-x_2)\mathcal{D}_0(x_1-x_2)\mathcal{G}_0(x_2-x_1), \quad (1,59)$$

которому соответствует график с двумя вершинами (рис. 1). Наоборот, по виду графика можно написать соответствующий член разложения

T-произведения, помня, что каждому графику с n вершинами соответствует множитель $(-1)^{n+l}\, g^n/n!$, где l— число замкнутых электронных петель, входящих в данный график. Дополнительный множитель $(-1)^l$ возник из-за антикоммутации фермиевских операторов под знаком T-произведения. Чтобы получить все графики с n вершинами, необходимо n точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (вершины графика) соединить между собой линиями всевозможными способами так, чтобы в каждой точке (вершине) сходились две сплошные и одна пунктирная линии. Тогда каждому такому графику будет соответствовать определенный член разложения T-произведения (1,22), пропорциональный g^n. При написании членов ряда по виду графиков следует учитывать, что некоторые члены получаются численно равными друг другу, отличаясь только заменой переменных интегрирования. Например, различные по структуре графики с четырьмя вершинами изображены на рис. 2. Недостающие четырехвершинные графики получаются из графиков рис. 2 путем другого обозначения вершин. При этом различных графиков, например, типа *в*) получится 6 штук, а типа *г*) — три штуки; им соответствуют численно равные члены разложения T-произведения.

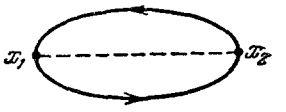

Рис. 1.

Таким образом, $\langle S(\beta)\rangle$ представляет собой сумму всевозможных графиков с замкнутыми сплошными линиями. Поскольку каждой линии графика соответствует функция разности координат, выражение, соответствующее отдельному связному замкнутому графику, пропорционально объему V. В сумме $\langle S(\beta)\rangle$ имеются, в частности, члены, каждому из которых соответствует несколько отдельных связных замкнутых графиков, например графики *г*) на рис. 2. Каждый такой член суммы $\langle S(\beta)\rangle$ пропорционален V^m, где m — число отдельных связных графиков.

С другой стороны, термодинамический потенциал (1,23) должен быть пропорционален объему V в первой степени. Отсюда следует, что сумма

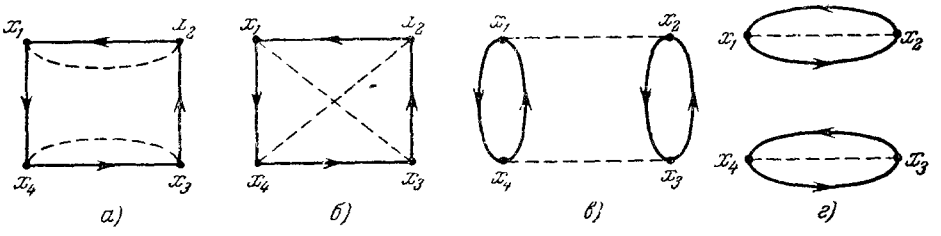

Рис. 2.

$\langle S(\beta)\rangle$ должна представляться в виде $\exp L$, где L — сумма всех связных замкнутых графиков. В самом деле, если обозначить через L_s вклад от одного связного замкнутого графика вида s, то член суммы $\langle S(\beta)\rangle$, который распадается на несколько видов связных графиков, очевидно, равен $\prod \frac{1}{l_s!}(L_s)^{l_s}$, где l_s — число графиков данного вида. Тогда вся бесконечная сумма $\langle S(\beta)\rangle$ запишется следующим образом (Веденов и Ларкин[43]):

$$\langle S(\beta)\rangle = \sum_{l_s=0}^{\infty} \prod_s \frac{1}{l_s!}(L_s)^{l_s} = \prod_s e^{L_s} = e^{\Sigma L_s},$$

где $\sum L_s$ — сумма всех связных замкнутых графиков. Для термодинамического потенциала (1,23) имеем $\Omega = \Omega_0 - \beta^{-1}\sum L_s$.

Преимущество настоящего метода, кроме простоты и известного «автоматизма» вычисления, состоит в том, что он позволяет посредством наглядных графиков глубже понять структуру высших приближений. Имея возможность написать любой член ряда теории возмущений, можно просуммировать бесконечную совокупность членов определенного класса и тем самым получить результат, отличный от обычных вычислений по теории возмущений (разложение по другому параметру, что особенно ценно для тех задач, в которых теория возмущений неприменима). Кроме того, в диаграммной технике весьма просто оцениваются по порядку величины отбрасываемые графики и тем самым легко устанавливается область применимости и точность выборочного суммирования. В этом отношении примечательна работа Веденова и Ларкина[13], в которой на основе выборочного суммирования бесконечного числа членов ряда теории возмущений найдена свободная энергия полностью ионизованного газа (с гамильтонианом (1,71а)—(1,71в), в котором $v(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ — кулоновский потенциал парного взаимодействия частиц) в виде разложения по плотности n. Кроме дебаевского, авторам удалось получить следующие два члена разложения, пропорциональные соответственно $n^2 \ln n$ и n^2.

Переход в p-представление. Техника вычисления членов ряда (1,22) существенно облегчается переходом от координатного к импульсному представлению функций $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{D}_0$. При этом надо иметь в виду, что свертки операторов $\mathcal{G}_0(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2, \tau_1-\tau_2)$ и $\mathcal{D}_0(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2, \tau_1-\tau_2)$ являются функциями разности координат $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$ и $\tau_1-\tau_2$, причем как функции разности $\tau_1-\tau_2$ они определены лишь в интервале от $-\beta$ до β. Определим функции $\mathcal{G}_0(\mathbf{x}, \tau)$ и $\mathcal{D}_0(\mathbf{x}, \tau)$ на всей оси τ, продолжив их периодически. Тогда $\mathcal{G}_0(\mathbf{x}, \tau)$ и $\mathcal{D}_0(\mathbf{x}, \tau)$ по переменной τ можно разложить в ряд Фурье, а по пространственным координатам $\mathbf{x}$ — в интеграл Фурье, например:

$$\begin{gathered}\mathcal{G}_0(\mathbf{x}, \tau)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3\beta}\sum_n\int \mathcal{G}_0(\mathbf{p}, \omega_n)\, e^{i(\mathbf{px}/\hbar-\omega_n\tau)}\, d^3p,\\ \mathcal{G}_0(\mathbf{p}, \omega_n)=\frac{1}{2}\int_{-\beta}^{\beta} d\tau\int d^3x\mathcal{G}_0(\mathbf{x}, \tau)\, e^{-i(\mathbf{px}/\hbar-\omega_n\tau)}.\end{gathered} \tag{1,60}$$

Переход к p-представлению значительно упрощается благодаря одному важному свойству функций $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{D}_0$. Согласно определению свертки операторов (1,32), а также (1,50), (1,20) и (1,18), для функции $\mathcal{G}_0$ имеем:

$$\begin{aligned}&\mathcal{G}_0(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2, \tau_1-\tau_2)\equiv\langle T(\psi(x_1)\psi^+(x_2)\rangle=\\ &=\begin{cases} Z_0^{-1}\operatorname{Sp} e^{(\mu N-H_0)\beta}e^{-(\mu N-H_0)(\tau_1-\tau_2)}\psi(\mathbf{x}_1)\, e^{(\mu N-H_0)(\tau_1-\tau_2)}\psi^+(x_2), & \tau_1>\tau_2,\\ -Z_0^{-1}\operatorname{Sp} e^{(\mu N-H_0)\beta}e^{-(\mu N-H_0)(\tau_2-\tau_1)}\psi^+(\mathbf{x}_2)\, e^{(\mu N-H_0)(\tau_2-\tau_1)}\psi(\mathbf{x}_1), & \tau_2>\tau_1,\end{cases}\\ &=\begin{cases} Z_0^{-1}\operatorname{Sp} e^{(\mu N-H_0)\beta}e^{-(\mu N-H_0)(\tau_2-\tau_1+\beta)}\psi^+(\mathbf{x}_2)\, e^{(\mu N-H_0)(\tau_2-\tau_1+\beta)}\psi(\mathbf{x}_1), & \tau_1>\tau_2,\\ -Z_0^{-1}\operatorname{Sp} e^{(\mu N-H_0)\beta}e^{-(\mu N-H_0)(\tau_1-\tau_2+\beta)}\psi(\mathbf{x}_1)\, e^{(\mu N-H_0)(\tau_1-\tau_2+\beta)}\psi^+(\mathbf{x}_2), & \tau_2>\tau_1.\end{cases}\end{aligned}$$

Откуда при $\tau_1-\tau_2=\tau<0$ имеем

$$\mathcal{G}_0(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2, \tau)=-\mathcal{G}_0(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2, \tau+\beta), \tag{1,61}$$

где знак минус перед $\mathcal{G}_0(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2, \tau+\beta)$ обязан антикоммутации фермионных операторов. Аналогичное соотношение имеет место и для свертки бозонных операторов при $\tau<0$

$$\mathcal{D}_0(\mathbf{x}, \tau)=\mathcal{D}_0(\mathbf{x}, \tau+\beta). \tag{1,62}$$

Если функции $\mathcal{G}_0(\mathbf{x}, \tau)$ и $\mathcal{D}_0(\mathbf{x}, \tau)$ по переменной τ периодически продолжить на всю ось τ, то соотношения (1,61) и (1,62) будут выполняться для любого τ (Абрикосов, Горьков и Дзялошинский [15]).

Как это следует из диаграммной техники, каждая вершина графика соединяет четное число фермионных линий. Поэтому все интегралы $\int\limits_0^\beta \ldots d\tau$, входящие в (1,22), можно заменить на $\frac{1}{2}\int\limits_{-\beta}^{\beta} \ldots d\tau$. В самом деле, производя замену переменных и используя (1,61) — (1,62), получим

$$\int\limits_0^\beta \mathcal{G}_0(x_1 - x)\,\mathcal{D}_0(x_3 - x)\,\mathcal{G}_0(x - x_2)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\beta}^{0} \mathcal{G}_0(x_1 - x)\,\mathcal{D}_0(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x},\ \tau_3 - \tau + \beta)\,\mathcal{G}_0(x - x_2)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\beta}^{0} \mathcal{G}_0(x_1 - x)\,\mathcal{D}_0(x_3 - x)\,\mathcal{G}_0(x - x_2)\,d\tau. \qquad (1,63)$$

Это обстоятельство позволяет легко провести преобразование Фурье во всех членах ряда (1,22).

Из соотношений (1,61) и (1,62) следует также, что в разложении Фурье фермионной свертки $\mathcal{G}_0(\mathbf{x}, \tau)$ (1,60) отличны от нуля лишь компоненты с $\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$, а в разложении бозонной свертки $\mathcal{D}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — лишь компоненты с $\omega_n = 2n\pi/\beta$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$ Явный вид $\mathcal{G}_0(\mathbf{p}, \omega_n)$ и $\mathcal{D}_0(\mathbf{k}, \omega_n)$, согласно (1,38) — (1,39) и (1,47), следующий:

$$\mathcal{G}_{0\alpha\beta}(\mathbf{p}, \omega_n) = -(i\omega_n + \mu - \varepsilon_{\mathbf{p}})^{-1}\,\delta_{\alpha\beta},\quad \omega_n = (2n+1)\pi/\beta, \qquad (1,64)$$

$$\mathcal{D}_0(\mathbf{k}, \omega_n) = \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2 + \omega_n^2},\qquad \omega_n = 2n\pi/\beta. \qquad (1,65)$$

В p-представлении каждой сплошной линии графика соответствует функция распространения $\mathcal{G}_0(\mathbf{p}, \omega_n)$, а пунктирной — $\mathcal{D}_0(\mathbf{k}, \omega_n)$. Каждой вершине графика соответствует множитель $\delta\left(\sum \mathbf{p}\right)\delta_{0\sum\omega_n}$, где $\sum \mathbf{p}$ и $\sum \omega_n$ — суммы компонент четырехмерных импульсов сплошных и пунктирной линий, сходящихся в данной вершине, а $\delta_{0\sum\omega_n}$ — кронекеровская δ-функция

$$\delta_{0\sum\omega_n} = \begin{cases} 1 \text{ при } \sum \omega_n = 0, \\ 0 \text{ при } \sum \omega_n \neq 0. \end{cases}$$

Можно условиться брать в суммах $\sum \mathbf{p}$ и $\sum \omega_n$ импульсы частиц, рождаемых в данной вершине, со знаком плюс, а поглощаемых — со знаком минус. По всем трехмерным импульсам сплошных и пунктирных линий предполагается интегрирование, а по четвертым компонентам импульсов — суммирование. Отдельному графику с n вершинами соответствует множитель $(-1)^{n+l}\,g^n\,[(2\pi\hbar)^3\beta]^{n-m}/n!$, где l — число замкнутых петель из фермионных линий, а m — число всех сплошных и пунктирных линий, входящих в данный график. Например, выражение $Z^{(1)}$, соответствующее

графику рис. 1, имеет в p-представлении следующий вид:

$$Z^{(1)} = -\frac{g^2 V}{(2\pi\hbar)^6 \beta} \sum_{\omega,\,\omega_1} \int \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2\, d^3\mathbf{p}_1\, d^3k}{(i\omega_1+\mu-\varepsilon_{\mathbf{p}_1})\,[i\,(\omega_1+\omega)+\mu-\varepsilon_{\mathbf{p}_1+\mathbf{k}}]\,(\omega_{\mathbf{k}}^2+\omega^2)}, \tag{1,66}$$

$$\omega_1 = (2n+1)\,\pi/\beta, \qquad \omega = 2m\pi/\beta,$$

где использовано

$$\delta(0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar}\, d^3x \Big|_{\mathbf{p}=0} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{1,67}$$

так как везде интегрирование по пространственной координате $\mathbf{x}$ происходит по объему V рассматриваемой статистической системы. Суммирование в (1,66) по ω и ω_1 приводит к следующему результату:

$$Z^{(1)} = \frac{2g^2 V\beta}{(2\pi\hbar)^6} \int \frac{[(n_{\mathbf{p}}-n_{\mathbf{p}+\mathbf{k}})\, n_{\mathbf{k}} + (1-n_{\mathbf{p}+\mathbf{k}})\, n_{\mathbf{p}}]\, \omega_{\mathbf{k}}}{\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{k}}}\, d^3p\, d^3k, \tag{1,68}$$

где $n_{\mathbf{p}}$ и $n_{\mathbf{k}}$ — функции распределения соответственно электронов и фононов (1,47). Статистическая сумма (1,21) с учетом члена g^2-порядка равна

$$Z = Z_0\,(1 + Z^{(1)}), \tag{1,69}$$

а термодинамический потенциал Ω системы

$$\Omega = -\beta^{-1} \ln Z = \Omega_0 - \beta^{-1} Z^{(1)}, \tag{1,70}$$

где $-\beta^{-1}Z^{(1)}$ — первая поправка к термодинамическому потенциалу невзаимодействующих частиц $\Omega_0 = -\beta^{-1}\ln Z_0$ (1,46), обусловленная взаимодействием.

Обобщение на различные случаи взаимодействия частиц. Аппарат термодинамической теории возмущений был проиллюстрирован выше на примере электронно-фононной системы. Легко видеть, однако, что изложенный аппарат годится для исследования любой статистической системы, состоящей из фермионов (или бозонов), попарно взаимодействующих между собой при помощи потенциала $v = v(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$.

Рассмотрим статистическую систему из тождественных частиц одного сорта, попарно взаимодействующих друг с другом с потенциальной энергией $v(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$. Обобщение результатов на многокомпонентную систему не представляет затруднений. Отдельную частицу считаем квантом ψ-поля, которое как функция координат удовлетворяет определенному уравнению. В схеме вторичного квантования полный гамильтониан статистической системы (Мацубара [14]) запишется так:

$$H = H_0 + H_1, \tag{1,71а}$$

$$H_0 = \int \psi^+(\mathbf{x}) \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\right) \psi(\mathbf{x})\, d^3x, \tag{1,71б}$$

$$H_1 = \frac{1}{2} \int v(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, \psi^+(\mathbf{x})\, (\psi^+(\mathbf{x}')\, \psi(\mathbf{x}'))\, \psi(\mathbf{x})\, d^3x\, d^3x', \tag{1,71в}$$

где в случае фермионной системы

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{p},\,r} a_{\mathbf{p}r} u_\alpha^r e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar}, \qquad \psi_\alpha^+(\mathbf{x}) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{p},\,r} a_{\mathbf{p}r}^+ u_\alpha^{r+} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar}, \tag{1,72}$$

$$[a_{\mathbf{p}r},\ a_{\mathbf{p}'r'}^+]_+ = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\delta_{rr'}, \qquad [a_{\mathbf{p}r},\ a_{\mathbf{p}'r'}]_+ = [a_{\mathbf{p}r}^+,\ a_{\mathbf{p}'r'}^+]_+ = 0,$$

а для системы из бозонов

$$\psi(\mathbf{x}) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}/\hbar}, \qquad \psi^+(\mathbf{x}) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}/\hbar}, \tag{1,73}$$

$$[b_{\mathbf{k}},\ b_{\mathbf{k}'}^+]_- = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \qquad [b_{\mathbf{k}},\ b_{\mathbf{k}'}]_- = [b_{\mathbf{k}}^+,\ b_{\mathbf{k}'}^+]_- = 0.$$

При взаимодействии типа (1,71в) полное число частиц

$$N = \int \psi^+(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})\,d^3x \tag{1,74}$$

сохраняется вместе с полной энергией (1,71а), когда система замкнута. Для описания квазизамкнутой системы с переменным числом частиц опять воспользуемся распределением Гиббса (1,7), в котором параметр μ означает теперь химический потенциал частиц (1,74) рассматриваемой системы. Как и в (1,7), параметр μ выбирается так, чтобы получилось правильное среднее число частиц $\overline{N}$ системы

$$\overline{N} = \mathrm{Sp}\,N e^{(\mu N - H)\beta}/\mathrm{Sp}\,e^{(\mu N - H)\beta}.$$

Статистическая сумма системы по-прежнему имеет вид (1,21), (1,16)

$$Z = Z_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \ldots \int_0^\beta d\tau_n \langle T[H_1(\tau_1) H_1(\tau_2) \ldots H_1(\tau_n)]\rangle, \tag{1,75}$$

где

$$H_1(\tau) = \frac{1}{2} \int v(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\psi^+(\mathbf{x},\tau)\,(\psi^+(\mathbf{x}',\tau)\,\psi(\mathbf{x}',\tau))\,\psi(\mathbf{x},\tau)\,d^3x\,d^3x', \tag{1,76}$$

а зависимость $\psi(x)$ и $\psi^+(x)$ от переменной τ такая же, как и в (1,18) («представление взаимодействия»).

Чтобы воспользоваться разработанными выше правилами вычисления, перепишем выражение (1,76) в виде

$$\int_0^\beta H_1(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2} \int U(x-x')\,T[(\psi^+(x)\,\psi(x))\,(\psi^+(x')\,\psi(x'))]\,d^4x\,d^4x' - \\ - \frac{1}{2} v(0) \int \psi^+(x)\,\psi(x)\,d^4x, \tag{1,77}$$

$$U(x-x') = v(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\delta(\tau-\tau'), \tag{1,78}$$

где

$$\int_0^\beta F(\tau-\tau')\,\delta(\tau-\tau')\,d\tau' = \frac{1}{2}[F(+0)+F(-0)], \quad \delta(\tau+\beta) = \delta(\tau). \tag{1,79}$$

В качестве $\delta(\tau)$ (1,79) можно взять, например,

$$\delta(\tau) = \beta^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2n\pi\tau/\beta). \tag{1,80}$$

Замечая, что для произвольных операторов A, B, ... имеет место соотношение

$$T[T(A),\ T(B),\ \ldots] = T[A,\ B,\ \ldots],$$

перепишем статистическую сумму (1,75) в удобной форме

$$Z = Z_0 \left\langle T\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\int (\psi^+(x)\,\psi(x))\,U(x-x')\,(\psi^+(x')\,\psi(x'))\,d^4x\,d^4x' + \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. + \frac{1}{2} v(0) \int \psi^+(x)\,\psi(x)\,d^4x\right\}\right]\right\rangle, \tag{1,81}$$

к которой применимы все правила вычисления, установленные выше. Свертка операторов в случае статистики Ферми — Дирака равняется

$$\underline{\psi_\alpha(x)\psi_\beta^+(x')} \equiv \mathcal{G}_{0\alpha\beta}(x-x') =$$

$$= \begin{cases} V^{-1}\sum\limits_{\mathbf{p}}(1-n_{\mathbf{p}})\,\delta_{\alpha\beta}e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar-(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)(\tau-\tau')}, & \tau>\tau', \\ -V^{-1}\sum\limits_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}\delta_{\alpha\beta}e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar-(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)(\tau-\tau')}, & \tau<\tau', \end{cases} \tag{1,82}$$

$$n_{\mathbf{p}} = (e^{(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)\beta}+1)^{-1},$$

а для частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна,

$$\underline{\psi(x)\psi^+(x')} \equiv \mathcal{G}_0(x-x') =$$

$$= \begin{cases} V^{-1}\sum\limits_{\mathbf{p}}(1+n_{\mathbf{p}})\,e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar-(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)(\tau-\tau')}, & \tau>\tau', \\ V^{-1}\sum\limits_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar-(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)(\tau-\tau')}, & \tau<\tau', \end{cases} \tag{1,83}$$

$$n_{\mathbf{p}} = (e^{(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)\beta}-1)^{-1}.$$

В отличие от электронно-фононной системы в разложении T-произведения (1,81) на всевозможные свертки необходимо учитывать также

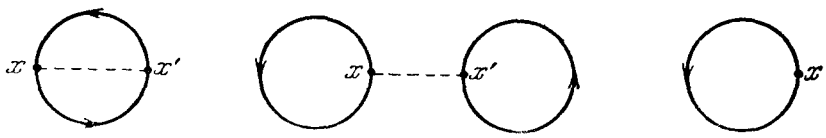

Рис. 3.

те свертки, в которые входят $\psi(x)$ и $\psi^+(x)$ с одним и тем же аргументом. Каждой такой свертке будет соответствовать на графике петля из сплошной линии, начинающейся и заканчивающейся в одной и той же точке. Пунктирной линии графика соответствует множитель $U(x-x')$. Теперь графики, наравне с вершинами, соединяющими три линии (две сплошные и одну пунктирную), имеют вершины, куда сходятся только две сплошные линии. Появление последних обязано выражению $\int \psi^+(x)\psi(x)\,d^4x$ в (1,81). Графики, соответствующие членам ряда (1,81), пропорциональным, например, первой степени потенциала v, изображены на рис. 3. Этим графикам соответствует выражение Z_1 (для фермионов)

$$Z_1 = -\frac{1}{2}v(0)\int \mathcal{G}_{0\alpha\alpha}(0)\,d^4x - \frac{1}{2}\int U(x-x')\,\mathcal{G}_{0\alpha\alpha}(0)\,\mathcal{G}_{0\beta\beta}(0)\,d^4x\,d^4x' +$$
$$+\frac{1}{2}\int U(x-x')\,\mathcal{G}_{0\alpha\beta}(x-x')\,\mathcal{G}_{0\beta\alpha}(x'-x)\,d^4x\,d^4x'. \tag{1,84}$$

Имея в виду

$$\mathcal{G}_{0\alpha\beta}(0) = -V^{-1}\sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}\delta_{\alpha\beta}, \quad v(0) = V^{-1}\sum_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}}, \quad \int v(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,d^3x = v_0,$$

$$\mathcal{G}_{0\alpha\beta}(x-x')\,\mathcal{G}_{0\beta\alpha}(x'-x) =$$
$$= -2V^{-2}\sum_{\mathbf{p}}\sum_{\mathbf{p}'} n_{\mathbf{p}}(1-n_{\mathbf{p}'})\,e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar-(\varepsilon_{\mathbf{p}'}-\varepsilon_{\mathbf{p}})|\tau-\tau'|},$$

где $v_{\mathbf{p}}$ — компонента фурье-функции $v(\mathbf{x})$, преобразуем (1,84) к виду (Мацубара[14])

$$Z_1 = V^{-1}\beta \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{p}'} \{v_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}'} - 2v_0 n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}'} - v_{\mathbf{p}'-\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} (1 - n_{\mathbf{p}'})\} =$$
$$= -V^{-1}\beta \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{p}'} (2v_0 - v_{\mathbf{p}'-\mathbf{p}}) n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}'}, \tag{1,85}$$

из чего видно, что наличие выражения $v(0)\int \psi^+(x)\psi(x)\,d^4x$ в (1,81) означает вычитание в конечном результате собственно-энергетического члена. В случае статистики Бозе — Эйнштейна в круглой скобке (1,85) будет стоять знак «+», множитель 2 у v_0 пропадет и все выражение будет поделено на 2.

Вычисление членов ряда (1,81) можно производить также в p-представлении. В самом деле, используя общее свойство функций распространения (1,82) — (1,83)

$$\mathcal{G}_0(\mathbf{x}, \tau) = \mp \mathcal{G}_0(\mathbf{x}, \tau + \beta) \tag{1,86}$$

(верхний знак для фермионов, нижний — для бозонов), а также тот факт, что каждая вершина соединяет четное число фермионных линий, причем $U(\mathbf{x}, \tau + \beta) = U(\mathbf{x}, \tau)$, легко убедиться, что во всех членах ряда (1,81) имеет место равенство $\int\limits_0^\beta \ldots d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{-\beta}^{\beta} \ldots d\tau$ для любой переменной τ. Тогда разложение в ряд Фурье по τ проводится в каждом члене ряда (1,81), если этот член не сводится к простой константе.

В p-представлении каждой сплошной линии соответствует множитель $\mathcal{G}_{0\alpha\beta}(\mathbf{p}, \omega_n)$ (2,64) для фермионов и множитель

$$\mathcal{G}_0(\mathbf{p}, \omega_n) = -(i\omega_n + \mu - \varepsilon_{\mathbf{p}})^{-1}, \quad \omega_n = 2n\pi/\beta \tag{1,87}$$

для бозонов. Пунктирной линии соответствует

$$U(\mathbf{k}, \omega_n) = v_{\mathbf{k}}, \quad v_{\mathbf{k}} = \int v(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}/\hbar}\, d^3x. \tag{1,88}$$

Дальнейшие замечания по диаграммной технике те же, что и в случае электронно-фононной системы.

При обобщении на различные виды парного взаимодействия частиц неявно предполагалось, что в рассматриваемой ферми-системе отсутствует сверхпроводимость, а бозе-система находится при температуре выше точки бозе-конденсации, так как наше доказательство важнейшей теоремы (1,34) — (1,35), лежащей в основе изложенной термодинамической теории возмущений, не распространяется на указанные случаи. Термодинамическая теория возмущений для ферми-системы со сверхпроводимостью и бозе-системы ниже точки бозе-конденсации должна строиться соответственно на основе обобщения работ Горькова[7] и Беляева[6].

§ 2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Система зацепляющихся уравнений. В предыдущем разделе на основе методов квантовой теории поля была изложена новая термодинамическая теория возмущений. Применение методов квантовой теории поля для целей статистики может быть значительно продолжено, если использовать функции Грина. Как и в квантовой теории поля, методика функций Грина позволяет в статистической физике получить физические приближения, которые отличаются от разложений теории возмущений, представляя собой, как правило, результат суммирования бесконечной суммы

определенных членов ряда теории возмущений. Использование функций Грина оказалось особенно плодотворным при исследовании термодинамических свойств системы, при вычислении полной энергии, а также энергетического спектра слабо возбужденных состояний статистической системы.

Рассмотрим сначала так называемые термодинамические функции Грина статистической системы, которые определим следующим образом:

$$\mathcal{G}_1(x, x') = \langle T[\psi(x)\psi^+(x')S]\rangle/\langle S\rangle, \tag{2,1}$$

$$\mathcal{G}_2(x_1x_2, x_1'x_2') = \langle T[\psi(x_1)\psi(x_2)\psi^+(x_1')\psi^+(x_2')S]\rangle/\langle S\rangle, \tag{2,2}$$

. . . . . .

$$\mathcal{G}_n(x_1\ldots x_n, x_1'\ldots x_n') = \langle T[\psi(x_1)\ldots\psi(x_n)\psi^+(x_1')\ldots\psi^+(x_n')S]\rangle/\langle S\rangle, \tag{2,3}$$

и назовем их соответственно одночастичной, двухчастичной и т. д. функциями. В случае электронно-фононной системы ψ-операторы, входящие в электронные термодинамические функции Грина (2,1) — (2,3), определены в (1,18), (1,3), функция $S = S(\beta)$ дана в (1,16) — (1,17), а фононные функции Грина определяются аналогично (2,1) — (2,3). Например,

$$\mathcal{D}_1(x, x') = \langle T[\varphi(x)\varphi(x')S]\rangle/\langle S\rangle \tag{2,4}$$

представляет собой одночастичную термодинамическую функцию Грина фонона.

В случае статистической системы из попарно взаимодействующих частиц (1,71а) — (1,71в) в качестве $S = S(\beta)$ в (2,1) — (2,3) следует взять (1,16), (1,77).

При работе с функциями Грина бывает удобно воспользоваться следующей известной теоремой, связывающей T- и N-произведения операторов, подробное доказательство которой содержится в работе Андерсена [44] и Мацубары [14]. Пусть $F(\psi^+, \psi, \varphi)$ — некоторый функционал (о функциональном дифференцировании см. приложение 1), который можно разложить в функциональный ряд по операторам ψ^+, ψ и φ (для определенности будем иметь в виду электронно-фононную систему); тогда

$$T[F(\psi^+, \psi, \varphi)] = \mathcal{N}[e^{\Delta}e^{\Sigma}F(\psi^+, \psi, \varphi)e^{-\Delta}e^{-\Sigma}], \tag{2,5}$$

где

$$\Sigma = \int d^4x\, d^4y\, \mathcal{G}_{0\alpha\beta}(x-y)\frac{\delta}{\delta\psi_\beta^+(y)}\frac{\delta}{\delta\psi_\alpha(x)}, \tag{2,6}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, \mathcal{D}_0(x-y)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}, \tag{2,7}$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta\psi_\alpha(x)}, \psi_\beta(y)\right]_+ = \left[\frac{\delta}{\delta\psi_\alpha^+(x)}, \psi_\beta^+(y)\right]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta(x-y),$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta\psi_\alpha(x)}, \psi_\beta^+(y)\right]_+ = \left[\frac{\delta}{\delta\psi_\alpha^+(x)}, \psi_\beta(y)\right]_+ = 0, \tag{2,8}$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta\psi_\alpha(x)}, \frac{\delta}{\delta\psi_\beta(y)}\right]_+ = \left[\frac{\delta}{\delta\psi_\alpha^+(x)}, \frac{\delta}{\delta\psi_\beta^+(y)}\right]_+ = \left[\frac{\delta}{\delta\psi_\alpha(x)}, \frac{\delta}{\delta\psi_\beta^+(y)}\right]_+ = 0,$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}, \varphi(y)\right]_- = \delta(x-y), \quad \left[\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}, \frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\right]_- = 0. \tag{2,9}$$

В применении к термодинамическим функциям Грина (2,1) — (2,4) указанная теорема дает, например,

$$\mathcal{G}_n(x_1\ldots x_n, x_1'\ldots x_n') = \langle\mathcal{N}[e^{\Delta}e^{\Sigma}\psi(x_1)\ldots\psi(x_n)\psi^+(x_1')\ldots\psi^+(x_n')\sigma]\rangle/\langle S\rangle, \tag{2,10}$$

$$\sigma = \exp\left(-g\int\psi^+(x)\varphi(x)\psi(x)\,d^4x\right). \tag{2,11}$$

Здесь оператор $\exp(-\Delta)\exp(-\Sigma)$ заменен единицей, так как волновые функции статистической системы, по которым производится усреднение в (2,10), не являются функционалами от операторов ψ^+, ψ и φ, и, следовательно, все члены ряда $\exp(-\Delta)\exp(-\Sigma)$, содержащие функциональные производные, обращаются в нуль.

Систему зацепляющихся уравнений для термодинамических функций Грина (2,1)—(2,3) легко получить, если воспользоваться коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} e^{\Sigma}\psi_\alpha(x) &= \psi_\alpha(x)\,e^{\Sigma} + \int d^4y\,\mathcal{G}_{0\alpha\beta}(x-y)\,\frac{\delta}{\delta\psi^+_\beta(y)}\,e^{\Sigma}, \\ e^{\Delta}\varphi(x) &= \varphi(x)\,e^{\Delta} + \int d^4y\,\mathcal{D}_0(x-y)\,\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\,e^{\Delta}, \end{aligned} \tag{2,12}$$

которые проверяются непосредственным вычислением. Действительно, прокоммутируем оператор $\exp\Sigma$ с $\psi(x_1)$ в (2,10), имея в виду, что члены, в которых операторы ψ (или ψ^+) и φ стоят левее соответственно операторов $\exp\Sigma$ и $\exp\Delta$, обращаются в нуль в соответствии с теоремой о среднем от $\mathcal{N}$-произведений. В результате такой коммутации возникнет функциональная производная $\delta/\delta\psi^+$, при взятии которой по правилам (2,8) появится, между прочим, член с оператором φ согласно формуле

$$\left[\frac{\delta}{\delta\psi^+_\beta(y)}\right]\sigma = -g\varphi(y)\,\psi_\beta(y)\,\sigma. \tag{2,13}$$

Однако от $\varphi(y)$ легко избавиться, коммутируя оператор $\exp\Delta$ с $\varphi(y)$ при помощи (2,12). В результате получается следующая бесконечная система зацепляющихся интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}_n(x_1\ldots x_n, x_1'\ldots x_n') = \\ &\quad = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\mathcal{G}_0(x_1-x_s')\,\mathcal{G}_{n-1}(x_2\ldots x_n, x_1'\ldots x_{s-1}'x_{s+1}'\ldots x_n') - \\ &\quad - g^2\int d^4y\,d^4z\,\mathcal{G}_0(x_1-y)\,\mathcal{D}_0(y-z)\,\mathcal{G}_{n+1}(yx_2\ldots x_nz, zx_1'\ldots x_n'), \\ &\qquad n = 1, 2, \ldots, \infty. \end{aligned} \tag{2,14}$$

Здесь ради краткости спинорный индекс у функции $\mathcal{G}$ включен в соответствующие координатные переменные, так что интегрирование по координате подразумевает также суммирование по соответствующему спинорному индексу. Полученная система зацепляющихся уравнений для функций Грина (2,14) очень близка к интегральным уравнениям, связывающим молекулярные функции распределения различных порядков, найденные Борном и Грином[45] и Кирквудом[46] в классической статистической механике (см. в связи с этим работы Боголюбова[47], а также Чэнь Чуньсяня[28]). Поскольку невозможно найти точное решение системы уравнений (2,14), то пытаются найти различные приближенные решения. Так, при исследовании бесконечной системы уравнений (2,14) обычно обрывают ее, задавшись определенным видом функции Грина некоторого фиксированного порядка, и находят решение «оборванной »замкнутой системы уравнений. Например, если задаться определенным видом трехчастичной функции Грина $\mathcal{G}_3(x_1x_2x_3, x_1'x_2'x_3')$, то одно- и двухчастичная функции Грина находятся из уравнений:

$$\mathcal{G}_1(x, x') = \mathcal{G}_0(x-x') - g^2\int d^4y\,d^4z\,\mathcal{G}_0(x-y)\,\mathcal{D}_0(y-z)\,\mathcal{G}_2(yz, zx'), \tag{2,15}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2(x_1x_2, x_1'x_2') &= \mathcal{G}_0(x_1-x_2')\,\mathcal{G}_1(x_2, x_1') - \mathcal{G}_0(x_1-x_1')\,\mathcal{G}_1(x_2, x_2') - \\ &\quad - g^2\int d^4y\,d^4z\,\mathcal{G}_0(x_1-y)\,\mathcal{D}_0(y-z)\,\mathcal{G}_3(yx_2z, zx_1'x_2'). \end{aligned} \tag{2,16}$$

При написании уравнений для функций Грина можно учесть взаимодействие электронов между собой, вводя некоторое самосогласованное поле в оператор энергии взаимодействия (1,4) и, следовательно, в оператор S (1,16). Таким путем Мацубара[14] определил энергетический спектр электронов в металле. Его результаты совпали с результатами Бардина[48], полученными совершенно другим путем.

Уравнения для термодинамической функции Грина. Для прикладных целей наиболее удобно пользоваться уравнениями, содержащими только одночастичные термодинамические функции Грина. Самый короткий путь получения таких уравнений состоит в применении швингеровской техники вариационных производных (Швингер[1]). В качестве иллюстрации рассмотрим статистическую систему из электронов и позитронов взаимодействующих друг с другом посредством электромагнитного поля (плазма). Ради общности считаем задачу релятивистской. Гамильтониан системы в шредингеровском представлении запишется так*):

$$H = H_0 + H_1, \tag{2,17а}$$

$$H_0 = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} \Big(\sum_{r=1}^{2} a^+_{\mathbf{p}r} a_{\mathbf{p}r} + \sum_{r=3}^{4} b^+_{\mathbf{p}r} b_{\mathbf{p}r} \Big) + \sum_{\mathbf{k},\,\lambda=1}^{2} \omega_{\mathbf{k}} c^+_{\mathbf{k}\lambda} c_{\mathbf{k}\lambda}, \tag{2,17б}$$

$$H_1 = -\int j(\mathbf{x})\, A(\mathbf{x})\, d^3x, \tag{2,17в}$$

$$j_\nu(\mathbf{x}) = ieN\,(\overline{\psi}(\mathbf{x})\,\gamma_\nu \psi(\mathbf{x})) = (ie/2)\,\gamma_{\nu\alpha\beta}\,[\overline{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\,\psi_\beta(\mathbf{x}) - \psi_\beta(\mathbf{x})\,\overline{\psi}_\alpha(\mathbf{x})], \tag{2,17г}$$

$$\left.\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x}) &= V^{-1/2} \Big(\sum_{\mathbf{p},\,r=1}^{2} a_{\mathbf{p}r} u^r(\mathbf{p})\, e^{i\mathbf{px}} + \sum_{\mathbf{p},\,r=3}^{4} b^+_{\mathbf{p}r} u^r(-\mathbf{p})\, e^{-i\mathbf{px}} \Big),\\
\overline{\psi}(\mathbf{x}) &= V^{-1/2} \Big(\sum_{\mathbf{p},\,r=1}^{2} a^+_{\mathbf{p}r} \overline{u}^r(\mathbf{p})\, e^{-i\mathbf{px}} + \sum_{\mathbf{p},\,r=3}^{4} b_{\mathbf{p}r} \overline{u}^r(-\mathbf{p})\, e^{-i\mathbf{px}} \Big),\\
A_\nu(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k},\,\lambda=1}^{4} (2\omega_{\mathbf{k}} V)^{-1/2} (c_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{kx}} + c^+_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i\mathbf{kx}})\, l^\lambda_\nu.
\end{aligned}\right\} \tag{2,18}$$

Здесь H_0 — гамильтониан свободных электронно-позитронного и фотонного полей, H_1 — оператор их взаимодействия; $u^r(\mathbf{p})$ при $r = 1, 2$ является решением уравнения Дирака

$$(i\hat{p} + m)\, u^r(\mathbf{p}) = 0 \tag{2,19}$$

для положительной энергии $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \equiv -ip_4$, а при $r = 3, 4$ — для отрицательной энергии, равной $-\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, $\overline{u}^r = u^{r*}\gamma_4$; A_ν — четырехмерный векторный потенциал электромагнитного поля; $a_{\mathbf{p}r}\,(b_{\mathbf{p}r})$ и $a^+_{\mathbf{p}r}\,(b^+_{\mathbf{p}r})$ — операторы соответственно поглощения и рождения электрона (позитрона) с импульсом $\mathbf{p}$, поляризацией r и энергией $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, а $c_{\mathbf{k}\lambda}$ и $c_{\mathbf{k}\lambda}$ — аналогичные операторы для фотона с импульсом $\mathbf{k}$, вектором поляризации l^λ и энергией $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$. Операторы изменения чисел частиц удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$[a_{\mathbf{p}r},\ a^+_{\mathbf{p}'r'}]_- = [b_{\mathbf{p}r},\ b^+_{\mathbf{p}'r'}]_- = \delta_{rr'}\delta_{\mathbf{pp}'}, \quad [c_{\mathbf{k}\lambda},\ c^+_{\mathbf{k}'\lambda'}]_- = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mathbf{kk}'}. \tag{2,20}$$

---

*) Ниже используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$, $e^2/4\pi\hbar c = 1/137$, и принято следующее правило суммирования по векторным индексам: $pq = p_\nu q_\nu = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4$. При этом $\hat{q} = q_\nu\gamma_\nu$, где γ_4 и $\gamma_{1,2,3} = -i\gamma_4\alpha_{1,2,3}$ — обычные дираковские матрицы. N обозначает N-произведение в смысле квантовой электродинамики[37].

В приложениях к статистике весьма существенно, что наравне с энергией (2,17а) замкнутой системы сохраняется также полный заряд Q

$$Q = \frac{e}{2} \int \mathrm{Sp}\,[\psi^*(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})\,\psi^*(\mathbf{x})]\,d^3x =$$

$$= e\Big(\sum_{\mathbf{p},\,r=1}^{2} a^+_{\mathbf{p}r} a_{\mathbf{p}r} - \sum_{\mathbf{p},\,r=3} b^+_{\mathbf{p}r} b_{\mathbf{p}r}\Big), \tag{2,21}$$

или, что то же самое, сохраняется разность полного числа электронов N^- и позитронов N^+

$$N^- = \sum_{\mathbf{p},\,r=1}^{2} a^+_{\mathbf{p}r} a_{\mathbf{p}r}, \qquad N^+ = \sum_{\mathbf{p},\,r=3}^{4} b^+_{\mathbf{p}r} b_{\mathbf{p}r}. \tag{2,22}$$

Поэтому квазизамкнутую статистическую электронно-позитронную систему удобно описывать при помощи распределения Гиббса с переменным числом частиц, причем вероятность $W_{n,\,N^- - N^+}$ у системы содержать заданную разность $N^- - N^+$ электронов и позитронов и находиться при этом в состоянии с энергией $E_{n,\,N^- - N^+}$ имеет вид

$$W_{n,\,N^- - N^+} = e^{(\Omega + \mu(N^- - N^+) - E_{n,\,N^- - N^+})\beta}, \tag{2,23}$$

где μ и $-\mu$ — химические потенциалы соответственно электронов и позитронов. Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, легко найти статистическую сумму Z системы

$$Z = \mathrm{Sp}\, e^{(\mu(N^- - N^+) - H)\beta} = Z_0 \langle S(\beta)\rangle, \tag{2,24}$$

$$S(\beta) = T e^{\int j(x) A(x)\, d^4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \ldots \int d^4x_n T\,[N(\bar\psi(x_1)\,\hat A(x_1)\,\psi(x_1)) \ldots$$

$$\ldots N(\bar\psi(x_n)\,\hat A(x_n)\,\psi(x_n))], \tag{2,25}$$

где операторы поля, как и в случае (1,16), (1,75), написаны в своеобразном «представлении взаимодействия», так что зависимость операторов $\bar\psi(x)$, $\psi(x)$ и $A(x)$ от переменной τ дается одним и тем же законом, например:

$$\psi(x) = e^{-(\mu(N^- - N^+) - H_0)\tau}\,\psi(\mathbf{x})\, e^{(\mu(N^- - N^+) - H_0)\tau}. \tag{2,26}$$

Электронные и фотонные термодинамические функции Грина, а также другие термодинамические характеристики системы можно найти, используя (2,25), методами теории возмущений, с тем, однако, уточнением, что в качестве свертки электронно-позитронных операторов $\psi(x)\,\bar\psi(x') \equiv \mathcal{G}_0(x - x')$ и операторов фотонного поля $A_\mu(x)\,A_\nu(x') \equiv \mathcal{D}_{0\mu\nu}(x - x')$ необходимо брать следующие выражения:

$$\mathcal{G}_0(x - x') = \begin{cases} \dfrac{\hat p - m}{(2\pi)^3} \displaystyle\int \frac{d^3p}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} [(n^-_{\mathbf{p}} - 1)\, e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)(\tau - \tau')} + \\ \qquad + n^+_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + (\varepsilon_{\mathbf{p}} + \mu)(\tau - \tau')}], \quad \tau > \tau', & (2,27) \\ \dfrac{\hat p - m}{(2\pi)^3} \displaystyle\int \frac{d^3p}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} [(n^+_{\mathbf{p}} - 1)\, e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + (\varepsilon_{\mathbf{p}} + \mu)(\tau - \tau')} + \\ \qquad + n^-_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)(\tau - \tau')}], \quad \tau < \tau', & (2,28) \end{cases}$$

$$\hat{\bar{p}} = \gamma_4 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \mu \right) + \gamma^{\nabla} \equiv \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \mu \gamma_4,$$

$$\mathscr{D}_{0\mu\nu}(x - x') = \frac{\delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_{\mathbf{k}}} [(1 + n_{\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - \omega_{\mathbf{k}} |\tau - \tau'|} + n_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \omega_{\mathbf{k}} |\tau - \tau'|}], \tag{2,29}$$

где $n_{\mathbf{p}}^-$, $n_{\mathbf{p}}^+$ и $n_{\mathbf{k}}$ — функции распределения соответственно электронов, позитронов и фотонов

$$n_{\mathbf{p}}^{\mp} = (e^{(\varepsilon_{\mathbf{p}} \mp \mu)\beta} + 1)^{-1}, \qquad n_{\mathbf{k}} = (e^{\omega_{\mathbf{k}}\beta} - 1)^{-1}. \tag{2,30}$$

Однако наиболее ценны вычисления без теории возмущений, основанные на решении уравнений для функций Грина. Для вывода этих уравнений заметим, что при помощи

$$\begin{aligned} T[\psi(x) \ldots \psi(x') S] &= ST[\tilde{\psi}(x) \ldots \tilde{\psi}(x')], \\ T[A(x) \ldots A(x') S] &= ST[\tilde{A}(x) \ldots \tilde{A}(x')] \end{aligned} \tag{2,31}$$

термодинамические функции Грина могут быть записаны также в другом виде. Так, например, для одночастичных термодинамических функций Грина (индекс «1» в дальнейшем опускаем) получим

$$\begin{aligned} \mathscr{G}_{\alpha\beta}(x, x') &= \mathrm{Sp}\, \{e^{(\Omega + \mu(N^- - N^+) - H)\beta} T(\tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\bar{\psi}}_\beta(x'))\} \equiv \\ &\equiv [T(\tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\bar{\psi}}_\beta(x'))]_{\mathrm{cp}}, \\ \mathscr{D}_{\mu\nu}(x, x') &= \mathrm{Sp}\, \{e^{(\Omega + \mu(N^- - N^+) - H)\beta} T(\tilde{A}_\mu(x) \tilde{A}_\nu(x'))\} \equiv \\ &\equiv [T(\tilde{A}_\mu(x) \tilde{A}_\nu(x')]_{\mathrm{cp}}, \end{aligned} \tag{2,32}$$

где значок тильда $\sim$ отмечает операторы в гейзенберговском представлении

$$\tilde{\psi}(x) = e^{-(\mu(N^- - N^+) - H)\tau} \psi(\mathbf{x}) e^{(\mu(N^- - N^+) - H)\tau}. \tag{2,33}$$

Используя соотношения коммутации операторов $\psi(\mathbf{x})$, $\bar{\psi}(\mathbf{x})$ и $A(\mathbf{x})$, нетрудно убедиться, что гейзенберговские операторы полей удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(\hat{\bar{p}} - ie\hat{\tilde{A}}(x) + m)\tilde{\psi}(x) = 0, \tag{2,34}$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \tilde{A}(x) = -ieN(\tilde{\bar{\psi}}(x) \gamma \tilde{\psi}(x)), \tag{2,35}$$

которые совпадают с соответствующими уравнениями квантовой электродинамики, если произвести замену $\tau \to it$, $\mu \to 0$.

С целью получить уравнения для термодинамических функций Грина (2,32) введем формально вспомогательную функцию внешних токов $J(x)$, где $J(x)$ — неквантованная функция. Тогда в операторе взаимодействия (2,17в) появится дополнительный член, равный $-\int J(x) A(\mathbf{x}) d^3x$, а гейзенберговские операторы электронно-позитронного и фотонного полей будут удовлетворять тем же уравнениям (2,34) — (2,35), только к электронно-позитронному току в (2,35) добавится внешний ток $J(x)$. Рассмотрим функции Грина при наличии внешнего поля, которые определим по формулам (2,1), (2,4) и (2,32), в которых

$$S(\beta) = Te^{\int (j(x) + J(x)) A(x)\, d^4x}. \tag{2,36}$$

В этом случае функции Грина будут функционалами внешнего поля $J(x)$.

Можно составить для таких функций Грина уравнения, решение которых при $J=0$ дает термодинамические функции Грина реальных статистических систем без внешнего поля. Для этого рассмотрим $T[\tilde{\psi}(\mathbf{x}, \tau)\tilde{\bar{\psi}}(\mathbf{x}', \tau')]$ как функцию от τ. При $\tau=\tau'$ эта функция претерпевает скачок, равный $\beta\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}T[\tilde{\psi}(x)\tilde{\bar{\psi}}(x')]=T\left[\frac{\partial\tilde{\psi}(x)}{\partial\tau}\tilde{\bar{\psi}}(x')\right]+\beta\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\delta(\tau-\tau'). \qquad (2,37)$$

Производя операцию усреднения $[\ldots]_{\text{ср}}$ обеих частей равенства (2,37) и используя (2,34), (2,1) и (2,36), легко найдем

$$\left(\hat{p}-ie[\hat{A}(x)]_{\text{ср}}+m-ie\gamma_\nu\frac{\delta}{\delta J_\nu(x)}\right)\mathcal{G}(x, x')=\delta(x-x'). \qquad (2,38)$$

Аналогично, усредняя уравнение для $\tilde{A}(x)$, а затем взяв вариационную производную по току $\frac{\delta}{\delta J_\nu(x')}$ от обеих частей этого уравнения с учетом (2,31), получим

$$\left(\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\mathcal{D}_{\mu\nu}(x, x')=-\delta_{\mu\nu}\delta(x-x')+ie\gamma_{\mu\alpha\beta}\frac{\delta\mathcal{G}_{\beta\alpha}(x, x)}{\delta J_\nu(x')}, \qquad (2,39)$$

где принятое обозначение

$$\frac{\delta[\tilde{A}_\mu(x)]_{\text{ср}}}{\delta J_\nu(x')}=[T(\tilde{A}_\mu(x)\tilde{A}_\nu(x'))]_{\text{ср}}-[\tilde{A}_\mu(x)]_{\text{ср}}[\tilde{A}_\nu(x')]_{\text{ср}}\equiv\mathcal{D}_{\mu\nu}(x, x')$$

при $J=0$ совпадает с определением термодинамической функции Грина (2,32), (2,4), так как $[\tilde{A}(x)]_{\text{ср}}\big|_{J=0}=0$.

Систему уравнений (2,38) — (2,39) обычно переписывают в другом виде, выражая вариационные производные через массовый M, поляризационный $\Pi_{\mu\nu}$ и вершинный Γ_ν операторы по формулам:

$$-ie\gamma_\nu\frac{\delta\mathcal{G}(x, x')}{\delta J_\nu(x')}=e^2\int\gamma_\nu\mathcal{G}(x, y)\,\Gamma_\mu(yz, y')\,\mathcal{D}_{\mu\nu}(y', x)\,\mathcal{G}(z, x')\,d^4y\,d^4y'\,d^4z\equiv$$
$$\equiv\int M(x, z)\,\mathcal{G}(z, x')\,d^4z, \qquad (2,40)$$

$$-ie\gamma_{\mu\alpha\beta}\frac{\delta\mathcal{G}_{\beta\alpha}(x, x)}{\delta J_\nu(x')}=e^2\,\mathrm{Sp}\int\gamma_\mu\mathcal{G}(x, y)\,\Gamma_{\nu'}(yz, y')\,\mathcal{G}(z, x)\times$$
$$\times\mathcal{D}_{\nu'\nu}(y', x')\,d^4y\,d^4y'\,d^4z\equiv\int\Pi_{\mu\nu'}(x, y)\,\mathcal{D}_{\nu'\nu}(y, x')\,d^4y, \qquad (2,41)$$

$$\Gamma_\nu(yz, y')=i\frac{\delta\mathcal{G}^{-1}(y, z)}{\delta e[\tilde{A}_\nu(y')]_{\text{ср}}}=\gamma_\nu\delta(y-z)\,\delta(z-y')+i\frac{\delta M(y, z)}{\delta e[\tilde{A}_\nu(y')]_{\text{ср}}}. \qquad (2,42)$$

При выключении внешнего поля $J=0$ функции Грина, входящие в соотношения (2,38) — (2,42), совпадают с термодинамическими функциями Грина (2,32), которые в силу однородности рассматриваемой статистической системы являются функциями разности координат $\mathcal{G}(x, x')\equiv\equiv\mathcal{G}(x-x')$, $\mathcal{D}(x, x')\equiv\mathcal{D}(x-x')$ (в чем легко убедиться непосредственным вычислением, проводя рассуждения, приведшие к формуле (3,4)). Следовательно, массовый, поляризационный и вершинный операторы также являются функциями разности координат

$$M(x, x')\equiv M(x-x'),\quad \Pi(x, x')\equiv\Pi(x-x'),\quad \Gamma(xy, z)\equiv\Gamma(x-y, y-z),$$

причем как функции разности четвертой координаты $\tau-\tau'$ все названные функции определены в интервале от $-\beta$ до β. Однако, продолжив

периодически, мы определим их на всей оси τ. Повторяя доказательство (1,61) для функций $\mathcal{G}$ и $\mathcal{D}$, легко обнаружить, что эти термодинамические функции Грина в общем случае $H_1 \neq 0$ также обладают свойством (1,61) — (1,62) (Абрикосов, Горьков и Дзялошинский[15]). Согласно определению (2,40) — (2,42) массовый и поляризационный операторы при любом τ имеют это же свойство

$$M(\mathbf{x}, \tau) = -M(\mathbf{x}, \tau+\beta), \qquad \Pi(\mathbf{x}, \tau) = \Pi(\mathbf{x}, \tau+\beta). \tag{2,43}$$

Это обстоятельство при переходе к p-представлению позволяет все интегралы $\int\limits_0^\beta \ldots d\tau$, содержащиеся в соотношениях (2,38) — (2,42), заменить на $\frac{1}{2}\int\limits_{-\beta}^{\beta} \ldots d\tau$. После этого преобразование Фурье (1,60) легко проводится во всех выражениях (2,38) — (2,42). В результате получаются следующие уравнения в p-представлении для термодинамических функций Грина (2,32) (Фрадкин[18,20]):

$$[i\mathbf{p}\gamma - (ip_4 + \mu)\gamma_4 + m + M(p)]\,\mathcal{G}(p) = 1, \tag{2,44}$$

$$[k^2 - \Pi(k)]\,\mathcal{D}(k) = 1, \tag{2,45}$$

$$M(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^3\beta}\sum_{k_4}\int \gamma\mathcal{G}(p+k)\,\Gamma(p+k,\ k)\,\mathcal{D}(k)\,d^3k, \tag{2,46}$$

$$\Pi(k) = \frac{e^2}{(2\pi)^3\beta}\sum_{p_4}\int \mathrm{Sp}\,\gamma\mathcal{G}(p+k)\,\Gamma(p+k,\ k)\,\mathcal{G}(p)\,d^3p, \tag{2,47}$$

$$\Gamma(p,\ p') = \gamma + \Lambda(p,\ p'),$$

$$p_4 \equiv \omega_n = (2n+1)\pi/\beta, \qquad k_4 \equiv \omega_m = 2m\pi/\beta.$$

Здесь $\Lambda(p, p')$ определена в виде ряда по e^2, представляющего собой совокупность всех графиков вершинной части, кроме простой вершины (точки).

Перепишем уравнения (2,44) — (2,45) в виде

$$\mathcal{G}(p) = \mathcal{G}_0(p) - \mathcal{G}_0(p)\,M(p)\,\mathcal{G}(p), \tag{2,48}$$

$$\mathcal{D}(k) = \mathcal{D}_0(k) + \mathcal{D}_0(k)\,\Pi(k)\,\mathcal{D}(k), \tag{2,49}$$

где термодинамические функции Грина $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{D}_0$ нулевого ($e^2 = 0$) приближения

$$\mathcal{G}_0(p) = [i\mathbf{p}\gamma - (ip_4 + \mu)\gamma_4 + m]^{-1}, \quad \mathcal{D}_0(k) = k^{-2} \tag{2,50}$$

совпадают со свертками операторов, соответственно (2,27) и (2,29), написанными в p-представлении. Если решать уравнения (2,48) — (2,49) методом итераций, то для $\mathcal{G}$ и $\mathcal{D}$ получим ряд теорий возмущений. Однако лучшее физическое приближение находится путем разложения ядра уравнения (2,48) и (2,49) в ряд по e^2 или по другому параметру термодинамической задачи с последующим точным решением уравнения с приближенным ядром. Так, например, оставляя в (2,49) только первое отличное от нуля приближение $\Pi^1(k)$ ядра $\Pi(k)$ (это приближение получится, если в (2,47) заменить все функции их нулевыми приближениями), найдем

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = k^{-2}\,[1 - k^{-2}\,\Pi^1(k)]^{-1}_{\mu\nu}, \tag{2,51}$$

где $[1 - k^{-2}\,\Pi^1(k)]^{-1}_{\mu\nu}$ — обратная матрица по отношению к матрице $\delta_{\mu\nu} - k^{-2}\,\Pi^1_{\mu\nu}(k)$. На языке теории возмущений, решение (2,51)

представляет собой результат суммирования бесконечного числа членов определенного класса

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_0\Pi^1\mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_0\Pi^1\mathscr{D}_0\Pi^1\mathscr{D}_0 + \ldots, \tag{2,52}$$

которым соответствуют графики рис. 4.

При конкретном использовании решения уравнений (2,48) — (2,49) могут появиться бесконечности, связанные с перенормировкой массы и заряда частицы. Однако эти бесконечности легко устраняются по тем же рецептам, какие существуют в электродинамике. Этот вопрос в связи с приложением к статистике рассматривался рядом авторов, например Фрадкиным [19], Ахиезером и Пелетминским [23]. Последние вычислили термодинамический потенциал газа электронов, позитронов и фотонов с учетом членов, пропорциональных $e^4 \ln e^2$. Возникающие при этом расходимости устранялись путем перенормировки заряда и массы электрона и переопределения уровня вакуума.

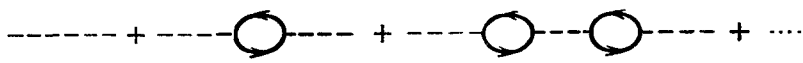

Рис. 4.

В нерелятивистском приближении, когда средняя энергия теплового движения частицы много меньше ее энергии покоя $\beta^{-1} \ll m$, необходимо сделать замену $\varepsilon_{\mathbf{p}} \to m + (\mathbf{p}^2/2m)$, $\mu \to m + \mu'$, $\gamma_4 \to \delta_{\alpha\beta}$ (α и β пробегают значения 1; 2) и считать все величины малыми по сравнению с m; тогда

$$\mathscr{G}_0(p) = \frac{-i\mathbf{p}\gamma + (ip_4 + \mu)\gamma_4 + m}{(p_4 - i\mu)^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \to \frac{-\delta_{\alpha\beta}}{ip_4 + \mu' - \dfrac{\mathbf{p}^2}{2m}}, \tag{2,53}$$

что совпадает с (1,64). Аналогично, выражение (2,27) в нерелятивистском случае переходит в (1,38), (1,47), так как функция распределения позитронов (2,30) обращается тождественно в нуль. Для функции $\mathscr{D}_0(k)$, пренебрегая членами типа запаздывающего взаимодействия, получим в нерелятивистском случае

$$\mathscr{D}_{0\mu\nu}(k) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{\mathbf{k}^2 + k_4^2} \to \frac{1}{\mathbf{k}^2}, \tag{2,54}$$

а в поляризационном операторе (2,47) следует положить $\gamma_{1,2,3} = 0$, $\gamma_4 = \delta_{\alpha\beta}$ и $\mathscr{G}_0$ заменить нерелятивистским значением (2,53). Учитывая сделанные замечания, нетрудно написать уравнение для термодинамической функции $\mathscr{G}(p)$ (а также для функции $\mathscr{D}$), описывающей систему нерелятивистских частиц, взаимодействующих между собой посредством кулоновского поля (см. далее, уравнения (2,66) — (2,71)).

При переходе к абсолютному нулю температуры $\beta \to \infty$ во всех соотношениях (2,44) — (2,49) суммы по дискретным частотам p_4 и k_4 заменятся на интегралы

$$\frac{1}{\beta}\sum_{p_4} \ldots \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots d^4p. \tag{2,55}$$

В нерелятивистских формулах (например, при использовании теории возмущений) могут встречаться интегралы от нескольких сомножителей вида (2,53). В таких интегралах можно произвести замену переменной

интегрирования $p_4' = ip_4$ и после этого повернуть контур интегрирования вновь к действительной оси. Тогда обход полюсов при интегрировании будет производиться так, как это показано на рис. 5 (Абрикосов, Горьков и Дзялошинский [15]).

В случае электронно-фононной системы (1,1а) — (1,1в) уравнения для электронной $\mathcal{G}$ (2,1) и фононной $\mathcal{D}$ (2,4) термодинамических функций Грина будут также иметь вид (2,48) — (2,49) и (2,46) — (2,47), в которых, однако, следует положить $e \to g$, $\gamma \to 1$, а знаки $+$ и $-$ в правых частях уравнений (2,48) — (2,49) изменить на обратные. При этом под нулевыми термодинамическими функциями Грина $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{D}_0$ необходимо понимать соответственно выражения (1,64) и (1,65).

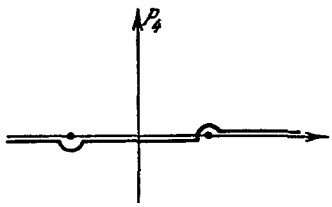

Рис. 5.

В случае статистических систем из попарно взаимодействующих частиц (1,71а) — (1,71в) уравнения для функций Грина исследовались в работах Абрикосова, Горькова и Дзялошинского [15] и Фрадкина [19].

Связь термодинамической функции Грина с термодинамическими функциями системы. Некоторые общие соотношения мы найдем на примере рассмотрения статистической системы, состоящей из газа электронов, позитронов и фотонов (2,17а) — (2,17в). Полученные результаты нетрудно обобщить на другие системы.

Продифференцируем формально термодинамический потенциал системы $\Omega = -\beta^{-1} \ln Z$ по заряду e; тогда согласно (2,24) — (2,25) и (2,40) — (2,41) получим

$$\frac{\partial \Omega}{\partial e} = i\beta^{-1} \int d^4x \langle T[N(\psi(x)\hat{A}(x)\bar{\psi}(x))S]\rangle / \langle S\rangle =$$
$$= -\beta^{-1}e^{-1} \int \Pi_{\mu\nu}(x, y)\, \mathcal{D}_{\nu\mu}(y, x)\, d^4y = -\beta^{-1}e^{-1} \int M(x, Z)\, \mathcal{G}(Z, x)\, d^4Z. \tag{2,56}$$

Интегрируя (2,56) по заряду и имея в виду (2,48), можно выразить Ω через электронно-позитронную термодинамическую функцию Грина

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{V}{(2\pi)^3\beta} \int_0^e \frac{de}{e} \sum_{p_4} \int d^3p\, [\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}_0(p)]_{\alpha\beta}\, \mathcal{G}_0^{-1}{}_{\beta\alpha}(p), \tag{2,57}$$

где Ω_0 — термодинамический потенциал при отсутствии взаимодействия между частицами ($e^2 = 0$). Если статистическая система состоит из частиц, попарно взаимодействующих друг с другом при помощи потенциала $v(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ (1,71в), то вместо заряда e вводится вспомогательный параметр Λ по формуле $v(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \to \Lambda v(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, интегрирование по которому производится от 0 до 1. В этом случае перед интегралом в (2,57) появится дополнительный множитель 1/2.

Часто бывает выгоднее выражать Ω через поляризационный оператор. Для этого проделаем опять преобразование Фурье в (2,56), воспользуемся уравнением (2,49), а затем проинтегрируем по заряду; тогда

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{V}{(2\pi)^3\beta} \int_0^e \frac{de}{e} \sum_{k_4} \int d^3k \frac{1}{k^2} \Pi_{\mu\nu} \left(1 - \frac{1}{k^2}\Pi\right)^{-1}_{\nu\mu}. \tag{2,58}$$

Для приложений вполне достаточно решить уравнение (2,49) с ядром Π^1, пропорциональным e^2, тогда соотношение (2,58) перепишется так (Ахиезер, Пелетминский [23]):

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{V}{2(2\pi)^3\beta} \sum_{k_4} \int d^3k \int_0^e d\left(1 - \frac{1}{k^2}\Pi^1\right)_{\mu\nu} \left(1 - \frac{1}{k^2}\Pi^1\right)^{-1}_{\nu\mu} =$$

$$= \Omega_0 + \frac{V}{2(2\pi)^3\beta} \sum_{k_4} \int d^3k \ln \det \left| \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{k^2}\Pi^1_{\mu\nu} \right|, \quad (2,59)$$

где сохранены только члены, пропорциональные e^2, а также члены вида $e^4 f(e^2)$, где $f(0) = \infty$. Исследование фотонного поляризационного оператора $\Pi^1_{\mu\nu}(k)$ в релятивистской области проведено в работах Фрадкина [20] и Ахиезера, Пелетминского [23].

Зная термодинамический потенциал, нетрудно определить все другие термодинамические характеристики системы (см. Ландау и Лифшиц [36]).

Как известно, средняя энергия E статистической системы определяется соотношением

$$E - \mu\overline{N} = \sum_{n,N} (E_{nN} - \mu N)\, e^{(\Omega + \mu N - E_{nN})\beta} = \Omega - \beta^{-1} \frac{\partial\Omega}{\partial\beta^{-1}}, \quad (2,60)$$

где $\overline{N}$ — среднее число частиц системы (или разность среднего числа электронов и позитронов $N^- - N^+$). При пренебрежении флуктуацией полного числа частиц в рассматриваемой системе легко выразить обусловленное взаимодействием частиц изменение энергии системы $\Delta E = E - E_0$ через изменение потенциала $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_0$ (индексом «0» везде отмечаются величины при отсутствии взаимодействия между частицами). При абсолютном нуле температуры, согласно (2,60), имеем

$$E - \mu\overline{N} = \Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega, \quad (2,61)$$

где $\Omega_0 = E_0 - \mu\overline{N}_0$. Химический потенциал μ при помощи выражения

$$\overline{N}^- - \overline{N}^+ = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int (n^-_{\mathbf{p}} - n^+_{\mathbf{p}})\, d^3p$$

можно исключить из $\Delta\Omega$ (2,61), выразив его через $\overline{N}^- - \overline{N}^+$; тогда поправка к энергии ΔE, обусловленная взаимодействием частиц, при абсолютном нуле температуры $\beta = \infty$ запишется (Фрадкин [17]) в виде

$$\Delta E = \frac{V}{(2\pi)^4} \int_0^e \frac{de}{e} \int d^4p\, [\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}_0(p)]_{\alpha\beta}\, \mathcal{G}^{-1}_{0\beta\alpha}(p) =$$

$$= -\frac{V}{(2\pi)^4} \int_0^e \frac{de}{e} \int d^4k \frac{1}{k^2} \Pi_{\mu\nu} \left(1 - \frac{1}{k^2}\Pi\right)^{-1}_{\nu\mu}. \quad (2,62)$$

Представляя $(\mathcal{G} - \mathcal{G}_0)\mathcal{G}_0^{-1} = M\mathcal{G}$ в виде бесконечного ряда по e^2, получим известное разложение энергии (2,62) по связным диаграммам (подробнее об этом см. в работе Клейна и Прэнджа [12]).

Применив (2,62), (2,59) к газу электронов, позитронов и фотонов, Ахиезер и Пелетминский [23] вычислили термодинамический потенциал, а при помощи его подсчитали поправку ΔE к энергии рассматриваемого

идеального газа, обусловленную взаимодействием. В некоторой своей части их результаты перекрываются с известными результатами Гелл-Манна и Бракнера [49], Веденова [50] и Фрадкина [18,19]. Ввиду громоздкости результата приведем лишь предельные соответственно нерелятивистский $\Delta E_{\text{нр}}$ и крайне релятивистский $\Delta E_{\text{кр}}$ случаи (при низких температурах):

$$\Delta E_{\text{нр}} = -(3\pi^2)^{1/3}(2\pi)^{-4} V n^{1/3} e^2 + (1-\ln 2)(2\pi)^{-4} V m n e^4 \ln(e^2 m n^{-1/3}), \quad (2,63)$$

$$\Delta E_{\text{кр}} = (3\pi^2)^{4/3} 2^{-1} (2\pi)^{-4} V n^{4/3} e^2 + (3\pi^2)^{4/3} 2^{-1} (2\pi)^{-6} V n^{4/3} e^4 \ln e^2, \quad (2,64)$$

где первое слагаемое в (2,63) — (2,64), пропорциональное e^2, представляет собой обменную энергию, а второе слагаемое есть корреляционная энергия, имеющая более высокий порядок по e^2, $n = (\overline{N}^- - \overline{N}^+)/V$, а m — масса реального электрона.

В частности, полагая в общих формулах системы электронов, позитронов и фотонов $\mu = 0$, указанные авторы [23] нашли обусловленную взаимодействием частиц поправку к энергии черного излучения, которая в предельном крайне релятивистском случае $\beta^{-1} \gg m$ значительно упрощается, становясь равной

$$\Delta E = \frac{25}{264\pi^2} E_{\text{ид}} \left(e^2 - \frac{8e^3}{5\sqrt{3\pi}} \right), \quad (2,65)$$

где $E_{\text{ид}} = 33\pi^2 V/180\beta^4$ — энергия идеального газа электронов, позитронов и фотонов при $\beta^{-1} \gg m$.

Система частиц, взаимодействующих по закону Кулона. Многокомпонентную систему из разных сортов фермионов, взаимодействующих посредством электромагнитного поля, рассмотрим сначала в релятивистской области. Каждый отдельный сорт фермионов λ описывается гамильтонианом H_λ, который за вычетом $\sum_{\mathbf{k},\lambda'=1}^{2} \omega_{\mathbf{k}} c^+_{\mathbf{k}\lambda'} c_{\mathbf{k}\lambda'}$ в точности совпадает с (2,17а) — (2,17в), только у фермионных операторов появится дополнительный индекс λ, отмечающий данный сорт фермионов. Полный гамильтониан такой многокомпонентной системы равен сумме гамильтонианов H_λ всех отдельных сортов фермионов плюс гамильтониан свободного электромагнитного поля. Повторяя предыдущие рассуждения, нетрудно написать статистическую сумму и построить термодинамическую теорию возмущений для многокомпонентной системы. Однако наибольший интерес представляет исследование при помощи функций Грина. Ранее при написании уравнений для функций Грина мы исходили из уравнений для операторов полей в гейзенберговском представлении (2,34) и (2,35). В случае многокомпонентной системы каждый отдельный оператор $\widetilde{\psi}_\lambda$ поля фермионов сорта λ также удовлетворяет (2,34) с химическим потенциалом $\mu = \mu_\lambda$ и массой $m = m_\lambda$, а в правой части уравнения оператора электромагнитного поля $\widetilde{A}(x)$ (2,25) будет стоять сумма токов от каждого сорта фермионов. Поэтому уравнение для термодинамической функции Грина $\mathcal{G}_\lambda$ фермиона сорта λ будет иметь прежний вид (2,44), а уравнение фотонной термодинамической функции Грина $\mathcal{D}$ будет содержать поляризационный оператор, равный сумме поляризационных операторов (2,47), в которых $\mathcal{G}$ заменено на $\mathcal{G}_\lambda$. В нерелятивистском приближении эти уравнения могут описывать систему из ионов и электронов, взаимодействующих по закону Кулона. Согласно замечанию (2,53) и (2,54) уравнения, описывающие многокомпонентную систему нерелятивистских фермионов, взаимодействующих по закону Кулона,

имеют следующий вид:

$$\mathcal{G}_\lambda(p) = \mathcal{G}_{0\lambda}(p) - \mathcal{G}_{0\lambda}(p) M_\lambda(p) \mathcal{G}_\lambda(p), \tag{2,66}$$

$$\mathcal{D}(k) = \mathcal{D}_0(k) + \mathcal{D}_0(k) \Pi(k) \mathcal{D}(k), \tag{2,67}$$

$$M_\lambda(p) = \frac{Z_\lambda^2 e^2}{(2\pi)^3 \beta} \sum_{k_4} \int \mathcal{G}_\lambda(p+k) \Gamma(p+k, k) \mathcal{D}(k) d^3k, \tag{2,68}$$

$$\Pi(k) = \sum_\lambda \frac{Z_\lambda^2 e^2}{(2\pi)^3 \beta} \sum_{p_4} \int \mathrm{Sp}\, \mathcal{G}_\lambda(p+k) \Gamma(p+k, k) \mathcal{G}_\lambda(p) d^3p, \tag{2,69}$$

$$\Gamma(p, p') = 1 + \Lambda(p, p'), \tag{2,70}$$

где $p_4 = (2n+1)\pi/\beta$, $k_4 = 2m\pi/\beta$ $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $Z_\lambda e$ — заряд фермиона сорта λ (для электрона $Z_\lambda = -1$), нулевые функции Грина равны

$$\mathcal{G}_{0\lambda}(p) = \frac{-\delta_{\alpha\beta}}{ip_4 + \mu_\lambda - \frac{\mathbf{p}^2}{2m_\lambda}}, \qquad \mathcal{D}_0(k) = \frac{1}{\mathbf{k}^2}, \tag{2,71}$$

μ_λ и m_λ — соответственно химический потенциал и масса фермиона сорта λ, а спинорные индексы α и β пробегают значения 1; 2 для фермионов со спином 1/2. При написании уравнений (2,66) можно было бы совсем отвлечься от спина фермиона. Тогда $\mathcal{G}_\lambda$ не будет зависеть от спинорных индексов и в (2,71) $\delta_{\alpha\beta} \to 1$. Наличие спина у фермиона можно в этом случае учесть при написании числа состояний частицы с заданным импульсом (1,46а), что особенно удобно, когда спин фермиона больше 1/2.

Найдем термодинамический потенциал, используя решение уравнения (2,67) с ядром Π в первом неисчезающем приближении по e^2, которое в данном случае равно

$$\Pi^1(k) = \sum_\lambda \frac{2Z_\lambda^2 e^2}{(2\pi)^3} \int \frac{(n^\lambda_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - n^\lambda_{\mathbf{p}}) d^3p}{\varepsilon^\lambda_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - \varepsilon^\lambda_{\mathbf{p}} - ik_4} = \sum_\lambda \frac{2Z_\lambda^2 e^2}{(2\pi)^3} \int \frac{\omega_{\mathbf{p}\lambda}(n^\lambda_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - n^\lambda_{\mathbf{p}})}{\omega^2_{\mathbf{p}\lambda} + k_4^2} d^3p, \tag{2,72}$$

$$\varepsilon^\lambda_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_\lambda}, \quad \omega_{\mathbf{p}\lambda} = \varepsilon^\lambda_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - \varepsilon^\lambda_{\mathbf{p}}, \quad n^\lambda_{\mathbf{p}} = [e^{(\varepsilon^\lambda_{\mathbf{p}} - \mu_\lambda)\beta} + 1]^{-1}. \tag{2,73}$$

Согласно (2,59) термодинамический потенциал многокомпонентной системы фермионов имеет вид

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{V}{2(2\pi)^3\beta} \sum_{k_4} \int d^3k \ln\left(1 - \frac{1}{\mathbf{k}^2}\Pi^1(k)\right). \tag{2,74}$$

Если выделить из $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_0$ (2,74) самосогласованную часть, пропорциональную e^2, то оставшаяся корреляционная часть $\Delta\Omega_{\text{кор}}$ термодинамического потенциала запишется следующим образом (Фрадкин[18, 19]):

$$\Delta\Omega_{\text{кор}} = \frac{V}{2(2\pi)^3\beta} \sum_{k_4} \int d^3k \left[\ln\left(1 - \frac{1}{\mathbf{k}^2}\Pi^1(k)\right) + \frac{1}{\mathbf{k}^2}\Pi^1(k)\right]. \tag{2,75}$$

Посмотрим, чему соответствует $\Delta\Omega_{\text{кор}}$ в классическом пределе $\hbar \to 0$, $n^{2/3}\hbar^2\beta m^{-1} \ll 1$ (большие температуры и малые плотности n). Для этого перепишем (2,75) в виде

$$\Delta\Omega_{\text{кор}} = -\frac{V}{(2\pi)^3\beta} \int_0^e \frac{de}{e} \sum_{k_4} \int \frac{[\Pi^1(\mathbf{k}, k_4)]^2 d^3k}{[\mathbf{k}^2 - \Pi^1(\mathbf{k}, k_4)]\mathbf{k}^2}, \tag{2,76}$$

из чего видно, что малые значения $\mathbf{k}^2$ являются основной областью

интегрирования. При больших температурах функция $\Pi^1(\mathbf{k}, k_4)$ экспоненциально затухает с ростом $\mathbf{k}^2$, а при малых $\mathbf{k}^2$ ведет себя различно в зависимости от величины k_4, а именно: при $\mathbf{k}^2 \to 0$ имеем $\Pi^1(\mathbf{k}, k_4 \neq 0) \to 0$, в то время как $\Pi^1(\mathbf{k}, 0) \to \Pi^1(0, 0) \neq 0$, где

$$\Pi^1(0, 0) = \sum_\lambda \frac{2Z_\lambda^2 e^2}{(2\pi)^3} \int \frac{\partial n_\mathbf{p}^\lambda}{\partial \varepsilon_\mathbf{p}^\lambda} d^3p = -\sum_\lambda \frac{2Z_\lambda^2 e^2 \beta}{(2\pi)^3} \int n_\mathbf{p}^\lambda d^3p = -e^2\beta \sum_\lambda Z_\lambda n_\lambda \equiv -\varkappa^2. \tag{2,77}$$

Здесь $\varkappa$ — обратный дебаевский радиус, а n_λ — плотность фермионов сорта λ

$$n_\lambda = \frac{2}{(2\pi)^3} \int n_\mathbf{p}^\lambda d^3p. \tag{2,78}$$

Таким образом, из всей суммы по k_4 в (2,76) наибольший вклад дает член с $k_4 = 0$. Предполагая экранирование слабым: $e^2\beta n^{1/3} \ll 1$, приравняем в знаменателе (а также в числителе) функцию $\Pi^1(\mathbf{k}, 0)$ ее значению в нуле $\Pi^1(\mathbf{k}, 0) = \Pi^1(0, 0)$. После этого интеграл по переменной $\mathbf{k}$ легко вычисляется, и мы приходим к известному результату в теории Дебая — Хюккеля [63]

$$\Delta\Omega_{\text{кор}} = -\frac{V}{(2\pi)^3\beta} \int_0^e de \frac{4\pi\varkappa^4}{e} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2+\varkappa^2} = -\frac{2\sqrt{\pi}V}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi} \beta^{1/3} \sum_\lambda Z_\lambda^2 n_\lambda \right)^{3/2}. \tag{2,79}$$

Однако настоящий метод без особого труда позволяет определить также все последующие поправки к термодинамическому потенциалу по параметру малости теории Дебая — Хюккеля $e^2\beta n^{1/3} \ll 1$ и параметру классичности $n^{2/3} h^2 \beta m^{-1} \ll 1$. Так, для смеси из двух сортов ионов при большой температуре $\beta \to 0$ и одинаковой плотности в работе Фрадкина [19] приводится разложение термодинамического потенциала единицы объема, которое, кроме дебаевского (2,79), содержит другие члены, пропорциональные β и $\beta^{3/2}$.

При применении настоящей методики к растворам ионов среду, ослабляющую кулоновское взаимодействие ионов, можно формально учесть, например, заменой $Z_\lambda \to Z_\lambda/\sqrt{\varepsilon}$, где ε — диэлектрическая постоянная растворителя $\varepsilon = \text{const}$. Отметим в этой связи работы Веденова [50, 51], а также работы Дзялошинского и Питаевского [21] и Дзялошинского, Лифшица и Питаевского [22]. В работах [21, 22] методика функций Грина распространена на случай поглощающей среды с комплексной диэлектрической постоянной.

Формула (2,74) верна также для противоположного предельного случая низких температур и больших плотностей компонент смеси, когда параметром малости является $me^2/h^2 n^{1/3}$ (приближение Гелл-Манна — Брукнера). Полагая в (2,75) $\beta \to \infty$, найдем $\Delta\Omega_{\text{кор}}$ при абсолютном нуле температуры для электронного газа $m_\lambda = m$, $Z_\lambda = -1$ в нерелятивистском приближении. После этого при помощи (2,62) получим для корреляционной энергии $E_{\text{кор}}$ электронного газа при $\beta = 0$ следующее выражение (Фрадкин [18, 19]):

$$E_{\text{кор}} = \frac{V}{2(2\pi)^4} \int d^4k \left[\ln\left(1 - \frac{2e^2}{\mathbf{k}^2(2\pi)^3} \int \frac{\omega_\mathbf{p}(n_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - n_\mathbf{p})}{\omega_\mathbf{p}^2 + k_4^2} d^3p \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2e^2}{\mathbf{k}^2(2\pi)^3} \int \frac{\omega_\mathbf{p}(n_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - n_\mathbf{p})}{\omega_\mathbf{p}^2 + k_4^2} d^3p \right]. \tag{2,80}$$

$$\varepsilon_\mathbf{p} = \frac{p^2}{2m}, \qquad \omega_\mathbf{p} = \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - \varepsilon_\mathbf{p}, \qquad n_\mathbf{p} = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon_\mathbf{p} > \mu, \\ 1 & \text{при } \varepsilon_\mathbf{p} < \mu. \end{cases}$$

Если произвести разложение $E_{\text{кор}}$ (2,80) по малому параметру $me^2/\hbar^2 n^{1/3} \ll 1$, то придем к известным результатам Гелл-Манна — Брукнера [49], Савада [52], Савада и др. [53].

§ 3. ФУНКЦИИ ГРИНА, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ВРЕМЕНИ

Аналитические свойства временных функций Грина. Как отмечалось выше, использование термодинамических функций Грина весьма полезно при исследовании термодинамических свойств системы. Однако для изучения энергетического спектра слабых возбуждений (квазичастиц) системы, а также при исследовании различного рода кинетических явлений, например, прохождения частиц через вещество, поглощения или рассеяния света и звука и т. д., необходимо знать температурные функции Грина, зависящие от времени t или, как их иногда называют, временные функции Грина

$$G(x, x') = -i\,\mathrm{Sp}\,\{e^{(\Omega+\mu N-H)\beta}\,T(\tilde{\psi}(x)\,\tilde{\psi}^+(x'))\} \equiv -i\,[T(\tilde{\psi}(x)\,\tilde{\psi}^+(x'))]_{\text{ср}}, \tag{3,1}$$

где значок $\sim$ отмечает операторы в гейзенберговском представлении

$$\tilde{\psi}(x) = e^{i(H-\mu N)t}\,\psi(\mathbf{x})\,e^{-i(H-\mu N)t}, \tag{3,2}$$

а N — оператор полного числа частиц (сохраняющихся вместе с полной энергией замкнутой системы) или разность операторов полного числа электронов и позитронов. Формула (3,1) определяет одночастичную временную функцию Грина как для фермионов, так и для бозонов. Многочастичные временные функции Грина определяются аналогично (2,2) — (2,3).

Сравнивая между собой определение термодинамической $\mathcal{G}(x, x')$ (2,1) — (2,4), (2,32) — (2,33) и временнóй $G(x, x')$ (3,1) функций Грина, видим, что для однородных систем обе функции зависят от разности $x - x'$ и что переход от $\mathcal{G}$ к G в координатном пространстве в интервале τ от $-\beta$ до β совершается заменой τ на it с дополнительным умножением $\mathcal{G}$ на множитель $-i$. Однако бывает полезным знать связь компонент Фурье этих функций, для определения которой исследуем разложение Фурье временной функции Грина (Ландау [5]).

Матричный элемент оператора (3,2) имеет, очевидно, следующий вид:

$$\tilde{\psi}_{nm}(x) = \psi_{nm}(0)\,e^{i(\omega_{nm}t-\mathbf{p}_{nm}\mathbf{x})}, \qquad \omega_{nm} = E_n - E_m + \mu, \quad \mathbf{p}_{nm} = \mathbf{P}_n - \mathbf{P}_m, \tag{3,3}$$

где n и m отмечают состояния замкнутой системы, в которых полные энергия E, число частиц N и импульс $\mathbf{P}$ имеют определенные значения, причем для самосопряженного оператора ψ^+ получим $(\psi^+)_{nm} = (\psi^+)_{mn}$. Учитывая (3,3), перепишем функцию Грина (3,1) в виде

$$G(x_1 - x_2) = -i\sum_n e^{(\Omega+\mu N_n-E_n)\beta}\,[T(\psi(x_1)\,\psi^+(x_2))]_{nn} =$$

$$= \begin{cases} -i\sum\limits_{nm} e^{(\Omega+\mu N_n-E_n)\beta}\,|\psi_{nm}(0)|^2\,e^{i(\omega_{nm}t-\mathbf{p}_{nm}\mathbf{x})}, & t > 0, \\ \pm i\sum\limits_{nm} e^{(\Omega+\mu N_n-E_n)\beta}\,|\psi_{mn}(0)|^2\,e^{i(\omega_{mn}t-\mathbf{p}_{mn}\mathbf{x})}, & t < 0. \end{cases} \tag{3,4}$$

где верхний знак относится к фермионам, нижний — к бозонам и $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, $t = t_1 - t_2$. В двойной сумме с $t < 0$ удобно сделать переобозначение индексов суммирования $m \to n$, $n \to m$ с учетом того, что матричный элемент ψ_{nm} не равен нулю только для $N_m = N_n + 1$. Тогда выражение под знаком суммы с $t < 0$ будет отличаться от выражения с $t > 0$ только

множителем $\exp \omega_{nm}\beta$. Определяя преобразование Фурье в виде

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G(\mathbf{p}, \omega) e^{i(\mathbf{px}-\omega t)}, \tag{3,5}$$

получим, согласно (3,4), следующее Фурье-разложение по пространственным переменным:

$$G(\mathbf{p}, t) = \begin{cases} i \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{p}, E) e^{-iEt} dE, & t > 0, \\ \mp i \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{p}, E) e^{-E\beta} e^{-iEt} dE, & t < 0, \end{cases} \tag{3,6}$$

где

$$g(\mathbf{p}, E) = -(2\pi)^3 \sum_{nm} e^{(\Omega+\mu N_n - E_n)\beta} |\psi_{nm}(0)|^2 \delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}_{nm}) \delta(E+\omega_{nm}). \tag{3,7}$$

При переходе к компоненте Фурье по переменной t следует воспользоваться формулой

$$\int\limits_0^{\infty} e^{i\alpha t} dt = \pi\delta(\alpha) + \frac{i}{\alpha}. \tag{3,8}$$

Тогда имеем окончательно

$$G(\mathbf{p}, \omega) = \fint \frac{g(\mathbf{p}, E)}{E-\omega} (1 \pm e^{-E\beta}) dE + i\pi g(\mathbf{p}, \omega)(1 \mp e^{-\omega\beta}) \equiv$$
$$\equiv G'(\mathbf{p}, \omega) + iG''(\mathbf{p}, \omega). \tag{3,9}$$

Сравнение двух полученных слагаемых в (3,9) приводит к заключению, что между вещественной G' и мнимой G'' частями временнóй функции Грина существует определенное соотношение (Ландау [5]): для статистики Ферми

$$G'(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{\pi} \fint \operatorname{cth} \frac{E\beta}{2} \frac{G''(\mathbf{p}, E)}{E-\omega} dE, \tag{3,10}$$

для статистики Бозе

$$G'(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{\pi} \fint \operatorname{th} \frac{E\beta}{2} \frac{G''(\mathbf{p}, E)}{E-\omega} dE. \tag{3,11}$$

Таким образом, Фурье-образ $G(\mathbf{p}, \omega)$ временной функции Грина не является аналитической функцией переменной ω. Аналитическими в верхней полуплоскости ω являются следующие две функции:

$$G'(\mathbf{p}, \omega) + i \operatorname{cth} \frac{\omega\beta}{2} G''(\mathbf{p}, \omega), \tag{3,12}$$

$$G'(\mathbf{p}, \omega) + i \operatorname{th} \frac{\omega\beta}{2} G''(\mathbf{p}, \omega), \tag{3,13}$$

что становится очевидным, если представить каждую из этих функций в виде контурного интеграла, например:

$$G'(\mathbf{p}, \omega) + i \operatorname{cth} \frac{\omega\beta}{2} G''(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\cup} \operatorname{cth} \frac{\omega'\beta}{2} \frac{G''(\mathbf{p}, \omega')}{\omega'-\omega} d\omega'. \tag{3,14}$$

Оказывается, что функции (3,12) и (3,13) являются Фурье-образами так называемой запаздывающей функции $G^R(x_1 - x_2)$ (Боголюбов и Тябликов [25],

Абрикосов, Горьков и Дзялошинский [15])

$$G^R(x_1-x_2)=\begin{cases} -i[\tilde{\psi}(x_1)\tilde{\psi}^+(x_2)\pm\tilde{\psi}^+(x_2)\tilde{\psi}(x_1)]_{\text{ср}}, & t_1>t_2,\\ 0 & ,\ t_1<t_2,\end{cases} \tag{3,15}$$

где верхний знак относится к статистике Ферми (чему соответствует Фурье-образ (3,12)), а нижний знак — к статистике Бозе (этому знаку соответствует Фурье-образ G^R (3,13)). Используя (3,12) — (3,14), можно представить компоненту Фурье $G^R(\mathbf{p},\omega)$ запаздывающей функции (3,15) в виде разложения типа Лемана [54]

$$G^R(\mathbf{p},\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varrho(\mathbf{p},E)}{E-\omega-i\delta}dE, \tag{3,16}$$

где

$$\varrho(\mathbf{p},E)=g(\mathbf{p},E)(1\pm e^{-E\beta}) \tag{3,17}$$

— вещественная функция, интеграл от которой $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varrho(\mathbf{p},E)\,dE$ конечен.

Легко получить такое же лемановское разложение для термодинамической функции Грина $\mathcal{G}(x_1-x_2)$ (2,32). Действительно, повторяя рассуждения, приведшие к формуле (3,6), получим для $\mathcal{G}(\mathbf{p},\tau)$

$$\mathcal{G}(\mathbf{p},\tau)=\begin{cases} -\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\mathbf{p},E)\,e^{-E\tau}dE, & \tau>0,\\ \pm\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\mathbf{p},E)\,e^{-E(\beta+\tau)}dE, & t<0,\end{cases} \tag{3,18}$$

где верхний знак относится к фермионам, нижний — к бозонам, а $g(\mathbf{p},E)$ дается (3,7). Совершая далее преобразование Фурье (1,60), имеем

$$\mathcal{G}(\mathbf{p},\omega_n)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varrho(\mathbf{p},E)}{E-i\omega_n}dE, \tag{3,19}$$

где $\varrho(\mathbf{p},E)$ дается в (3,17). Сравнивая между собой (3,16) и (3,19), находим (Абрикосов, Горьков и Дзялошинский [15])

$$\mathcal{G}(\mathbf{p},\omega_n)=-G^R(\mathbf{p},i\omega_n),\qquad \omega_n>0. \tag{3,20}$$

Интеграл (3,19), если его рассматривать формально как функцию комплексной переменной $i\omega_n$, определяет функцию, аналитическую в верхней полуплоскости. Эта функция, согласно (3,20), совпадает с $G^R(\mathbf{p},\omega)$ на бесконечном множестве точек $i\omega_n$ ($\omega_n>0$), имеющих точку сгущения. По теореме об аналитическом продолжении заключаем, что $-G^R(\mathbf{p},\omega)$ есть аналитическое продолжение функции $\mathcal{G}(\mathbf{p},-i(i\omega_n))$ на верхнюю полуплоскость комплексной переменной

$$-G^R(\mathbf{p},\omega)=\mathcal{G}(\mathbf{p},-i\omega). \tag{3,21}$$

Наряду со спектральным разложением (3,5) — (3,21) одночастичных функций Грина (которое рассматривалось также в работах Горькова [7], Мартина и Швингера [13, 35], Фрадкина [18, 19], Бонч-Бруевича [26], Когана [27]) в некоторых задачах (например, в теории электропроводности, Бонч-Бруевич [30]) может оказаться полезным спектральное разложение

многовременны́х температурных функций Грина. Этому вопросу посвящена работа Бонч-Бруевича[24].

Определение энергетического спектра системы. Применение методов квантовой теории поля оказалось особенно плодотворным при изучении слабых возбуждений системы, состоящей из большого числа взаимодействующих частиц. Как известно, возникновение элементарных возбуждений такой системы можно интерпретировать как появление квазичастиц. Совокупность элементарных возбуждений образует газ квазичастиц, для описания которого весьма удобен аппарат функций Грина. Как отмечено в работах Галицкого и Мигдала[3] и Галицкого[4], описание системы, состоящей из огромного числа частиц методом элементарных возбуждений (квазичастиц), является точным лишь в случае идеального газа. При наличии взаимодействия между частицами слабо возбужденные состояния не представляют собой стационарных состояний системы, что приводит к затуханию элементарных возбуждений.

Ради конкретности рассмотрим электронно-фононную систему (1,1а)—(1,1в). Электронную $G(x-x')$ и фононную $D(x-x')$ одночастичные временны́е функции Грина определим по формулам соответственно (3,1), (3,2) и

$$D(x-x') = -i\,[\widetilde{\varphi}(x)\widetilde{\varphi}(x')]_{\text{ср}}. \tag{3,22}$$

Уравнения для этих функций Грина выводятся при помощи описанной выше техники вариационных производных (см., например, работы Фрадкина[16,18], Бонч-Бруевича[55] и Когана[27]) или путем суммирования бесконечного числа графиков определенного класса. Пример такого суммирования представлен на рис. 4, что приводит к уравнению (2,49) с приближенным ядром П, равным П^1. Не останавливаясь на довольно простых выкладках, приведем уравнения для G и D в p-представлении:

$$G(p) = G_0(p) - G_0(p)\,M(p)\,G(p), \tag{3,23}$$

$$D(k) = D_0(k) + D_0(k)\,\Pi(k)\,D(k), \tag{3,24}$$

$$M(p) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int G(p+k)\,\Gamma(p+k,\,k)\,D(k)\,d^4k, \tag{3,25}$$

$$\Pi(k) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{Sp}\,G(p+k)\,\Gamma(p+k,\,k)\,G(p)\,d^4p, \tag{3.26}$$

$$\Gamma(p,\,p') = 1 + \Lambda(p,\,p'), \tag{3,27}$$

где $G_0(p)$ и $D_0(p)$ — функции Грина электрона и фонона при отсутствии взаимодействия:

$$G_0(\mathbf{p},\,\omega) = \frac{1-n_{\mathbf{p}}}{\omega-\varepsilon_{\mathbf{p}}+\mu+i\delta} + \frac{n_{\mathbf{p}}}{\omega-\varepsilon_{\mathbf{p}}+\mu-i\delta}, \tag{3,28}$$

$$D_0(\mathbf{k},\,\varepsilon) = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}\left(\frac{1+n_{\mathbf{k}}}{\varepsilon-\omega_{\mathbf{k}}+i\delta} - \frac{n_{\mathbf{k}}}{\varepsilon-\omega_{\mathbf{k}}-i\delta} + \frac{n_{\mathbf{k}}}{\varepsilon+\omega_{\mathbf{k}}+i\delta} - \frac{1+n_{\mathbf{k}}}{\varepsilon+\omega_{\mathbf{k}}-i\delta}\right), \tag{3,29}$$

а для $\Lambda(p,\,p')$ — совокупность всех графиков вершинной части, кроме простой вершины (точки).

Существует простая связь между одночастичной функцией Грина и спектром элементарных возбуждений — квазичастиц (Галицкий и Мигдал[3], Галицкий[4], Бонч-Бруевич[55], Фрадкин[18,19] и Коган[27]). Энергия и затухание квазичастиц определяются полюсами аналитического продолжения по четвертой компоненте четырехмерного импульса одночастичной временно́й функции Грина. Однако в системе из большого числа взаимо-

действующих частиц могут также существовать возбуждения не одночастичного характера. Энергетический спектр таких возбуждений определяется через двухчастичную функцию Грина (Галицкий и Мигдал[3]). Полагая в $G^{-1}(\mathbf{p}, \omega) = \omega + \mu - \varepsilon_{\mathbf{p}} + M(\mathbf{p}, \omega)$ переменную ω равной $\omega = E_{\mathbf{p}} - \mu - i\gamma_{\mathbf{p}}$, найдем следующее уравнение для определения полюсов аналитического продолжения электронной функции Грина $G(\mathbf{p}, \omega)$ (3,23)

$$E_{\mathbf{p}} - i\gamma_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + M(\mathbf{p}, E_{\mathbf{p}} - \mu - i\gamma_{\mathbf{p}}) = 0. \tag{3,30}$$

Решение этого уравнения дает энергию $E_{\mathbf{p}}$ и затухание $\gamma_{\mathbf{p}}$ квазичастицы, причем $E_{\mathbf{p}} < \mu$ соответствует дыркам в распределении Ферми, а $E_{\mathbf{p}} > \mu$ относится к квазичастицам над сферой Ферми. Если затухание мало, $\gamma_{\mathbf{p}}/E_{\mathbf{p}} \ll 1$, то из (3,30) приближенно получим

$$E_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + \operatorname{Re} M(\mathbf{p}, E_{\mathbf{p}} - \mu) = 0, \tag{3,31}$$

$$\gamma_{\mathbf{p}} = \operatorname{Im} M(\mathbf{p}, E_{\mathbf{p}} - \mu) \Big/ \left(1 + \left(\frac{\partial \operatorname{Re} M}{\partial \omega}\right)_{\omega = E_{\mathbf{p}} - \mu}\right). \tag{3,32}$$

Аналогично, полюса аналитического продолжения фононной функции Грина $D(\mathbf{k}, \varepsilon)$ (3,24) дают энергию и затухание фононного возбуждения. Таким путем Мигдалом[8] был найден энергетический спектр электронов и дисперсия колебаний решетки в нормальном металле при абсолютном нуле температуры без предположения о малости взаимодействия между электронами и фононами.

В качестве иллюстрации определим энергетический спектр электронов при отличной от абсолютного нуля температуре в случае сверхпроводника.

Энергетический спектр сверхпроводников. Как известно (см., например, обзор Абрикосова и Халатникова[56]), газ из фермионов с прямым взаимодействием (имеющим характер слабого притяжения) между частицами в небольшой области энергий, лежащей в окрестности сферы Ферми, обнаруживает свойство сверхпроводимости. В связи с этим рассмотрим квазизамкнутую систему электронов (1,71а) — (1,72) с прямым четырехфермионным взаимодействием $v(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = g\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, где g — малая константа связи, отличная от нуля лишь в узкой области энергий $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ вблизи Ферми-поверхности $\varepsilon_F - \varkappa \leqslant \varepsilon_{\mathbf{p}} \leqslant \varepsilon_F + \varkappa$ (Горьков[7]). Операторы электронного поля $\tilde{\psi}(x)$ и $\tilde{\psi}^+(x)$ в гейзенберговском представлении (3,2) удовлетворяют уравнениям

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \mu + \frac{\nabla^2}{2m}\right)\tilde{\psi}(x) - g(\tilde{\psi}^+(x)\tilde{\psi}(x))\tilde{\psi}(x) = 0, \tag{3,33}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \mu - \frac{\nabla^2}{2m}\right)\tilde{\psi}^+(x) + g\tilde{\psi}^+(x)(\tilde{\psi}^+(x)\tilde{\psi}(x)) = 0. \tag{3,34}$$

Поэтому для электронной временно́й функции Грина $G(x, x') \equiv G(x - x')$ (3,1) имеем

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \mu + \frac{\nabla^2}{2m}\right)G_{\alpha\beta}(x - x') + ig[T(\tilde{\psi}^+_\sigma(x)\tilde{\psi}_\sigma(x)\tilde{\psi}_\alpha(x)\tilde{\psi}^+_\beta(x'))]_{\text{ср}} = \\ = \delta_{\alpha\beta}\delta(x - x'). \tag{3,35}$$

Используем далее физическую идею Купера[57], согласно которой слабое притяжение вблизи Ферми-поверхности двух электронов с взаимно противоположными импульсами и спинами приводит к образованию связанного состояния пары электронов с отрицательной энергией связи. При этом взаимодействие между электронами будем учитывать в той мере, в какой оно приводит к образованию покоящейся пары. Тогда среднее

от T-произведения операторов в (3,35) можно расписать следующим образом (Горьков [7]):

$$[T(\tilde{\psi}^+_\sigma(x)\tilde{\psi}_\sigma(x)\tilde{\psi}_\alpha(x)\tilde{\psi}^+_\beta(x'))]_{\text{ср}} = -\hat{F}_{\alpha\sigma}(0)\hat{F}^+_{\sigma\beta}(x-x'), \tag{3,36}$$

где

$$\begin{aligned}\hat{F}_{\alpha\beta}(x-x') &= [N\,|\,\tilde{\psi}_\alpha(x)\tilde{\psi}_\beta(x')\,|\,N+2]_{\text{ср}},\\ \hat{F}^+_{\alpha\beta}(x-x') &= [N+2\,|\,\tilde{\psi}^-_\alpha(x)\tilde{\psi}^+_\beta(x')\,|\,N]_{\text{ср}}.\end{aligned} \tag{3,37}$$

Имея в виду (3,34) и (3,36), нетрудно также написать уравнение для функции $\hat{F}^+(x-x')$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-\mu-\frac{\nabla^2}{2m}\right)\hat{F}^+(x-x')+ig\hat{F}^+(0)\,G(x-x')=0. \tag{3,38}$$

Для определения энергетического спектра системы необходимо найти электронную функцию Грина в p-представлении $G(\mathbf{p},\omega)$. Совершая преобразование Фурье (3,5) в уравнениях (3,35)—(3,36) и (3,38), получим

$$\begin{aligned}(\omega-\xi_{\mathbf{p}})G(\mathbf{p},\omega)-ig\hat{F}(0)\,\hat{F}^+(\mathbf{p},\omega)&=1,\\ (\omega+\xi_{\mathbf{p}})\hat{F}^+(\mathbf{p},\omega)+ig\hat{F}^+(0)\,G(\mathbf{p},\omega)&=0,\end{aligned} \tag{3,39}$$

где

$$\xi_{\mathbf{p}}=\frac{p^2}{2m}-\mu.$$

Из определения (3,37) вытекает, что $\hat{F}(0)$ и $\hat{F}^+(0)$ имеют вид

$$\hat{F}^+(0)=J\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\equiv J\hat{I},\qquad \hat{F}(0)=-J\hat{I}, \tag{3,40а}$$

где J можно считать вещественной константой, так как фазовый множитель $\exp i\alpha$ всегда можно отщепить от J в уравнениях (3,39) и включить в искомые функции $G(\mathbf{p},\omega)$ и $\hat{F}^+(\mathbf{p},\omega)$. Согласно (3,39) функция $\hat{F}^+(\mathbf{p},\omega)$ также пропорциональна матрице $\hat{I}$

$$\hat{F}^+(\mathbf{p},\omega)=\hat{I}F^+(\mathbf{p},\omega), \tag{3,40б}$$

от которой, таким образом, можно в (3,39) избавиться, так как $\hat{I}^2=-1$. После этого перепишем систему уравнений (3,39) в виде

$$(\omega^2-\xi^2_{\mathbf{p}}-g^2J^2)\,F^+(\mathbf{p},\omega)=-igJ, \tag{3,41}$$

$$(\omega-\xi_{\mathbf{p}})\,G(\mathbf{p},\omega)=1+igJF^+(\mathbf{p},\omega). \tag{3,42}$$

Функция Грина $G(\mathbf{p},\omega)$ определяется как частное решение уравнения (3,42), однако при отыскании $F^+(\mathbf{p},\omega)$ необходимо учитывать как частное решение уравнения (3,41), так и общее решение соответствующего однородного уравнения, равное $A(\mathbf{p},\beta)[\delta(\omega+E_{\mathbf{p}})+\delta(\omega-E_{\mathbf{p}})]$, где $E_{\mathbf{p}}=\sqrt{\xi^2_{\mathbf{p}}+\Delta^2}$, $\Delta^2=g^2J^2$, а $A(\mathbf{p},\beta)$ — произвольная вещественная функция импульса и температуры. Поэтому

$$F^+(\mathbf{p},\omega)=\frac{-igJ}{(\omega+E_{\mathbf{p}}-i\delta)(\omega-E_{\mathbf{p}}+i\delta)}+A(\mathbf{p},\beta)\,[\delta(\omega+E_{\mathbf{p}})+\delta(\omega-E_{\mathbf{p}})],$$

$$G(\mathbf{p},\omega)=\frac{\omega+\xi_{\mathbf{p}}}{(\omega+E_{\mathbf{p}}-i\delta)(\omega-E_{\mathbf{p}}+i\delta)}+\frac{igJ}{\omega-\xi_{\mathbf{p}}}\,A(\mathbf{p},\beta)\,[\delta(\omega+E_{\mathbf{p}})+\delta(\omega-E_{\mathbf{p}})].$$

Таким образом, мнимая часть функции Грина $G(\mathbf{p}, \omega)$ не определяется полностью уравнениями (3,41) и (3,42). Подберем произвольную функцию $A(\mathbf{p}, \beta)$ так, чтобы действительная и мнимая части $G(\mathbf{p}, \omega)$ удовлетворяли известному соотношению (3,10). Несложные вычисления приводят к следующему результату:

$$A(\mathbf{p}, \beta) = -\pi\Delta n_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}}, \qquad n_{\mathbf{p}} = (e^{E_{\mathbf{p}}\beta} + 1)^{-1}, \tag{3,43}$$

причем функция Грина приобретает окончательный вид:

$$G(\mathbf{p}, \omega) = u_{\mathbf{p}}^2(\omega - E_{\mathbf{p}} + i\delta)^{-1} + v_{\mathbf{p}}^2(\omega + E_{\mathbf{p}} - i\delta)^{-1} + \\ - 2\pi i n_{\mathbf{p}}[u_{\mathbf{p}}^2\delta(\omega - E_{\mathbf{p}}) - v_{\mathbf{p}}^2\delta(\omega + E_{\mathbf{p}})], \tag{3,44}$$

$$u_{\mathbf{p}}^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}\right), \qquad v_{\mathbf{p}}^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}\right).$$

Спектр элементарных возбуждений определяется положительным полюсом функции $G(\mathbf{p}, \omega)$, что дает

$$E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}, \tag{3,45}$$

где Δ – функция температуры, которая находится из условия (3,40а)—(3,40б)

$$J = \hat{F}^+(0) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int F^+(\mathbf{p}, \omega)\, d^3p\, d\omega = -\frac{Jg}{2(2\pi)^3}\int \frac{(1-2n_{\mathbf{p}})}{\sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2+\Delta^2}}\, d^3p \tag{3,46}$$

или

$$1 = -\frac{g}{2(2\pi)^3}\int \frac{\operatorname{th}\frac{E_{\mathbf{p}}\beta}{2}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2+\Delta^2}}\, d^3p, \qquad |\xi_{\mathbf{p}}| < \varkappa. \tag{3,47}$$

При абсолютном нуле температуры $\beta \to \infty$ $\operatorname{th}\frac{E_{\mathbf{p}}\beta}{2} = 1$ уравнение (3,47) для малых отрицательных g (притяжение) имеет известное решение

$$\Delta_0 = 2\varkappa e^{-1/\varrho}, \qquad \varrho = p_F|g|\, m/2\pi^2, \tag{3,48}$$

а вблизи абсолютного нуля температуры решение (3,47) имеет вид (см., например, обзор [56])

$$\Delta = \Delta_0 - \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0}{\beta}}\, e^{-\Delta_0\beta}. \tag{3,49}$$

Как видно из (3,45), возбужденные состояния системы отделены от основного щелью величиною Δ, что и приводит к явлению сверхпроводимости (Бардин и др. [58], Боголюбов [59], Горьков [7], Абрикосов и Халатников [56]).

Излагаемая методика функций Грина представляет также значительный интерес в том отношении, что она позволяет построить градиентно-инвариантную технику квантовой теории поля в теории сверхпроводимости. С ее помощью Абрикосов, Горьков и Халатников [32] исследовали сверхпроводники в высокочастотном электромагнитном поле и, в частности, вычислили частотную и температурную зависимость импеданса массивного сверхпроводника. Дальнейшему развитию указанной техники посвящена серия работ Горькова [33] о поведении сверхпроводников в магнитном поле, а также работа Абрикосова и Горькова [34] о сверхпроводящих сплавах в постоянном магнитном поле.

Недавно Мигдалом [60] развит метод рассмотрения сверхтекучести и вычисления моментов инерции ядер, основанный на применении функций Грина к системам конечных размеров, состоящих из взаимодействующих ферми-частиц. В последующих работах указанная методика

Мигдала успешно применялась к изучению парной корреляции в ядрах с нечетным числом частиц (Гринь и др.[61]) и возбуждению коллективных состояний ядер при рассеянии заряженных частиц (Дроздов[62]).

Связь временны́х функций Грина с термодинамическими характеристиками системы. Зная временну́ю функцию Грина, нетрудно определить все термодинамические величины системы. Для этого достаточно найти плотность числа частиц n как функцию температуры $1/\beta$ и химического потенциала μ. Плотность частиц n как функция β и μ выражается через временну́ю функцию Грина $G(x-x')$ (3,1) следующим образом:

$$G(0)|_{t'=t+0} = \pm i \operatorname{Sp} e^{(\Omega+\mu N-H)\beta} \tilde{\psi}^+(x)\tilde{\psi}(x) = \pm i\frac{\overline{N}}{V} = \pm in, \quad (3,50)$$

где верхний знак относится к статистике Ферми, нижний — Бозе. Воспользовавшись разложением

$$\psi(\mathbf{x}) = V^{-1/2}\sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{px}}, \qquad \psi^+(\mathbf{x}) = V^{-1/2}\sum_{\mathbf{p}} a^+_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{px}}, \quad (3,51)$$

где $a^+_{\mathbf{p}}$ и $a_{\mathbf{p}}$ — операторы соответственно рождения и поглощения частицы, перепишем (3,50) в виде

$$G(0)|_{t'=t+0} = \pm iV^{-1}\sum_{\mathbf{p}} \operatorname{Sp} e^{(\Omega+\mu N-H)\beta} a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} = \pm iV^{-1}\sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} =$$
$$= \pm i\frac{1}{(2\pi)^3}\int n_{\mathbf{p}}\, d^3p. \quad (3,52)$$

С другой стороны,

$$G(0)\Big|_{t'=t+0} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int G(\mathbf{p},\ \omega)\, e^{i\omega t}\, d^3p\, d\omega\Big|_{t=|t|\to 0}. \quad (3,53)$$

Из сравнения (3,52) и (3,53) находим, что функция распределения частиц $n_{\mathbf{p}}$ при произвольной температуре связана с функцией Грина следующим образом (Мигдал[2]):

$$n_{\mathbf{p}} = \mp i\frac{1}{2\pi}\int G(\mathbf{p},\ \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega\Big|_{t=|t|\to 0}. \quad (3,54)$$

Выразим далее среднюю энергию через функцию Грина для случая системы попарно взаимодействующих частиц (1,71а) — (1,71в). По определению средняя энергия E системы равна

$$E = \int d^3x \left[\psi^+(x)\frac{-\nabla^2}{2m}\psi(\mathbf{x})\right]_{\text{ср}} +$$
$$+\frac{1}{2}\int d^3x\, d^3x' v(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,[\psi^+(\mathbf{x})\psi^+(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x})]_{\text{ср}} =$$
$$= \mp i\int d^3x \frac{-\nabla^2}{2m} G(\mathbf{x}t,\ \mathbf{x}'t')\Big|_{\substack{\mathbf{x}'\to\mathbf{x}\\ t'\to t+0}} -$$
$$-\frac{1}{2}\int d^3x\, d^3x' v(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, G_2(\mathbf{x}'t,\ \mathbf{x}t;\ \mathbf{x}t',\ \mathbf{x}'t')\Big|_{t'\to t+0}, \quad (3,55)$$

где $G(\mathbf{x}t,\ \mathbf{x}'t')$ и $G_2(\mathbf{x}_1t_1,\ \mathbf{x}_2t_2;\ \mathbf{x}'_1t'_1,\ \mathbf{x}'_2t'_2)$ — соответственно одночастичная (3,1) и двухчастичная

$$G_2(x_1,\ x_2;\ x'_1,\ x'_2) = (-i^2)\,[T(\tilde{\psi}(x_1)\tilde{\psi}(x_2)\tilde{\psi}^+(x'_2)\tilde{\psi}^+(x'_2)]_{\text{ср}} \quad (3,56)$$

временны́е функции Грина. По-прежнему верхний знак везде относится к фермионам, а нижний — к бозонам. Введем массовый оператор $M(x,\ y)$, который определяется по формуле

$$-i\int d^4y M(x,\ y)\, G(y,\ x') = \int d^3x'' v(\mathbf{x}-\mathbf{x}'')\, G_2(\mathbf{x}''t,\ \mathbf{x}t;\ \mathbf{x}'t',\ \mathbf{x}''t). \quad (3,57)$$

Массовый оператор $M(x, y) \equiv M(x-y)$ обычно представляют в виде ряда по степеням взаимодействия (см., например, обзор[12]). Производя преобразование Фурье в (3,55) с учетом (3,57), получим окончательно

$$E = \frac{\mp iV}{(2\pi)^4} \int \left[\varepsilon_{\mathbf{p}} \mp \frac{1}{2} M(\mathbf{p}, \omega) \right] G(\mathbf{p}, \omega)\, d^3p\, d\omega, \tag{3,58}$$

где $\varepsilon_{\mathbf{p}} = p^2/2m$, а интеграл по ω берется в том же смысле, что и в формуле (3,54). Формула (3,58) для абсолютного нуля температуры была впервые получена в работе Галицкого и Мигдала[3,4] для случая фермионов и работе Беляева[6] — для бозонов. Последний учел также энергию частиц бозе-конденсата, которая не входит явно в формулу (3,58). На основе (3, 58) в указанных работах вычислены энергии основного состояния неидеальных ферми- и бозе-газов.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ К КОНКРЕТНЫМ ЗАДАЧАМ

Рассеяние и торможение заряженных частиц, проходящих через вещество, вместе с ионизацией и излучением, сопровождающими это явление, продолжают оставаться в центре внимания физиков с самого начала возникновения современных представлений об атоме, ядре и элементарных частицах. В связи с этим кажется естественным применение к данному явлению новых методов, дающих наиболее ясное и корректное решение поставленной задачи.

Рассмотрим в целом нейтральную систему из электронов и ионов, находящихся в тепловом равновесии. Внешняя заряженная частица при прохождении через данную систему будет терять энергию в основном вследствие столкновения с электронами как с наиболее легкими частицами. Метод функций Грина и диаграммную технику в применении к данной задаче впервые развил Ларкин[31]. Однако он с самого начала ограничился нерелятивистской областью. Ради общности изложим указанный метод в таком виде, который применим для произвольных скоростей частиц. В настоящем изложении метод легко распространяется и на другие задачи (тормозное излучение и образование пар при прохождении частиц через плазму, излучение плазмы, торможение электронов в металле и т. д.).

Для вычисления тормозной способности электронно-позитронной плазмы напишем в шредингеровском представлении гамильтониан системы электронов, позитронов и внешней пролетающей частицы, взаимодействие между которыми осуществляется посредством электромагнитного поля

$$H = H_e + H_\gamma + H_1 + H_0' + H_1', \tag{4,1}$$

где H_e и H_γ — гамильтониан свободных соответственно электронно-позитронного и фотонного полей, H_1 — оператор их взаимодействия (2,17а)—(2,18), H_0' — гамильтониан свободного поля пролетающей частицы (фермиона), а H_1' — оператор ее взаимодействия с фотонным полем. H_0' и H_1' имеют такое же строение, как и соответствующие операторы электронно-позитронного поля.

S-матрица, описывающая квантовомеханические переходы частиц плазмы и пролетающей частицы, удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial S}{\partial t} = (H_e + H_\gamma + H_1 + H_0' + H_1')\, S. \tag{4,2}$$

Воспользуемся преобразованием

$$S = e^{-i(H_e + H_\gamma + H_1 + H_0')t}\, \mathscr{S} \tag{4,3}$$

и перейдем в другое представление, в котором операторы поля $\psi'(x)$ пролетающей частицы записаны в представлении взаимодействия

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = e^{iH_0't}\psi'(\mathbf{x})e^{-iH_0't}, \tag{4,4}$$

а операторы электронно-позитронного $\psi(x)$ и фотонного $A(x)$ полей — в гейзенберговском представлении

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}, t) &= e^{i(H_e+H_\gamma+H_1)t}\psi(\mathbf{x})e^{-i(H_e+H_\gamma+H_1)t},\\ A(\mathbf{x}, t) &= e^{i(H_e+H_\gamma+H_1)t}A(\mathbf{x})e^{-i(H_e+H_\gamma+H_1)t}.\end{aligned} \tag{4,5}$$

При этом оператор $A(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A(x) = -ieN(\bar{\psi}(x)\gamma\psi(x)), \tag{4,6}$$

имеющему решение вида

$$A(x) = A^0(x) + e\int D^0(x-x')N(\bar{\psi}(x')\gamma\psi(x'))\,d^4x', \tag{4,7}$$

где $A^0(x)$ — свободное фотонное поле, а $D^0(x-x')$ — нулевая функция распространения фотона в квантовой электродинамике.

Такое преобразование в соответствии со смыслом поставленной задачи предполагает, что взаимодействие пролетающей частицы с частицами плазмы включается и выключается в момент времени соответственно $t=-\infty$ и $t=\infty$, тогда как взаимодействие частиц плазмы между собой остается все время включенным.

В указанном представлении $\mathcal{S}$-матрица определяется следующим образом:

$$i\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} = H_1'\mathcal{S}, \quad \mathcal{S} = Te^{-i\int H_1'(x)d^4x}, \quad H_1'(x) = -ie'N(\bar{\psi}'(x)\hat{A}(x)\psi'(x)), \tag{4,8}$$

где e' — заряд пролетающей частицы. $\mathcal{S}$-матрица (4,8) описывает рассеяние пролетающей частицы на электронно-позитронной плазме как едином целом. В равной мере выражение (4,8) применимо к явлению рассеяния с излучением, образованием пар и т. д.

Будем далее считать пролетающую частицу быстрой ($ee'/\hbar v \ll 1$), чтобы ее взаимодействие с электромагнитным полем, создаваемым плазмой, можно было рассматривать по теории возмущений. Тогда матричный элемент $\mathcal{S}$-матрицы, описывающий рассеяние внешней частицы с переходом ее из состояния с импульсом $\mathbf{p}$ и поляризацией r в состояние с $\mathbf{p}'$ и r', а плазмы из состояния n в m, дается с учетом (4,7) следующей формулой:

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}_{m\mathbf{p}'r',\,n\mathbf{p}r} =\\ &= -ee'\left(m\mathbf{p}'r'\left|\int\bar{\psi}'(x)\gamma_\nu\psi'(x)D^0(x-x')\bar{\psi}(x')\gamma_\nu\psi(x')\,d^4x\,d^4x'\right|n\mathbf{p}r\right) =\\ &= \frac{(2\pi)^4 iee'}{V(\omega^2-\mathbf{q}^2)}(\bar{u}'^{r'}\gamma_\nu u'^r)\gamma_{\nu\alpha\beta}(\bar{\psi}_\alpha(0)\psi_\beta(0))_{mn}\delta(\mathbf{q}-\mathbf{p}_{mn})\delta(\omega-\omega_{mn}),\end{aligned} \tag{4,9}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}-\mathbf{p}', \quad \omega = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}, \quad \mathbf{p}_{mn} = \mathbf{P}_m - \mathbf{P}_n, \quad \omega_{mn} = E_m - E_n, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2+M^2},$$

где $\mathbf{q}$ и ω — соответственно импульс и энергия, переданные плазме при рассеянии пролетающей частицы с массой M и зарядом e'.

Вероятность dW данного процесса, усредненная по начальным и просуммированная по конечным спиновым состояниям пролетающей частицы, а также статистически усредненная по распределению

Гиббса (2,23), определяется следующим образом:

$$dW = \frac{(ee')^2}{(2\pi)^2(\omega^2-q^2)^2} T_{\nu\mu}\gamma_{\mu\alpha\beta}\gamma_{\nu\alpha'\beta'}\Phi_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{q},\ \omega)\, d^3q, \tag{4,10}$$

$$T_{\nu\mu} = (\delta_{\nu\mu}(pp'+M^2) - p_\nu p'_\mu - p'_\nu p_\mu)/2\varepsilon_{\mathbf{p}}\varepsilon_{\mathbf{p}'}, \tag{4,11}$$

$$\Phi_{\alpha\beta\alpha'\beta}(\mathbf{q},\ \omega) = (2\pi)^3 \sum_{nm} e^{(\Omega+\mu N_n - E_n)\beta}(\bar{\psi}_\alpha(0)\psi_\beta(0))_{nm} \times$$
$$\times (\bar{\psi}_{\alpha'}(0)\psi_{\beta'}(0))_{mn}\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{p}_{mn})\,\delta(\omega-\omega_{mn}), \tag{4,12}$$

где N — разность полного числа электронов и позитронов, а $\Phi_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{q},\omega)$ выражается через двухчастичную термодинамическую функцию Грина плазмы (2,2), в которой аргументы попарно совпадают $\mathcal{G}_2(x_1x_1,\ x_1'x_1') = K(x-x_1')$. Чтобы выявить указанную связь, произведем, следуя методике Ландау [5] (3,4)—(3,11), спектральное разложение функции $K(x)$. Получим

$$K_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{q},\ \tau) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{q},\ \omega)\, e^{-\omega\tau} d\omega, & \tau > 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{q},\ \omega)\, e^{-\omega(\beta+\tau)} d\omega, & \tau < 0, \end{cases} \tag{4,13}$$

где $-\beta \leqslant \tau \leqslant \beta$.

После периодического продолжения на всю ось τ функция (4,13) удовлетворяет условию $K(\mathbf{q},\ \tau) = K(\mathbf{q},\ \tau+\beta)$ при любом τ. Далее, согласно (1,60) имеем

$$K(\mathbf{q},\ \omega_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\mathbf{q},\ \omega)(1-e^{-\omega\beta})}{\omega - i\omega_n} d\omega, \quad \omega_n = 2n\pi/\beta. \tag{4,14}$$

Интеграл (4,14), как функция переменной $i\omega_n$, определяет аналитическую в верхней полуплоскости функцию $\mathcal{K}(\mathbf{q},\ \omega)$

$$\mathcal{K}(\mathbf{q},\ \omega) = \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\Phi(\mathbf{q},\ \omega')(1-e^{-\omega'\beta})}{\omega'-\omega} d\omega' =$$
$$= \int \frac{\Phi(\mathbf{q},\ \omega')(1-e^{-\omega'\beta})}{\omega'-\omega} d\omega' + i\pi\Phi(\mathbf{q},\ \omega)(1-e^{-\omega\beta}), \tag{4,15}$$

которая является аналитическим продолжением функции $K(\mathbf{q}, -i(i\omega_n))$ в верхнюю полуплоскость (см. также (3,20)—(3,21))

$$\mathcal{K}(\mathbf{q},\ \omega) = K(\mathbf{q}, -i\omega). \tag{4,16}$$

Поскольку $T_{\nu\mu}\gamma_{\mu\alpha\beta}\gamma_{\nu\alpha'\beta'}\Phi_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{q},\ \omega)$ — вещественная функция ω на действительной оси, то из (4,15) и (4,16) получим

$$T_{\nu\mu}\gamma_{\mu\alpha\beta}\gamma_{\nu\alpha'\beta'}\Phi_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{q},\ \omega) = \frac{\operatorname{Im}(T_{\nu\mu}\gamma_{\mu\alpha\beta}\gamma_{\nu\alpha'\beta'}K_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{q},\ -i\omega))}{\pi(1-e^{-\omega\beta})}. \tag{4,17}$$

Таким образом задача сводится к отысканию функции

$$\gamma_{\mu\alpha\beta}\gamma_{\nu\alpha'\beta'}K_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{q},\ \omega_n),$$

так как формальная замена $\omega_n \to i\omega$ помогает сразу определить $\Phi(\mathbf{q},\omega)$ по формуле (4,17). Элементарные вычисления приводят к следующему

отношению:

$$e^2\gamma_{\mu\alpha\beta}\gamma_{\nu\alpha'\beta'}\int \mathscr{D}_{\mu\nu}(x-x')K_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(x-x')\,d^4x' = \\ = -\int \Pi_{\mu\nu'}(x-x')\mathscr{D}_{\nu'\nu}(x'-x)\,d^4x', \qquad (4,18)$$

или в p-представлении

$$\gamma_{\mu\alpha\beta}\gamma_{\nu\alpha'\beta'}K_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{q},\ \omega_n) = -\frac{\Pi_{\mu\nu'}(\mathbf{q},\ \omega_n)\mathscr{D}_{\nu'\nu}(\mathbf{q},\ \omega_n)}{e^2\mathscr{D}_0(\mathbf{q},\ \omega_n)}, \qquad (4,19)$$

где поляризационный оператор и термодинамические функции Грина определены в (2,44) – (2,52). Окончательно для вероятности dW (4,10) получается следующее выражение:

$$dW = \frac{e'^2\,\mathrm{Im}[T_{\nu\mu}\mathscr{D}^{-1}{}_{0\mu\nu'}(\mathbf{q},-i\omega)\Pi_{\nu'\mu'}(\mathbf{q},\ -i\omega)\mathscr{D}_{\mu'\nu}(\mathbf{q},\ -i\omega)]}{4\pi^3\,(\omega^2-\mathbf{q}^2)^2\,(e^{-\omega\beta}-1)}\,d^3q \equiv W_{\mathbf{q}}d^3q, \qquad (4,20)$$

а энергия, теряемая пролетающей частицей в единицу времени, равняется

$$-\frac{d\varepsilon_{\mathbf{p}}}{dt} = \int(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}})W_{\mathbf{q}}d^3q. \qquad (4,21)$$

Воспользовавшись (2,51) и пренебрегая членами более высокого порядка по e^2 (см. (2,59)), для $W_{\mathbf{q}}$ при произвольных скоростях пролетающей частицы и температуре плазмы получим

$$W_{\mathbf{q}} = \frac{e'^2}{4\pi^3(\omega^2-\mathbf{q}^2)^2\,(e^{-\omega\beta}-1)}\,\mathrm{Im}\,\frac{T_{\mu\nu}\,\Pi^1_{\nu\mu}(\mathbf{q},\ -i\omega)}{1+k^{-2}\,\Pi^1_{\nu'\nu'}(\mathbf{q},-i\omega)}, \qquad (4,22)$$

где в знаменателе сохранен член $k^{-2}\Pi^1 \sim e^2$, чтобы при вычислении энергетических потерь избежать инфракрасной расходимости.

Исследуем подробнее наиболее простой случай, когда нерелятивистская частица тормозится в нерелятивистской плазме. Тогда выражение для потери энергии на электронном газе совпадает с результатом Ларкина [31]

$$-\frac{d\varepsilon_{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{e'^2}{2\pi^2}\int_0^\infty dq\int_{-1}^{1}dx\,\frac{\omega}{e^{-\omega\beta}-1}\,\mathrm{Im}\,\frac{\Pi(\mathbf{q},\ -i\omega)}{q^2-\Pi(\mathbf{q},\ -i\omega)}, \qquad (4,23)$$

где $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{vq}}{vq}$, $\omega = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} = vqx - \frac{q^2}{2M}$, v — скорость пролетающей частицы.

Возьмем для поляризационного оператора Π первое отличное от нуля приближение (2,72)

$$\Pi(\mathbf{q},\ -i\omega) = \frac{2e^2}{(2\pi)^3}\int\frac{n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}-n_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}}{\mathbf{pq}/m-\omega}\,d^3p, \qquad (4,24)$$

где $n_{\mathbf{p}}$ — функция распределения электронов в нерелятивистской области (1,47). При большой температуре $n_{\mathbf{p}} = \exp(\mu-\varepsilon_{\mathbf{p}})\beta$, $\varepsilon_{\mathbf{p}} = p^2/2m$, поэтому мнимая часть Π равняется

$$\mathrm{Im}\,\Pi(\mathbf{q},\ -i\omega) = n\,\frac{\sqrt{2\pi m\beta}\,e^2}{2q}\,(e^{-\omega\beta}-1)\,e^{-\frac{m\beta}{2}\left(\frac{\omega}{q}-\frac{q}{2m}\right)^2}, \qquad (4,25)$$

где n — плотность электронов плазмы.

Пусть пролетающая частица движется со скоростью v много большей среднетепловой скорости электронов $v \gg 1/\sqrt{\beta m}$. Интеграл по q в (4,23) разобьем на две области $q > q'$ и $q < q'$, причем q' определяется

условием $m/\beta \gg q'^2 \gg \varkappa^2$, где $\varkappa^2 = -\Pi(0, 0) = \beta n e^2$ — квадрат обратного дебаевского радиуса (Ларкин[31]). Поскольку $\Pi(\mathbf{q}, -i\omega)$ по порядку величины не превосходит $\varkappa$, то при интегрировании по первой области можно пренебречь слагаемым Π по сравнению с q^2, тогда

$$\left(-\frac{d\varepsilon_{\mathrm{p}}}{dt}\right)_1 = \frac{e'^2 e^2 n \sqrt{2\pi m\beta}}{4\pi^2} \int\limits_{q'}^{\infty} dq \int\limits_{-1}^{1} dx \frac{vx - q/2M}{q^2} e^{-\frac{m\beta}{2}\left(vx - q\frac{M+m}{2mM}\right)^2}. \quad (4,26)$$

Если пренебречь в (4,26) членами порядка $1/v\sqrt{\beta m}$, то

$$\left(-\frac{d\varepsilon_{\mathrm{p}}}{dt}\right)_1 = \frac{ne^2e'^2}{4\pi mv} \ln \frac{2mMv}{q'(M+m)}. \quad (4,27)$$

Во второй области $q^2 \leqslant q'^2 \ll m/\beta$, поэтому в ω можно пренебречь слагаемым $q^2/2M$ по сравнению с mvx. Это обстоятельство позволяет перейти от интегрирования по x к интегрированию по $\omega = vqx$

$$\left(-\frac{d\varepsilon_{\mathrm{p}}}{dt}\right)_2 = \frac{e'^2}{2\pi^2} \int\limits_0^{q'} \frac{dq}{vq} \operatorname{Im} \int\limits_{-vq}^{vq} \frac{\omega d\omega}{e^{-\beta\omega} - 1} \frac{\Pi(\mathbf{q}, -i\omega)}{q^2 - \Pi(\mathbf{q}, -i\omega)}. \quad (4,28)$$

Максимальное значение $\omega\beta$ в (4,28) равно $vq\beta$. Выберем q' так, чтобы величина $\omega\beta$ не превосходила единицы, т. е. $q' = 1/v\beta$. При этом q' по-прежнему удовлетворяет необходимому условию $q'^2 \ll m/\beta$, если скорость пролетающей частицы велика по сравнению с тепловой. При таком выборе q' подынтегральная функция (4,28) аналитична в круге радиусом vq. Сместим контур на верхнюю дугу, тогда $q^2 \ll m\beta\omega^2$, и, следовательно, для $\Pi(\mathbf{q}, -i\omega)$ можно воспользоваться выражением

$$\Pi(\mathbf{q}, -i\omega) = \frac{e^2 n}{m} \frac{q^2}{\omega^2} + O\left(\frac{\mathbf{q}^2}{m\beta\omega^2}\right). \quad (4,29)$$

В результате интеграл по верхней дуге приобретает вид

$$\int\limits_{-vq}^{vq} \frac{d\omega}{e^{-\omega\beta} - 1} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad (4,30)$$

где $\omega_0 = \sqrt{ne^2/m}$ — ленгмюровская частота. Если опустить контур интегрирования вновь на действительную ось, то интеграл (4,30) окажется равным нулю при $vq < \omega_0$, а при $vq > \omega_0$ равным полусумме вычетов в точках $\pm\omega_0$, что дает для интеграла (4,30) величину $\pi ne^2/2m$. Окончательно интеграл (4,23) по второй области $q \leqslant q'$ равняется

$$\left(-\frac{d\varepsilon_{\mathrm{p}}}{dt}\right)_2 = \frac{ne^2e'^2}{4\pi mv} \ln \frac{q'v}{\omega_0}. \quad (4,31)$$

Полная потеря энергии в результате торможения частицы в нерелятивистской области дается суммой (4,27) и (4,31)

$$-\frac{d\varepsilon_{\mathrm{p}}}{dt} = \frac{ne^2e'^2}{4\pi mv} \ln \frac{2Mm^{3/2}v}{(M+m)\sqrt{ne^2}}. \quad (4,32)$$

Выражение (4,32) дает полную потерю энергии пролетающей частицы, связанную как с парными соударениями, когда передаваемый импульс много больше обратного дебаевского радиуса, так и с возбуждением плазменных волн. Отделить одну часть этих потерь от другой можно только с логарифмической точностью. Потеря энергии на

возбуждение плазменных волн определяется полюсом подынтегральной функции (4,28). Этот полюс дает также спектр плазменных колебаний.

В цитированной работе[31] содержится подробное исследование на основе формулы (4,23) также других предельных случаев торможения нерелятивистской частицы, например, в случае низких температур, малых скоростей тяжелой пролетающей частицы по сравнению со среднетепловой скоростью электронов плазмы и т. д.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Пусть дан некоторый класс функций $y(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$. Тогда $I(y)$ есть функционал от функций $y(x)$, если каждой функции $y(x)$ из данного класса отвечает некоторое числовое значение $I(y)$. В общем виде функционал $I(y)$ можно представить следующим образом:

$$I(y)=\int_a^b F(x, y, \dot{y})\,dx, \qquad \dot{y}=\frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

Например, длина кривой линии является функционалом ее формы, причем в этом случае $F(x, y, \dot{y})=\sqrt{1+\dot{y}^2}$, где $y(x)$ — заданная кривая.

Наравне с функцией $y(x)$ рассмотрим также бесконечно близкую функцию $\bar{y}(x)$, совпадающую с $y(x)$ на концах отрезка. Разность $\bar{y}(x)-y(x)=\delta y(x)$ называется вариацией функции $y(x)$ в точке x. Таким образом, вариация $\delta y(x)$ есть приращение функции $y(x)$, вызванное изменением вида самой функции. Аналогично, вариация функционала δI есть главная линейная часть приращения функционала $I(y)$, обусловленная изменением вида функции $y(x)$:

$$\delta I \equiv I(y+\delta y)-I(y)=\int_a^b \left(F_y-\frac{d}{dx}F_{\dot{y}}\right)\delta y(x)\,dx, \tag{2}$$

где F_y и $F_{\dot{y}}$ — частные производные соответственно по y и $\dot{y}$.

Понятие функционала можно рассматривать как обобщение функции многих переменных. В самом деле, заменим интеграл (1) интегральной суммой

$$I(y)=\sum_{k=1}^{\infty} F(x_k, y(x_k), \dot{y}(x_k))\,\Delta x_k. \tag{3}$$

Тогда $I(y)$ будет представлять собой функцию «переменных» $y(x_1)$, $y(x_2)$, ... , так как при фиксированных значениях $x_1, x_2, \ldots$ изменение вида функции $y(x)$ повлечет к изменению численных значений всей совокупности $y(x_1)$, $y(x_2)$, ... Эта аналогия подсказывает, как ввести понятие вариационной (функциональной) производной. Если полный дифференциал df функции многих переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равняется сумме частных производных, умноженных на приращение переменных:

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i, \tag{4}$$

то вариация δI функционала $I(y)$ равна интегралу от вариационной производной $\frac{\delta I}{\delta y(x)}$ (взятой в точке x), умноженной на приращение функции $\delta y(x)$:

$$\delta I=\int_a^b \frac{\delta I}{\delta y(x)}\,\delta y(x)\,dx. \tag{5}$$

можно также записать следующим образом:

$$\delta(I_1 I_2) = I_1(\Phi+\delta\Phi) I_2(\Phi+\delta\Phi) - I_1(\Phi) I_2(\Phi) = (\delta I_1) I_2 + I_1 \delta I_2 = \\ = \int \delta\Phi(x) \left(\frac{\delta I_1}{\delta\Phi(x)} I_2 \mp I_1 \frac{\delta I_2}{\delta\Phi(x)} \right) dx. \quad (17)$$

Из сравнения (16) и (17) имеем

$$\frac{\delta}{\delta\Phi(x)} I_1 I_2 = \frac{\delta I_1}{\delta\Phi(x)} I_2 \mp I_1 \frac{\delta I_2}{\delta\Phi(x)}, \quad (18)$$

или

$$\left[\frac{\delta}{\delta\Phi(x)}, I_1 \right]_{\pm} = \frac{\delta I_1}{\delta\Phi(x)}. \quad (19)$$

Последнее соотношение следует понимать в том смысле, что результат действия левой и правой части равенства (19) на произвольный функционал дает одно и то же выражение. Полагая $\Phi = \psi(x)$, $I_1 = \psi(y)$, или $\Phi = \psi(x)$, $I_1 = \psi^+(y)$, или $\Phi = \varphi(x)$, $I_1 = \varphi(y)$ и т. д., получим формулы (2,8)—(2,9).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

При использовании методов квантовой теории поля для целей статистической физики часто возникает необходимость суммирования рядов по дискретным значениям четвертой составляющей четырехмерного вектора импульса. Оказывается, можно установить некоторые общие правила и формулы суммирования, которые весьма полезны в приложениях.

Так, например, производя Фурье-преобразование (1,60) нулевой фононной термодинамической функции Грина $\mathscr{D}_0(\mathbf{x}, \tau)$ (1,37), (1,49) с учетом (1,65), получим для $\mathscr{D}_0(\mathbf{p}, \tau)$

$$\frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2 + \omega_n^2} e^{-i\omega_n \tau} = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} \left[(1+n_{\mathbf{k}}) e^{-\omega_{\mathbf{k}} |\tau|} + n_{\mathbf{k}} e^{\omega_{\mathbf{k}} |\tau|} \right]. \quad (\mathrm{I})$$

Если перейти в обеих частях равенства (I) к пределу $\tau \to 0$, то

$$\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}^2 + \omega_n^2} = \frac{1}{2} + n_{\mathbf{k}}, \quad (\mathrm{II})$$

где $\omega_n = 2n\pi/\beta$, $n_{\mathbf{k}}$ определена в (1,47), а $\omega_{\mathbf{k}}$ — произвольная положительная величина $\omega_{\mathbf{k}} > 0$ размерностью энергии.

Аналогично, совершая преобразование Фурье нулевой электронной термодинамической функции $\mathscr{G}_0(\mathbf{x}, \tau)$ (1,36), (1,48) с учетом (1,64), получим для $\mathscr{G}_0(\mathbf{p}, \tau)$

$$\frac{1}{\beta} \sum_{p_4} \frac{-\delta_{\alpha\beta}}{ip_4 + \mu - \varepsilon_{\mathbf{p}}} e^{-ip_4\tau} = \begin{cases} (1-n_{\mathbf{p}}) \delta_{\alpha\beta} e^{-(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)\tau}, & \tau > 0, \\ -n_{\mathbf{p}} \delta_{\alpha\beta} e^{-(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)\tau}, & \tau < 0. \end{cases} \quad (\mathrm{III})$$

Поскольку $\mathscr{G}_0(\mathbf{p}, \tau)$ претерпевает скачок в точке $\tau = 0$, то при $\tau \to 0$ необходимо в (III) приравнивать ее полусумме $(\mathscr{G}_0(\mathbf{p}, \tau+0) + \mathscr{G}_0(\mathbf{p}, \tau-0))/2$, что эквивалентно умножению обеих частей равенства (III) на $\delta(\tau)$ с последующим интегрированием по τ. В результате имеем

$$\frac{\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu}{\beta} \sum_{p_4} \frac{1}{p_4^2 + (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)^2} = \frac{1}{2} - n_{\mathbf{p}}, \quad (\mathrm{IV})$$

где $p_4 = (2n+1)\pi/\beta$, $\varepsilon_{\mathbf{p}} > 0$, а $n_{\mathbf{p}}$ определена в (1,47).

Отметим также, что аналогичное рассмотрение бозонной функции Грина (1,83), (1,87) приводит к следующему обобщению формулы (II) на случай $\mu \neq 0$:

$$\frac{\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu}{\beta} \sum_{p_4} \frac{1}{p_4^2 + (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)^2} = \frac{1}{2} + n_{\mathbf{p}}, \quad (\mathrm{V})$$

где $p_4 = 2n\pi/\beta$, $\varepsilon_{\mathbf{p}} > 0$, а $n_{\mathbf{p}}$ дана в (1,83).

Повторяя предыдущие рассуждения для релятивистской электронной термодинамической функции Грина (2,27), получим

$$\frac{1}{2\beta}\sum_{p_4}\frac{-i\mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}+(ip_4+\mu)\gamma_4+m}{(p_4-i\mu)^2+\varepsilon_{\mathbf{p}}^2}=$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}\left[\left(\frac{1}{2}-n_{\mathbf{p}}^-\right)(m-\gamma_4\varepsilon_{\mathbf{p}}-i\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p})+\left(\frac{1}{2}-n_{\mathbf{p}}^+\right)(m-\gamma_4\varepsilon_{\mathbf{p}}-i\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p})\right]. \qquad \text{(VI)}$$

Возьмем шпур от обеих частей равенства (VI), тогда

$$\frac{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}{\beta}\sum_{p_4}\frac{1}{(p_4-i\mu)^2+\varepsilon_{\mathbf{p}}^2}=1-n_{\mathbf{p}}^--n_{\mathbf{p}}^+,$$

где $p_4=(2n+1)\pi/\beta$, $\varepsilon_{\mathbf{p}}>0$, а $n_{\mathbf{p}}^-$ и $n_{\mathbf{p}}^+$ определены в (2,30).

Изложенный прием без особого труда распространяется и на другие случаи суммирования. В результате получаются общие формулы более сложного вида (см. например, (1,66) и (1,68)).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. US **37**, 452 (1951), см. перевод в сб. ПСФ, № 3, 28—37 (1955).
2. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **32**, 399 (1957).
3. В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **34**, 139 (1958).
4. В. М. Галицкий, ЖЭТФ **34**, 151 (1958); ЖЭТФ **34**, 1012 (1958).
5. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **34**, 262 (1958).
6. С. Т. Беляев, ЖЭТФ **34**, 412 (1958); ЖЭТФ **34**, 417 (1958).
7. Л. П. Горьков, ЖЭТФ **34**, 735 (1958).
8. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **34**, 1438 (1958).
9. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **35**, 97 (1958).
10. В. Л. Бонч-Бруевич, ЖЭТФ **31**, 522 (1956); **28**, 121 (1955); **30**, 342(1956); **31**, 522 (1956), ДАН СССР **105**, 689 (1955); Физ. металлов и металловедение **4**, 546 (1957); **6**, 590, 769 (1958).
11. В. Л. Бонч-Бруевич, В. Б. Гласко, Вестник МГУ **5**, 91 (1958).
12. A. Klein, R. Prange, Phys. Rev. **112**, 994 (1958), см. перевод в сб. ПСФ, № 3, 66 (1959).
13. P. C. Martin, J. Schwinger, Bull. Amer. Phys. Soc. **3**, 202 (1958).
14. T. Matsubara, Progr. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).
15. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **36**, 900 (1959).
16. Е. С. Фрадкин, ДАН СССР **125**, 66 (1959); ДАН СССР **125**, 311 (1959).
17. Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ **36**, 951 (1959).
18. Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ **36**, 1287 (1959).
19. Е. С. Фрадкин, Nucl. Phys. **12**, 465 (1959).
20. Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ **38**, 157 (1960).
21. И. Е. Дзялошинский, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **26**, 1797 (1959).
22. И. Е. Дзялошинский, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **37**, 229 (1959).
23. И. А. Ахиезер, С. В. Пелетминский, ЖЭТФ **38**, 1829 (1960).
24. В. Л. Бонч-Бруевич, ДАН СССР **129**, 529 (1959).
25. Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, ДАН СССР **126**, 53 (1959).
26. В. Л. Бонч-Бруевич, ДАН СССР **126**, 539 (1959).
27. Ш. М. Коган, ДАН СССР **126**, 546 (1959).
28. Чэнь Чунь-сянь, ДАН СССР **125**, 1238 (1959).
29. И. П. Дзюб, ДАН СССР **130**, 1241 (1960).
30. В. Л. Бонч-Бруевич, ЖЭТФ **36**, 924 (1959).
31. А. И. Ларкин, ЖЭТФ **37**, 264 (1959).
32. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. М. Халатников, ЖЭТФ **35**, 265 (1958); ЖЭТФ **37**, 187 (1959).
33. Л. П. Горьков, ЖЭТФ **36**, 1918 (1959); ЖЭТФ **37**, 833 (1959); ЖЭТФ **37**, 1407 (1959).
34. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **36**, 319 (1959).
35. P. C. Martin, J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 1342 (1959).

36. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., Гостехиздат 1951.
37. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика 2-е изд., М.—Л., Физматгиз, 1959, гл. IV.
38. G. C. Wick, Phys. Rev. **80**, 268 (1950), см. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», М., ИЛ, 1954, стр. 245.
39. N. Hugenholtz, Physica **23**, 481 (1957), см. перевод в сб. ПСФ, № 3, 3 (1958)
40. Чэнь Чунь-сянь, ЖЭТФ **35**, 1518 (1958).
41. C. Bloch, C. De Dominicis, Nucl. Phys. **7**, 459 (1958), см. перевод в сб. ПСФ, № 6, 74 (1958).
42. T. Thouless, Phys. Rev. **107**, 1162 (1957).
43. А. А. Веденов, А. И. Ларкин, ЖЭТФ **36**, 1133 (1959).
44. J. L. Anderson, Phys. Rev. **94**, 703 (1954).
45. M. Born, H. S. Green, Proc. Roy. Soc. **A188**, 10 (1946).
46. G. Kirkwood, J. Chem. Phys. **14**, 180 (1946).
47. Н. Н. Боголюбов, Лекції з квантової статистики, Київ, 1949; Проблемы динамической теории в статистической физике, М., Гостехиздат, 1946, Вестник МГУ № 4—5, 115 (1955).
48. J. Bardeen, Phys. Rev. **81**, 829 (1951).
49. M. Gell-Mann, K. A. Brueckner, Phys. Rev. **106**, 364 (1957), см. перевод в сб. ПСФ, № 1, 38 (1958).
50. А. А. Веденов, ЖЭТФ **36**, 942 (1959).
51. А. А. Веденов, ДАН СССР **125**, 757 (1959).
52. K. Sawada, Phys. Rev. **106**, 372 (1957), см. перевод в сб. ПСФ, № 1, 47 (1958).
53. K. Sawada, K. Brueckner, N. Fukuda, R. Brout, Phys. Rev. **108** 507 (1957), см. перевод в сб. ПСФ, № 1, 11 (1959).
54. H. Lehman, Nuovo cimento **11**, 342 (1954).
55. В. Л. Бонч-Бруевич, Физ. металлов и металловедение **6**, 590 (1958)
56. А. Абрикосов, И. Халатников, УФН **65**, 551 (1958).
57. L. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956).
58. J. Bardeen, L. Cooper, J. Schrieffer, Phys. Rev. **106**, 162 (1957).
59. Н. Н. Боголюбов, ЖЭТФ **34**, 58 (1958).
60. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **37**, 249 (1959).
61. Ю. Т. Гринь, С. И. Дроздов, Д. Ф. Зарецкий, ЖЭТФ **38**, 222 (1960)
62. С. И. Дроздов, ЖЭТФ **38**, 499 (1960).
63. Debye, Huckel, Phys. Z. **24**, 185 (1923).

Из сравнения (5) и (2) заключаем, что вариационная производная от $I(y)$ по функции y, взятая в точке x, по определению равна

$$\frac{\delta I}{\delta y(x)} = F_y(x, y, \dot{y}) - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}}(x, y, \dot{y}). \tag{6}$$

К понятию вариационной производной можно подойти также несколько другим путем. Каждому виду функции $y(x)$ соответствует своя площадь, ограниченная осью Ox и кривой $y(x)$. Изменению вида функции $y(x)$ соответствует изменение площади на величину

$$\sigma = \int_a^b \delta y(x)\, dx. \tag{7}$$

Пусть изменение вида функции $y(x)$ произошло лишь в бесконечно малой окрестности точки x_0, например $\delta y(x) = \varepsilon\delta(x - x_0)$. Тогда, обобщая операцию частного дифференцирования на случай функционалов, естественно назвать вариационной производной в точке x_0 предел $\lim\{(I(y+\delta y) - I(y))/\sigma\}$, когда изменение площади σ стягивается к точке x_0

80

$$\frac{\delta I}{\delta y(x_0)} = \lim_{\sigma\to 0} \frac{I(y+\delta y) - I(y)}{\sigma} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} \right) \varepsilon\delta(x - x_0)\, dx =$$

$$= \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} \right)_{x=x_0}. \tag{8}$$

Функцию $y(x)$ при фиксированном аргументе $x = x'$ можно рассматривать как частный случай функционала $I(y) \equiv y(x')$

$$y(x') = \int_a^b \delta(x' - x)\, y(x)\, dx. \tag{9}$$

Поэтому согласно (5)—(2) имеем

$$\frac{\delta y(x')}{\delta y(x'')} = \delta(x' - x''). \tag{10}$$

Если I — функционал от функции $B(x)$, а $B(x)$ при фиксированном x является функционалом от функции $b(y)$, то I является также функционалом от $b(y)$, причем вариация функционала I, вызванная изменением вида функции $b(y)$:

$$\delta I = \int \frac{\delta I}{\delta b(y)}\, \delta b(y)\, dy, \tag{11}$$

может быть также записана в виде

$$\delta I = \int \frac{\delta I}{\delta B(x)}\, \delta B(x) = \int \frac{\delta I}{\delta B(x)} \frac{\delta B(x)}{\delta b(y)}\, dx\, \delta b(y)\, dy, \tag{12}$$

где использовано

$$\delta B(x) = \int \frac{\delta B(x)}{\delta b(y)}\, \delta b(y)\, dy. \tag{13}$$

Из сравнения (11) и (12) находим

$$\frac{\delta I}{\delta b(y)} = \int \frac{\delta I}{\delta B(x)} \frac{\delta B(x)}{\delta b(y)}\, dx. \tag{14}$$

Если $I(\Phi)$ есть функционал от операторов $\Phi(x)$, то вариационную производную определим следующим образом:

$$\delta I = \int \delta\psi(x) \frac{\delta I}{\delta\psi(x)}\, dx. \tag{15}$$

Рассмотрим два функционала I_1 и I_2 от операторов $\Phi(x)$. Пусть $[\delta\Phi, I_1]_\pm = 0$. Тогда вариацию произведения $(I_1 I_2)$

$$\delta(I_1 I_2) = \int \delta\Phi(x) \frac{\delta(I_1 I_2)}{\delta\Phi(x)}\, dx \tag{16}$$