1961 г. Январь Т. LXXIII, вып. 1

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

О СВОЙСТВАХ КВАНТОВАННЫХ ВИХРЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ВРАЩЕНИИ ГЕЛИЯ II

Э. Л. Андроникашвили, Ю. Г. Мамаладзе, С. Г. Матинян, Д. С. Цакадзе

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. В настоящем обзоре излагаются экспериментальные и теоретические исследования по гидродинамике колебаний твердых тел, погруженных во вращающийся гелий II. Достигнутый в последнее время прогресс в этом направлении весьма показателен для современного состояния проблемы сверхтекучести. Успешная разработка этой проблемы позволила в течение неполного десятилетия перейти от накопления противоречивых фактов, относящихся к вращению гелия II, к глубокому проникновению в физическую природу наблюдаемых явлений и построению квантовой теории вихревого движения сверхтекучей жидкости.

1.2. Закритические явления, связанные с вращением гелия II, были впервые отмечены Капицей [1], наблюдавшим теплопередачу вдоль капилляра, в который был вставлен стеклянный стержень. Вращение стержня внутри неподвижного капилляра немедленно приводило к резкому уменьшению теплопередачи. В дальнейшем свойства вращающегося гелия II изучались в работе Осборна [2] и, независимо от него, в работе Андроникашвили и Каверкина [3], которые визуально наблюдали форму мениска жидкого гелия, заполнявшего прозрачный стакан и вовлекаемого в движение вращением стакана. Визуальные наблюдения позволяли проводить исследования при скоростях, не меньших 6 *сек*$^{-1}$.

Если бы, как это следует из теории Ландау (см. [1], стр. 610), сверхтекучая компонента в этих экспериментах покоилась и во вращении участвовала бы только нормальная компонента гелия II, то глубина его мениска была бы равна

$$h = \frac{\varrho_n}{\varrho} \frac{\omega_0^2 R^2}{2g}, \tag{1,1}$$

где ρ_n — плотность нормальной компоненты, ρ — полная плотность гелия II, ω_0 — угловая скорость вращения, R — радиус цилиндрического сосуда, g — ускорение силы тяжести.

В действительности же глубина мениска во всем исследованном интервале скоростей от 6 до 40 *сек*$^{-1}$ не отличалась от глубины мениска для любой классической жидкости и соответствовала выражению

$$h = \frac{\omega_0^2 R^2}{2g}. \tag{1,2}$$

А это означает, что гелий II при этих угловых скоростях движется как

целое. Такое положение вещей должно быть объяснено тем, что при достаточно больших скоростях вращения сверхтекучая компонента вовлекается в движение вместе с сосудом или непосредственно им, или благодаря тому, что относительная скорость движения сверхтекучей и нормальной (увлекаемой сосудом) компонент переходит через свое критическое значение, соответствующее началу взаимодействия между ними.

Можно было бы думать, что наблюденный эффект связан с потерей гелием его сверхтекучих свойств. Однако такие специфичные для феномена сверхтекучести явления, как термомеханический эффект, исследованный во вращающемся гелии II Андроникашвили и Каверкиным[3], а также распространение в тех же условиях второго звука, наблюдавшееся позднее в экспериментах Холла и Вайнена[5] и группы Лейна[6], сохраняются при всех скоростях вращения.

На основании экспериментов Осборна[2] и Андроникашвили, Каверкина[3] выяснилась необходимость приписать вращающемуся гелию II особые физические свойства. Соответствующие попытки предпринимались в ряде теоретических работ[7,8,9], однако правильное объяснение эти эксперименты нашли только в связи с гипотезой о возможности образования в гелии II квантованных вихревых нитей, предложенной Онсагером[10] и независимо от него Файнманом[11].

Основные положения теории Файнмана, а также результаты наиболее важных экспериментальных работ, подтвердивших эту теорию и в свою очередь стимулировавших ее дальнейшее развитие, будут изложены ниже.

1.3. Гипотеза Онсагера — Файнмана заключается в том, что в сверхтекучей компоненте гелия II возможно образование вихревых нитей, циркуляция Г которых является целым кратным величины $2\pi h/m$ и выражается равенством

$$\Gamma = \oint v_{sl}\, dl = n\frac{2\pi h}{m} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1,3}$$

в котором v_{sl} — проекция скорости сверхтекучей компоненты на касательную к контуру интегрирования, а m — масса атома гелия.

Каждый вихрь обладает определенной энергией ε, приходящейся на единицу его длины:

$$\varepsilon = n^2\pi\varrho_s \frac{h^2}{m^2} \ln\frac{b}{a_0} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1,4}$$

Здесь a_0 — радиус ствола вихря (величина порядка межатомных расстояний), а b — эффективный радиус вихря, т. е. эффективный радиус области, в которой сверхтекучая компонента гелия II совершает потенциальное вращение вокруг данного вихря со скоростью, обратно пропорциональной расстоянию r до его оси *):

$$v_s = \frac{\Gamma}{2\pi r} = n\frac{h}{mr} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1,5}$$

Поскольку энергия вихревой нити пропорциональна ее длине ($E = \varepsilon l$), вихрь оказывает противодействие растягивающему его усилию и, как легко видеть, обладает натяжением ε, численно совпадающим с энергией единицы его длины ($\frac{\partial E}{\partial l} = \varepsilon$).

---

*) Интересно отметить, что, когда r достигает величины порядка межатомных расстояний, v_s увеличивается до значений порядка 70 *м/сек*, при которой, согласно теории Ландау, должен происходить срыв сверхтекучести.

Представления Файнмана о возможности образования в сверхтекучей компоненте гелия II вихревых нитей только что описанного типа способствовали пониманию ранее необъяснимых особенностей критических явлений. Выяснилось, что в закритическом режиме сверхтекучая жидкость представляет собой нечто подобное турбулизованной идеальной жидкости. Тем самым было показано, что малые экспериментальные значения критических скоростей (0,1—100 *см/сек*) отнюдь не противоречат теории Ландау [12], предсказывающей срыв сверхтекучести при скорости порядка 70 *м/сек*. При наблюденных критических скоростях сверхтекучая компонента вступает во взаимодействие с твердыми телами и нормальной компонентой гелия II благодаря начавшемуся при этих скоростях вихреобразованию, а не из-за потери способности совершать безвязкостное движение. Однако эти аспекты теории Онсагера — Файнмана выходят за пределы данного обзора, в связи с чем мы ограничимся приложением теории только к вопросу о вращении гелия II.

1.4. Решив соответствующую вариационную задачу, можно показать, что термодинамически наиболее выгодным распределением скоростей в жидкости, помещенной в равномерно вращающийся с угловой скоростью ω_0 сосуд, является распределение типа

$$v = \omega_0 r, \tag{1,6}$$

соответствующее вращению жидкости как целого.

В твердых телах и вязких жидкостях подобный характер вращения обеспечивается межатомным или вязким взаимодействием, но чрезвычайно трудно представить себе какой-нибудь механизм, который мог бы вовлечь в движение такого типа сверхтекучую жидкость, отдельные слои которой не взаимодействуют друг с другом.

Согласно Файнману [11], сверхтекучая компонента гелия II вовлекается в движение вращающегося стакана благодаря специфичному механизму образования в ней системы квантованных вихревых нитей вышеописанного типа. Следует отметить, что до сих пор остается открытым вопрос о том, каким образом нарушаются широко известные требования классических теорем Гельмгольца—Томсона—Лагранжа, запрещающих вихреобразование в классических идеальных жидкостях. Однако, обойдя этот вопрос, Файнман [13] дал квантовомеханическое описание возможности образования вихрей в сверхтекучей жидкости. С другой стороны, он показал [11], что определенная система вихревых нитей, которую мы сейчас опишем, создаёт в сверхтекучей жидкости распределение скоростей, весьма близкое к термодинамически выгодному распределению (1,6).

Файнман предположил, что сверхтекучий гелий, помещенный в стакан, вращающийся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$, пронизывается системой равномерно распределенных вихревых нитей, параллельных оси вращения. Число таких вихрей на единицу площади сечения, перпендикулярного к этой оси, определяется равенством

$$N = \frac{m\omega_0}{n\pi h} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1,7}$$

Взаимодействие этих вихревых нитей друг с другом побуждает их перемещаться вместе с сосудом со скоростью v_L, определяемой равенством

$$v_L = \omega_0 r. \tag{1,6'}$$

Только что описанная совокупность вихрей создает в сверхтекучей компоненте гелия II довольно сложное распределение скоростей, схематически показанное на рис. 1. Рассматривая этот рисунок, нетрудно

убедиться, что средняя скорость движения сверхтекучей компоненты $\bar{v}_s$ равна

$$\bar{v}_s = \omega_0 r \tag{1,6''}$$

(подобно скорости перемещения вихревых нитей и скорости нормальной компоненты). При этом распределение скоростей во вращаемой квантованными вихрями сверхтекучей компоненте оказывается тем ближе к термодинамически наиболее выгодному, чем больше вихревых нитей пронизывают вращающуюся жидкость. В связи с этим в дальнейшем, используя формулы (1,3) — (1,5) и (1,7), мы будем приписывать квантовому числу n его наиболее вероятное минимальное значение $n = 1$ (см. работы [11,14]).

Что касается условий, при которых в гелии II, помещенном во вращающийся сосуд, начинается образование вихревых нитей, они определяются соображениями минимальности свободной энергии жидко-

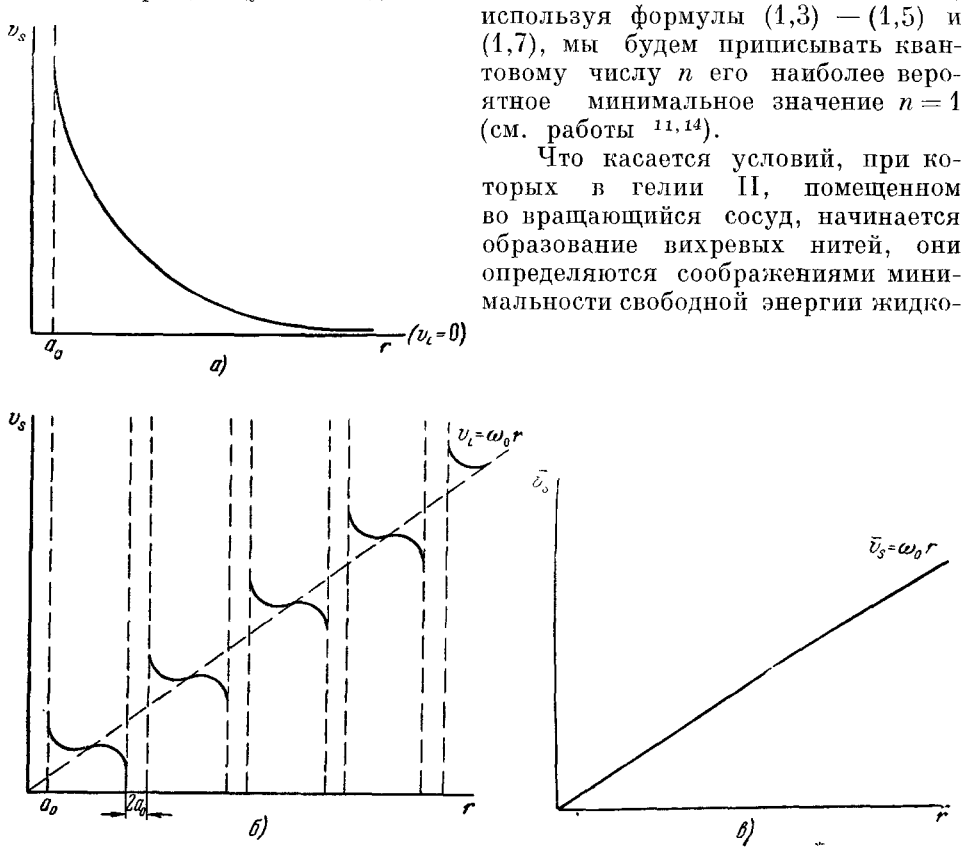

Рис. 1. Распределение скоростей в движимой вихрями сверхтекучей жидкости.
а) Единичный (неподвижный) вихрь, — — — a_0; *б*) совокупность перемещающихся вихрей; *в*) результат осреднения распределения скоростей, показанного на предыдущем рисунке.

сти. Это приводит к следующей формуле [15] для критической угловой скорости вихреобразования $\omega_{0к}$:

$$\omega_{0к} = \frac{\hbar}{m\,(R^2 - a^2)} \ln \frac{R}{a_0}\,, \tag{1,8}$$

где R — радиус цилиндрического сосуда. Используя последнюю формулу, нетрудно убедиться, что даже для сосудов сравнительно небольшого размера радиусом порядка 1 *см* критическая скорость чрезвычайно мала ($\omega_{0к} \sim 10^{-3}$ *сек*$^{-1}$). Поэтому в обычных условиях вращение гелия II является всегда закритическим и в нем имеются вихри в количестве, достаточном для вращения сверхтекучей компоненты по закону (1,6″).

Следует отметить, что вывод формулы (1,6″) является одним из простейших примеров широко применяемого в гидродинамике вращающегося гелия II приема усреднения деталей сложной картины движения. Этим

обеспечивается возможность, отвлекаясь от второстепенных подробностей, описывать при помощи усредненных величин только основные особенности рассматриваемых явлений.

1.5. В предыдущем параграфе было показано, каким образом потенциальное вращение вокруг отдельных вихрей (формула (1,5)) приводит в среднем к вихревому вращению (формула (1,6″)) с отличным от нуля средним ротором скорости сверхтекучей компоненты $\overline{\omega}$:

$$\overline{\omega} = 2\omega_0. \tag{1,9}$$

Поскольку заметные отклонения от закона (1,6″) наблюдаются только в микрообластях, окружающих стволы отдельных вихрей, макроскопические наблюдения формы мениска естественно создают впечатление вращения жидкости как целого.

С другой стороны, имеется вполне определенная разница между характером вращения сверхтекучей компоненты и вращением классической жидкости, находящейся в подобных условиях. В случае классической жидкости мы имеем дело со сплошным (непрерывным) вихревым слоем, для которого равенство (1,6) соблюдается абсолютно точно, а формула (1,9) справедлива для вихря скорости $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}$ в любой точке занятого жидкостью объема, а не для его среднего значения $\overline{\omega}$. В случае же сверхтекучей жидкости циркуляция распределена между отдельными квантованными вихрями, составляющими дискретную совокупность. Энергия этих вихрей локализована в отдельных областях, связанных с особенностями в микрораспределении скоростей сверхтекучей компоненты.

Естественно было ожидать, что эти особенности вращения сверхтекучей жидкости могут быть обнаружены в эксперименте, поставленном соответствующим образом. И действительно, представления, вытекающие из теории Файнмана, нашли блестящее подтверждение в ряде работ, описанных в обзорах [14,16] (см. особенно [17]) и Вайнена [15].

Исследуя распространение второго звука в продольном направлении относительно оси вращения резонатора (т. е. вдоль направления вихревых нитей), Холл и Вайнен [17] установили практическое отсутствие обусловленного вращением избыточного затухания волн второго звука, тогда как их распространение в поперечном направлении приводило к значительному увеличению затухания в сравнении с неподвижным гелием II. При этом избыточное затухание, как и следует ожидать по теории Файнмана, зависит от угловой скорости вращения, т. е. от плотности вихрей. Ими было показано также, что взаимное трение между нормальной и сверхтекучей компонентами обусловлено рассеянием на вихрях квантов тепловых возбуждений гелия II, и определены значения коэффициентов взаимного трения вдоль трех осей цилиндрической системы координат.

Из тех же экспериментальных данных Холл и Вайнен сумели извлечь информацию о величине элементарной циркуляции, которая в единицах $\frac{2\pi\hbar}{m}$ оказалась равной единице.

Специальный эксперимент с целью измерения единичного кванта циркуляции был предпринят Вайненом[15], который самым непосредственным образом доказал, что он действительно равен $\frac{2\pi\hbar}{m}$.

Так как целью настоящей статьи не является описание всех работ, связанных с вихреобразованием в гелии II, то сказанного вполне достаточно, чтобы понять сущность явлений, сопровождающих колебания тел, погруженных во вращающийся гелий II, и связать ее со свойствами системы вихрей Онсагера — Файнмана.

2. КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГЕЛИИ II

2.1. В экспериментах, к описанию которых мы приступаем, твердые тела, колеблющиеся во вращающемся гелии II, имели то же назначение, что и второй звук в уже описанных работах Холла и Вайнена [17]. Они должны были сыграть роль своеобразных «зондов», при помощи которых исследовались особенности вихревого вращения сверхтекучей компоненты, описанные в предыдущей главе.

2.2. Основной среди этих особенностей является наличие во вращающемся гелии системы вихрей, энергетические свойства которых уподобляют каждый вихрь натянутой струне (см. п. 1.3). В связи с этим деформация вихревой нити или системы таких вихрей должна привести к возникновению упругих сил внутри вращающегося гелия II. Очевидно, что эти упругие свойства должны, в первую очередь, проявиться в колебательных экспериментах, в которых они способны вызвать уменьшение периода колебаний тела, погруженного во вращающийся гелий II. Очевидно, что для этого необходимо, чтобы поверхность тела пересекала вихревые нити и их концы были бы (хотя бы частично) закреплены на колеблющейся поверхности.

В связи с этим уместно обсудить вопрос об условиях закрепления концов вихревых нитей на твердой поверхности. Необходимо отметить, что хотя концы вихрей и «присасываются» к поверхности с силой ε, это вовсе не означает, что вихрь обязан следовать за всеми ее перемещениями *). Если *это перемещение перпендикулярно к направлению вихря*, то, следуя за поверхностью, вихрь удлинился бы, что энергетически невыгодно. Поэтому вихри могут проскальзывать вдоль поверхности (если конец вихревой нити последует за движущейся поверхностью, натяжение изогнутого вихря вернет его в первоначальное положение).

Однако полное проскальзывание возможно только в случае абсолютно гладкой поверхности. При наличии шероховатости энергетически невыгодным оказывается уже соскальзывание вихрей с выступающих частей поверхности, которые, таким образом, локализуют концы вихревых нитей. В таком случае перпендикулярное вихрям смещение поверхности искривляет вихревые нити и их натяжение приобретает составляющую, касательную к плоскости, на которую нанесены шероховатости. Именно эта составляющая натяжения вихрей и способствует проявлению их упругих свойств в закономерностях, которым подчинены колебания твердых тел соответствующей формы, погруженных во вращающий гелий II.

2.3. Наличие у вращающегося гелия II ожидаемых упругих свойств было непосредственно доказано в экспериментах Андроникашвили и Цакадзе [18], которые наблюдали колебания стопки тонкостенных дисков, наложенные на вращение, совместное с жидкостью. Расстояние между дисками было неизменным и равнялось 0,2 *мм*.

Показав, что вращение гелия II может привести к уменьшению периода колебаний стопки, Андроникашвили и Цакадзе тем самым обнаружили наличие у вращающегося гелия упругости на сдвиг, аналогично тому, как это наблюдается при закручивании твердого тела.

2.4. Одновременно с Андроникашвили и Цакадзе Холл [19] провел аналогичное, но более детальное исследование колебаний стопки во вра-

---

*) Формула (1,4) для ε может быть получена, если, использовав уравнение Бернулли, определить и проинтегрировать по поверхности уменьшение давления, обусловленное вращением жидкости вокруг вихревой нити (формула (1,5)).

щающемся гелии II. Стопка Холла была разъемной. Меняя число дисков, он варьировал расстояние между ними от 0,2 до 7 *мм*.

Специально исследовался вопрос о влиянии шероховатости поверхности, для чего эксперименты велись как с гладкими дисками, так и с дисками, на поверхность которых были нанесены песчинки с диаметром порядка 50 *мк* *). Как и следовало ожидать, выяснилось, что гладкая и шероховатая поверхности ведут себя не одинаково. Однако при больших периодах колебаний (25 *сек*) гладкая поверхность приближается по своим свойствам к шероховатой (ср. п. 2. 6).

Результаты своих экспериментов Холл выразил через эффективную плотность сверхтекучей компоненты ρ', участвующей в движении дисков и определяемой из эксперимента с помощью соотношения

$$\frac{\rho'}{\rho_s} = \frac{T_\omega^2 - T_0^2}{T_2^2 - T_1^2} \frac{I_2 - I_1}{I_s}, \tag{2,1}$$

где T_0 — период колебаний в неподвижном гелии, T_ω — период в гелии,

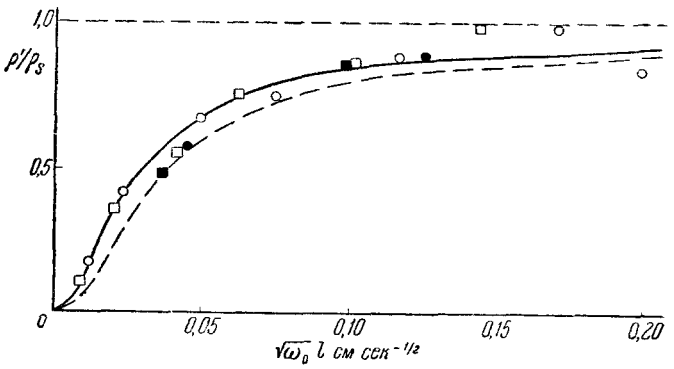

Рис 2 Зависимость эффективной плотности сверхтекучей компоненты от скорости вращения и разделения дисков в случае $\Omega \ll 2\omega_0$. (См. также подпись к рис. 3)

вращающемся с угловой скоростью ω_0, T_1 и T_2 — периоды при комнатной температуре, соответствующие моментам инерции I_1 и I_2, $(I_2 - I_1)$ — известный момент инерции, I_s — момент инерции твердого тела, обладающего плотностью ρ_s и заполняющего пространство между дисками.

Экспериментальные результаты Холла приведены на рис. 2 и 3.

Кривая, показанная на рис. 2, получена в условиях «быстрого» вращения, когда частота колебаний Ω гораздо меньше удвоенной угловой скорости вращения ($\Omega \ll 2\omega_0$). В этом случае как для гладких, так и для шероховатых дисков величина ρ'/ρ_s монотонно возрастает с ростом произведения $\sqrt{\omega_0}\, l$ ($2l$ — расстояние между дисками в стопке) и стремится к асимптоте $\rho'/\rho_s = 1$ (см. п. 4.9).

В обратном, крайнем случае «медленного» вращения ($\Omega \gg 2\omega_0$) период колебаний стопки, составленной из гладких дисков, практически не зависит от скорости вращения или расстояния между дисками. Однако в случае шероховатости дисков, как это видно из рис. 3, вращение оказывает весьма сильное влияние на период колебаний.

---

*) Следует отметить, что стопка Андроникашвили и Цакадзе не подвергалась подобной обработке, однако составляющие ее диски приобретали достаточную шероховатость в процессе изготовления (при прессовке).

Если по оси абсцисс отложить величину $\sqrt{\Omega-2\omega_0}\,l$, а по оси ординат $\frac{\Omega}{\omega_0}\frac{\varrho'}{\varrho_s}$, то экспериментальные точки ложатся на график, имеющий характер дисперсионной кривой, связанной с наличием резонансных эффектов. Здесь, так же как и в экспериментах Андроникашвили и Цакадзе [18], период колебаний в результате вращения может не только увеличиться, но и уменьшиться.

2.5. Откладывая более подробное изложение теоретических вопросов до главы 4, мы сделаем только несколько замечаний, необходимых для качественного понимания экспериментальных данных, а также для ясного представления о целях, которые преследовались при постановке дальнейших экспериментов.

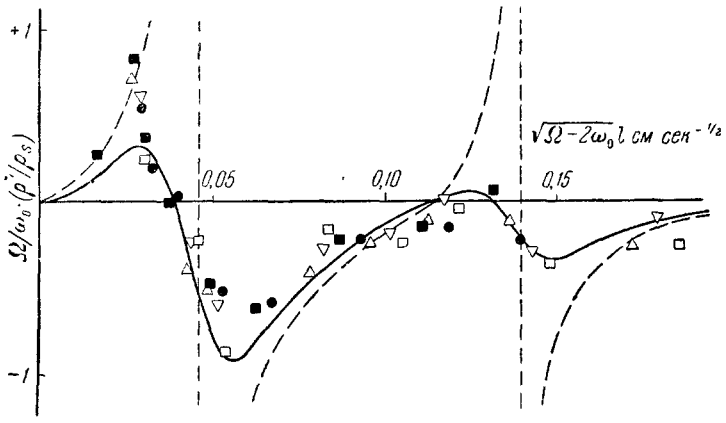

Рис. 3. Зависимость эффективной плотности сверхтекучей компоненты от скорости вращения и разделения дисков [19] в случае $\Omega \gg 2\omega_0$.

Пунктирная (теоретическая) кривая построена Холлом без учета скольжения (см. п. 4.9). Сплошная кривая получена путем соответствующего подбора коэффициента скольжения (см. главы 3 и 4).

Исходя из результатов своих экспериментов, Холл (в той же работе [19]) развил теорию, объяснившую только что изложенные явления на основе представления об упругих поперечных волнах круговой поляризации, которые распространяются вдоль вихревых нитей при колебании поверхностей дисков. В условиях, когда между соседними дисками стопки укладывается нечетное число полуволн, наступающие резонансы могли бы привести к бесконечным всплескам ρ'/ρ_s. Однако частичное проскальзывание вихрей, имеющее место даже для шероховатой поверхности, снижает резонансные значения ρ'/ρ_s к нулю (здесь имеется существенная аналогия с теорией аномальной дисперсии света).

Как показал Холл, при $2\omega_0<\Omega$ основную роль играет одна из волн, генерируемых колебаниями дисков в сверхтекучей компоненте и пронизывающих ее вихрях (см. пп. 4.3 и 4.8). Ею является волна, волновое число которой определяется равенством

$$k_{s0}^{(-)2}=\frac{\Omega-2\omega_0}{\nu_s} \tag{2,2}$$

(содержащаяся в этой формуле величина ν_s ($\nu_s=\eta_s/\varrho_s=\varepsilon/\varrho_s\Gamma$) является одним из основных параметров гидродинамики вращающегося гелия (см. главу 3)). Из формулы (2,2) следует, что вышеупомянутые резонансы

определяются условием

$$\sqrt{\Omega - 2\omega_0}\, l = (2n-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{\nu_s} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2,3}$$

используя которое Холл смог по данным, приведенным на рис. 3, определить численное значение параметра $\nu_s = (8{,}5 \pm 1{,}5)10^{-4}$ *см*²/*сек*.

Таким образом, основные положения Холла, по сути дела, полностью согласовались с теми соображениями об упругих свойствах системы вихрей Онсагера — Файнмана, которые были изложены в начале этой главы в п. 2.2 и которые были положены в основу постановки эксперимента Андроникашвили и Цакадзе. Однако, вне непосредственной связи с развитой им самим теорией, Холл, выдвинув на первый план понятие эффективной плотности, участвующей в колебаниях сверхтекучей компоненты, описывал уменьшение периода ($T_\omega < T_0$) как появление отрицательных значений ρ', связанное, по его мнению, с возможностью движения сверхтекучей компоненты в противофазе с движением стопки.

Отнюдь не желая умалить значения работы Холла [19], являющейся одним из первых и основополагающих исследований колебательных явлений во вращающемся гелии II, нельзя не отметить порочности концепции эффективной плотности. Эта концепция не только затрудняет правильное понимание физической природы рассматриваемых явлений, но, как это будет показано в главе 4 (см. п. 4.8), влечет за собой допущение принципиальных ошибок.

Разница между концепцией Холла и концепцией тбилисской группы, настаивавшей на первостепенной важности упругих свойств вихрей, была подчеркнута в выступлении Андроникашвили в дискуссии по докладу Холла на IV Всесоюзном совещании по физике низких температур (Москва, 1957 г.). В этом же выступлении отмечалось, что для создания полной гидродинамической картины недостаточны сведения о периоде колебаний, а необходимы также данные и о затухании.

2.6. В криогенной лаборатории Тбилисского университета было проведено систематическое исследование затухания колебаний тел осевой симметрии, погруженных во вращающийся гелий II.

Первым объектом подобных исследований был единичный «тяжелый» диск, т. е. диск с достаточно большим моментом инерции, чтобы изменения частоты его колебаний, обусловленные взаимодействием с жидкостью, были бы незначительными. Подобный диск подвешивался к упругой нити, помещался в заполненный гелием II стакан и вращался вместе с ним, а также со специальным измерительным устройством, одновременно совершая аксиально-крутильные колебания.

Результаты первых же измерений затухания колебаний диска, проведенных в 1958 г. [20], выявили наиболее характерную особенность зависимости логарифмического декремента затухания от скорости вращения, а именно: было показано, что эта зависимость характеризуется максимумом, который наблюдается при одной и той же скорости вращения при различных температурах гелия как для шероховатых, так и для гладких поверхностей.

Прежде чем приступить к более подробному изложению данных о затухании колебаний диска во вращающемся гелии II, необходимо заметить, что наблюденный эффект является совершенно неожиданным с точки зрения гидродинамики классической жидкости. Действительно, Мамаладзе и Матинян [20,21] показали, что для классических вязких жидкостей зависимость затухания колебаний диска от скорости вращения характеризуется не максимумом, а минимумом, лежащим при $2\omega_0 = \Omega$, как это показано на рис. 4, иллюстрирующем кривую, построенную [20,21]

по формуле

$$\delta - \frac{\Omega_0}{\Omega}\delta_0 = \frac{\pi^2 R^4}{2I\Omega}\sqrt{\frac{\eta\varrho}{2}}\left(\sqrt{\Omega+2\omega_0}+\sqrt{|\Omega-2\omega_0|}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{2d}{R}+\frac{4\lambda^{(+)}\lambda^{(-)}}{R(\lambda^{(+)}+\lambda^{(-)})}\right). \quad (2,4)$$

Здесь R и I — радиус и момент инерции диска, ρ и η — плотность и динамическая вязкость жидкости. Последний множитель представляет собой поправку на краевые эффекты. В нем d обозначает толщину диска, а $\lambda^{(\pm)}$—глубины проникновения двух волн, генерируемых колеблющимся диском во вращающейся жидкости:

$$\lambda^{(\pm)} = \sqrt{\frac{2\nu}{|\Omega \pm 2\omega_0|}}. \quad (2,5)$$

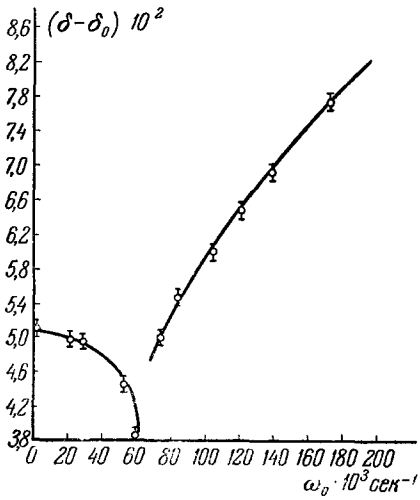

Рис. 4. Зависимость логарифмического декремента затухания колебаний диска в воде от скорости вращения.

Формула (2,4) была подтверждена экспериментальными данными Месоед и Цакадзе [22], полученными при колебаниях диска во вращающейся воде и также нанесенными на рис. 4.

Нетрудно убедиться в том, что наличие максимума в зависимости затухания от скорости вращения гелия II нельзя объяснить диссипацией энергии благодаря взаимному трению между сверхтекучей компонентой, вращающейся описанным в п. 1.4 образом, и нормальной компонентой гелия II, непосредственно вовлекаемой в колебания диска. Действительно, взаимное трение, увеличиваясь с увеличением числа вихрей, могло бы привести только к линейному росту затухания с увеличением скорости вращения. Кроме того, оказалось, что взаимное трение может обеспечить затухание не большее, чем по крайней мере на порядок ниже найденного.

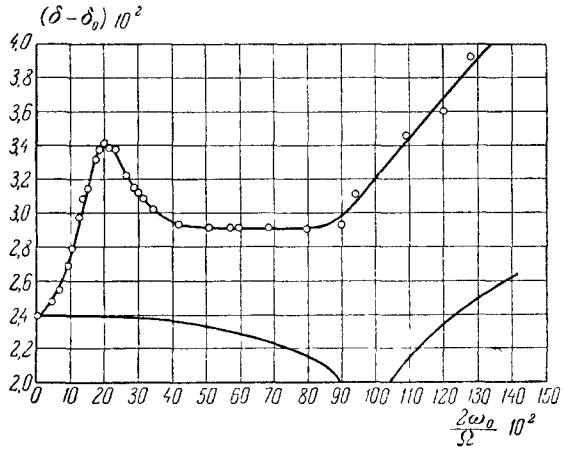

Рис. 5. Зависимость логарифмического декремента затухания колебаний шероховатого диска от скорости вращения.

Экспериментальные точки получены с «тяжелым» диском при $\Omega=0{,}581$ *сек*$^{-1}$ и при температуре 1,78° К. Нижняя кривая рассчитана по формуле (2,4) для $\eta=\eta_n$, $\varrho=\varrho_n$ и $\nu=\nu_n$.

Таким образом, уже на первом этапе исследований, когда еще не была ясна установленная впоследствии непосредственная связь наблюденных явлений с упругими свойствами вихрей (см. гл. 4, в особенности п. 4.5), можно было считать несомненными, что обнаруженная Андроникашвили и Цакадзе скоростная зависимость затухания специфична именно для вращающегося гелия II и что это явление заслуживает подробного экспериментального и теоретического изучения.

В 1959—1960 гг. скоростная зависимость затухания колебаний диска была исследована в значительно расширенном интервале скоростей вращения, причем исследовались как гладкие, так и шероховатые диски, имеющие разные периоды колебаний. Результаты этих измерений[20,23,24] показаны на рис. 5, 6, 7 и 8.

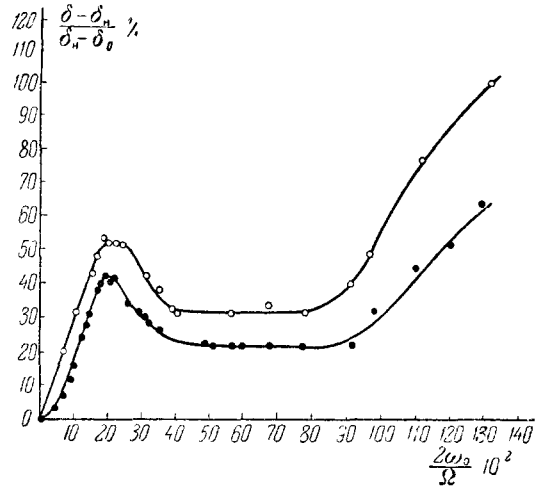

Рис. 6. Зависимость логарифмического декремента затухания шероховатого «тяжелого» диска от скорости вращения при различных частотах колебаний.

Верхняя кривая соответствует частоте $\Omega = 0{,}361$ *сек*$^{-1}$, нижняя — $\Omega = 0{,}581$ *сек*$^{-1}$. $\delta_н$ — декремент при колебании в неподвижном гелии ($T=1{,}78°$ K).

На рис. 5 приведены типичные данные, полученные с шероховатым диском, поверхность которого была покрыта песчинками с линейными размерами порядка 50 *мк*. Как видно из этого рисунка, экспериментальная кривая сначала идет вверх, потом достигает максимума при $2\omega_0/\Omega=0{,}21$ и снова резко падает, чтобы потом идти параллельно оси абсцисс. Когда $2\omega_0/\Omega$ приближается к единице, кривая поднимается кверху и поведение гелия II в какой-то степени уподобляется поведению классической жидкости. В этом нетрудно убедиться, сравнив описываемую кривую с рис. 4 или с приведенной на рис. 5 кривой скоростной зависимости затухания, связанного

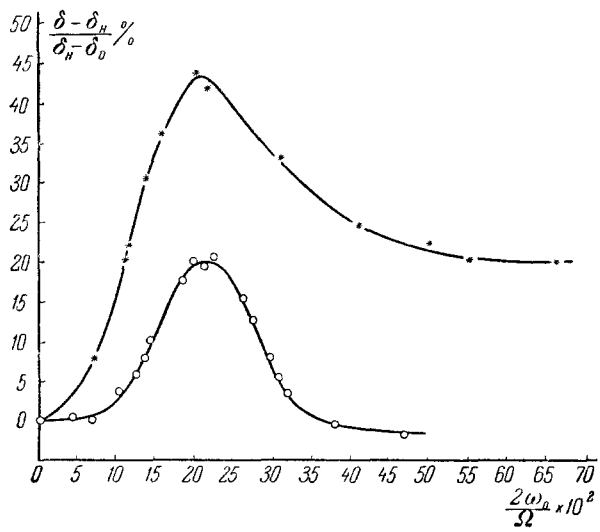

Рис. 7. Зависимость логарифмического декремента затухания гладкого «тяжелого» диска от скорости вращения при различных частотах колебаний.

Верхняя кривая снята при $\Omega=0{,}368$ *сек*$^{-1}$, нижняя — $\Omega=0{,}551$ *сек*$^{-1}$ ($T=1{,}78°$ K).

с вязкими свойствами нормальной компоненты гелия II, рассчитанной по формуле (2,4).

Рис. 6 иллюстрирует влияние, которое оказывает на скоростную зависимость затухания увеличение периода колебаний. При этом в области малых скоростей вращения затухание возрастает гораздо резче, а максимум смещается в сторону уменьшения ω_0 таким образом, что его положение в координатах $2\omega_0/\Omega$ остается неизменным. То же утверждение справедливо и относительно области, где начинается повторный рост затухания.

На рис. 7 приведены результаты, полученные с гладкими дисками. Они имеют тот же общий характер, что и данные, показанные на рис. 6. В частности, как для шероховатых, так и для гладких поверхностей положение особых точек графиков на оси абсцисс совершенно подобно. Однако следует заметить, что при относительно малых периодах колебаний (нижняя кривая на рис. 7) до и после максимума затухание во вращающемся гелии равно затуханию в неподвижной жидкости, а максимум значительно ниже, чем в случае шероховатой поверхности. Увеличение периода колебаний (верхняя кривая на рис. 7) заметно приближает кривую, снятую с гладким диском, к зависимости, найденной в случае шероховатой поверхности, что касается не только качественных особенностей, но и количественных характеристик.

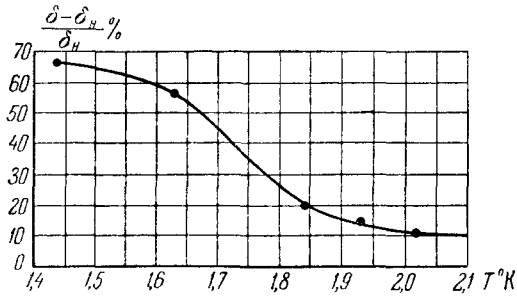

Рис. 8. Температурная зависимость затухания колебаний диска при $\Omega=0{,}581$ *сек*$^{-1}$ и $\omega_0=0{,}055$ *сек*$^{-1}$.

Положение максимума оказалось практически нечувствительным к температуре, которая влияет только на его высоту. На рис. 8 показано, как максимальное затухание увеличивается при понижении температуры, достигая при 1,4° К величины порядка 170% от затухания в неподвижном гелии.

2.7. По поводу экспериментальных фактов, изложенных в предыдущем параграфе, следует высказать несколько качественных и количественных соображений, не требующих анализа гидродинамических уравнений, который будет дан в главе 4.

Сравнение экспериментальной кривой на рис. 5 с приведенной на том же рисунке кривой, рассчитанной для нормальной жидкости, показывает, что измеряемое затухание связано, в основном, с взаимодействием диска с вращающейся сверхтекучей компонентой гелия II. Это обстоятельство подтверждается также тем фактом (рис. 8), что затухание колебаний возрастает с увеличением плотности сверхтекучей компоненты ρ_s.

Поскольку непосредственное взаимодействие между твердой поверхностью и сверхтекучей жидкостью отсутствует, а связь через взаимное трение недостаточно интенсивна (см. п. 2.6), ясно, что диск взаимодействует со сверхтекучей компонентой гелия II посредством закрепленных на его поверхности вихрей. С этой точки зрения вполне понятна разница между величинами затухания колебаний шероховатых и гладких дисков, подобных друг другу по своим геометрическим параметрам (ср. рис. 6 и 7). Очевидно, что проскальзывание вихрей, которое должно ослаблять взаимодействие диска со сверхтекучей компонентой, сильнее сказывается в случае гладких поверхностей; причем, если период колебаний относительно невелик (нижняя кривая на рис. 7), то в областях до и после максимума наблюдается практически полное проскальзывание, которое заменяется частичным при увеличении периода колебаний (верхняя кривая

на рис. 7). Следы частичного проскальзывания вихрей вдоль шероховатой поверхности ясно проступают при сравнении начальных участков кривых затухания, снятых при различных периодах колебаний (рис. 6).

Наибольший интерес при трактовке экспериментальных данных о скоростной зависимости затухания диска представляет, конечно, вопрос о физической природе максимума. В связи с этим нельзя не обратить внимание на то обстоятельство, что максимум затухания наблюдается очень близко к угловой скорости, при которой должно иметь место явление, которое можно назвать коллективизацией колебаний вихрей [20,23].

Согласно Томсону, эффективный радиус колебаний единичной вихревой нити $R_{\text{кол}}$ выражается равенством (см. работы [19] и [25])

$$R_{\text{кол}} \approx \frac{1}{k}, \tag{2,6}$$

где k — волновое число распространяющейся вдоль вихря волны.

Следует подчеркнуть, что эффективный радиус $R_{\text{кол}}$ не имеет ничего общего с эффективным радиусом b, который фигурирует в формуле (1,4), определяющей статическую энергию вихря, и имеет величину порядка размеров сосуда или расстояния между вихрями *). В отличие от него $R_{\text{кол}}$ определяет энергию колебаний вихря, являющуюся добавкой к статической энергии ε, определяемой формулой (1,4). Приведенная к единице длины вихря энергия его колебаний $\varepsilon_{\text{кол}}$ равна

$$\varepsilon_{\text{кол}} = \pi\varrho_s \frac{\hbar^2}{m^2} \cdot \frac{q^2 k^2}{2} \ln \frac{R_{\text{кол}}}{a_0}, \tag{2,7}$$

где q — амплитуда колебаний (см. работу [25]).

Применяя формулу (2,6) для волны, которая, как это отмечалось в п. 2.5, играет особо существенную роль в явлениях, разыгрывающихся при колебании дисков в сверхтекучей жидкости, и используя также формулу (2,2), имеем:

$$R_{\text{кол}} = \sqrt{\frac{\nu_s}{\Omega - 2\omega_0}}. \tag{2,8}$$

Сравним теперь величину эффективного радиуса $R_{\text{кол}}$ с расстоянием между вихрями c, которое в соответствии с формулой (1,7) равно

$$c = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega_0}}. \tag{2,9}$$

Сравнение формул (2,8) и (2,9) показывает, что, при достаточно малых скоростях вращения ω_0, $R_{\text{кол}} \ll c$. В таких условиях колебания вихрей можно считать независимыми друг от друга. Однако при определенной скорости $\tilde{\omega}_0$ эффективный радиус колебаний вихревых нитей должен стать равным половине расстояния между вихрями, в связи с чем при $\omega_0 > \tilde{\omega}_0$ колебания вихрей следует считать коллективизированными. Исходя из определения $\tilde{\omega}_0$ и формул (2,8) и (2,9), нетрудно получить

$$\frac{2\tilde{\omega}_0}{\Omega} = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\pi\hbar}\nu_s}. \tag{2,10}$$

Подставив в формулу (2,10) численные значения m и $\hbar$, а также измеренную

*) Здесь имеется определенная аналогия с гидродинамикой вязкой классической жидкости, где стационарное движение твердых тел сказывается на распределении скоростей в жидкости вплоть до ее границ, а влияние колеблющегося тела распространяется только на слой, величина которого определяется глубиной проникновения вязкой волны.

Холлом величину $\nu_s = 8{,}5 \cdot 10^{-4}$ *см²/сек*, находим $2\tilde{\omega}_0 / \Omega = 0{,}22$, что действительно очень близко к положению максимума в зависимости затухания диска от скорости вращения ($2\omega_0 / \Omega = 0{,}21$).

В связи с только что высказанными соображениями можно представить себе следующее развитие явлений, связанных с затуханием гладкого диска при сравнительно небольшом периоде колебаний (нижняя кривая на рис. 8). При малых ω_0, когда вихрей немного, происходит практически полное проскальзывание вихревых нитей вдоль гладкой поверхности. Возрастание числа вихрей, происходящее с увеличением скорости вращения, приводит к тому, что часть вихрей закрепляется (хотя бы частично) на имеющихся всегда в каком-то количестве неровностях поверхности. С этого момента вступает в силу взаимодействие между колеблющимся диском и системой вихрей Онсагера — Файнмана, что и приводит к дополнительному затуханию колебаний, возрастающему с ростом $\tilde{\omega}_0$. Однако коллективизация вихревых колебаний, наступающая при $\omega_0 = \omega_0$, способствует усилению скольжения концов вихревых нитей вдоль твердой поверхности. В связи с этим затухание снова начинает падать, и в некотором отдалении от максимума вновь наблюдается практически полное проскальзывание. Конечно, те же явления, но в гораздо меньшей степени наблюдаются и в случае больших периодов колебаний и шероховатых поверхностей.

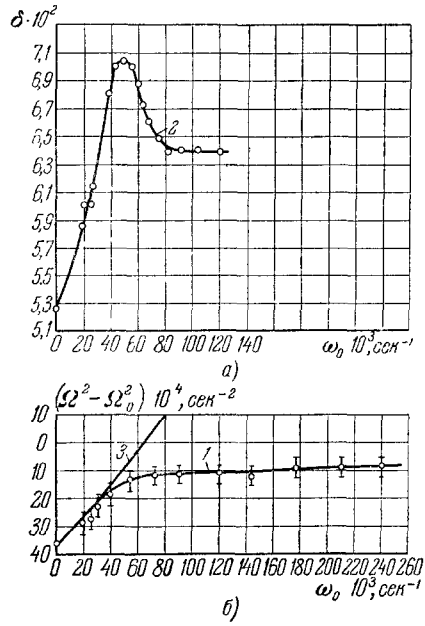

Рис. 9. Скоростная зависимость затухания (*а*) и частоты колебаний (*б*) «легкого» диска. Кривые *1* и *2* — экспериментальные данные, полученные при температуре 1.47° К, кривая *3* рассчитана теоретически (см. п. 4.4).

2.8. Новые данные, подтверждающие только что высказанные соображения, были получены в 1960 г. Андроникашвили и Цакадзе [26] при сравнении зависимостей затухания и частоты колебаний «легкого» диска от скорости. Использованный ими диск имел достаточно малый момент инерции, чтобы заметно изменять частоту своих колебаний в результате взаимодействия с вращающимся гелием II, и обладал шероховатой поверхностью. Зависимость его затухания от скорости, представленная на рис. 9, *а*, как и следовало ожидать, совершенно аналогична кривым, снятым с применением «тяжелых» дисков, и не представляет самостоятельного интереса. Однако при ее сравнении с представленной на рис. 9, *б* кривой зависимости частоты колебаний от скорости нельзя не обратить внимание на следующие обстоятельства.

При малых скоростях вращения частота колебаний Ω возрастает с ростом ω_0. Как уже указывалось в п. 2.2, таким и должен быть результат взаимодействия колеблющегося тела, связанного с перпендикулярными к его поверхности упругими вихревыми нитями. Более того, следовало бы думать, что в случае колебаний единичного диска (а не стопки близкопоставленных дисков) в неограниченной жидкости *) не может

*) Эксперименты с легким диском, в отличие от первых экспериментов с тяжелым диском, были предприняты после создания теории колебательных явлений в гелии II.

быть резонансных эффектов, обусловливающих периодические изменения частоты колебаний. Поэтому единственным результатом увеличения скорости вращения должно было быть монотонное возрастание частоты колебаний, связанное с ростом числа вихрей. Однако, как легко видеть из рис. 9, примерно при тех же частотах ω_0, при которых наблюдается максимум затухания, рост частоты колебаний замедляется и вскоре намечается тенденция к насыщению.

Очевидно, что этот факт подтверждает высказанное в п. 2.7 предположение о возможном усилении проскальзывания вихрей при ω_0, близком к ω_0. Кроме того, результаты, полученные с легким диском, ясно говорят об единстве физических причин, обусловливающих скоростную зависимость затухания колебаний диска, с одной стороны, и частоты его колебаний — с другой.

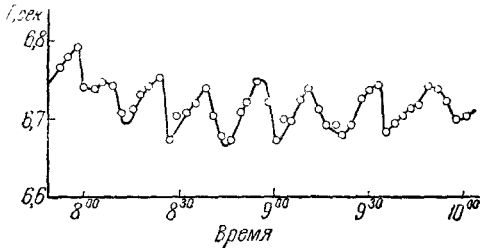

Рис 10. Изменение периода колебаний единичного диска по мере натекания жидкого гелия II на пленке ($\omega_0 = 0{,}140$ *сек*$^{-1}$, $T = 1{,}3°$ K).

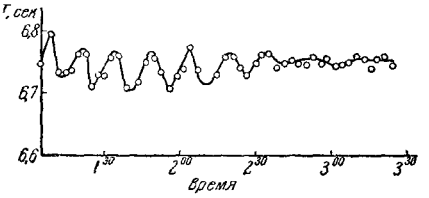

Рис. 11. Изменение периода колебаний единичного диска по мере натекания жидкого гелия II на пленке ($\omega_0 = 0{,}140$ *сек*$^{-1}$, $T = 1{,}6°$ K).

2.9. Вернемся к вопросу об уже неоднократно упоминавшихся упругих поперечных волнах, генерируемых колебаниями диска в системе вихрей Онсагера — Файнмана.

Интересные сведения относительно этих волн были получены в экспериментах Холла [27] (см. также работу [14]) и Андроникашвили, Цакадзе [28], в которых единичный шероховатый диск колебался под свободной поверхностью вращающегося гелия II, поднимавшейся из-за натекания на пленке или опускавшейся в результате испарения жидкости. Таким образом, в этих экспериментах происходило постепенное удлинение или укорочение вихрей, закрепленных своими концами на колеблющейся поверхности диска, в то время как их вторые концы упирались в свободную поверхность гелия II.

Легко видеть, что в точке выхода вихревой нити на свободную поверхность вихрь должен быть перпендикулярным к ней. В противном случае натяжение вихря смещало бы его до достижения этого равновесного состояния.

В подобных условиях удлинение или укорочение вихревых нитей, вдоль которых распространяется волна, описанная в п. 2.5, должно сопровождаться резонансными эффектами, подобными наблюдаемым в опытах со стопкой. Однако в этом случае условием резонанса будет размещение нечетного числа четвертей длины волны (см. подробнее п. 4.10) на расстоянии H от диска до свободной поверхности. Поэтому вместо резонансного условия (2.3) получится

$$\sqrt{\Omega - 2\omega_0}H = (2n-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{\nu_s} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (2{,}11)$$

(см. гл. 4, в особенности п. 4.3). Поэтому было хорошо известно, что малость глубины проникновения обеспечивает в условиях обсуждаемого эксперимента «неограниченность» жидкости.

Эти резонансные явления и наблюдались в вышеупомянутых экспериментах Холла и Андроникашвили, Цакадзе.

В эксперименте Холла [27] измерялся период колебаний диска в зависимости от времени, изменению которого соответствовала та или иная величина H. Обнаруженная в этих экспериментах периодическая зависимость периода от глубины погружения диска, показанная на рис. 10 и 11, привела к значению $\nu_s = 9{,}7 \cdot 10^{-4}$ *см²/сек*.

В аналогичном эксперименте Андроникашвили и Цакадзе [28] измерялось затухание колебаний *). Полученные ими результаты приведены на рис. 12 и 13. Расстояние между двумя резонансными точками оказалось равным 0,065 *см*. Согласно этим данным длина распространяющейся вдоль

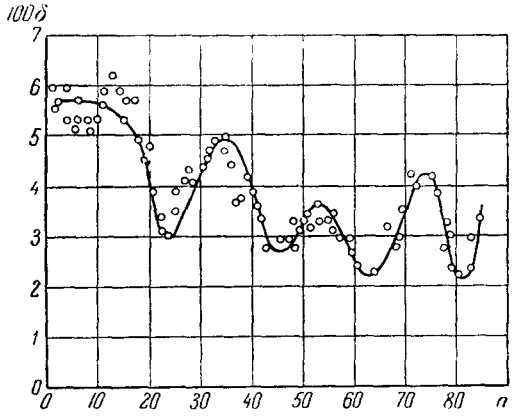

Рис. 12. Изменение логарифмического декремента затухания диска по мере опускания уровня жидкого He II в результате испарения

Скорость испарения равна 0,5 10^{-2} *см/мин* (Ω=0,581 *сек*$^{-1}$, ω_0=0,055 *сек*$^{-1}$, T=1,38° K), n—число полупериодов колебаний. Начальные участки кривых на рис 12 и 13 соответствуют раскачке колеблющейся системы.

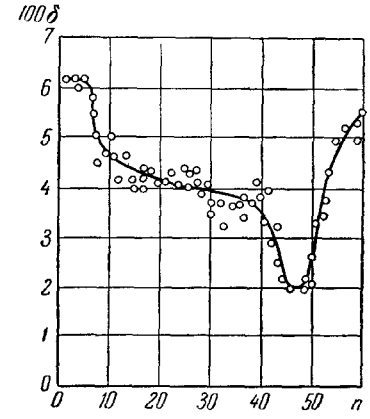

Рис 13 Изменение логарифмического декремента затухания диска по мере опускания уровня жидкого He II в результате испарения.

Скорость испарения равна 3,6 10^{-2} *см/мин* (Ω=0,581 *сек*$^{-1}$, ω_0=0,055 *сек*$^{-1}$ T=1,38° K).

вихря волны при $\omega_0 = 0{,}055$ *сек*$^{-1}$ и $\Omega = 0{,}581$ *сек*$^{-1}$ равна 0,26 *см* (см п. 4.3). Оценка ν_s по формуле (2,11) дает $\nu_s = 8 \cdot 10^{-4}$ *см²/сек*.

2.10. Из предыдущего анализа ясно, что если во вращающемся гелии II колеблется поверхность, параллельная вихревым нитям Онсагера — Файнмана, то в этом случае не следует ожидать вышеописанных проявлений упругих свойств вихрей. Однако особенности вращения сверхтекучей жидкости должны сказаться и в подобном эксперименте благодаря взаимному трению между нею и увлекаемой колеблющимся телом нормальной компонентой гелия.

Подобное исследование также было проведено в криогенной лаборатории Тбилисского университета, где Цакадзе и Чхеидзе [29] изучили скоростную зависимость затухания крутильно-аксиальных колебаний полого цилиндра, наложенных на его совместное с жидкостью вращение.

Следует отметить (см. п. 4.11), что затухание колебаний цилиндра во вращающейся классической жидкости не должно зависеть от скорости ее вращения. Это утверждение было проверено и подтверждено в пред

*) В этом эксперименте использовался тот же диск, данные о затухании колебаний которого приведены на рис. 5. Разница в постановке эксперимента заключалась в том, что, при исследовании зависимости затухания от скорости, колебания диска совершались под «бесконечно» удаленной крышкой сосуда (см. примечание на стр. 15), а в описываемом эксперименте — под приближающейся к диску свободной поверхностью.

варительных экспериментах. Таким образом, скоростная зависимость затухания колебаний цилиндров всецело обусловливается взаимным трением между сверхтекучей и нормальными компонентами гелия II.

С этой точки зрения представляется вполне закономерным обнаруженное Цакадзе и Чхеидзе линейное возрастание затухания при увеличении скорости вращения (см. рис. 14). Оно является естественным результатом роста числа вихрей, пропорционального ω_0.

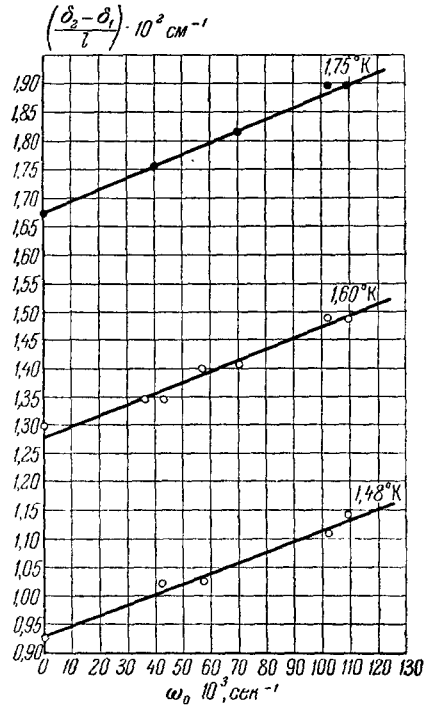

Рис. 14. Зависимость логарифмического декремента затухания цилиндра от скорости вращения.

δ_2 и δ_1—декременты затухания при глубинах погружения l_2 и l_1, $l=l_2-l_1$. Прямые проведены в соответствии с теоретической формулой (см. п. 4.11).

3. ГИДРОДИНАМИКА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ГЕЛИЯ II

3.1. Гидродинамическая теория рассматриваемых в этом обзоре явлений развивалась одновременно с описанными в предыдущей главе экспериментальными исследованиями. Она возникла ввиду необходимости количественной интерпретации наблюденных в первых же экспериментах явлений и, в свою очередь, стимулировала постановку новых экспериментов. Благодаря такому объединению усилий теоретиков и экспериментаторов в настоящее время сформулирована весьма своеобразная гидродинамика вращающейся квантовой жидкости, к описанию которой мы и приступим, предварительно разъяснив, почему описание явлений во вращающемся гелии II нуждается в особой гидродинамике.

Совершенно ясно, что известные уравнения «двухжидкостной» гидродинамики Ландау (см., например, [4], часть I, гл. XVI) должны описывать и вращающийся гелий II, так же как уравнение Навье—Стокса описывает поведение классической вязкой жидкости в принципе при любом характере ее движения.

Однако специфика вращения сверхтекучей жидкости обусловливает целесообразность ее описания при помощи усредненных значений скоростей и ротора скорости сверхтекучей компоненты *). В п. 1.4 уже указывалось, что подобное описание способствует отделению основных особенностей рассматриваемых явлений от второстепенных деталей. С другой стороны, силы, с которыми жидкость действует на стволы вихревых нитей, приобретают в процессе осреднения характер объемных сил и поэтому включаются в гидродинамические уравнения, что приводит к их усложнению. Однако ясно, что такое усложнение гораздо менее обременительно, чем необходимость учета этих сил в качестве поверхностных, вводя граничные условия на стволах всей совокупности вихревых нитей; именно так пришлось бы поступить, если бы мы использовали обычные уравнения гидродинамики гелия II, описывая его без помощи усредненных величин.

*) Усреднение производится по элементам объема, содержащим достаточно много вихревых нитей.

3.2. Из предыдущего следует, что дополнительные члены, которыми уравнения гидродинамики вращающегося гелия II отличаются от обычных уравнений двухжидкостной гидродинамики, должны учитывать уже описанные в гл. 2 особенности вихревого вращения сверхтекучей жидкости. Именно, они должны описывать упругие свойства вихревых нитей (или эквивалентные им энергетические соотношения), с одной стороны, и взаимное трение между сверхтекучей и нормальной компонентами гелия, с другой.

Легко видеть, что каждая единица длины вихревой нити, имеющей натяжение ε, будучи искривленной, испытывает действие спрямляющего усилия, равного $\varepsilon(\boldsymbol{\sigma},\nabla)\boldsymbol{\sigma}$, где $\boldsymbol{\sigma}$—орт касательной к вихревой нити*): $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\omega}/\omega$, $\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\mathbf{v}_s$. Если вспомнить также, что плотность вихревых нитей N равна ω/Γ (см. формулу (1,7)), то представляется совершенно естественной следующая форма уравнения движения вращающейся сверхтекучей жидкости, полученного Холлом [19], вывод которого мы опускаем**):

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t}+(\mathbf{v}_s,\nabla)\mathbf{v}_s=\nu_s(\boldsymbol{\omega},\nabla)\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}+\nabla\Phi. \tag{3,1}$$

Здесь символ Φ объединяет все подградиентные члены, а ν_s — уже введенный в главе 2 параметр, равный

$$\frac{\varepsilon}{\varrho_s\Gamma}=\frac{\hbar}{2m}\ln\frac{b}{a_0}.$$

Очевидно, что уравнение (3,1) описывает движение сверхтекучей компоненты в отсутствие нормальной. Поэтому, строго говоря, оно справедливо только при температуре абсолютного нуля. В реальных условиях движение сверхтекучей и нормальной компонент следует рассматривать совместно, так как они связаны друг с другом силой взаимного трения. Необходимость учета этой силы была отмечена и Холлом, однако в работе [19] он решил только уравнение (3,1) (совместно с уравнением непрерывности для сверхтекучей компоненты).

В настоящее время в работах Холла, Бекаревича и Халатникова, Мамаладзе и Матиняна уравнение Холла объединено в единую систему с уравнением движения нормальной компоненты и уравнениями непрерывности для сверхтекучей и нормальной компонент [14, 30, 31]. Это приводит к следующей системе уравнений гидродинамики вращающегося гелия II:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t}+(\mathbf{v}_s,\nabla)\mathbf{v}_s+\nu_s\left[\boldsymbol{\omega},\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\right]=\nabla\Phi+\mathbf{F}_{sn}, \tag{3,2'}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t}+(\mathbf{v}_n,\nabla)\mathbf{v}_n-\nu_n\Delta\mathbf{v}_n=\nabla\Psi+\mathbf{F}_{ns}, \tag{3,2''}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_s=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{v}_n=0. \tag{3,2'''}$$

Здесь символ Ψ объединяет подградиентные члены в уравнении (3,2″), $\mathbf{F}_{sn}$ — сила взаимного трения, действующая на единицу массы сверхтекучей компоненты, $\mathbf{F}_{ns}$ — та же сила, действующая на единицу массы нормальной компоненты $\left(\mathbf{F}_{ns}=-\frac{\varrho_s}{\varrho_n}\mathbf{F}_{sn}\right)$.

---

*) Вектор $(\boldsymbol{\sigma},\nabla)\boldsymbol{\sigma}$ направлен по нормали, а по величине равен кривизне линии, ортом касательной к которой является вектор $\boldsymbol{\sigma}$. Отметим также используемое ниже равенство $(\boldsymbol{\sigma},\nabla)\boldsymbol{\sigma}=-[\boldsymbol{\sigma},\operatorname{rot}\boldsymbol{\sigma}]$.

**) Уравнение (3,1) отличается от обычного уравнения движения идеальной жидкости только членом $\nu_s(\boldsymbol{\omega},\nabla)\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$. Здесь и в дальнейшем мы для простоты опускаем знак усреднения при написании символов v_s, v_n и ω.

Выражение для силы *) $\mathbf{F}_{sn}$ было дано Бекаревичем и Халатниковым [31]. Оно имеет следующий вид:

$$\mathbf{F}_{sn} = \alpha_n \left[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_s \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right] + \beta_n \left[\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}, \left[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_s \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right] \right] + \\ + \gamma_n \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \left(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_s \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right). \qquad (3,3)$$

Здесь α_n и β_n — коэффициенты взаимного трения, связанные с коэффициентами Холла и Вайнена B и B', температурная зависимость которых рассчитана в работах [5, 14, 25, 32]:

$$\alpha_n = -\frac{1}{2}\frac{\varrho_n}{\varrho} B', \qquad \beta_n = -\frac{1}{2}\frac{\varrho_n}{\varrho} B. \qquad (3,4)$$

Кроме них в выражении (3,3) содержится также третий коэффициент взаимного трения γ_n, определяющий величину составляющей силы взаимного трения, направленной вдоль вихревых нитей.

Вводя обозначения

$$\alpha_s = \frac{\varrho_s}{\varrho_n}\alpha_n = -\frac{1}{2}\frac{\varrho_s}{\varrho} B', \quad \beta_s = \frac{\varrho_s}{\varrho_n}\beta_n = -\frac{1}{2}\frac{\varrho_s}{\varrho} B, \quad \gamma_s = \frac{\varrho_s}{\varrho_n}\gamma_n, \qquad (3,5)$$

напишем для силы $\mathbf{F}_{ns}$ выражение, аналогичное (3,3):

$$\mathbf{F}_{ns} = -\alpha_s \left[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_s \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right] - \beta_s \left[\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}, \left[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_s \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right] \right] - \\ - \gamma_s \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \left(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_s \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right). \qquad (3,6)$$

Уравнения (3,2) вытекают из полной системы уравнений гидродинамики вращающегося гелия II (полученной Бекаревичем и Халатниковым на основании законов сохранения [31]) при условии постоянства температуры. Поэтому система (3,2) вполне достаточна для рассмотрения задач, составляющих предмет настоящего обзора.

Отметим также, что при написании формул (3,2′), (3,3) и (3,6) мы пренебрегли возможной зависимостью параметра ν_s от ω **).

В заключение этого параграфа отметим, что, в связи с особенностями вихревого вращения гелия II, ротор скорости сверхтекучей компоненты включается в число величин, определяющих состояние жидкости, что находит свое отражение и в термодинамических соотношениях. В частности, энергия E единицы объема гелия II во вращающейся системе отсчета, где сверхтекучая компонента в среднем покоится, подчиняется термодинамическому тождеству [31]

$$dE = T\,dS + \mu\,d\varrho + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, d\mathbf{p}) + \eta_s d\omega, \qquad (3,7)$$

где S и $\mathbf{p}$ — энтропия и импульс единицы объема, μ — химический потенциал единицы массы, ϱ — полная плотность гелия II.

---

*) Вывод выражения для силы $\mathbf{F}_{sn}$ в работе Холла [14] содержит вычислительную ошибку. См. там формулу (51), где в сумме векторов, перпендикулярных к $\boldsymbol{\omega}$, в результате неправильного преобразования появляется член иного направления.

**) Как уже отмечалось, $\nu_s = \frac{h}{2m} \ln \frac{b}{a_0}$. Если, как это обычно предполагается [11], эффективный радиус b совпадает по порядку величины с расстоянием между вихрями (см. формулу (2,9)), то ν_s зависит от ω_0. Однако ввиду малости радиуса ствола вихря a_0, который, как установил Файнман [11], имеет величину порядка $4 \cdot 10^{-8}$ *см*, а по экспериментальным данным Холла [19] равен $3 \cdot 10^{-7}$ *см*, логарифмическая зависимость ν_s от ω_0 оказывается очень слабой.

Так как энергия содержащихся в единице объема вихрей равна $N\varepsilon = \omega\varepsilon/\Gamma$ (см. формулы (1,4), (1,7) и (1,9)), то имеем

$$\eta_s = \frac{\partial E}{\partial \omega} = \frac{\varepsilon}{\Gamma}, \tag{3,8}$$

откуда следует, что параметр ν_s (равный $\varepsilon/\varrho_s\Gamma$) определяется соотношением

$$\nu_s = \varrho_s \eta_s = \varrho_s \frac{\partial E}{\partial \omega}. \tag{3,9}$$

Наконец, следует заметить, что уравнениям (3,2) соответствует следующее выражение для тензора потока импульса:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \varrho_n v_{ni} v_{nk} - \eta_n \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} \right) + \varrho_s v_{si} v_{sk} + \eta_s \omega \delta_{ik} - \eta_s \frac{\omega_i \omega_k}{\omega}. \tag{3,10}$$

Два последних члена этой формулы являются вкладом особенностей вихревого движения сверхтекучей компоненты; p — давление.

3.3. При решении системы (3,2) для скорости нормальной компоненты используются обычные граничные условия, совпадающие при рассматриваемых условиях ($T = \mathrm{const}$) с граничными условиями в гидродинамике классической вязкой жидкости. Однако вопрос о граничных условиях для скорости сверхтекучей компоненты требует особого рассмотрения.

Появление в первом из уравнений (3,2) члена $\nu_s \left[\boldsymbol{\omega}, \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right]$, содержащего пространственные производные второго порядка от $\mathbf{v}_s$, требует наложения граничных условий не только на перпендикулярную к поверхности, но и на касательную составляющую $\mathbf{v}_s$. Идея, высказанная впервые Холлом[19], заключается в том, что, установив связь между скоростью сверхтекучей компоненты $\mathbf{v}_s$ и скоростью движения вихревых нитей $\mathbf{v}_L$, можно получить требуемые граничные условия, используя условия закрепления вихрей на твердой поверхности. Связь между $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_L$ была получена Холлом[19] и обобщена на случай $\mathbf{F}_{sn} \neq 0$ Мамаладзе и Матиняном[30] (см. также[14, 31]):

$$[\mathbf{v}_L, \boldsymbol{\omega}] = \left[\mathbf{v}_s + \nu_s \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}, \boldsymbol{\omega} \right] + \mathbf{F}_{sn}. \tag{3,11}$$

Что касается условий закрепления вихрей на твердой поверхности, то они определяются допущением, что разность касательных компонент скоростей вихря $\mathbf{v}_L$ и поверхности $\mathbf{v}_\sigma$ пропорциональна касательной составляющей силы $\varepsilon\boldsymbol{\omega}/\omega$, с которой вихрь, имеющий натяжение ε, действует на твердую поверхность[30]:

$$(\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_\sigma)_t = a \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right)_t \quad \text{(на твердой поверхности)}, \tag{3,12}$$

где a — коэффициент скольжения. Значение $a = 0$ соответствует полному закреплению вихрей (абсолютно шероховатая поверхность), $a = \infty$ означает их полное проскальзывание (абсолютно гладкая поверхность). Формула (3,12) эквивалентна аналогичной формуле, использованной ранее Холлом[19]. С другой стороны, в случае малых отклонений от распределения скоростей типа $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_L = \mathbf{v}_\sigma = [\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}]$ эта формула является следствием более общего равенства, полученного Бекаревичем и Халатниковым[31]:

$$\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_\sigma = a \left[\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}, \left[\mathbf{N}_\sigma, \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right] \right] \quad \text{(на твердой поверхности)}, \tag{3,13}$$

где $\mathbf{N}_\sigma$ — орт нормали поверхности.

В случае свободной поверхности, как уже отмечалось в п. 2.9, вихри должны быть перпендикулярны к ней:

$$[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{N}_\sigma] = 0 \quad \text{(на свободной поверхности)}. \tag{3,14}$$

3.4. Формулы (3,11) и (3,3) можно согласовать друг с другом, только предположив равенство нулю коэффициента γ_n, стоящего при единственном не перпендикулярном к $\boldsymbol{\omega}$ члене (тогда, конечно, и $\gamma_s = 0$). С другой стороны, равенство (3,11) является совершенно необходимым, так как только при его соблюдении уравнению (3,2′) можно придать форму закона сохранения вихрей:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - [\mathbf{v}_L, \boldsymbol{\omega}] = \nabla \left(\Phi - \frac{1}{2} v_s^2 \right). \tag{3,15}$$

Поэтому в дальнейшем, используя формулы (3,3) и (3,6), мы будем полагать $\gamma_n = \gamma_s = 0$.

Следует отметить, что выражение (3,15) является соотношением более удобным, чем (3,11), для установления связи между $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_L$.

4. ТЕОРИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГЕЛИИ II

4.1. Система гидродинамических уравнений (3,2) послужила основой для создания количественной теории явлений, разыгрывающихся при колебании твердых тел различной формы во вращающемся гелии II.

Решение соответствующих конкретных задач сильно упрощается благодаря тому обстоятельству, что система (3,2) может быть линеаризована, если учесть малость амплитуды колебаний твердых тел (это требование фактически соблюдалось во всех экспериментальных работах, описанных в гл. 2). С этой целью все скорости $\mathbf{v}_s$, $\mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_L$ и $\mathbf{v}_\sigma$ следует представить в виде суммы основных «вращательных» членов $\mathbf{v}_0 = [\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}]$ и малых «колебательных добавок» к ним:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}] + \mathbf{u} \exp(i\Omega t), \tag{4,1′}$$

где величины $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ могут иметь индексы s, n, L или σ. В виде аналогичных сумм записываются и функции Φ и Ψ

$$\Phi = \Phi_0 + \chi_s \exp(i\Omega t), \tag{4,1″}$$

$$\Psi = \Psi_0 + \chi_n \exp(i\Omega t). \tag{4,1‴}$$

Здесь Φ_0 и Ψ_0, так же как и $\mathbf{v}_0$, обозначают решения системы (3,2) в отсутствие колебаний. При подстановке равенств (4,1) в систему (3,2) отбрасываются члены выше первого порядка по $\mathbf{u}$, в результате чего получается система линейных дифференциальных уравнений относительно новых переменных $\mathbf{u}_s$, $\mathbf{u}_n$, χ_s и χ_n. Мы не будем выписывать эту довольно громоздкую систему, которую нетрудно воспроизвести только что описанным способом.

В тех же обозначениях и в том же приближении условия закрепления вихрей (3,12) или (3,13) переписываются в следующем виде *):

$$\left.\begin{aligned} u_{Lr} &= -\frac{a}{2\omega_0} \frac{du_{s\varphi}}{dz}, \\ u_{L\varphi} &= i\Omega\varphi_0 r + \frac{a}{2\omega_0} \frac{du_{sr}}{dz} \end{aligned}\right\} \quad \text{(на твердой поверхности)}. \tag{4,2}$$

*) Ниже везде применяются цилиндрические координаты (r, φ, z), причем ось z совпадает с осью вращения

Здесь учтено, что во всех интересующих нас случаях твердые тела совершают крутильно-аксиальные колебания, в связи с чем $u_{\sigma r}=0$ и $u_{\sigma\varphi}=i\Omega\varphi_0 r$, где φ_0 — амплитуда колебаний. Линеаризуются также и равенства (3,11) и (3,15), необходимые для получения граничных условий для касательных компонент скорости v_s из граничных условий для v_L. Они сводятся к соотношениям

$$u_{sr}=\frac{2\omega_0}{i\Omega}u_{L\varphi}+\frac{1}{i\Omega}\frac{\partial\chi_s}{\partial r}, \qquad u_{s\varphi}=-\frac{2\omega_0}{i\Omega}u_{Lr}. \tag{4,3}$$

4.2. Общая методика решения всех гидродинамических задач, которые будут рассмотрены в этой главе, была одной и той же. Поэтому целесообразно описать вычислительную процедуру в этом вводном параграфе, чтобы в дальнейшем к ней не возвращаться.

Прежде всего подбирался тот или иной вид искомых решений гидродинамических уравнений, подсказываемый симметрией данной задачи и ее граничными условиями. В частности, во всех случаях учитывалась аксиальная симметрия, благодаря которой все физические величины не зависят от координаты φ (это обстоятельство подразумевалось и при написании формул, данных в п. 4.1). Затем, решая систему уравнений (3,2), мы находили распределение скоростей, удовлетворяющее граничным условиям рассматриваемой задачи *). Найденные таким образом величины $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_n$ (а также $\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\mathbf{v}_s$) использовались для вычисления тензора потока импульса Π_{ik} (формула (3,10)), при помощи которого определяется сила $d\mathbf{F}$, действующая на элемент $d\boldsymbol{\sigma}$ поверхности колеблющегося тела (см. [4], стр. 69):

$$dF_i=\Pi_{ik}d\sigma_k. \tag{4,4}$$

Теперь уже нетрудно, произведя интегрирование по поверхности твердого тела, определить действующий на него момент сил M, который всегда имеет вид $M=m\varphi_0\exp(i\Omega t)$, где φ_0 — амплитуда колебаний.

Наконец, зная m, можно определить частоту Ω и логарифмический декремент затухания колебаний δ, использовав с этой целью следующие формулы, являющиеся следствием уравнения моментов **):

$$\Omega^2-\Omega_0^2=-\frac{1}{I}\operatorname{Re}(m), \tag{4,5}$$

$$\delta-\frac{\Omega_0}{\Omega}\delta_0=-\frac{\pi}{I\Omega^2}\operatorname{Im}(m). \tag{4,6}$$

Здесь Ω_0 и δ_0 — вакуумные значения частоты и декремента.

4.3. Рассмотрим в первую очередь колебания диска или стопки дисков во вращающемся гелии II. Совершенно очевидно, что общее решение уравнений гидродинамики в обоих случаях является одинаковым. Мамаладзе и Матинян показали [30, 33], что колебания дисков генерируют во вращающемся гелии II составную волну, распространяющуюся вдоль оси вращения z и являющуюся совокупностью четырех простых волн. (Точнее, r- и φ-компоненты каждой из величин $\mathbf{u}_s$, $\mathbf{u}_n$ и $\mathbf{u}_L$ представляются в виде произведения $rw(z)$, где $w(z)$ оказывается суммой четырех экспонент.) Волновые числа этих волн определяются формулами [33] ***)

---

*) С этого момента вычислительная методика Холла [19] отличается от описываемой процедуры (см. п. 4.8).

**) Здесь и ниже затухание колебаний везде считается слабым: $\delta\ll 1$.

***) Эти формулы являются обобщением ранее полученных теми же авторами [30] выражений в случае, когда в $\mathbf{F}_{sn}$ введены члены с $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}/\omega)$ (см. п. 3.2).

(все $\mathrm{Im}(k) > 0$):

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2\left(1 - \frac{v_s}{2\omega_0} q_1^{(+)}\right)} \left\{ k_{s0}^{(+)2} + k_{n0}^{(+)2} + q_1^{(+)}\left(1 - \frac{v_s}{2\omega_0} k_{n0}^{(+)2}\right) + q_2^{(+)} \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\left[k_{s0}^{(+)2} - k_{n0}^{(+)2} + q_1^{(+)}\left(1 + \frac{v_s}{2\omega_0} k_{n0}^{(+)2}\right) - q_2^{(+)}\right]^2 + 4q_1^{(+)}q_2^{(+)}\left(1 + \frac{v_s}{2\omega_0} k_{s0}^{(+)2}\right)} \right\}. \tag{4,7}$$

$$k_{3,4}^2 = \frac{1}{2\left(1 - \frac{v_s}{2\omega_0} q_1^{(-)}\right)} \left\{ k_{s0}^{(-)2} + k_{n0}^{(-)2} + q_1^{(-)}\left(1 - \frac{v_s}{2\omega_0} k_{n0}^{(-)2}\right) + q_2^{(-)} \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\left[k_{s0}^{(-)2} - k_{n0}^{(-)2} + q_1^{(-)}\left(1 + \frac{v_s}{2\omega_0} k_{n0}^{(-)2}\right) - q_2^{(-)}\right]^2 + 4q_1^{(-)}q_2^{(-)}\left(1 + \frac{v_s}{2\omega_0} k_{s0}^{(-)2}\right)} \right\}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$k_{s0}^{(\pm)2} = \mp \frac{\Omega \pm 2\omega_0}{v_s}, \qquad k_{n0}^{(\pm)2} = -i\,\frac{\Omega \pm 2\omega_0}{v_n}, \tag{4,8}$$

$$q_1^{(\pm)} = \mp 2\omega_0 i\,\frac{\beta_n \mp i\alpha_n}{v_s}, \qquad q_2^{(\pm)} = 2\omega_0\,\frac{\beta_s \mp i\alpha_s}{v_n}. \tag{4,9}$$

Таким образом, величины q описывают в формулах (4,7) влияние взаимного трения на характер волнового движения, распространяющегося при этих условиях во вращающемся гелии II. Положив $q = 0$, нетрудно убедиться, что волновые числа k_1 и k_3 окажутся всецело связанными со свойствами сверхтекучей жидкости, а k_2 и k_4 — нормальной:

$$\begin{aligned} k_{1,3} &= k_{s0}^{(\pm)}, \\ k_{2,4} &= k_{n0}^{(\pm)} \end{aligned} \qquad (\text{при } q_{1,2}^{(\pm)} = 0). \tag{4,10}$$

В том же приближении $q = 0$ в распределении скоростей сверхтекучей компоненты и в скорости $\mathbf{v}_L$ остаются только две экспоненты с волновыми числами $k_{s0}^{(\pm)}$, а в распределении скоростей нормальной компоненты — две экспоненты с волновыми числами $k_{n0}^{(\pm)}$. Это и естественно, так как величины $k_{s0}^{(\pm)}$ являются волновыми числами, которые характеризуют задачу о колебании дисков во вращающейся сверхтекучей жидкости в отсутствие нормальной компоненты [19], а величины $k_{n0}^{(\pm)}$ играют аналогичную роль для классических вязких жидкостей [21].

В связи с равенствами (4,10), если поправки на взаимное трение незначительны (см. ниже), k_1 и k_3 можно даже при $q \neq 0$ рассматривать как волновые числа, связанные в основном с движением сверхтекучей компоненты, а k_2 и k_4 — с движением нормальной компоненты гелия II. Одновременное присутствие всех четырех волновых чисел в распределении скоростей $\mathbf{v}_s$, $\mathbf{v}_L$ и $\mathbf{v}_n$ является результатом только взаимного трения.

Волновые числа $k_{n0}^{(\pm)}$ описывают обычные вязкие волны, которые характеризуются конечными величинами длин волн, глубин проникновения и скоростей распространения *). При этом хорошо известно, что глубины проникновения вязких волн в условиях экспериментов, описанных в гл. 2, очень малы по сравнению с размерами порядка 1 *см*.

Совершенно иной характер имеют волны, описываемые волновыми числами $k_{s0}^{(\pm)}$ (см. формулы (4,8)). Число $k_{s0}^{(+)}$ является чисто мнимым. Поэтому оно описывает волну с конечной глубиной проникновения, сравни-

*) Напомним, что комплексное волновое число $k = \sigma + i\tau$ ($\tau > 0$) определяет скорость распространения волны (фазовую) $-\Omega/\sigma$, длину волны $L = 2\pi/|\sigma|$ и глубину проникновения $\lambda = 1/\tau$.

мой по порядку величины с глубиной проникновения вязких волн (величина ν_s не очень сильно отличается от вязкости нормальной компоненты ν_n). Однако скорость распространения и длина этой волны бесконечно велики. Такой же характер имеет и число $k_{s0}^{(-)}$ при $\Omega < 2\omega_0$ (быстрое вращение). В обратном случае медленного вращения ($\Omega > 2\omega_0$) число $k_{s0}^{(-)}$ оказывается чисто действительным. Тогда при конечной скорости и длине волны бесконечно большой оказывается уже глубина проникновения.

Анализ формул (4,7), а также анализ расчетов, проведенных по этим формулам Кикнадзе и Ткемаладзе на вычислительной машине «Урал», показывает, что учет взаимного трения (т. е. величин q) не очень сильно меняет характер волновых чисел *). Формулы (4,10) можно считать верными в более или менее грубом приближении везде, кроме области $\omega_0 \approx \Omega/2$, где, например, величины k_3 и k_4 полностью определяются силой взаимного трения (так как в этой области $k_{s0}^{(-)} \approx k_{n0}^{(-)} \approx 0$).

Однако, как бы ни был мал количественный эффект учета величин q при вычислении волновых чисел, влияние взаимного трения оказывается принципиальным в том отношении, что оно редуцирует бесконечные значения $L_{s0}^{(+)}$ и $\lambda_{s0}^{(-)}$ к конечным величинам L_4 и λ_3. В частности, в первом приближении по коэффициенту взаимного трения β_n глубина проникновения λ_3 определяется равенством

$$\lambda_3 \approx -\frac{2\sqrt{(\Omega - 2\omega_0)\,\nu_s}}{\beta_n \Omega} \qquad (\beta_n < 0, 2\omega_0 < \Omega). \tag{4,11}$$

В условиях экспериментов, описанных в гл. 2, эта формула приводит к величинам, которые достаточно малы для того, чтобы единичный диск, колеблющийся в сосуде с размерами порядка 1 *см*, считать погруженным в «неограниченную» жидкость. Одновременно величина λ_3 все-таки значительно превышает глубины проникновения всех остальных волн. Этим и обусловлена отмеченная еще в гл. 2 особая роль волны, описываемой волновым числом $k_3 (\approx k_{s0}^{(-)})$, в объяснении резонансных эффектов, наблюдаемых при наличии близких друг к другу твердых поверхностей (стопка дисков) или при перемещении свободной поверхности вращающегося гелия II, отстоящей от диска на малое расстояние.

Кроме того, сравнительно большая величина λ_3 означает, что на некотором расстоянии от колеблющейся поверхности диска волны с волновым числом k_3 начинают преобладать не только в движении сверхтекучей жидкости и вихревых нитей, но и в движении нормальной компоненты.

Таким образом мы приходим к следующему описанию волнового поля, генерируемого колеблющимся диском во вращающемся гелии II. В тонком слое около стенки движение сверхтекучей и нормальной компонент гелия является различным. В то время как в сверхтекучей жидкости и вдоль вихревых нитей распространяются волны с волновыми числами $k_{1,3}$, примерно равными $k_{s0}^{(+)}$, в нормальной компоненте наблюдаются волны с волновыми числами $k_{2,4}$, близкими к $k_{n0}^{(\pm)}$. Однако вне слоя около стенки сверхтекучая жидкость, вихри и нормальная компонента движутся совершенно подобным образом в соответствии с характером волны с волновым числом k_3, наиболее далеко проникающей вдоль вихревых нитей. В связи с этим оказывается возможным говорить о глубине проникновения λ_3 как о глубине проникновения волны в гелий II как таковой, а не в ту или иную его компоненту. Подобное описание тем более разумно, когда с

*) В частности, длина волны L_3, при $\Omega = 0{,}581$ *сек*$^{-1}$ и $\omega_0 = 0{,}055$ *сек*$^{-1}$, оказывается при различных температурах очень близкой к величине $L_{s0}^{(-)} = 2\pi\sqrt{\nu_s}/\sqrt{\Omega - 2\omega_0}$ и к приведенному в гл. 2 экспериментальному значению $L_3 = 0{,}26$ *см*.

увеличением числа вихрей вязкая глубина проникновения $(2\nu_n/\Omega)^{1/2}$ перекрывает половину расстояния между вихрями $0{,}5\,(\pi\hbar/m\omega_0)^{1/2}$, так как в этом случае даже в отдалении от диска в колебаниях участвуют не только тонкие «чулки» нормальной компоненты, одетые на вихревые нити, а вся нормальная жидкость в целом (в пределах слоя, ограниченного глубиной проникновения λ_3).

4.4. Откладывая рассмотрение более точных формул до п. 4.6, рассмотрим задачу о колебаниях единичного диска во вращающемся гелии II, полностью пренебрегая взаимным трением, а также проскальзыванием вихрей ($q=0$, $a=0$). В этом приближении гораздо легче проанализировать весьма громоздкое выражение для действующего на диск момента силы **M** (см. формулу (4,21)). С другой стороны, основные черты рассматриваемых явлений проявляются достаточно ярко уже в этом грубом приближении.

Как уже неоднократно отмечалось выше, при отсутствии взаимного трения нормальная и сверхтекучая компонента гелия II движутся независимо друг от друга. Соответственно разделяется на две независимые части и выражение для момента силы, действие которого испытывает диск, колеблющийся во вращающемся гелии II. В связи с этим, изменения частоты и затухания его колебаний тоже представляются в виде суммы двух членов, каждый из которых обусловлен действием на диск нормальной или сверхтекучей компоненты гелия II. Это обстоятельство легко заметить при рассмотрении следующих формул:

$$\Omega^2-\Omega_0^2=\frac{\pi R^4\Omega}{2I}\left[-\sqrt{\frac{\eta_n\varrho_n}{2}}\left(\sqrt{\Omega+2\omega_0}+\sqrt{\Omega-2\omega_0}\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\eta_s\varrho_s}\,\frac{2\omega_0}{\Omega}\sqrt{\Omega+2\omega_0}\right], \qquad (4{,}12)$$

$$\delta-\frac{\Omega_0}{\Omega}\delta_0=\frac{\pi^2R^4}{2I\Omega}\left[\sqrt{\frac{\eta_n\varrho_n}{2}}\left(\sqrt{\Omega+2\omega_0}+\sqrt{\Omega-2\omega_0}\right)+\sqrt{\eta_s\varrho_s}\,\frac{2\omega_0}{\Omega}\sqrt{\Omega-2\omega_0}\right], \qquad (4{,}13)$$

справедливых при $2\omega_0<\Omega$ *). Первая из этих формул описывает монотонный рост частоты колебаний при увеличении скорости вращения ω_0 (см. кривую *3* на рис. 9). Вторая формула описывает зависимость затухания от скорости вращения. Причем присутствие в ней произведения $\omega_0\sqrt{\Omega-2\omega_0}$ обеспечивает наличие максимума в этой зависимости, что качественно согласуется с экспериментальными данными, показанными на рис. 5, 6, 7 и 9, однако экспериментальный максимум затухания обнаруживается значительно левее ($\omega_0/\Omega\approx0{,}1$), чем следовало бы ожидать по формуле (4,13) ($\omega_0/\Omega\approx0{,}3$).

В области $2\omega_0>\Omega$ формулы (4,12) и (4,13) приобретают следующий вид:

$$\Omega^2-\Omega_0^2=\frac{\pi R^4\Omega}{2I}\left[-\sqrt{\frac{\eta_n\varrho_n}{2}}\left(\sqrt{\Omega+2\omega_0}-\sqrt{2\omega_0-\Omega}\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\eta_s\varrho_s}\,\frac{2\omega_0}{\Omega}\left(\sqrt{\Omega+2\omega_0}+\sqrt{2\omega_0-\Omega}\right)\right], \qquad (4{,}12')$$

$$\delta-\frac{\Omega_0}{\Omega}\delta_0=\frac{\pi^2R^4}{2I\Omega}\sqrt{\frac{\eta_n\varrho_n}{2}}\left(\sqrt{\Omega+2\omega_0}+\sqrt{2\omega_0-\Omega}\right). \qquad (4{,}13')$$

Формула (4,12′) показывает, что монотонный рост Ω с увеличением ω_0 должен продолжаться и при быстром вращении, причем во втором члене

*) Первые члены формул (4,12) и (4,13) идентичны с (3,8), (3,9) и (3,10), полученными в работе [21] для классических жидкостей (см. также формулу (2,4) настоящей статьи).

наряду с $\Omega+2\omega_0$ проявляются и $2\omega_0-\Omega$. В формуле (4,13′) второй член, связанный с действием сверхтекучей компоненты, вообще исчезает, а первый описывает рост δ с увеличением ω_0, характерный для классической вязкой жидкости (см. формулу (2,4) и рис. 5).

4.5. В выражениях (4,8) для волновых чисел $k_{s0}^{(\pm)}$, и особенно в формуле (4,13) для затухания, величины ν_s и η_s выступают в качестве кинематической и динамической «вязкости сверхтекучей компоненты» (чем и объясняются их обозначения). Если вспомнить, что η_s является отношением натяжения вихря к его циркуляции, это обстоятельство может показаться несколько неожиданным. В связи с этим необходимо рассмотреть механизм взаимодействия колеблющегося диска с вращающимся гелием II.

Прежде всего отметим, что в соответствии с формулами (3,10) и (4,4) связанные с вращением сверхтекучей компоненты дополнительные члены в тензоре потока импульса обусловливают следующий вклад в φ-компоненту силы $\mathbf{F}$, с которой жидкость действует на поверхность диска:

$$dF_\varphi = \eta_s \omega_\varphi \, d\sigma. \tag{4,14}$$

(Здесь учтено, что $N_{\sigma z}=-1$ и в приближении, линейном относительно амплитуд колебаний, $\omega_z/\omega \approx 1$.) Как указывалось в работе [30], эту силу можно интерпретировать как результат действия на диск натяжения закрепленных на его поверхности вихревых нитей. Действительно, учитывая формулу (1,7) и принимая во внимание, что вектор натяжения вихревой нити равен $\varepsilon\boldsymbol{\omega}/\omega$, имеем $dF_\varphi=(\omega/\Gamma)(\varepsilon\omega_\varphi/\omega)d\sigma=\eta_s\omega_\varphi d\sigma$ *).

Таким образом, в полном соответствии с качественными соображениями, изложенными в гл. 2, взаимодействие колеблющегося диска с вращающейся сверхтекучей жидкостью осуществляется посредством закрепленных на твердой поверхности вихревых нитей. Однако и с этой точки зрения не совсем ясно, каким образом генерация распространяющихся вдоль вихревых нитей упругих волн приводит к диссипации энергии диска. С целью уяснения этого вопроса Мамаладзе [34] предпринял нижеследующее исследование механизма взаимодействия вихря с колеблющейся поверхностью.

Решение системы (3, 2) при соответствующих граничных условиях и в приближении $q=0$, $a=0$ показывает, что вдоль вихревых нитей распространяются две волны с взаимно противоположными круговыми поляризациями:

$$w_L^{(\pm)} \equiv w_{Lr} \pm i w_{L\varphi} = \mp \Omega\varphi_0 \exp(ik_{s0}^{(\pm)} z) \tag{4,15}$$

(поверхности диска соответствует $z=0$).

В связи с этим проекция силы натяжения вихря $\mathbf{F}=\varepsilon\boldsymbol{\omega}/\omega$ на поверхность диска (обозначим ее $\mathbf{F}_{r\varphi}$) представляется в виде суммы двух векторов $\mathbf{F}_{r\varphi}^{(+)}$ и $\mathbf{F}_{r\varphi}^{(-)}$, вращающихся во взаимно противоположных направлениях. В этом нетрудно убедиться, вспомнив, что $\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\mathbf{v}_s$, и использовав соотношение **)

$$w_s^{(\pm)} \equiv w_{sr} \pm i w_{s\varphi} = \mp \frac{2\omega_0}{\Omega} w_L^{(\pm)}.$$

---

*) Заметим, что справедливость этого результата не ограничена используемым в этом параграфе приближением $q=0$, $a=0$.

**) Здесь использованы формулы (4,3), в которых учтено, что граничным условиям рассматриваемой задачи соответствует

$$\frac{\partial\chi_s}{\partial r}=0, \quad u_{sr}=rw_{sr}(z) \text{ и } u_{s\varphi}=rw_{s\varphi}(z).$$

Это дает

$$\mathbf{F}_{r\varphi} = \mathbf{F}_{r\varphi}^{(+)} + \mathbf{F}_{r\varphi}^{(-)} = \frac{1}{2}\varphi_0 \varepsilon r (\mathbf{f}^{(+)} + \mathbf{f}^{(-)}), \tag{4,16}$$

где

$$\left.\begin{aligned} f_r^{(-)} &= \sigma_{s0}^{(-)} \cos \Omega t, \\ f_\varphi^{(-)} &= -\sigma_{s0}^{(-)} \sin \Omega t, \end{aligned}\right\} 2\omega_0 < \Omega, \quad \left.\begin{aligned} f_r^{(-)} &= -\tau_{s0}^{(-)} \sin \Omega t, \\ f_\varphi^{(-)} &= -\tau_{s0}^{(-)} \cos \Omega t, \end{aligned}\right\} 2\omega_0 > \Omega,$$

$$f_r^{(+)} = \tau_{s0}^{(+)} \sin \Omega t, \quad f_\varphi^{(+)} = -\tau_{s0}^{(+)} \cos \Omega t. \tag{4,17}$$

В формулах (4,17) совершен переход от комплексной к действительной записи. Величины $\sigma_{s0}^{(\pm)}$ и $\tau_{s0}^{(\pm)}$ являются действительными и мнимыми частями комплексных волновых чисел $k_{s0}^{(\pm)}$:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{s0}^{(-)} &= -\sqrt{\frac{\Omega - 2\omega_0}{\nu_s}}, \\ \tau_{s0}^{(-)} &= 0, \end{aligned}\right\} 2\omega_0 < \Omega, \quad \left.\begin{aligned} \sigma_{s0}^{(-)} &= 0, \\ \tau_{s0}^{(-)} &= \sqrt{\frac{2\omega_0 - \Omega}{\nu_s}}, \end{aligned}\right\} 2\omega_0 > \Omega,$$

$$\sigma_{s0}^{(+)} = 0, \quad \tau_{s0}^{(+)} = \sqrt{\frac{\Omega + 2\omega_0}{\nu_s}}. \tag{4,18}$$

Очевидно, что вращение каждого из векторов $\mathbf{f}^{(+)}$ и $\mathbf{f}^{(-)}$ обусловлено соответственно $w_L^{(+)}$- или $w_L^{(-)}$-волной.

Сравним теперь последовательность направлений векторов $\mathbf{F}_{r\varphi}^{(\pm)}$ (во времени) с последовательностью направлений колебаний диска, которая (также в действительной записи) определяется формулой

$$\dot{\varphi} - \omega_0 = -\Omega\varphi_0 \sin \Omega t \tag{4,19}$$

(движение диска происходит по закону $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 \exp(i\Omega t)$).

Исследуя формулы (4,17) и (4,19) (см. также рис. 15) нетрудно убедиться, что каждый из векторов $\mathbf{F}_{r\varphi}^{(-)}$ при $2\omega_0 > \Omega$ и $\mathbf{F}_{r\varphi}^{(+)}$ попеременно, через каждую четверть периода то ускоряют движение диска (когда он приближается к положению равновесия), то тормозят его (когда диск удаляется от этого положения). Таким образом, благодаря действию этих составляющих силы натяжения, вихри ведут себя как своего рода дополнение к упругому подвесу диска. Этим и обусловлено увеличение частоты колебаний, описываемое вторыми членами формул (4,12) и (4,12′). Ясно, что такого рода взаимодействие не может привести к затуханию колебаний.

Иначе ведет себя вектор $F_{r\varphi}^{(-)}$ при $2\omega_0 < \Omega$. Как показано на рис. 15, *в*, он постоянно тормозит движение диска, чем и обусловлено дополнительное затухание, описываемое вторым членом в (4,13). Таким образом, диссипация энергии колебаний вращающейся сверхтекучей жидкости объясняется переносом энергии диска на бесконечность по вихревым нитям, вдоль которых распространяется $w_L^{(-)}$-волна (при $2\omega_0 < \Omega$).

Совершенно ясно, что если бы взаимное трение в действительности полностью отсутствовало, то описанный механизм затухания был бы возможен только в неограниченной жидкости. В противном случае $w_L^{(-)}$-волна, обладающая бесконечной глубиной проникновения, отражалась бы от произвольно далекой граничной поверхности, и обратная волна той же амплитуды полностью погасила бы эффект торможения, вернув энергию, уносимую бегущей волной. Однако, как уже отмечалось в п. 4.3, наличие взаимного трения обусловливает конечность глубины проникновения λ_3 (см. формулу (4,11)). А это означает, что в реальных условиях упруго передаваемая вихрям энергия диска диссипирует в дальнейшем

благодаря взаимному трению, обусловливающему затухание $w_L^{(-)}$-волны. В связи с этим вращение сверхтекучей компоненты гелия II всегда обусловливает заметное затухание колебаний диска, если только ближайшая твердая поверхность не приближается к диску на расстояние, значительно меньшее глубины проникновения λ_3.

Таким образом, именно натяжение упруго деформируемых вихревых нитей, а не изменение эффективной плотности сверхтекучей компоненты (см. п. 2.5, а также *) на стр. 36) является истинной причиной

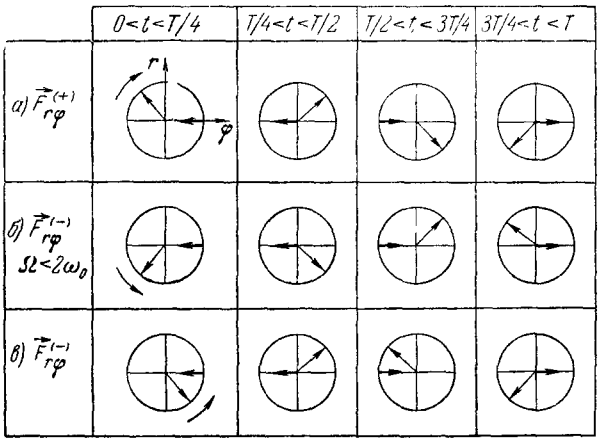

Рис. 15. Схематическое изображение последовательности направлений составляющих проекции натяжения вихря на поверхность диска $\mathbf{F}_{r\varphi}^{(+)}$ и $\mathbf{F}_{r\varphi}^{(-)}$ и направления колебаний диска.

а) В первой четверти периода диск приближается к положению равновесия, сила $\mathbf{F}_{r\varphi}^{(+)}$ ускоряет его движение; во второй четверти периода диск, пройдя положение равновесия, отклоняется от него, сила $\mathbf{F}_{r\varphi}^{(+)}$ начинает тормозить движение диска; в третьей и четвертой четвертях периода сила $\mathbf{F}_{r\varphi}^{(+)}$ вновь ускоряет приближение диска к положению равновесия и тормозит удаление от него. *б*) Аналогично поведение силы $\mathbf{F}_{r\varphi}^{(-)}$ при быстром вращении жидкости ($2\omega_0 > \Omega$). *в*) При медленном вращении жидкости сила $\mathbf{F}_{r\varphi}^{(-)}$ постоянно тормозит движение диска ($\Omega > 2\omega_0$).

изменения частоты и затухания колебаний дисков во вращающейся сверхтекучей жидкости. Это особенно ясно в случае единичного диска, колеблющегося в «бесконечной» жидкости, когда (см. **) на стр. 28) формулы (4,3) приобретают вид:

$$w_{sr} = \frac{2\omega_0}{i\Omega} w_{L\varphi}, \qquad w_{s\varphi} = -\frac{2\omega_0}{i\Omega} w_{Lr}. \tag{4,20}$$

Из этих формул следует, что когда вихри полностью закреплены на поверхности диска ($w_{L\varphi} = i\Omega\varphi_0, w_{Lr} = 0$), сверхтекучая компонента вблизи поверхности движется только радиально *) ($w_{s\varphi} = 0$, $w_{sr} = 2\omega_0\varphi_0$), т. е. перпендикулярно к направлению движения диска, а не в противофазе или фазе с ним. Следует также заметить, что, даже если бы между диском и сверхтекучей жидкостью существовало бы непосредственное взаимодействие, в таких условиях оно не могло бы привести к изменению частоты и затухания диска.

*) Радиальное движение сверхтекучей жидкости при аксиальных смещениях вихрей является следствием эффекта Магнуса

4.6. Мамаладзе и Матинян [33] рассмотрели задачу о колебаниях диска в неограниченной жидкости без введенных в пп. 4.4 и 4.5 ограничений $q=0$, $a=0$. Они показали, что момент силы M, действие которого испытывает колеблющийся диск, имеет вид *) $M=m\varphi_0 \exp(i\Omega t)$, где

$$m=\frac{\pi R^4}{\varphi_0}\left[\eta_n\left(\frac{dw_{n\varphi}}{dz}\right)_{z=0}+\eta_s\left(\frac{dw_{s\varphi}}{dz}\right)_{z=0}\right]=$$

$$=\frac{\pi R^4}{2}\left\{\eta_n\frac{A^{(+)}}{(k_1+k_2)\left(1-\frac{\nu_s q_1^{(+)}}{2\omega_0}\right)-\frac{a}{\Omega}\left[k_1k_2\left(1-\frac{\nu_s q_1^{(+)}}{2\omega_0}\right)+k_{s0}^{(+)2}+q_1^{(+)}\right]}+\right.$$

$$+\eta_n\frac{A^{(-)}}{(k_3+k_4)\left(1-\frac{\nu_s q_1^{(-)}}{2\omega_0}\right)-\frac{a}{\Omega}\left[k_3k_4\left(1-\frac{\nu_s q_1^{(-)}}{2\omega_0}\right)+k_{s0}^{(-)2}+q_1^{(-)}\right]}+$$

$$+i\eta_s\frac{2\omega_0\left[k_1k_2\left(1-\frac{\nu_s q_1^{(+)}}{2\omega_0}\right)+k_{s0}^{(+)2}+q_1^{(+)}\right]+q_1^{+}\Omega}{(k_1+k_2)\left(1-\frac{\nu_s q_1^{(+)}}{2\omega_0}\right)-\frac{a}{\Omega}\left[k_1k_2\left(1-\frac{\nu_s q_1^{(+)}}{2\omega_0}\right)+k_{s0}^{(+)2}+q_1^{(+)}\right]}+$$

$$\left.+i\eta_s\frac{2\omega_0\left[k_3k_4\left(1-\frac{\nu_s q_1^{(-)}}{2\omega_0}\right)+k_{s0}^{(-)2}+q_1^{(-)}\right]-q_1^{(-)}\Omega}{(k_3+k_4)\left(1-\frac{\nu_s q_1^{(-)}}{2\omega_0}\right)-\frac{a}{\Omega}\left[k_3k_4\left(1-\frac{\nu_s q_1^{(-)}}{2\omega_0}\right)+k_{s0}^{(-)2}+q_1^{(-)}\right]}\right\}, \quad (4,21)$$

где

$$A^{(+)}=-\Omega\left[(k_1^2+k_1k_2+k_2^2)\left(1-\frac{\nu_s q_1^{(+)}}{2\omega_0}\right)-k_{s0}^{(+)2}-q_1^{(+)}\right]-$$

$$-2\omega_0 q_2^{(+)}\left(1+\frac{\nu_s k_{s0}^{(+)2}}{2\omega_0}\right)+ak_1k_2(k_1+k_2)\left(1-\frac{\nu_s q_1^{(+)}}{2\omega_0}\right)$$

и

$$A^{(-)}=-\Omega\left[(k_3^2+k_3k_4+k_4^2)\left(1-\frac{\nu_s q_1^{(-)}}{2\omega_0}\right)-k_{s0}^{(-)2}-q_1^{(-)}\right]+$$

$$+2\omega_0 q_2^{(-)}\left(1+\frac{\nu_s k_{s0}^{(-)2}}{2\omega_0}\right)+ak_3k_4(k_3+k_4)\left(1-\frac{\nu_s q_1^{(-)}}{2\omega_0}\right).$$

Рассматривая эту формулу, нетрудно заметить, что она по-прежнему (ср. п. 4.4) состоит из двух частей, каждая из которых описывает действие на диск сверхтекучей (члены с η_s) или нормальной (члены с η_n) компоненты гелия II. Однако взаимное трение обусловливает появление в каждой из этих частей величин, связанных с действием второй компоненты.

Необходимо также отметить, что при полном проскальзывании вихревых нитей, когда $a=\infty$, члены, пропорциональные η_s, исчезают. Это вполне соответствует описанию механизма взаимодействия вихрей с колеблющимся диском, данному в п. 4.5. Однако и в этом случае сверхтекучая жидкость, благодаря наличию взаимного трения, оказывает существенное влияние на колебания диска (см. п. 4.7).

4.7. Громоздкость формулы (4,21) затрудняет ее использование без помощи вычислительной техники. На рис. 16 представлены предварительные результаты расчета скоростной зависимости затухания диска, выполняемого в настоящее время Кикнадзе и Ткемаладзе на машине «Урал» с использованием формул (4,5), (4,6) и (4,21) для значений параметров, соответствующих условиям эксперимента, представленного на

*) Эта формула получена авторами [30] в случае, когда в $\mathbf{F}_{sn}$ введены члены с $\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$ (см. п. 3.2).

рис. 5. Небольшое превышение экспериментальных данных над расчетной кривой *2* ($a=0$), наблюдающееся при $\omega_0=0{,}04\div0{,}06$ *сек*$^{-1}$, означает, по-видимому, что использованное при расчете значение $\nu_s=8{,}5\cdot10^{-4}$ *см*^{2}/*сек* является недостаточно большим.

Характерно, что кривая *3* ($a=\infty$) довольно сильно отличается от нижней кривой на рис. 5. Это обстоятельство иллюстрирует то влияние, которое оказывает на колебания диска наличие вихревых нитей Онсагера—Файнмана даже при полном отсутствии непосредственной связи между диском и скользящими вдоль его поверхности вихрями.

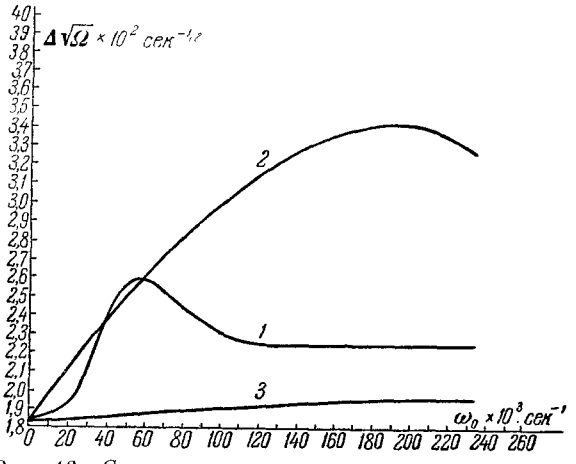

Рис. 16. Скоростная зависимость затухания колебаний диска ($\Delta=\delta-\delta_0\frac{\Omega_0}{\Omega}$, $\Omega=0{,}581$ *сек*$^{-1}$)

1 — сглаженная кривая, построенная по экспериментальным данным на рис. 5; *2* — расчетная кривая, построенная по формулам (4,6) и (4,21) при $a=0$ (абсолютно шероховатый диск), $\nu_s=8{,}5\cdot10^{-4}$ *см*^{2}/*сек* и при значениях коэффициентов взаимного трения, соответствующих температуре $T=1{,}78°$ К (см.[32]); *3* — расчетная кривая при $a=\infty$ (абсолютно гладкий диск).

Можно также заметить, что кривая *2* не сильно отличается от аналогичной кривой, полученной в работе[30]. Это означает, что члены с rot $\frac{\omega}{\omega}$ в выражении $\mathbf{F}_{sn}$ гораздо слабее влияют на вид скоростной зависимости затухания диска, чем на выражение для глубины проникновения λ_3, данное в п. 4.3 (в последнем случае они играли решающую роль при малых ω_0).

Вне интервала $\omega_0=0{,}04\div0{,}06$ *сек*$^{-1}$ экспериментальные данные размещаются между расчетными кривыми, соответствующими полному закреплению и полному проскальзыванию вихрей. В связи с этим (также при помощи вычислительной машины «Урал») был произведен подбор значений коэффициента скольжения, обеспечивающих полное согласие теории с экспериментом. Результаты этих расчетов, представленные на рис. 17, по-видимому, полностью согласуются с соображениями, высказанными в п. 2.7.

В области $2\omega_0\geqslant\Omega$ (не представленной на рисунках 16 и 17) при всех значениях a расчет приводит к росту затухания с увеличением ω_0. Однако картина в этой области еще не совсем ясна, особенно по отношению к поведению коэффициента скольжения при $2\omega_0\approx\Omega$.

4.8. В гл. 2, в частности в п. 2.5, мы противопоставили концепции эффективной плотности сверхтекучей компоненты концепцию вращаю-

щейся сверхтекучей жидкости как среды, поведение которой обусловливается упруго-пластическими свойствами пронизывающей ее совокупности вихрей Онсагера—Файнмана.

В п. 4.5 вторая концепция была подтверждена на примере единичного диска, в случае которого не только изменение частоты, но и дополнительное затухание оказались связанными с генерацией упругих волн на вихревых нитях.

Критический анализ понятия эффективной плотности приводит к еще более характерным результатам, если его провести на примере колебаний стопки дисков. (Нижеследующие соображения высказаны Мамаладзе.)

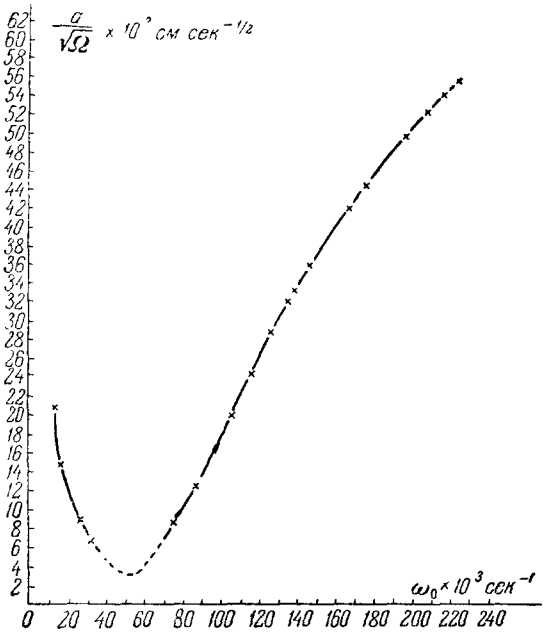

Рис. 17. Скоростная зависимость коэффициента скольжения.

Подобрана таким образом, чтобы расчет по формулам (4,6) и (4,21) приводил к кривой *I* на рис. 16

Отметим прежде всего, что задача о колебаниях стопки дисков во вращающейся сверхтекучей жидкости может быть решена методом, описанным в п. 4.2. Если вновь использовать приближение $q=0$, $a=0$, то дополнительное затухание колебаний стопки оказывается равным нулю, а их частота определяется формулой *)

$$\Omega^2 - \Omega_n^2 = -\frac{I_s}{I}\,\Omega^2 A(\omega_0, \Omega, l). \qquad (4,22)$$

В формуле (4,22) Ω_n обозначает частоту колебаний, которую следовало бы ожидать, если бы стопка взаимодействовала только с нормальной компонентой гелия II, I_s — момент инерции находящейся в стопке сверхтекучей жидкости, I — момент инерции самой стопки, функция $A(\omega_0, \Omega, l)$

*) Здесь использована запись разности $\Omega^2-\omega_0^2$ в виде суммы $(\Omega^2-\Omega_n^2)+(\Omega_n^2-\Omega_0^2)$, где второй член связан с действием на колеблющееся тело нормальной компоненты гелия II, а первый — с действием сверхтекучей компоненты (в приближении $q=0$ эти эффекты могут быть отделены друг от друга).

выражается следующим образом:

$$A(\omega_0, \Omega, l) = -\alpha \frac{Z^{(+)} - Z^{(-)} + \alpha (Z^{(+)} + Z^{(-)} - 2Z^{(+)}Z^{(-)})}{2 + \alpha (Z^{(+)} - Z^{(-)}) - \alpha^2 (Z^{(+)} + Z^{(-)})}, \tag{4,23}$$

где $\alpha = 2\omega_0/\Omega$, $Z^{(\pm)} = \operatorname{tg}(k_{10}^{(\pm)} l)/k_{s0}^{(\pm)} l$, l —половина расстояния между соседними дисками. Следует подчеркнуть, что формула (4,22) является следствием совершенно общих уравнений, которые хотя и могут быть интерпретированы в терминах упругих свойств вихрей, но, по сути дела, не связаны с каким-либо предвзятым мнением о механизме рассматриваемых явлений.

Введем теперь понятие эффективной плотности сверхтекучей компоненты, участвующей в колебаниях стопки. При этом мы будем исходить из широкоизвестной формулы, определяющей частоту колебаний по крутильному моменту подвеса f и моменту инерции колеблющегося тела I:

$$\Omega^2 = \frac{f}{I}. \tag{4,24}$$

В соответствии с установленным в предыдущем параграфе характером действия натяжения вихрей на колеблющееся тело можно было бы описывать изменение частоты колебаний как результат эффективного изменения крутильного момента f и момента инерции I. Однако с целью вскрытия внутренней противоречивости концепции эффективной плотности мы, следуя Холлу, введем в рассмотрение только изменения величины I. В таком случае можно написать следующий ряд формул:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_0^2 &= \frac{f}{I}, \\ \Omega_{n0}^2 &= \frac{f}{I + \Delta I_{n0}}, \\ \Omega_n^2 &= \frac{f}{I + \Delta I_n}, \\ \Omega^2 &= \frac{f}{I + \Delta I_n + \Delta I_s}, \end{aligned}\right\} \tag{4,25}$$

где ΔI_{n0}— момент инерции нормальной компоненты, вовлекаемой в колебания стопки в невращающемся гелии II, ΔI_n — та же величина в случае вращения, ΔI_s — момент инерции сверхтекучей компоненты, также вовлекаемой в колебания стопки при вращении жидкости; обозначения Ω_0, Ω_n и Ω имеют уже известный нам смысл, а Ω_{n0} — частота колебаний в невращающемся гелии II.

Относительную эффективную плотность колеблющейся сверхтекучей компоненты естественно определить выражением

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho_s}\right)_1 = \frac{\Delta I_s}{I_s} \tag{4,26}$$

(обозначение I_s объяснено в связи с формулой (4,22)). Из равенств (4,25) непосредственно следует

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho_s}\right)_1 = \frac{\Omega_n^2 - \Omega^2}{\Omega^2} \frac{\Omega_0^2}{\Omega_n^2} \frac{I}{I_s}. \tag{4,27}$$

Однако, если формулу Холла (2,1) переписать в обозначениях этого параграфа, будет видно, что он измерял несколько иную величину (обозначим ее $(\varrho'/\varrho_s)_2$):

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho_s}\right)_2 = \frac{\Omega_{n0}^2 - \Omega^2}{\Omega^2} \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{n0}^2} \frac{I}{I_s}. \tag{4,28}$$

Между тем $\Omega_{n0} \neq \Omega_n$, так как частота колебаний зависит от скорости вращения жидкости даже в случае классических жидкостей *).

Таким образом, определение эффективной плотности (4,28) нельзя признать правильным даже с точки зрения Холла (величина $(\varrho'/\varrho_s)_2$ представляет собой лишенное физического смысла отношение $(\Delta I_s + \Delta I_n - \Delta I_{n0})/I_s$).

Однако гораздо более принципиальным является несоответствие формулы (4,28) с результатами теоретических расчетов Холла, которые в приближении $q=0$, $a=0$ привели к формуле

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho_s}\right)_3 = A(\omega_0, \Omega, l). \tag{4,29}$$

С другой стороны, при помощи формул (4,27) и (4,22) нетрудно убедиться, что правильно определенная эффективная плотность $(\varrho'/\varrho_s)_1$ равна

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho_s}\right)_1 = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_n^2} A(\omega_0, \Omega, l). \tag{4,30}$$

Что касается холловской эффективной плотности $(\varrho'/\varrho_s)_2$, то, сравнивая формулы (4,27), (4,28) и (4,30), нетрудно получить

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho_s}\right)_2 = \frac{\Omega_{n0}^2 - \Omega^2}{\Omega_n^2 - \Omega^2} \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{n0}^2} A(\omega_0, \Omega, l). \tag{4,31}$$

Итак, все три величины $(\varrho'/\varrho_s)_{1,2,3}$ оказываются разными и (что необходимо особо подчеркнуть) выясняется, что результаты измерений Холла $(\varrho'/\varrho_s)_2$ сравнивались им с теоретическим ходом совершенно иной величины $(\varrho'/\varrho_s)_3$.

Конечно, при низких температурах (Холл экспериментировал при $T = 1{,}27°$ K) $\Omega_n \approx \Omega_{n0} \approx \Omega_0$, в связи с чем Холл не допустил большой количественной ошибки. Однако тем не менее необходимо разобраться в причинах только что выяснившегося принципиального несоответствия величин $(\varrho'/\varrho_s)_1$ и $(\varrho'/\varrho_s)_3$.

Дело в том, что в теоретической части своей работы [19] Холл применял методику, отличную от описанной нами в п. 4.2. Решив уравнение (3,1), он определял не момент силы (что дает возможность непосредственного вычисления частоты колебаний), а момент количества движения сверхтекучей жидкости, колеблющейся между двумя соседними дисками. Он равен $2\pi R^2 \varrho_s \int_0^l v_{s\varphi}\, dz$. После этого величина $(\varrho'/\varrho_s)_3$ определялась отношением этого момента к тому значению момента количества движения жидкости, которое соответствует ее полному увлечению колеблющейся поверхностью (т. е. к значению $2\pi R^2 \varrho_s v_{\sigma\varphi} l$):

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho_s}\right)_3 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{v_{s\varphi}}{v_{\sigma\varphi}}\, dz. \tag{4,32}$$

---

*) Например, в случае единичного диска согласно [21] Ω_n определяется формулами:

$$\Omega_n^2 - \Omega_0^2 = -\frac{\pi R^4 \Omega}{2I} \sqrt{\frac{\varrho_n \eta_n}{2}} \left(\sqrt{\Omega + 2\omega_0} + \sqrt{\Omega - 2\omega_0}\right) \quad \text{при } 2\omega_0 < \Omega$$

и

$$\Omega_n^2 - \Omega_0^2 = -\frac{\pi R^4 \Omega}{2I} \sqrt{\frac{\varrho_n \eta_n}{2}} \left(\sqrt{\Omega + 2\omega_0} - \sqrt{2\omega_0 - \Omega}\right) \quad \text{при } 2\omega_0 > \Omega,$$

а Ω_{n0} есть Ω_n при $\omega_0 = 0$.

Казалось бы, что это равенство вполне соответствует нашему определению ϱ'/ϱ_s как $\Delta I_s/I_s$. Однако не следует забывать, что сверхтекучая жидкость участвует в колебаниях отнюдь не как твердое тело. Поэтому определенные различными способами эффективные моменты инерции не обязательно совпадают друг с другом. Это и является причиной того, что эффективная плотность $(\varrho'/\varrho_s)_1$, определенная по частоте колебаний, не совпадает с эффективной плотностью $(\varrho'/\varrho_s)_3$, определенной по моменту количества движения. Иными словами, несостоятельность концепции Холла связана с чрезмерно буквальным употреблением выражения «*вовлечение* сверхтекучей жидкости в колебания стопки дисков» *).

4.9. Как уже было отмечено выше, при низких температурах приближенно можно считать $\left(\frac{\varrho'}{\varrho_s}\right)_1 \approx \left(\frac{\varrho'}{\varrho_s}\right)_2 \approx \left(\frac{\varrho'}{\varrho_s}\right)_3$. При тех же температурных условиях ($T = 1{,}27°$ К), если только они реализуются, при скоростях вращения ω_0, не близких к $\Omega/2$, можно считать удовлетворительным и приближение $q = 0$. Поэтому отмеченное Холлом соответствие между развитой им теорией и полученными им же экспериментальными данными (см. рисунки 2 и 3) не является кажущимся. Для достижения полного количественного согласия теории с экспериментом нужно было только отказаться от приближения $a = 0$. Обобщив формулу (4,23) на случай частичного проскальзывания вихревых нитей вдоль поверхности дисков, Холл получил для функции $A(\omega_0, \Omega, l)$ следующие предельные выражения:

$$A(\omega_0, \Omega, l) = \frac{\omega_0}{\Omega}\left[\frac{1}{1+\gamma_1^2\,\mathrm{tg}^2(k_1 l)}\frac{\mathrm{tg}(k_1 l)}{k_1 l} - \frac{1}{1+\gamma_1^2\,\mathrm{th}^2(k_1 l)}\frac{\mathrm{th}(k_1 l)}{k_1 l}\right] \quad \text{при } 2\omega_0 \ll \Omega \tag{4,33}$$

и

$$A(\omega_0, \Omega, l) = 1 - \frac{1}{1+\gamma_2^2\,\mathrm{th}^2(k_2 l)}\frac{\mathrm{th}(k_2 l)}{k_2 l} \quad \text{при } 2\omega_0 \gg \Omega. \tag{4,34}$$

Здесь $k_1 = (\Omega/\nu_s)^{1/2}$, $k_2 = (2\omega_0/\nu_s)^{1/2}$, $\gamma_1 = ak_1/\Omega$ и $\gamma_2 = ak_2/\Omega$. (Так как неравенство $2\omega_0 \ll \Omega$ в условиях экспериментов Холла соблюдалось не очень строго, используя формулу (4,33), Холл заменял величину k_1 волновым числом $k_0^{(-)}$, равным $[(\Omega - 2\omega_0)/\nu_s]^{1/2}$.) Эмпирические значения коэффициентов γ_1 и γ_2 по оценке Холла оказались равными $\gamma_1 = \gamma_2 = 0{,}5$, что по порядку величины соответствует значениям a, приведенным на рис. 17 ($a/\sqrt{\Omega} \sim 10^{-2}$ *см·сек*$^{-1/2}$).

Несмотря на экспериментальное подтверждение формул (4,33) и (4,34), необходимо заметить, что Холл недостаточно корректно осуществлял предельные переходы к крайним случаям $2\omega_0 \ll \Omega$ и $2\omega_0 \gg \Omega$. Не задерживаясь на ошибке, допущенной в первом из этих случаев **) и не приводящей к противоречию с экспериментом, рассмотрим случай $2\omega_0 \gg \Omega$. Поскольку при больших скоростях вращения скольжение вихрей не играет существенной роли (см. [19]), можно вновь использовать приближение $q = 0$, $a = 0$. В этом приближении Холл получил

$$A(\omega_0, \Omega, l) = 1 - \frac{\mathrm{th}(k_2 l)}{k_2 l} \quad \text{при } 2\omega_0 \gg \Omega. \tag{4,35}$$

---

*) В случае колебаний единичного диска в неограниченной жидкости $(\varrho'/\varrho_s)_3 = 0$, т. е. «вовлечение» сверхтекучей компоненты отсутствует (см. также в п. 4.5 формулу (4,20) и следующее за ней рассуждение). Однако и в этом случае эффективная плотность сверхтекучей жидкости, определенная по частоте колебаний, отлична от нуля.

**) Она связана с тем обстоятельством, что величины $\alpha Z^{(-)}$ в формуле (4,23) не являются пренебрежимо малыми, если $\alpha \ll 1$, но $k_0^{(-)} l \approx (2n-1)\pi/2$

Однако, как это непосредственно следует из формулы (4,23), более правильным было бы следующее выражение, полученное Мамаладзе:

$$A(\omega_0, \Omega, l) = \frac{1 - \dfrac{\operatorname{th}(k_2 l)}{k_2 l}}{1 - \dfrac{1}{\left(\dfrac{2\omega_0}{\Omega}\right)^2 \dfrac{\operatorname{th}(k_2 l)}{k_2 l}}} \quad \text{при } 2\omega_0 \gg \Omega. \tag{4,35}$$

Из этой формулы ясно, что величина $A(\omega_0, \Omega, l)$ вообще не может рассматриваться как функция только от произведения $\omega_0^{1/2} l$ (ср. рис. 2). При $\omega_0 \to \infty$ эта функция стремится к единице, что и было отмечено Холлом; однако при $l \to \infty$ ее предельным значением является не единица, а нуль. Поэтому, увеличивая раздвижение стопки при большой, но фиксированной скорости вращения, можно было бы обнаружить, что кривая изображенного на рис. 2 типа переходит через максимум и асимптотически устремляется к оси абсцисс.

4.10. Рассмотрим теперь колебания единичного диска вблизи свободной поверхности вращающейся сверхтекучей жидкости. Качественно это явление было уже описано в п. 2.9, где было показано, что оно приводит к появлению резонансных эффектов.

Снова используем приближение $q = 0$, $a = 0$. Нам уже известно, что это приближение не дает полного описания рассматриваемых явлений. В частности, оно приводит к нулевому затуханию (из-за $q = 0$) и к бесконечным всплескам в скоростной зависимости частоты колебаний (из-за $a = 0$). Однако оно вполне применимо для трактовки экспериментальных данных, полученных в рассматриваемом случае, которые использовались только для определения длины волны.

Поэтому для теоретического обоснования результатов этих экспериментов достаточно определить резонансные условия.

Методом, описанным в п. 4.2, Мамаладзе получил для момента силы M_s, с которым сверхтекучая компонента действует на поверхность колеблющегося диска, выражение вида

$$M_s = m_s \varphi_0 \exp(i\Omega t),$$

$$m_s = \frac{1}{2}\pi R^4 \eta_s \omega_0 \left[k_{s0}^{(+)} \operatorname{tg}(k_{s0}^{(+)} H) + k_{s0}^{(-)} \operatorname{tg}(k_{s0}^{(-)} H)\right]. \tag{4,36}$$

Здесь H — расстояние от поверхности диска до свободной поверхности, которое предполагается гораздо бо́льшим глубины мениска и амплитуды колебаний свободной поверхности. Из формулы (4,36) следует, что условием резонанса будет равенство $k_{s0}^{(-)} H = (2n - 1)\pi/2$, которое соответствует кратности H четверти длины волны $L_{s0}^{(-)} = 2\pi\,[\nu_s/(\Omega - 2\omega_0)]^{1/2}$ (см. формулу (2,11)).

Совершенно ясно, что кратность расстояния H четверти длины волны L_3 определяет резонансные условия и при $q \neq 0$ (подразумевается, что H гораздо больше глубин проникновения λ_1, λ_2 и λ_4, но сравнимо с λ_3; см. п. 4.3). Поэтому для замены условия (2,11) более точным равенством достаточно заменить величину $L_{s0}^{(-)}$ на длину волны $L_3 = 2\pi/\operatorname{Re}(k_3)$:

$$H = (2n - 1)\frac{L_3}{4} = \frac{1}{2}(2n - 1)\pi \operatorname{Re}(k_3) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4,37}$$

Эта формула является обобщением (2,11) в случае учета взаимного трения.

4.11. Мамаладзе и Матинян [35] решили также задачу о крутильных колебаниях цилиндра во вращающемся гелии II. Они показали что колеблющаяся поверхность генерирует в нормальной компоненте гелия II цилиндрическую волну, волновое число которой определяется следующим равенством ($\mathrm{Im}(k) > 0$):

$$k^2 = -\frac{i\Omega}{\nu_n}\left[1 + i\frac{2\omega_0}{\Omega}\beta_s\left(1 - i\frac{2\omega_0}{\Omega}\frac{\beta_n}{1 + i\frac{2\omega_0}{\Omega}\beta_n}\right)\right]. \tag{4,38}$$

Вследствие взаимного трения подобные волны распространяются и в сверхтекучей компоненте гелия II, а также в системе вихрей Онсагера—Файнмана, которые, в отличие от случая колебаний диска, не связаны непосредственно с колеблющейся поверхностью.

Глубина проникновения λ этой волны (распространяющейся радиально) близка к глубине проникновения обычных вязких волн:

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{Im}(k)} \approx \sqrt{\frac{2\nu_n}{\Omega}} \equiv \lambda_0. \tag{4,39}$$

Для скоростной зависимости затухания колебаний полого, тонкостенного ($R_{\text{внутр}} \approx R_{\text{внешн}}$) и «тяжелого» ($\Omega \approx \Omega_0$) цилиндра получена следующая формула:

$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{l_2 - l_1} = \frac{2\pi^2 R^3}{l}\sqrt{\frac{2\eta_n \varrho_n}{\Omega}}\left(1 - \frac{\omega_0}{\Omega}\beta_s\right)\left(1 - \frac{3\lambda_0}{R}\right), \tag{4,40}$$

где δ_2 и δ_1 — логарифмические декременты затухания при погружении цилиндра на глубины l_2 и l_1 *). (Вычитание δ_1 из δ_2 автоматически исключает краевые эффекты.)

Формула (4,40) показывает, что линейный рост затухания с увеличением скорости вращения всецело связан с наличием взаимного трения. Из этого обстоятельства, в частности, следует, что в случае классических жидкостей затухание крутильных колебаний цилиндра не должно зависеть от скорости вращения жидкости.

Все выводы этого параграфа полностью подтверждены экспериментальными данными, приведенными в работе Цакадзе и Чхеидзе [29].

* * *

Завершая обзор экспериментальных и теоретических работ, посвященных исследованию колебаний твердых тел во вращающемся гелии II, можно с уверенностью утверждать, что совокупность всех наблюденных явлений (и их физическая интерпретация) полностью укладывается в схему Онсагера—Файнмана. Можно считать установленным, что резкое отличие закономерностей колебаний твердых тел во вращающемся гелии II от соответствующих закономерностей для классических жидкостей всецело обусловлено квантованием и локализацией циркуляции, характерной для вращения сверхтекучей жидкости.

Следует отметить, что исследования вихревого движения сверхтекучей жидкости нельзя считать завершенными. В особенности это касается таких вопросов, как точное квантовомеханическое описание структуры вихревой нити, механизм вихреобразования, поведение вихря вблизи

*) Формула (4,40) записана в приближении, линейном по произведениям $2\omega_0/\Omega$ на коэффициенты взаимного трения и по отношению λ_0/R.

твердой поверхности и т. д. Решение этих вопросов может несколько изменить результаты, изложенные в главах 3 и 4.

Тем не менее общие результаты, полученные в описанных нами работах, по-видимому, существенно не изменятся. Можно считать установленным, что вращающийся гелий II является средой, особенности которой обусловлены упруго-пластическими свойствами системы вихревых нитей Онсагера-Файнмана, параллельных оси вращения. В частности, наличие такой системы объясняет своеобразие пространственной анизотропии вязких свойств вращающегося гелия, выразившееся в различном характере скоростной зависимости затухания колебаний тел, поверхности которых перпендикулярны или параллельны вихревым нитям.

Весьма характерной особенностью вращающегося гелия является также существование глубины проникновения в гелий II, а не в его нормальную компоненту. С этим связана возможность введения понятия эффективной вязкости гелия II, характеризующей его при сравнительно быстром вращении. Необходимо подчеркнуть, что введенная таким образом вязкость тоже будет обладать пространственной анизотропией и скоростной зависимостью.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. П. Л. Капица, ЖЭТФ **11**, 1 (1941).
2. D. V. Osborne, Proc. Phys. Soc. Lond. **A63**, 909 (1950).
3. Э. Л. Андроникашвили и И. П. Каверкин, ЖЭТФ **28**, 126 (1955).
4. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1953.
5. H. E. Hall and W. F. Vinen, Philos. Mag. **46**, 546 (1955).
6. R. G. Wheeler, C. U. Blakewood and C. T. Lane, Phys. Rev. **99**, 1667 (1955).
7. H. London, Phys. Soc. Camb. Conf. **2**, 48 (1946).
8. F. London, Superfluids, vol. 2, Wiley, New York, 1954, стр. 151.
9. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, ДАН СССР **100**, 669 (1958).
10. L. Onsager, Nuovo cimento **6**, Suppl. 2, 249 (1949).
11. R. P. Feynman, Progress in Low Temperature Physics, vol. I, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1957, гл. 2.
12. Е. М. Лифшиц, УФН **34**, 512 (1948).
13. R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **29**, 205 (1957).
14. H. E. Hall, Philos. Mag., Suppl. **9**, 89 (1960).
15. W. F. Vinen, Nature **181**, 1524 (1958).
16. Э. Л. Андроникашвили, Тр. Ин-та физики АН Груз. ССР **6**, 3 (1958).
17. H. E. Hall and W. F. Vinen, Proc. Roy. Soc. **A238**, 204, 215 (1956).
18. Э. Л. Андроникашвили и Д. С. Цакадзе, IV Всесоюзное совещание по физике низких температур, Москва, 1957; см. также Сообщения АН Груз. ССР **20**, 667 (1958).
19. H. E. Hall, IV Всесоюзное совещание по физике низких температур, Москва, 1957; см. также Proc. Roy. Soc. **A245**, 546 (1957).
20. Э. Л. Андроникашвили, Д. С. Цакадзе, Ю. Г. Мамаладзе, С. Г. Матинян, V Всесоюзное совещание по физике низких температур, Тбилиси, 1958.
21. Ю. Г. Мамаладзе и С. Г. Матинян, Прикл. мат. мех. **24**, 473 (1960).
22. К. Б. Месоед и Д. С. Цакадзе, Сообщения АН Груз. ССР (в печати).
23. Э. Л. Андроникашвили и Д. С. Цакадзе, ЖЭТФ **37**, 562 (1959).
24. Э. Л. Андроникашвили, К. Б. Месоед и Д. С. Цакадзе, Тезисы докладов, представленных на VII Всесоюзное совещание по физике низких температур, Харьков, 1960.
25. Л. П. Питаевский, Диссертация, ИФП АН СССР, 1958.
26. Э. Л. Андроникашвили и Д. С. Цакадзе, Тезисы докладов, представленных на VII Всесоюзное совещание по физике низких температур, Харьков, 1960.

27 H E Hall, Proceedings of the Kamerlingh Onnes Conference on Low Temperature Physics Suppl to Physica **24**, 141 (1958)
28. Э Л Андроникашвили и Д С Цакадзе ЖЭТФ **37**, 332 (1959)
29 Д С Цакадзе и И М Чхеидзе, ЖЭТФ **38**, 637 (1960)
30 Ю Г Мамаладзе и С Г Матинян, ЖЭТФ **38**, 184 (1960)
31 И Л Бекаревич и И М Хаиатников, Тезисы докладов, представленных на VII Всесоюзное совещание по физике низких температур, Харьков, 1960
32 Е М Лифшиц и Л П Питаевский ЖЭТФ **33**, 535 (1957)
33 Ю Г Мамаладзе и С Г Матинян, Тезисы докладов, представленных на VII Всесоюзное совещание по физике низких температур, Харьков, 1960
34 Ю. Г Мамаладзе, Тезисы докладов, представленных на VII Всесоюзное совещание по физике низких температур, Харьков, 1960
35 Ю Г Мамаладзе и С Г Матинян, ЖЭТФ **38**, 656 (1960)