

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Р. В. Половин

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы сильно расширилась область приложений магнитной гидродинамики. В настоящее время эти приложения охватывают ряд вопросов теории жидкометаллических охладителей ядерных реакторов¹, теории магнитогидродинамических измерительных приборов², физики Солнца³, геофизики и астрофизики⁴, теории газового разряда и плазмы⁵⁻⁷, теории управляемых термоядерных реакций⁸, магнитной аэродинамики^{9, 10}.

Уравнения магнитной гидродинамики нелинейны, что вызывает появление ряда специфических эффектов, в частности образование ударных волн. Ударные волны играют существенную роль при сжатии и нагреве плазмы¹¹⁻¹³. Они являются одним из механизмов образования межзвездных магнитных полей¹⁴. Без ударных волн невозможно рассмотрение сверхзвукового обтекания тела в магнитном поле^{15, 16}. Магнитогидродинамические ударные волны существенны также в теории импульсных разрядов в плазме¹⁷.

В настоящей статье дается обзор ряда теоретических работ, посвященных магнитогидродинамическим ударным волнам, начало которым было положено работой Гофмана и Теллера¹⁸.

§ 2. ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ

Важный класс нелинейных решений уравнений магнитной гидродинамики составляют простые волны (простыми волнами называются такие решения, в которых все магнитогидродинамические величины: плотность ρ , давление p , энтропия s , скорость жидкости v , магнитное поле H — являются функциями одной из них, например ρ , которая в свою очередь зависит от координаты x и времени t). Мы ограничимся случаем плоских одномерных простых волн. Особая роль, которую в магнитной гидродинамике играют простые волны, связана с тем, что в отсутствие разрывов только они могут граничить с областью постоянного течения^{19, 20 *}).

Частным случаем простых волн являются автомодельные волны, т. е. волны, в которых магнитогидродинамические величины зависят

*) Утверждение Мугибаяси²¹ о том, что им будто бы найдено решение, не являющееся простой волной и граничащее с областью постоянного течения, является ошибочным. Для того чтобы движение среды описывалось решением, найденным Мугибаяси, нужно на границе приложить переменное (а не постоянное) внешнее давление, изменяющееся по определенному закону; это отмечено, например, в работе А. Г. Куликовского²².

от отношения x/t . Автомоделные волны возникают всегда, когда в начальных условиях отсутствуют параметры, имеющие размерность длины.

В магнитной гидродинамике существует три вида простых волн^{19, 20}:

1) Альфвеновская волна

$$\mathbf{v} = -\frac{\varepsilon \mathbf{H}}{\sqrt{4\pi q}}, \quad v_t \equiv \sqrt{v_y^2 + v_z^2} = \text{const}, \quad (2,1)$$

$$H_t \equiv \sqrt{H_y^2 + H_z^2} = \text{const}, \quad q = \text{const}, \quad s = \text{const}, \quad H_x = \text{const}.$$

$\varepsilon = +1$ для волн, распространяющихся в положительном направлении оси x , $\varepsilon = -1$ для волн, распространяющихся в противоположном направлении.

2) Магнитозвуковая волна

$$\frac{dv_x}{dq} = \varepsilon \frac{U_{\pm}}{q}, \quad \frac{dv_t}{dq} = -\varepsilon \frac{H_x \mathbf{H}_t U_{\pm}}{4\pi q^2 (U_{\pm}^2 - U_x^2)}, \quad (2,2)$$

$$\frac{dH_t}{dq} = \frac{U_{\pm} \mathbf{H}_t}{q (U_{\pm}^2 - U_x^2)}, \quad \frac{dp}{dq} = c^2, \quad s = \text{const}, \quad H_x = \text{const},$$

где U_x — альфвеновская скорость, которая определяется соотношением

$$U = \frac{H}{\sqrt{4\pi q}},$$

v_t и \mathbf{H}_t — поперечные компоненты скорости и магнитного поля, c — скорость звука,

$$U_{\pm} = \frac{\sqrt{[U^2 + c^2 \pm \sqrt{(U^2 + c^2)^2 - 4c^2 U_x^2}]} }{2};$$

знаки «плюс» или «минус» у величины U_{\pm} соответствуют быстрой или медленной магнитозвуковой волне.

3) Энтропийная волна

$$dq = (\partial q / \partial s)_p ds, \quad p = \text{const}, \quad \mathbf{v} = \text{const}, \quad \mathbf{H} = \text{const}. \quad (2,3)$$

В альфвеновской простой волне величины p , q , v_x , \mathbf{v} , \mathbf{H} не изменяются и векторы \mathbf{v} и \mathbf{H} поворачиваются вокруг оси x на одинаковый угол. Фазовая скорость распространения альфвеновских волн равна $v_x \pm \varepsilon U_x$. Так как последняя величина не изменяется, то альфвеновская простая волна распространяется без изменения своей формы. Из этого, в частности, следует, что альфвеновские волны не могут быть автомоделными.

Фазовая скорость распространения магнитозвуковой волны равна $v_x \pm \varepsilon U_{\pm}$. Если, как обычно, адиабатическая сжимаемость падает с увеличением давления

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} \right)_s \left(\frac{1}{q} \right) > 0,$$

то из дифференциальных уравнений (2,2) следует

$$\frac{d}{dq} (v_x \pm \varepsilon U_{\pm}) > 0. \quad (2,4)$$

Неравенство (2,4) означает, что при движении магнитозвуковой волны ее профиль искажается. Крутизна волны на участках разрежения ($\frac{dq}{dt} < 0$) уменьшается, а на участках сжатия ($\frac{dq}{dt} > 0$) увеличивается, что приводит в конце концов к образованию разрывов (ударных волн)

на участках сжатия *)²⁶⁻²⁹. Решения уравнений для простых магнитозвуковых волн имеют весьма сложный вид **). Мы остановимся только на некоторых качественных выводах, вытекающих непосредственно из дифференциальных уравнений. Прежде всего, отметим, что давление меняется в том же направлении, что и плотность: поперечное магнитное поле H_z в быстрой магнитозвуковой волне изменяется в том же направлении, а в медленной — в обратном направлении. Простые магнитозвуковые волны являются плоскими: если в начальный момент $v_z = 0$, $H_z = 0$, то эти соотношения будут выполняться и в дальнейшем. Если автомодельная волна распространяется вправо ($\varepsilon = +1$) и если величины H_x и H_y одного знака, то продольная скорость v_x уменьшается, а поперечная скорость v_y увеличивается в быстрой автомодельной волне и уменьшается в медленной.

§ 3. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ. ТЕОРЕМА ЦЕМПЛЕНА

Как мы уже видели, разрывы в простой волне образуются на участках сжатия вследствие искажения ее профиля. На поверхности разрыва выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии, а также сохраняется непрерывность поперечного электрического и продольного магнитного полей^{18, 30, 31}. Мы ограничимся рассмотрением разрывов постоянной амплитуды.

Классификация всех возможных типов магнитогидродинамических разрывов была произведена С. И. Сыроватским^{32, 33}.

Как известно^{34, 35}, в обычной гидродинамике при выполнении условий

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)_s \left(\frac{1}{\rho}\right) > 0, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho > 0 \quad (3.1)$$

имеет место теорема Цемплена, согласно которой в ударной волне давление и плотность увеличиваются: $p_2 > p_1$, $\rho_2 > \rho_1$; иными словами, ударные волны всегда являются волнами сжатия.

Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц³⁰ показали, что и в магнитной гидродинамике при выполнении условий (3.1) ударные волны малой амплитуды являются волнами сжатия (при произвольном направлении магнитного поля). Утверждение, обратное теореме Цемплена и заключающееся в том, что в идеальном газе в ударной волне сжатия энтропия возрастает, было доказано Гофманом и Теллером¹⁸.

Теорема Цемплена была доказана Гофманом и Теллером лишь для перпендикулярной ударной волны малой амплитуды, но она справедлива при произвольной интенсивности волны и произвольном направлении магнитного поля³⁶⁻³⁸.

§ 4. УСЛОВИЯ ЭВОЛЮЦИОННОСТИ РАЗРЫВОВ

Задания граничных условий на разрыве недостаточно, чтобы единственным образом определить разрывное решение. Эта трудность встречается и в обычной гидродинамике. Так, например, при выдвигании поршня из трубы формально возможны волны, соответствующие двум решениям: 1) автомодельная волна разрежения, 2) ударная волна разрежения³⁹. Второе решение в обычной гидродинамике отбрасывается, так как оно противоречит теореме Цемплена.

*) В случае, когда магнитное поле перпендикулярно к направлению распространения волны, аналогичные результаты были получены С. А. Капланом и К. П. Станюковичем²³, Сегре²⁴ и Тапкюти²⁵.

**) Как показал Фридрихс (см. ²⁹), решение уравнений простых волн может быть сведено к квадратурам.

В магнитной гидродинамике, как отмечалось выше, ударные волны разрежения также невозможны. Однако в магнитной гидродинамике существует слишком большое количество ударных волн сжатия и задача о движении среды при заданных начальных и граничных условиях имеет бесчисленное множество решений.

Так, например, если вдвигать идеально проводящий поршень в покоящуюся магнитогидродинамическую среду, в которой магнитное поле H_x направлено по нормали к поршню, то в том случае, если выполняются неравенства

$$\frac{3(U_{0x}^2 - c_0^2)}{4U_{0x}} < u < \frac{3(U_{0x}^2 - c_0^2)}{\sqrt{4U_{0x}^2 - 3c_0^2}}, \quad U_{0x} > c_0$$

($U_{0x} = \frac{H_{0x}}{\sqrt{4\pi Q_0}}$, c_0 — скорость звука, индекс «0» относится к невозмущенной среде, u — скорость поршня, $\gamma = 5/3$), возможны два типа решений:

1) такая же ударная волна сжатия, как и при отсутствии магнитного поля,

2) две магнитогидродинамические ударные волны, движущиеся с одинаковой скоростью

$$D = \frac{2u}{3} + \sqrt{\frac{4u^2}{9} + c_0^2},$$

причем поперечное магнитное поле H_{1t} между этими волнами определяется формулой

$$H_{1t} = \sqrt{\frac{8\pi Q_0 (D^2 - U_{0x}^2) (4U_{0x}^2 - D^2 - 3c_0^2)}{3U_{0x}^2}}.$$

Обе эти ударные волны являются волнами сжатия. Плотность среды между волнами равна

$$Q_1 = \frac{D^2 Q_0}{U_{0x}^2} > Q_0,$$

плотность среды позади обеих волн равна

$$Q_2 = \frac{U_{0x} Q_1}{D(D-u)} > Q_1;$$

энтропия на обеих ударных волнах возрастает.

Мы видим, таким образом, что условие возрастания энтропии, с помощью которого в обычной гидродинамике удавалось исключить «лишние» разрывы, оказывается чересчур слабым в магнитной гидродинамике.

В действительности, однако, могут осуществляться не все ударные волны, на которых выполняются граничные условия и происходит возрастание энтропии. Необходимо, кроме того, чтобы решение непрерывно зависело от начальных и граничных условий, т. е. чтобы бесконечно малое возмущение магнитогидродинамических величин вызывало бесконечно малое изменение решения. Такие разрывы мы, следуя И. М. Гельфанду^{33а}, будем называть эволюционными*). В неэволюционных разрывах бесконечно малое возмущение вызывает конечное изменение решения, а именно расщепление исходного разрыва на несколько разрывов конечной величины⁴⁰. Неэволюционные разрывы оказываются, таким образом, неустойчивыми относительно расщепления и поэтому не могут существовать. Условия эволюционности в магнитной гидродинамике были получены в работе⁴⁰.

*) Впервые идея эволюционности была высказана в связи с изучением разрывов в обычной гидродинамике³⁴, стр. 405; ³⁵, стр. 215.

Для того чтобы определить, является ли магнитогидродинамическая ударная волна эволюционной, нужно к постоянным равновесным значениям магнитогидродинамических величин p , q , v_x , v_y , v_z , H_y , H_z добавить бесконечно малые возмущения δp , δq , δv_x , δv_y , δv_z , δH_y , δH_z , зависимость которых от координат и времени имеет вид

$$\exp i(kx - \omega t).$$

Эти возмущения можно представить как суперпозицию волн бесконечно малой амплитуды: магнитозвуковых, альфвеновских и энтропийных, причем следует учитывать лишь те волны, которые расходятся от поверхности разрыва. После линеаризации граничных условий получится семь линейных однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд различных волн по обе стороны поверхности разрыва. При этом следует учесть, что скорость ударной волны D также получит бесконечно малую добавку δD . После исключения величины δD останется шесть независимых уравнений (граничных условий). Если число расходящихся волн по обе стороны от поверхности разрыва также равно шести, то мы получим систему из шести линейных однородных алгебраических уравнений с шестью неизвестными (амплитудами волн бесконечно малой интенсивности). Условием существования нетривиального решения (в котором амплитуды волн отличны от нуля) является равенство нулю определителя системы. Последнее равенство представляет собой зависимость между ω и k . Если любому значению k соответствуют действительные значения ω , то разрыв является устойчивым в обычном смысле; если же некоторым возможным значениям k соответствуют значения ω с положительной мнимой частью, то разрыв неустойчив — первоначальное возмущение будет экспоненциально нарастать со временем. И в том и в другом случаях разрыв является эволюционным. Если даже возмущения экспоненциально нарастают, в течение малого промежутка времени они будут оставаться малыми.

Для того чтобы разрыв был неэволюционным, необходимо, чтобы возмущения, малые в начальный момент времени $t = 0$, стали не малыми при любом $t > 0$. При этом произведенная ранее линеаризация уравнений является незаконной, что, в свою очередь, приводит к тому, что число уравнений для определения амплитуд волн бесконечно малой интенсивности не равно числу неизвестных, т. е. не равно числу волн, расходящихся по обе стороны от поверхности разрыва. Так как число независимых граничных условий в магнитной гидродинамике равно шести, то условие эволюционности состоит в том, что общее число расходящихся волн также должно равняться шести.

В магнитной гидродинамике существует четырнадцать различных фазовых скоростей распространения волн бесконечно малой амплитуды:

$$\begin{aligned} v_{1x} + U_{1x}, v_{1x} - U_{1x}, v_{1x} + U_{1+}, v_{1x} - U_{1+}, v_{1x} + U_{1-}, \\ v_{1x} - U_{1-}, v_{1x}, v_{2x} + U_{2x}, v_{2x} - U_{2x}, v_{2x} + U_{2+}, v_{2x} - U_{2+}, \\ v_{2x} + U_{2-}, v_{2x} - U_{2-}, v_{2x} \end{aligned}$$

(индекс «1» относится к области впереди ударной волны ($x < 0$), индекс «2» — к области позади ударной волны ($x > 0$); система координат выбрана таким образом, чтобы в ней разрыв покоился и находился в плоскости $x = 0$; направление оси x выбрано таким образом, чтобы проекции скорости среды на ось x были положительными). Расходящимся волнам в области впереди ударной волны соответствует

отрицательная фазовая скорость, а в области позади ударной волны — положительная фазовая скорость.

Из перечисленных четырнадцати фазовых скоростей четыре скорости соответствуют сходящимся волнам:

$$v_{1x} + U_{1x}, v_{1x} + U_{1+}, v_{1x} + U_{1-}, v_{1x},$$

четыре — расходящимся волнам:

$$v_{2x} + U_{2x}, v_{2x} + U_{2+}, v_{2x} + U_{2-}, v_{2x}$$

(все эти фазовые скорости заведомо положительны). Остальные волны будут сходящимися или расходящимися в зависимости от соотношений между величинами v_x и U_x, U_+, U_- . На рис. 1 показано общее число расходящихся волн при различных значениях v_{1x}, v_{2x} . Эволюционным волнам соответствуют те области плоскости (v_{1x}, v_{2x}) , в которых число расходящихся волн равно шести.

v_{2x}	$3+7=10$	$3+6=9$	$2+6=8$	$2+5=7$
U_{2+}	$3+6=9$	$3+5=8$	$2+5=7$	$2+4=6$
U_{2x}	$2+6=8$	$2+5=7$	$1+5=6$	$1+4=5$
U_{2-}	$2+5=7$	$2+4=6$	$1+4=5$	$1+3=4$
	U_{1-}	U_{1x}	U_{1+}	v_{1x}

Рис. 1. Число волн, расходящихся от поверхности разрыва.

Первые слагаемые — число альфвеновских волн, вторые слагаемые — число магнитозвуковых и энтропийных волн.

Как мы уже указывали, ударная волна будет эволюционной, если задача о малых возмущениях имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы число уравнений (число граничных условий минус единица) равнялось числу неизвестных *) (числу амплитуд расходящихся волн).

Однако равенства числа уравнений числу неизвестных недостаточно для существования и единственности решения. Может случиться, что урав-

нения, служащие для определения амплитуд расходящихся волн, и граничные условия распадутся на несколько изолированных групп. При этом условия эволюционности (число расходящихся волн равно числу независимых граничных условий) должны выполняться не только для всей совокупности переменных, но и для каждой изолированной группы в отдельности. Такое распадение уравнений и граничных условий на две изолированные группы имеет место в магнитной гидродинамике для волн, распространяющихся перпендикулярно к поверхности разрыва **). В самом деле, в альфвеновских волнах малой амплитуды отличны от нуля величины δv_z и δH_z (плоскость xu ориентирована так, чтобы было $H_z \equiv 0$); в магнитозвуковых и энтропийных волнах отличны от нуля величины $\delta q, \delta p, \delta v_x, \delta v_y, \delta H_y$. На такие же две группы распадаются и граничные условия, линеаризованные относительно малых возмущений:

1) альфвеновские возмущения

$$\left\{ \rho v_x \delta v_z - \frac{H_x \delta H_z}{4\pi} \right\} = 0, \quad (4.1)$$

$$\{ v_x \delta H_z - H_x \delta v_z \} = 0;$$

*) В такой формулировке условия эволюционности были получены Лаксом¹⁹, К. И. Бабенко и И. М. Гельфандом²¹.

**) Это обстоятельство было впервые отмечено С. И. Сыроватским²².

2) магнитозвуковые и энтروпийные возмущения

$$\left. \begin{aligned} \{ \varrho (\delta v_x - \delta D) + v_x \delta \varrho \} &= 0, \\ \left\{ \delta p + 2\varrho v_x (\delta v_x - \delta D) + v_x^2 \delta \varrho + \frac{H_y \delta H_y}{4\pi} \right\} &= 0, \\ \left\{ \varrho v_x \delta v_y - \frac{H_x \delta H_y}{4\pi} \right\} &= 0, \\ \{ H_x \delta v_y - H_y (\delta v_x - \delta D) - v_x \delta H_y \} &= 0, \\ \left\{ \varrho v_x [v_x (\delta v_x - \delta D) + v_y \delta v_y + \delta \omega] + \frac{1}{4\pi} (v_x H_y - v_y H_x) \delta H_y \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4,2)$$

(δD — возмущение скорости ударной волны, ω — тепловая функция).

Граничные условия (4,1) не содержат δD . Поэтому все они независимы и число расходящихся альфвеновских волн должно равняться двум. Граничные условия (4,2) содержат возмущение скорости ударной волны δD ; после исключения его останется четыре независимых граничных условия. Следовательно, число расходящихся магнитозвуковых и энтروпийных волн должно равняться четырем. Из рис. 1 видно, что существует две области эволюционности ударных волн *) (рис. 2):

1) быстрые ударные волны (отмеченные знаком «плюс» на рис. 2), для которых

$$\begin{aligned} U_{1+} &< v_{1x}, \\ U_{2x} &< v_{2x} < U_{2+}, \end{aligned} \quad (4,3)$$

2) медленные ударные волны (отмеченные знаком «минус» на рис. 2), для которых

$$\begin{aligned} U_{1-} &< v_{1x} < U_{1x}, \\ v_{2x} &< U_{2-}. \end{aligned} \quad (4,4)$$

До сих пор мы рассматривали условия эволюционности относительно возмущений, зависящих лишь от x и t . Учет возмущений общего вида (зависящих также от y и z) приводит к тем же условиям эволюционности ⁴⁴ (4,3), (4,4).

Следует подчеркнуть существенное различие между неэволюционностью и неустойчивостью. Неустойчивые состояния могут возникать при движении магнитогидродинамической среды под действием внутренних причин. Они существуют некоторое время, пока флуктуации не достигнут критической величины, после чего неустойчивое состояние разрушается. Неэволюционные разрывы не могут возникать сами собой. Они могут образовываться лишь под действием внешних факторов (например, при столкнове-

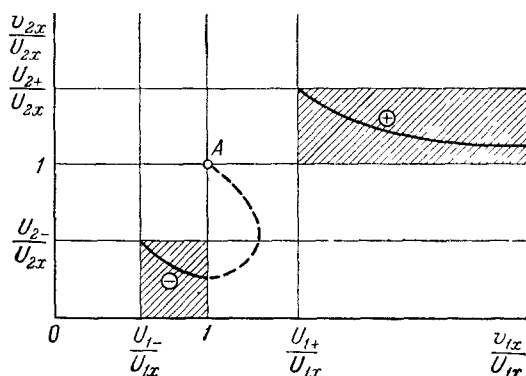


Рис. 2. Области эволюционности ударных волн (заштрихованы).

Знаком «+» отмечена быстрая волна, знаком «-» — медленная. Эволюционные участки ударной адиабаты изображены сплошной жирной линией, неэволюционный участок изображен прерывистой линией. Буквой А обозначен альфвеновский разрыв.

*) Содержащееся в работах ^{43, 40} неправильное утверждение о наличии третьей области эволюционности

$$U_{1x} < v_{1x} < U_{1+}, \quad U_{2-} < v_{2x} < U_{2x}$$

связано с учетом отмеченного выше распада граничных условий на две изолированные группы. (Там же вместо термина «эволюционность» применялся менее удачный термин «устойчивость относительно расщепления».)

нии газовых масс) и могут существовать лишь одно мгновение как разрывы в начальных условиях, после чего немедленно расщепляются на несколько ударных или автомодельных волн. Такое расщепление неэволюционной магнитогидродинамической ударной волны было рассмотрено в работе⁴⁵ (см. § 8).

Методом, изложенным в настоящем параграфе, можно показать, что другие магнитогидродинамические разрывы (контактные, тангенциальные, альфвеновские) всегда будут эволюционными.

§ 5. СЛЕДСТВИЯ ИЗ УСЛОВИЙ ЭВОЛЮЦИОННОСТИ

Из условий (4,3), (4,4) вытекают важные следствия. Прежде всего, если две ударные волны одинакового вида (обе быстрые или обе медленные) следуют одна за другой, то задняя волна догоняет переднюю. Для доказательства этого утверждения рассмотрим, например, две медленные волны. Скорость передней волны относительно среды, заключенной между волнами, равна v_{2x} , а скорость задней волны равна v_{1x} . Как следует из неравенств (4,4), для волн рассматриваемого вида $v_{1x} > U_{1-}$, $v_{2x} < U_{2-}$. Так как скорости U_{1-} и U_{2-} относятся к одной и той же области пространства, то $U_{1-} = U_{2-}$ и, следовательно, $v_{1x} > v_{2x}$.

В случае волн различных видов легко видеть, что альфвеновский разрыв догоняет медленную ударную волну, а быстрая ударная волна догоняет все виды разрывов. Аналогично можно установить, что ударная волна догоняет слабый разрыв, если он принадлежит к тому же виду, что и ударная волна, или к более медленному виду. Слабый разрыв догоняет ударную волну того же вида и ударные волны более медленных видов.

Замечая, что слабый разрыв является границей между простой волной и областью постоянного течения, мы приходим к заключению, что в каждую сторону может двигаться не более трех ударных или простых волн, не догоняющих друг друга: впереди быстрая волна (ударная или простая магнитозвуковая), за ней альфвеновская волна (разрывная или простая) и, наконец, медленная (ударная или простая).

Пользуясь условиями эволюционности и теоремой Цемплена, можно сделать определенные заключения об изменении магнитного поля в быстрой и медленной ударных волнах³⁸. Воспользуемся соотношением

$$H_{2y} = \frac{H_{1y} Q_2 (v_{1x}^2 - U_{1x}^2)}{Q_1 v_{1x}^2 - Q_2 U_{1x}^2}, \quad (5,1)$$

которое является следствием граничных условий. Из формулы (5,1) следует, что в быстрых ударных волнах поперечное магнитное поле H_y увеличивается, а в медленных — уменьшается. В обоих случаях поперечное магнитное поле не изменяет своего направления*). Малые магнитные поля

$$\frac{H_x^2}{8\pi} < \frac{Q_1 v_{1x}^2}{2}$$

при прохождении ударной волны усиливаются, тогда как большие магнитные поля

$$\frac{H_x^2}{8\pi} > \frac{Q_1 v_{1x}^2}{2}$$

*) Содержащиеся в работах^{46, 43, 47} утверждения о возможности изменения направления поперечного магнитного поля в ударной волне связаны с учетом условий эволюционности.

ослабляются. Это указывает на некоторую выравнивающую роль ударных волн. При прохождении большого числа случайных ударных волн статическое равновесие наступает при равенстве магнитной и кинетической энергий *):

$$\frac{H_x^2}{8\pi} = \frac{\rho_1 v_{1x}^2}{2}. \quad (5,2)$$

В литературе имеются указания о том, что слабые магнитные поля

$$\frac{H_x^2}{8\pi} \ll p_1 \quad (5,3)$$

при прохождении ударной волны усиливаются^{14, 52 и 53}, стр. 253. Строго говоря, при любом соотношении между H_x и p_1 существуют две ударные волны: быстрая, в которой магнитное поле увеличивается, и медленная, в которой магнитное поле уменьшается. Однако при выполнении неравенства (5,3) медленная ударная волна может иметь лишь бесконечно малую интенсивность, как это следует из условий эволюционности (4,4):

$$0 < \frac{\Delta \rho}{\rho_1} < \frac{H_x^2}{8\pi p_1}. \quad (5,4)$$

При нарушении неравенства (5,4) медленная ударная волна перестает быть эволюционной и расщепляется. Таким образом, в среде, в которой магнитное давление значительно меньше гидростатического (5,3), реально могут существовать лишь быстрые ударные волны, на которых магнитное поле увеличивается. Из изложенного следует, что магнитогидродинамические волны являются одним из механизмов образования межзвездных магнитных полей¹⁴.

§ 6. УДАРНАЯ АДИАБАТА

В магнитной гидродинамике ударная волна характеризуется значениями всех магнитогидродинамических величин ρ_1 , p_1 , v_1 , H_1 впереди ударной волны, а также значением одной из них, например ρ_2 , позади ударной волны. Все остальные величины позади ударной волны, и в частности давление p_2 , являются функциями от ρ_2 . Кривая $p_2 = f(1/\rho_2)$ называется ударной адиабатой.

Если выбрать систему координат так, чтобы в ней разрыв покоился и был расположен в плоскости $x=0$, а проекция магнитного поля на ось z равнялась бы нулю и вектор скорости был бы параллелен магнитному полю, то уравнение ударной адиабаты

$$p_2 = f\left(\frac{1}{\rho_2}\right)$$

в качестве параметров будет содержать величины p_1 , ρ_1 , H_x , H_{1y} :

$$p_2 = f\left(\frac{1}{\rho_2}; p_1, \rho_1, H_x, H_{1y}\right). \quad (6,1)$$

Вместо пяти размерных параметров ρ_2 , p_1 , ρ_1 , H_x , H_{1y} для характеристики ударной волны можно взять три безразмерных параметра¹⁴, например: U_{1x}/c_1 , U_{1y}/c_1 , u_{1z}/c_1 , где U — альфвеновская скорость, u_{1x} — скорость ударной волны относительно покоящейся жидкости.

*) Соотношение (5,2) — закон равномерного распределения энергии — является характерным для магнитной гидродинамики. Оно было получено из других соображений в работах⁴⁸⁻⁵¹.

Для нахождения ударной адиабаты нужно исключить из граничных условий все магнитогидродинамические величины, не входящие в формулу (6,1).

Уравнение ударной адиабаты в магнитной гидродинамике имеет следующий вид ^{30, 31}:

$$(\epsilon_2 - \epsilon_1) + \frac{p_2 + p_1}{2} \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) + \frac{1}{16\pi} \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) (H_{2y} - H_{1y})^2 = 0. \quad (6,2)$$

В этой формуле внутренняя энергия ϵ_2 выражается через p_2 и ϱ_2 с помощью уравнения состояния, вместо H_{2y} следует подставить его значение согласно формуле (5,1).

Равенство (6,2) является алгебраическим уравнением третьей степени относительно p_2 или ϱ_2 ; следовательно, существует три ветви ударной адиабаты ^{14, 46, 36, 54}, однако лишь две из них являются эволюционными ⁵⁵. В частном случае перпендикулярной ударной волны ($H_x = 0$) существует лишь одна эволюционная ветвь ударной адиабаты.

Изменение магнитогидродинамических величин в ударной волне впервые было исследовано Гельфером ¹⁴. Однако вследствие неудачного выбора параметров графики, приведенные Гельфером, крайне невыразительны. Кроме того, в этой работе не делается различия между эволюционными и неэволюционными ударными волнами.

В появившейся затем работе Люста ⁴⁶ проводится исследование изменения на ударной волне существенных физических величин: плотности, давления, магнитного поля, тепловой энергии, а также угла между направлением магнитного поля и нормалью. Изменение этих величин иллюстрировано большим количеством графиков,

Рис. 3. Изменение плотности (а) и магнитного поля (б) на ударной волне в зависимости от числа Маха.

Неэволюционные участки отмечены точками: c_+ — быстрая ударная волна, c_- — медленная ударная волна, c_A — несуществующая неэволюционная ударная волна.

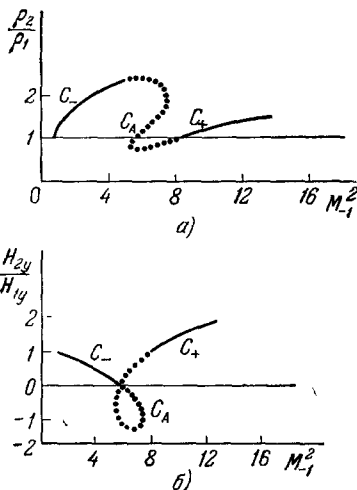
полученных с помощью электронной счетной машины. К сожалению, автор не учитывает условий эволюционности; в действительности могут осуществиться лишь те участки кривых, приведенных у Люста, которые соответствуют эволюционным ударным волнам.

В качестве примера на рис. 3, а и б изображены найденные Люстом зависимости величин ϱ_2/ϱ_1 и H_{2y}/H_{1y} от числа Маха

$$M_{-1}^2 \equiv \frac{v_{1x}^2}{U^2};$$

$$\text{при } \beta_1 \equiv \frac{(3p_1/2)}{[(3p_1/2) + (H_1^2/8\pi)]} = 0,25, \quad \eta_1^2 \equiv \frac{H_x^2}{H_1^2} = 0,75.$$

Наиболее полное исследование изменения величин в магнитогидродинамической ударной волне было произведено Бейзером и Эриксоном ⁴⁷. Однако и в этой работе нет учета условий эволюционности. В дальнейшем мы дополним результаты Бейзера и Эриксона исследованием эволюционных частей ударной адиабаты ⁵⁵.



Существуют быстрые и медленные ударные волны. Быстрые волны всегда эволюционны. Медленные ударные волны малой интенсивности также эволюционны. По мере увеличения скачка плотности $\Delta \varrho \equiv \varrho_2 - \varrho_1$ на медленной ударной волне поперечное магнитное поле H_{2y} позади волны уменьшается и обращается в нуль на границе области эволюционности. При дальнейшем продвижении вдоль ударной адиабаты следует неэволюционный участок медленной ударной волны, который непрерывно переходит в альфвеновский разрыв, поворачивающий магнитное поле на 180° (см. рис. 2). Скачки давления и энтропии в быстрой и медленной ударных волнах являются монотонно возрастающими функциями скачка плотности (на участках эволюционности). В быстрой ударной волне максимальный скачок плотности равен $(\Delta \varrho)_{\max} = 2\varrho_1/(\gamma - 1)$, где γ — показатель адиабаты Пуассона; при этом скачки давления и энтропии обращаются в бесконечность. Зависимость скачка магнитного поля $\Delta H_y \equiv H_{2y} - H_{1y}$ от скачка плотности в быстрой волне может быть двух типов. В волнах первого типа, которые осуществляются, если

$$\sin^2 \theta_1 \geq \frac{(\gamma - 1)(1 - r_1)}{\gamma}$$

($r_1 = c_1^2/U_{1c}^2 \equiv 4\pi\gamma p_1/H_x^2$, θ_1 — угол между направлением магнитного поля \mathbf{H}_1 и нормалью к поверхности разрыва), при возрастании скачка плотности скачок магнитного поля монотонно возрастает от нуля до максимального значения, равного

$$(\Delta H_y)_{\max} = \frac{2H_{1y}}{\gamma - 1}.$$

В волнах второго типа, которые осуществляются, если

$$\sin^2 \theta_1 < \frac{(\gamma - 1)(1 - r_1)}{\gamma},$$

имеет место немонотонная зависимость скачка магнитного поля от скачка плотности: при возрастании скачка плотности скачок магнитного поля вначале увеличивается от нуля до некоторой максимальной величины и затем убывает до значения

$$\Delta H_y = \frac{2H_{1y}}{\gamma - 1}.$$

На эволюционном участке медленной ударной волны скачок ударного поля всегда возрастает с ростом скачка плотности *).

В предельном случае $\theta_1 \rightarrow 0$, $r_1 > 1$ быстрая волна является такой же, как и при отсутствии магнитного поля, а медленная волна имеет бесконечно малую амплитуду. В случае $\theta_1 \rightarrow 0$, $r_1 < 1$ быстрая волна относится ко второму типу. При малой интенсивности быстрой ударной волны $\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} < \frac{\gamma + 1 - 2r_1}{\gamma - 1}\right)$ поперечное магнитное поле H_{2y} позади волны отлично от нуля. Когда интенсивность ударной волны ϱ_2/ϱ_1 превысит значение $(\gamma + 1 - 2r_1)/(\gamma - 1)$, поперечное магнитное поле H_{2y} позади волны обращается в нуль и ударная волна становится такой же, как и при отсутствии магнитного поля.

Медленная волна на эволюционном участке в случае $\theta_1 \rightarrow 0$, $r_1 < 1$ будет такой же, как и при отсутствии магнитного поля.

*) Иными словами, медленные ударные волны всегда относятся к первому типу. Утверждение Бейзера и Эриксона⁴⁷ о возможности немонотонной зависимости скачка магнитного поля от скачка плотности в медленных ударных волнах связано с неучетом условий эволюционности.

В предельном случае $\theta_1 \rightarrow \pi/2$ быстрая ударная волна является волной первого типа, а медленная ударная волна превращается в тангенциальный разрыв.

Наличие магнитного поля увеличивает скачок давления при фиксированном скачке плотности^{47*}).

В быстрых ударных волнах большой интенсивности ($p_2 \gg p_1 + H_1^2/8\pi$) наличие магнитного поля не существенно^{53, 46}. В частности, наибольшее сжатие Q_2/Q_1 , которое может быть достигнуто в ударной волне^{57, 47}, равно $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$.

Медленная ударная волна не может иметь сколь угодно большую интенсивность. Поэтому при $p_2 \gg p_1 + H_1^2/8\pi$ существует лишь одна ударная волна^{36, 46} (быстрая).

В переменных $(1/Q_2, p_2)$ эволюционные участки ударной адиабаты были определены⁵⁵ лишь в предельных случаях $H_{1y} \ll H_x$ (рис. 4, а) и $H_{1y} \gg H_x$ (рис. 4, б). Как видно из рис. 4, а, в случае $H_{1y} \ll H_x$ участок ударной адиабаты, соответствующий быстрой ударной волне, расположен выше, чем участок, соответствующий медленной ударной волне. Это означает, что при $H_{1y} \ll H_x$ быстрая ударная волна является термодинамически более выгодной: на ней в большей степени возрастает энтропия. В случае $H_{1y} \gg H_x$ термодинамически более выгодной оказывается медленная ударная волна (рис. 4, б).

Различие во взаимном расположении частей адиабаты, соответствующих быстрой и медленной ударным волнам, на рис. 4, а и б можно объяснить следующим образом. В ударной волне происходит переход кинетической энергии $Q_1 v_{1y}^2/2$ в магнитную $H_2^2/8\pi$ и тепловую $3p_2/2$. Быстрой ударной волне соответствует большая передача кинетической энергии. В случае

$H_{1y} \ll H_x$ магнитная энергия мало изменяется; поэтому быстрой ударной волне соответствует больший нагрев. В случае $H_{1y} \gg H_x$ происходит заметное изменение магнитной энергии. Так как в быстрой ударной волне магнитное поле увеличивается, а в медленной уменьшается³⁸, ясно, почему в быстрой ударной волне в случае $H_{1y} \gg H_x$ происходит меньший нагрев.

§ 7. ЗАДАЧА О ПОРШНЕ

При рассмотрении задачи о поршне в магнитной гидродинамике возникают две принципиальные трудности, которых нет в обычной гидродинамике. Первая трудность состоит в том, что граничные условия на поверхностях разрыва и на поршне не определяют однозначно возникающие ударные и непрерывные волны. В случае идеального газа заданному движению поршня соответствует бесчисленное множество решений. Однако только одно из этих решений удовлетворяет условиям эволюционности. Поэтому исключение из рассмотрения неэволюционных

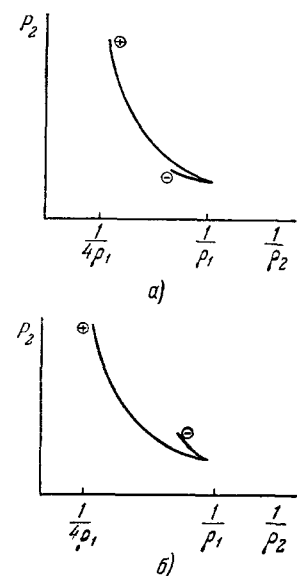


Рис. 4. Эволюционные участки ударной адиабаты в переменных $(1/Q_2, p_2)$:

а) в случае $H_{1y} \ll H_x$; б) в случае $H_{1y} \gg H_x$. Знаком «+» отмечена быстрая ударная волна, знаком «-» — медленная.

*) В случае $H_x = 0$ этот факт был отмечен Г. С. Голицыным⁵⁶.

разрывов устраняет указанную выше трудность, делая задачу о поршне математически корректной *).

Вторая трудность состоит в том, что непрерывные течения, возникающие при движении поршня, не всегда являются простыми волнами. Разумеется, при отсутствии разрывов область, граничащая с постоянным течением, является простой волной. Однако эта область может и не доходить до поршня. Между поршнем и простой волной может быть расположена другая область, в которой волна не является простой (рис. 5). Чтобы обойти эту трудность, мы будем рассматривать движение поршня с постоянной скоростью.

Так как при этом в задаче отсутствует параметр, имеющий размерность длины, то движение среды будет автомодельным, т. е. все возникающие волны будут либо разрывными, либо простыми.

Движение среды под влиянием движения поршня характеризуется последовательностью бегущих друг за другом ударных и автомодельных волн. Как мы уже видели, существует три вида эволюционных разрывных волн, перемещающихся относительно среды: быстрые и медленные ударные волны, альфвеновские разрывы. Кроме того, существует два вида непрерывных решений: быстрые и медленные автомодельные магнитозвуковые волны. Как отмечалось выше, ударные волны являются волнами сжатия, а автомодельные — волнами разрежения. Скорости этих волн таковы, что впереди может идти быстрая волна (ударная или автомодельная), за ней следует альфвеновский разрыв и, наконец, медленная волна (ударная или автомодельная). Если учесть, что некоторые из перечисленных волн могут отсутствовать, то получится большое число качественно различных картин движения среды, которые реализуются при различных значениях скорости поршня.

На поверхности поршня выполняется очевидное граничное условие

$$v_x = u_x. \quad (7,1)$$

Чтобы получить остальные два условия, нужно перейти в систему отсчета, движущуюся вместе с поршнем, в которой на поверхности проводящего поршня выполняются граничные условия $E'_y = 0$, $E'_z = 0$ (штрих означает, что соответствующая величина измеряется в системе координат, движущейся вместе с поршнем). В силу бесконечной проводимости среды $\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}[\mathbf{v}', \mathbf{H}]$ (c — скорость света) и, следовательно,

$$v_y = u_y, \quad v_z = u_z \quad (H_x \neq 0). \quad (7,2)$$

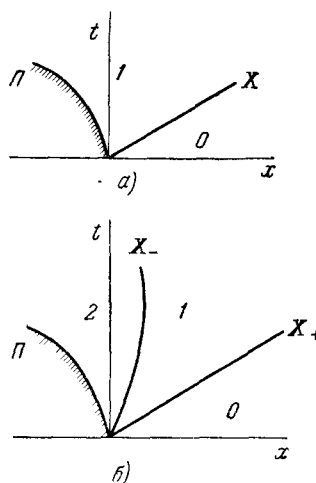


Рис. 5. Волны, образующиеся при движении поршня: а) в обычной гидродинамике, б) в магнитной гидродинамике.

Π — линия движения поршня, X — характеристика в обычной гидродинамике $\frac{dx}{dt} = v_x + c$, X_+ — «быстрая» характеристика в магнитной гидродинамике $\frac{dx}{dt} = v_x + U_+$, X_- — «медленная» характеристика в магнитной гидродинамике $\frac{dx}{dt} = v_x + U_-$, 0 — область покоя, 1 — простая волна, 2 — непростая волна.

*) Эту трудность можно обойти и без исследования условий эволюционности, если ограничиться такими движениями поршня, при которых не возникает медленных ударных волн ⁵⁸.

условия $H_0^2/8\pi \ll p_0$ плотность среды в точке наибольшего разрежения (точка *THP* на рис. 6) будет весьма мала.

При сверхзвуковой поперечной скорости поршня происходит генерирование магнитного поля, т. е. возрастание магнитного поля от бесконечно малых до конечных величин; при этом магнитное давление по порядку величины сравнивается с гидростатическим или превосходит его. При сверхзвуковых скоростях вдвигания и скольжения поршня генерируемое магнитное поле прямо пропорционально продольной компоненте скорости поршня.

Топологическая структура рис. 6 может быть получена и без вычислений на основе качественных соображений⁶¹. Для этого определим, через какие области проходит ось ординат ($u_x = 0$).

Так как магнитные силовые линии «приклеены» к частицам среды и к поршню, то при $u_y < 0$ магнитная силовая линия деформируется (рис. 7, а). Изгибание магнитной силовой линии приводит к появлению квазиупругих сил натяжения, которые направлены в сторону вогнутости (см. стрелку на рис. 7, а).

Так как волнцы поршня и на бесконечности $u_x = 0$, то впереди стрелки возникает волна сжатия (ударная), а сзади — волна разрежения (автомодельная). Альфвеновская волна в данном случае не возникает, так как H_y вблизи поршня и на бесконечности имеет одинаковый знак. (Напомним, что в ударной и автомодельной волнах знак H_y не меняется³⁸, а в 180° -альфвеновском разрыве меняется на противоположный.) Таким образом, при $u_x = 0$, $u_y < 0$ впереди идет ударная волна, за ней автомодельная (комбинация U^+P^-).

Аналогичные рассуждения показывают, что в случае, изображенном на рис. 7, б, осуществляется комбинация P^+U^- . При увеличении скорости u_y знак H_y вблизи поршня изменяется, что влечет за собой появление альфвеновской волны (P^+AU^-) (рис. 7, в). При дальнейшем увеличении u_y величина $|H_y|$ вблизи поршня становится больше, чем значение H_y на бесконечности: при этом равнодействующая сил натяжения направлена от поршня (рис. 7, г), что соответствует комбинации U^+AP^- .

При достаточно большом значении $|u_y|$ амплитуда волны разрежения становится настолько большой, что плотность среды позади волны обращается в нуль — наступает кавитация.

Картину движения среды при $u_x \neq 0$, $u_y \neq 0$, $u_z = 0$ можно получить, исходя из рассмотренного случая $u_x = 0$. При увеличении u_x амплитуда волны разрежения уменьшается, а амплитуда волны сжатия увеличивается*).

При некотором значении u_x волна разрежения превращается в волну сжатия. Аналогично уменьшение u_x ведет к превращению волны сжатия в волну разрежения. Дальнейшее уменьшение величины u_x приводит к возникновению кавитации.

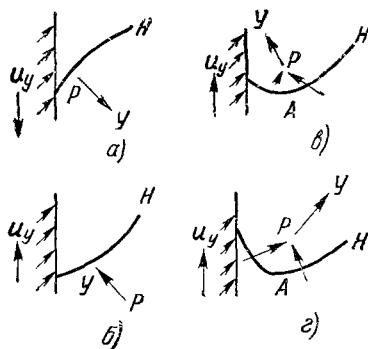


Рис. 7. Образование ударной, волны (U), альфвеновского разрыва (A) и волны разрежения (P) при поперечном движении поршня вследствие натяжения магнитных силовых линий.

*) Исключение из этого правила возникает в области U^+U^- при сверхзвуковой скорости поршня. При увеличении u_x происходит перераспределение амплитуд быстрой и медленной ударных волн: возрастание амплитуды быстрой ударной волны сопровождается некоторым уменьшением амплитуды медленной ударной волны.

При движении поршня возникает сила сопротивления F , которая состоит из двух компонент: продольной компоненты F_x — лобового сопротивления и из поперечной компоненты F_y — подъемной силы. В случае быстрой ударной волны большой амплитуды, сопровождающейся медленной волной разрежения в области

$$u \gg c_0, |u_y| \ll u_x \text{ и } H_0^2/8\pi \ll p_0,$$

лобовое сопротивление определяется формулой⁶⁰

$$-F_x = \frac{(\gamma+1)^2 \varrho_0 u_x^2}{2(\gamma-1)}.$$

Если увеличивать $|u_y|$ при фиксированном значении u_x , то величина лобового сопротивления уменьшается, принимая на линии кавитации значение

$$-F_x = \frac{(\gamma+1) \varrho_0 u_x^2}{2}.$$

При дальнейшем увеличении $|u_y|$ величина лобового сопротивления не изменяется.

Подъемная сила определяется соответственно формулами

$$-F_y = \frac{(\gamma+1) \varrho_0 u_x u_y}{\gamma-1} \text{ при } |u_y| \ll u_x$$

и

$$-F_y = \sqrt{\gamma+1} \varrho_0 U_{0x} \text{sign } u_y \text{ при наличии кавитации.}$$

Случай, когда скорость поршня не лежит в плоскости магнитного поля xy , т. е. когда $u_z \neq 0$, отличается от предыдущего случая тем, что угол поворота магнитного поля в альфвеновском разрыве отличен от 180° .

§ 8. РАСПАД РАЗРЫВА

Возникает вопрос: что произойдет с разрывом в начальных условиях, если на нем не выполняются необходимые граничные условия (непрерывность потоков массы, импульса и т. д.)? Такие разрывные начальные условия получаются, например, при столкновении газовых масс или при внезапном разрушении перегородки, разделяющей два газа, находящихся при различных давлениях. Эта проблема была выдвинута Риманом, и в случае обычной гидродинамики решена Н. Е. Кочиным⁶². Как показывает исследование, разрыв расщепляется на три волны³⁴: волну, движущуюся вправо (ударную или автомодельную), волну, движущуюся влево (ударную или автомодельную), и тангенциальный разрыв.

В магнитной гидродинамике при отсутствии продольного магнитного поля H_x решение задачи о распаде разрыва в начальных условиях будет качественно таким же, как и в отсутствие магнитного поля⁶³. Задача о распаде разрыва, возникающего при столкновении двух газовых масс и при $H_x = 0$, была решена Т. Ф. Волковым⁶⁴ в связи с проблемой нагрева плазмы до термоядерных температур с помощью ударных волн.

Распад разрыва в покоящейся плазме при $H_x = 0$, $|\Delta p^*| \ll p^*$ ($p^* = p + H^2/8\pi$) был рассмотрен Като⁶⁵. Полученное решение было использовано для качественного рассмотрения пульсаций плазменного шнура в продольном магнитном поле.

Если продольное магнитное поле H_x отлично от нуля, то картина расщепления исходного разрыва в магнитной гидродинамике будет качественно отличной от картины расщепления в обычной гидродинамике. Первоначальный разрыв расщепляется на семь волн: три волны, движущиеся вправо, три волны, движущиеся влево, и между ними контактный разрыв, покоящийся относительно среды.

Каждая из этих волн характеризуется одним параметром (амплитудой, т. е. скачком одной из магнитогидродинамических величин). С другой стороны, сумма скачков каждой из магнитогидродинамических величин на семи возникающих волнах равна первоначальному скачку. Так как число магнитогидродинамических величин равно семи ($q, p, v_x, v_y, v_z, H_y, H_z$), то мы получаем систему из семи уравнений с семью неизвестными, решая которую находим амплитуды всех волн, возникающих при распаде первоначального разрыва.

Решение задачи о распаде магнитогидродинамического разрыва в общем виде не было получено из-за больших математических трудностей. В случае, когда первоначальный разрыв весьма мал*), эта задача была решена⁶⁶.

В этом случае все образующиеся разрывы будут также малы. Так как соотношения между скачками магнитогидродинамических величин в автомодельной и ударной волнах малой интенсивности в первом приближении одинаковы, отличие ударной волны от автомодельной состоит лишь в том, что в ударной волне плотность возрастает, а в автомодельной — убывает. Скачки плотности на быстрой и медленной магнитозвуковых волнах определяются формулами

$$\Delta_{\pm}^{(t)} q = \frac{1}{2R} \left\{ \frac{c^2 U_l^2 \left[\Delta q - \left(\frac{\partial q}{\partial s} \right)_p \Delta s \right]}{1 \pm U^2} - \frac{\Delta H_l^2}{8\pi} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon q U_x^2}{U} \left[\frac{H_l \Delta v_l}{H_x} + \frac{U_l^2 \Delta v_x}{U_{\pm}^2 - U_x^2} \right] \right\}, \quad (8,1)$$

где $R = \sqrt{(U^2 + c^2)^2 - 4c^2 U_x^2}$; $\Delta q, \Delta s, \Delta v, \Delta H_l$ — скачки плотности, энтропии, скорости и поперечного магнитного поля на первоначальном разрыве; ε и знаки « \pm » имеют тот же смысл, что и в (2,2). Приведенная формула позволяет определить знаки $\Delta^{(e)} q$ и тем самым выяснить, на какие волны распадается первоначальный разрыв. Ударной волне соответствует $\Delta_{+}^{(e)} q > 0$, а автомодельной — $\Delta_{\pm}^{(e)} q < 0$.

Разрыв в начальных условиях имеет некоторое сходство с неэволюционной ударной волной. Хотя в последнем случае все граничные условия удовлетворены, достаточно бесконечно малого возмущения, чтобы нарушить граничные условия. Нарушение граничных условий приводит, в свою очередь, к расщеплению неэволюционной ударной волны на несколько расходящихся волн (разрывных или непрерывных). Такое расщепление было рассмотрено в⁴⁵ для случая, когда магнитное поле по обе стороны ударной волны составляет малый угол с нормалью к поверхности разрыва и скорость распространения ударной волны v_{1x} близка к альфвеновской скорости U_{1x} , которая, в свою очередь, больше скорости звука c_1 (индекс «1» относится к области впереди волны). Условие

*) Более общий случай, когда система уравнений магнитной гидродинамики заменена гиперболической системой из n уравнений с n неизвестными, был исследован Лаксом¹⁹.

эволюционности медленной ударной волны имеет в данном случае вид: $v_{1x} < U_{1x}$. При нарушении этого условия ударная волна становится неэволюционной. Такая неэволюционная ударная волна может быть получена, если обычную устойчивую гидродинамическую ударную волну, у которой $v_{1x} > c_1$ и $v_{2x} < c_2$, поместить в магнитное поле. Если поперечное магнитное поле H_y равно нулю, то рассматриваемая ударная волна может расщепиться на две особые ударные волны⁴², причем магнито-гидродинамические величины в области, заключенной между этими волнами, равны

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q} &= \frac{q_1 v_{1x}^2}{U_{1x}^2}, \quad \tilde{v}_x = \frac{U_{1x}^2}{v_{1x}}, \\ \tilde{p} &= p_1 + \frac{q_1 (v_{1x}^2 - U_{1x}^2) (3c_1^2 + v_{1x}^2 - U_{1x}^2)}{3U_{1x}^2}, \\ \tilde{v}_y &= \pm \left[\frac{2(v_{1x}^2 - U_{1x}^2)(4U_{1x}^2 - v_{1x}^2 - 3c_1^2)}{3v_{1x}^2} \right]^{1/2}, \\ \tilde{H}_y &= \pm \left[\frac{8\pi q_1 (v_{1x}^2 - U_{1x}^2)(4U_{1x}^2 - v_{1x}^2 - 3c_1^2)}{3U_{1x}^2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (8,2)$$

Такое расщепление возможно⁴⁵ только в том случае, когда не выполняется условие эволюционности $v_{1x} < U_{1x}$. Это следует из того, что при $v_{1x} < U_{1x}$ выражения для \tilde{v}_y и \tilde{H}_y становятся мнимыми.

При учете малого поперечного магнитного поля исходная неэволюционная ударная волна расщепляется на четыре волны (если пренебречь волнами, амплитуды которых имеют порядок αH_{1y} , $\alpha \equiv \sqrt{(v_{1x} - U_{1x})/U_{1x}} \ll 1$): бегущую влево (ось x направлена вправо) быструю ударную волну с амплитудой порядка α и скоростью порядка $U_{1y} \equiv H_{1y}/\sqrt{4\pi q_1}$; бегущую влево медленную ударную волну с амплитудой, мало отличающейся от амплитуды исходной волны, и скоростью порядка αH_{1y} ; бегущий вправо альфвеновский разрыв, поворачивающий магнитное поле на 180° , и, наконец, бегущую вправо быструю ударную волну с амплитудой порядка H_{1y} .

С распадом разрыва в начальных условиях тесно связан вопрос о переходах между магнитогидродинамическими разрывами*). Учет условия эволюционности несколько изменяет картину возможных переходов. Прежде всего, утверждение о том, что альфвеновский разрыв может непрерывно перейти в ударную волну, становится неверным. В самом деле, альфвеновский разрыв может совпасть с ударной волной лишь в том случае, если магнитное поле до и после разрыва лежит в одной плоскости, т. е. если в альфвеновском разрыве магнитное поле поворачивается на 180° . Но на таком разрыве поперечная составляющая магнитного поля меняет знак, в то время как на ударной волне поперечная составляющая магнитного поля не меняет знака. Поэтому переход между альфвеновским разрывом и эволюционной ударной волной невозможен, однако несуществующая неэволюционная медленная ударная волна непрерывно переходит в альфвеновский разрыв⁴⁷ (см. рис. 2).

Между быстрой и медленной ударными волнами также невозможны непрерывные переходы. Это следует из того, что области существования быстрой и медленной ударных волн не имеют точек соприкосновения (см. рис. 2).

Быстрая ударная волна не может непрерывно перейти в тангенциальный разрыв, так как это противоречило бы условиям (4,3).

*) Впервые этот вопрос был рассмотрен в работе С. И. Сыроватского³².

Таким образом, возможны переходы лишь между тангенциальным и контактными разрывами, между тангенциальным и альфвеновским разрывами и между тангенциальным разрывом и медленной ударной волной.

Смысл возможных переходов между магнитогидродинамическими разрывами становится яснее, если рассмотреть задачу о распаде произвольного разрыва в начальных условиях. Если нормальное магнитное поле H_x отлично от нуля, то разрыв распадается на семь волн, каждая из которых характеризуется одним параметром.

Если же нормальное магнитное поле H_x равно нулю, то первоначальный разрыв распадается на три волны: быструю ударную волну, движущуюся вправо; быструю ударную волну, движущуюся влево, и тангенциальный разрыв между ними. Каждая из ударных волн характеризуется одним параметром, а тангенциальный разрыв — пятью параметрами³⁰. Общее число параметров равно семи, т. е. числу скачков магнитогидродинамических величин на первоначальном разрыве. Таким образом, тангенциальный разрыв представляет собой слившиеся пять разрывов (две медленных ударных волны, два альфвеновских разрыва и контактный разрыв). Схема переходов между магнитогидродинамическими разрывами изображена на рис. 8.

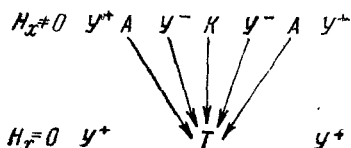


Рис. 8. Схема переходов между магнитогидродинамическими разрывами.

Буквы Y^+ , Y^- , A , K , T означают быструю и медленную ударные волны, альфвеновский, контактный и тангенциальный разрывы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Прикладная магнитогидродинамика, Тр. Института физики АН Латв. ССР, т. 8, 1956.
2. J. Sh ercliff, Proc. Roy. Soc. A233, 396 (1955). См. перев.: Пробл. соврем. физ., № 7, 102 (1957).
3. Х. А л ь ф в е н, Космическая электродинамика. М., ИЛ, 1952.
4. W. M. E l s a s s e r, Amer. J. Phys. 23, 590 (1955); 24, 85 (1956). См. перев.: УФН 64, 529 (1958).
5. С. И. Б р а г и н с к и й, В. Д. Ш а ф р а н о в, Труды Второй Международной конференции по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1958. Доклады советских ученых, т. 1, Ядерная физика. М., Атомиздат, 1959, стр. 221—224, доклад № 2500.
6. I. B. B e r n s t e i n, E. A. F r i e m a n, M. D. K r u s k a l, R. M. K u l s r u d, Proc. Roy. Soc. A244, 17 (1958). См. перев.: Пробл. соврем. физ., № 5, 85 (1958).
7. L. S p i t z e r, Phys. Fluids 1, 253 (1958).
8. Л. А. А р ц и м о в и ч, УФН 66, 545 (1958).
9. E. L. R e s l e r, W. R. S e a r s, J. Aeronaut. Sci. 25, 235 (1958).
10. A. K a n t r o w i t z, Aeronaut. Engng. Rev. 17, 63 (1958).
11. С. М. О с о в е ц, Ю. Ф. Н а с е д к и н, Е. И. П а в л о в, Ю. Ф. П е т р о в, Н. И. Щ е д р и н, Труды Второй Международной конференции по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1958. Доклады советских ученых, т. 1, Ядерная физика. М., Атомиздат, 1959, стр. 65—84, доклад № 2225.
12. Д. Т а к, Труды Второй Международной конференции по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1958. Избранные доклады иностранных ученых, т. 1, Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. М., Атомиздат, 1959, стр. 329—369, доклад № 1860.
13. F. L. R i b e, IV International Conference on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala, 1959, p. 144.
14. L. H e l f e r, Astrophys. J. 117, 177 (1953). См. перев.: Пробл. соврем. физ., № 2, 68 (1954).
15. М. Н. К о г а н, Прикл. матем. и мех. 23, 70 (1959).
16. М. Д. Л а д ы ж е н с к и й, Прикл. матем. и мех. 23, 993 (1959).
17. J. E. A l l e n, Proc. Phys. Soc. B70, 24 (1957).
18. F. H o f f m a n, E. T e l l e r, Phys. Rev. 80, 692 (1950). См. перев.: Пробл. соврем. физ., № 2, 47 (1954).

19. P. L a x, *Communs Pure and Appl. Math.* **10**, 537 (1957).
20. А. И. А х и е з е р, Г. Я. Л ю б а р с к и й, Р. В. П о л о в и н, *Укр. фіз. ж.* **3**, 433 (1958); *ЖТФ* **29**, 993 (1959).
21. N. M u g i b a y a s h i, *Prog. Theor. Phys.* **20**, 244 (1958).
22. А. Г. К у л и к о в с к и й, *ДАН СССР* **114**, 984 (1957).
23. С. А. К а п л а н, К. П. С т а н ю к о в и ч, *ДАН СССР* **95**, 769 (1954).
24. S. S e g r e, *Nuovo cimento* **9**, 1054 (1958).
25. T. T a n i u t i, *Prog. Theor. Phys.* **19**, 69 (1958).
26. А. Г. К у л и к о в с к и й, *ДАН СССР* **121**, 987 (1958).
27. Г. Я. Л ю б а р с к и й, Р. В. П о л о в и н, *ЖЭТФ* **35**, 509 (1958).
28. Г. Я. Л ю б а р с к и й, Р. В. П о л о в и н, *Укр. фіз. ж.* **3**, 567 (1958).
29. J. B a z e r, *Astrophys. J.* **128**, 686 (1958).
30. Л. Д. Л а н д а у, Е. М. Л и ф ш и ц, *Электродинамика сплошных сред*, Гос техиздат, М., 1957.
31. R. L ü s t, *Z. Naturforsch.* **8a**, 277 (1953).
32. С. И. С ы р о в а т с к и й, *Тр. ФИАН СССР* **8**, 13 (1956).
33. С. И. С ы р о в а т с к и й, *ЖЭТФ* **24**, 622 (1953).
- 33а. И. М. Г е л ь ф а н д, *УМН* **14**, 87 (1959).
34. Л. Д. Л а н д а у, Е. М. Л и ф ш и ц, *Механика сплошных сред*, М., Гостехиздат 1953.
35. Р. К у р а н т, К. Ф р и д р и х с, *Сверхзвуковые течения и ударные волны*, ИЛ, М., 1950.
36. С. В. И о р д а н с к и й, *ДАН СССР* **121**, 610 (1958).
37. Р. В. П о л о в и н, Г. Я. Л ю б а р с к и й, *ЖЭТФ* **35**, 510 (1958).
38. Р. В. П о л о в и н, Г. Я. Л ю б а р с к и й, *Укр. фіз. ж.* **3**, 571 (1958).
39. И. Н е й м а н, *Проблемы космической аэродинамики*, М., ИЛ, 1953, стр. 93—99.
40. А. И. А х и е з е р, Г. Я. Л ю б а р с к и й, Р. В. П о л о в и н, *ЖЭТФ* **35**, 731 (1958).
41. К. И. Б а б е н к о, И. М. Г е л ь ф а н д, *НДВШ, физ.-матем. науки.* № 1, 12 (1958).
42. С. И. С ы р о в а т с к и й, *ЖЭТФ* **35**, 1466 (1958).
43. А. И. А х и е з е р, Г. Я. Л ю б а р с к и й, Р. В. П о л о в и н, *Труды Второй Международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Доклады советских ученых т. 1, Ядерная физика*, М., Атомиздат, 1959, стр. 213—220, доклад № 2509.
44. В. М. К о н т о р о в и ч, *ЖЭТФ* **35**, 1216 (1958).
45. Г. Я. Л ю б а р с к и й, Р. В. П о л о в и н, *ЖЭТФ* **36**, 1272 (1959).
46. R. L ü s t, *Z. Naturforsch.* **10a**, 125 (1955).
47. J. B a z e r, W. B. E r i c s o n, *Astrophys. J.* **129**, 758 (1959).
48. H. A l f v e n, *Phys. Rev.* **75**, 1732 (1949).
49. G. K. B a t c h e l o r, *Proc. Roy. Soc. A201*, 405 (1950). См. перев.: *Пробл. соврем. физ.*, № 2, 134 (1954).
50. V. C. A. F e r r a g o, *Proc. Roy. Soc. A233*, 310 (1956).
51. А. Р. К а н т о р о в и ч, Г. Е. П е т ч е к, *Магнитная гидродинамика* М., Атомиздат, 1958, стр. 11—24.
52. G. H. A. C o l e, *Advances Phys.* **5**, 452 (1956).
53. Ф. А. Б а у м, С. А. К а п л а н, К. П. С т а н ю к о в и ч, *Введение в космическую газодинамику*, М., Физматгиз, 1958.
54. С. И. С ы р о в а т с к и й, *УФН* **62**, 247 (1957).
55. Р. В. П о л о в и н, В. П. Д е м у ц к и й, *Укр. фіз. ж.* **5**, 3 (1960).
56. Г. С. Г о л и ц ы н, *ЖЭТФ* **35**, 776 (1958).
57. С. А. К а п л а н, *Межзвездная газодинамика*, М., Физматгиз, 1958.
58. J. B a z e r, O. F l e i s c h m a n, *Phys. Fluids* **2**, 366 (1959).
59. Г. Я. Л ю б а р с к и й, Р. В. П о л о в и н, *ДАН СССР* **128**, 684 (1959).
60. Р. В. П о л о в и н, *О движении поршня в проводящей среде*, *ЖЭТФ* **38**, 1544 (1960).
61. А. И. А х и е з е р, Р. В. П о л о в и н, *О движении проводящего поршня в магнитогидродинамической среде*, *ЖЭТФ* **38**, 529 (1960).
62. N. E. K o t c h i n e, *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo* **50**, 305 (1926). См. перев.: Н. Е. К о ч и н, *Собр. соч.*, т. 2. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949 стр. 5—42.
63. С. А. К а п л а н, К. П. С т а н ю к о в и ч, *ДАН СССР* **95**, 769 (1954).
64. Т. Ф. В о л к о в, *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций*, т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 148—152.
65. Y. K a t o, *Prog. Theor. Phys.* **21**, 409 (1959).
66. Г. Я. Л ю б а р с к и й, Р. В. П о л о в и н, *ЖЭТФ* **35**, 1291 (1958)