1960 г. Сентябрь Т. LXXII, вып. 1

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ И АНТИФЕРРОМАГНЕТИКАХ II*)

А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, М. И. Каганов

II. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СПИНОВЫХ ВОЛН ДРУГ С ДРУГОМ И С КОЛЕБАНИЯМИ РЕШЕТКИ. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ И КИНЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

§ 10. Слияние и расщепление спиновых волн. Рассеяние спиновых волн спиновыми волнами

В предыдущих параграфах мы получили энергетический спектр ферромагнетика и использовали его для вычисления спиновой теплоемкости и магнитного момента ферромагнетика. При этом мы исходили из гамильтониана ферромагнетика либо в его простейшем виде (1,6), либо в виде (2,3), учитывающем магнитное взаимодействие и энергию анизотропии, и сохраняли в этом гамильтониане только члены, квадратичные относительно операторов рождения и поглощения спиновых волн. Пренебрежение более высокими степенями произведений этих операторов, законное при нахождении энергетического спектра ферромагнетика вблизи основного состояния, не дает, однако, возможности исследовать различные кинетические и релаксационные процессы в ферромагнетиках, которые обусловлены взаимодействиями между элементарными возбуждениями.

Переходя теперь к исследованию релаксационных процессов в ферромагнетиках, мы должны учитывать как взаимодействие спиновых волн друг с другом, так и взаимодействие их с другими элементарными возбуждениями, свойственными ферромагнетику. Мы ограничимся здесь рассмотрением только ферродиэлектриков и поэтому наряду с взаимодействием спиновых волн друг с другом будем учитывать еще взаимодействие их с фононами [1].

Для получения гамильтонианов взаимодействия нужно взять общий гамильтониан ферромагнетика, учитывающий колебания решетки, и после перехода к переменным, описывающим рождение и поглощение спиновых волн ($c^+_{\mathbf{k}}$, $c_{\mathbf{k}}$) и фононов ($b^+_{\mathbf{f}s}$, $b_{\mathbf{f}s}$), выделить в нем с помощью разложения в ряды члены, содержащие операторы $c^+_{\mathbf{k}}$, $c_{\mathbf{k}}$ в третьей и более высоких степенях, а также смешанные члены, содержащие как операторы $c_{\mathbf{k}}$, так и операторы $b_{\mathbf{f}s}$. Совокупность этих членов и представляет собой интересующие нас гамильтонианы взаимодействия.

Рассмотрим прежде всего взаимодействие спиновых волн друг с другом. Гамильтонианы взаимодействия спиновых волн друг с другом могут

*) Начало см. УФН 71, 533 (1960).

быть получены из $\mathscr{H}_s^{(3)}$ и $\mathscr{H}_s^{(4)}$ (см. § 3), если перейти от операторов $a_\mathbf{k}^+$, $a_\mathbf{k}$ к операторам $c_\mathbf{k}^+$ и $c_\mathbf{k}$ согласно формулам (3,16). В результате они примут вид:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_s^{(3)} &= \sum_{123} \Phi'_{12;\,3} c_1^+ c_2^+ c_3 + \text{сопр.}, \\ \mathscr{H}_s^{(4)} &= \sum_{1234} \Phi'_{12;\,34} c_1^+ c_2^+ c_3 c_4 + \sum_{1234} \Phi'_{1;\,234} c_1^+ c_2 c_3 c_4 + \text{сопр.}, \end{aligned} \tag{10,1}$$

где величины Φ' получаются из Φ с помощью преобразования (3,16). Входящие сюда операторы $c_\mathbf{k}^+$ и $c_\mathbf{k}$ являются истинными (в отличие от $a_\mathbf{k}^+$ и $a_\mathbf{k}$) операторами рождения и поглощения спиновых волн, выражения $\mathscr{H}_s^{(3)}$ и $\mathscr{H}_s^{(4)}$, определяемые формулами (10,1), и представляют собой гамильтонианы взаимодействия спиновых волн друг с другом. Ясно, что $\mathscr{H}_s^{(3)}$ описывает процессы расщепления одной спиновой волны на две и слияние двух спиновых волн в одну, а $\mathscr{H}_s^{(4)}$ — процессы рассеяния одной спиновой волны другой волной, а также расщепления одной спиновой волны на три волны и слияния трех спиновых волн в одну волну.

В случае одноосного ферромагнетика с сильной анизотропией при выполнении неравенства

$$\beta + \frac{H_0}{M_0} \gg 1$$

величина $u_\mathbf{k}$ близка к единице, а $v_\mathbf{k}$ — к нулю, т. е.

$$c_\mathbf{k} \approx a_\mathbf{k}, \quad c_\mathbf{k}^+ \approx a_\mathbf{k}^+.$$

Поэтому в этом случае переменные $a_\mathbf{k}^+$ и $a_\mathbf{k}$ можно рассматривать как операторы рождения и поглощения спиновых волн и пользоваться выражениями (3,14), (3,15) в качестве гамильтонианов взаимодействия. Заметим, однако, что такое приближение является уже недостаточным в случае кубических кристаллов с малой константой анизотропии, если они находятся в слабом магнитном поле.

Суммарный гамильтониан взаимодействия спиновых волн друг с другом представляет собой ряд по степеням операторов $c_\mathbf{k}^+$, $c_\mathbf{k}$, параметром разложения которого является среднее значение отклонения магнитного момента ферромагнетика от его максимального значения. Эта величина эффективно мала при низких температурах. Поэтому гамильтонианом взаимодействия спиновых волн друг с другом можно пользоваться только в области температур, малых по сравнению с температурой Кюри.

В суммарном гамильтониане взаимодействия члены наинизшего порядка содержат операторы $c_\mathbf{k}^+$, $c_\mathbf{k}$ в третьей степени. Они возникают из разложения энергии магнитного взаимодействия. Однако наряду с этими членами нужно, вообще говоря, учитывать также члены, содержащие $c_\mathbf{k}^+$, $c_\mathbf{k}$ в четвертой степени, которые возникают из разложения обменной энергии и содержат поэтому дополнительно большой множитель. Члены, содержащие более высокие, чем четвертая, степени операторов $c_\mathbf{k}^+$, $c_\mathbf{k}$, являются лишь небольшими поправками, и поэтому мы не будем их учитывать.

Вычислим теперь вероятности процессов, описываемых гамильтонианами $\mathscr{H}_s^{(3)}$ и $\mathscr{H}_s^{(4)}$, т. е. вероятности слияния и расщепления, а также рассеяния спиновых волн. Начнем с определения вероятности слияния и расщепления спиновых волн.

Используя формулы (3,20), определяющие матричные элементы операторов $c_\mathbf{k}^+$, $c_\mathbf{k}$, получим следующие выражения для матричных элементов интересующих нас процессов:

$$\left.\begin{aligned}&(n_1, n_2, n_3 \,|\, \mathscr{H}_s^{(3)} \,|\, n_1+1, n_2+1, n_3-1) = \\ &\qquad = 2\Phi_{12;\,3} \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)\,n_3}\, e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)t} \Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3), \\ &(n_1, n_2, n_3 \,|\, \mathscr{H}_s^{(3)} \,|\, n_1+1, n_2-1, n_3-1) = \\ &\qquad = 2\Phi_{23;\,1} \sqrt{(n_1+1)\,n_2 n_3}\, e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3)t} \Delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3),\end{aligned}\right\} \quad (10{,}2)$$

где $n_i = n_{\mathbf{k}_i}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_{\mathbf{k}_i}$.

Вероятности процессов равны

$$W_{n_1+1,\, n_2+1,\, n_3-1}^{n_1,\, n_2,\, n_3} = \frac{2\pi}{\hbar} \,|\, 2\Phi_{12,\,3} \,|^2 (n_1+1)(n_2+1)\, n_3 \delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)\, \Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3),$$

$$(10{,}2')$$

$$W_{n_1+1,\, n_2-1,\, n_3-1}^{n_1,\, n_2,\, n_3} = \frac{2\pi}{\hbar} \,|\, 2\Phi_{23;\,1} \,|^2 (n_1+1)\, n_2 n_3 \delta(\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1)\, \Delta(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1),$$

где $\delta(x)$ — дираковская δ-функция.

Мы видим, что в рассматриваемых процессах выполняется закон сохранения энергии:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

и закон сохранения волнового вектора или импульса:

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3.$$

Заметим, что, вообще говоря, в кристаллах последние соотношения заменяются более общим соотношением

$$\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 = 2\pi\mathbf{b},$$

где $\mathbf{b}$ — вектор обратной решетки. Однако в дальнейшем при определении средних вероятностей можно ограничиться рассмотрением случая $\mathbf{b}=0$, так как учет процессов рассеяния с $\mathbf{b} \neq 0$ (они называются процессами «переброса») приводит к малым поправкам.

Зная вероятности слияния и расщепления спиновых волн, можно определить изменение числа спиновых волн в единицу времени, обусловленное этими процессами:

$$\dot{n}_1^{\text{ст}} = L_{\mathbf{k}_1}^{(3)}\{n\},$$

$$\begin{aligned}L_{\mathbf{k}_1}^{(3)}\{n\} = \frac{8\pi}{\hbar} \sum_{23} \{\, |\Phi_{12;\,3}|^2 \,[(n_1+1)(n_2+1)\, n_3 - n_1 n_2 (n_3+1)] \,\times \\ \times\, \delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)\, \Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3) + |\Phi_{13;\,2}|^2 \,[(n_1+1)(n_3+1)\, n_2 - \\ - n_1 n_3 (n_2+1)]\, \delta(\varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2)\, \Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_2) + |\Phi_{23;\,1}|^2 \,[(n_1+1)\, n_2 n_3 - \\ - n_1 (n_2+1)(n_3+1)]\, \delta(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3)\, \Delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\},\end{aligned} \quad (10{,}3)$$

где $L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n\}$ служит для обозначения оператора столкновений, связанных с гамильтонианом $\mathscr{H}_s^{(3)}$.

Вычислим, используя выражение (10,3), среднее время расщепления или слияния спиновых волн.

Будем предполагать, что числа спиновых волн мало отличаются от своих равновесных значений $n_{\mathbf{k}}^0 = \left(\exp\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{T} - 1\right)^{-1}$:

$$n_{\mathbf{k}} = n_{\mathbf{k}}^0 + \delta n_{\mathbf{k}}, \quad |\,\delta n^{\mathbf{k}}\,| \ll n_{\mathbf{k}}^0,$$

и разложим оператор столкновений $L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n\}$ в ряд по степеням $\delta n_{\mathbf{k}}$. Члены нулевого порядка в этом разложении исчезают, так как равновесная функция обращает оператор столкновений в нуль. Коэффициент при $\delta n_{\mathbf{k}}$, взятый с обратным знаком, можно рассматривать как обратную величину времени жизни спиновой волны с волновым вектором $\mathbf{k}$ по отношению к процессам слияния и расщепления. Эта величина, которую мы обозначим через $\frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}^{(3)}}$, равна, очевидно,

$$\frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}^{(3)}} = -\left(\frac{\delta L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n\}}{\delta n_{\mathbf{k}}}\right)_0, \tag{10,4}$$

где индекс нуль при функциональной производной означает, что числа спиновых волн заменены соответствующими равновесными функциями. Усреднив $1/\tau_{\mathbf{k}}^{(3)}$ по равновесному распределению $n_{\mathbf{k}}^0$, найдем величину, обратную среднему времени жизни спиновой волны по отношению к процессам слияния или расщепления:

$$\frac{1}{\tau^{(3)}} \equiv w^{(3)} = \frac{\sum\limits_{\mathbf{k}} \frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}^{(3)}} n_{\mathbf{k}}^0}{\sum\limits_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}^0}. \tag{10,5}$$

Вычисление функциональной производной дает:

$$w^{(3)} = \frac{8\pi}{\hbar} \sum_{123} |\Phi_{12;\,3}|^2 (2n_1^0 n_2^0 + n_3^0)\, \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3)\, \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \frac{1}{\sum\limits_{1} n_1^0}. \tag{10,5'}$$

Переходя от суммирования по $\mathbf{k}$ к интегрированию согласно формуле (7,5′), получим [1, 2]:

$$w^{(3)} = \frac{\pi}{5} \frac{\mu^3 M_0}{a^3 \hbar \theta_C} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{1/2} F(\eta), \tag{10,6}$$

где

$$F(\eta) = \iint\limits_{xy \geqslant \eta^2} \left\{\frac{1}{e^{x+y}-1} + \frac{2}{(e^x-1)(e^y-1)}\right\} \left(\frac{1}{3} + \frac{\eta^2}{xy}\right) dx\, dy \left(\int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{x+2\eta}-1}\right)^{-1},$$

$$\eta = \frac{\mu H^{(e)}}{T}, \quad H^{(e)} = H_0 + \beta M_0.$$

Явное выражение для функции $F(\eta)$ удается найти только в предельных случаях малых и больших η:

$$F(\eta) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\zeta(3)} \ln^2 \eta, & \eta \ll 1 \\ 2\sqrt{\pi\eta}\, e^{-\eta}, & \eta \gg 1. \end{cases} \tag{10,6'}$$

Таким образом, $w^{(3)}$ определяется следующими формулами:

$$w^{(3)} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{15\zeta(3)} \dfrac{\mu M_0}{\hbar} \dfrac{\mu^2}{a^3\theta_C} \left(\dfrac{T}{\theta_C}\right)^{1/2} \ln^2 \dfrac{\mu H^{(e)}}{T}, & \mu H^{(e)} \ll T \\ \dfrac{2\pi^{3/2}}{5} \dfrac{\mu M_0}{\hbar} \dfrac{\mu^2}{a^3\theta_C} \left(\dfrac{\mu H^{(e)}}{\theta_C}\right)^{1/2} e^{-\frac{\mu H^{(e)}}{T}}, & \mu H^{(e)} \gg T. \end{cases} \tag{10,7}$$

Мы видим, что в области слабых эффективных магнитных полей среднее время расщепления в основном обратно пропорционально $\sqrt{T}$; в случае сильных полей оно экспоненциально возрастает с уменьшением температуры.

Перейдем теперь к рассмотрению процессов рассеяния спиновых волн спиновыми волнами, а также слияния и расщепления спиновых волн, описываемых гамильтонианом $\mathcal{H}_s^{(4)}$.

Матричный элемент рассеяния спиновой волны спиновой волной имеет вид:

$$(n_1, n_2, n_3, n_4 \,|\, \mathcal{H}_s^{(4)} \,|\, n_1+1, n_2+1, n_3-1, n_4-1) = \\ = 4\,(\Phi_{12;\,34} + \Phi^*_{34,\,12}) \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)\,n_3 n_4} \times \\ \times e^{\frac{i}{h}(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)t}\,\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4).$$

Вероятность этого процесса рассеяния равна

$$W^{n_1,\,n_2,\,n_3,\,n_4}_{n_1+1,\,n_2+1,\,n_3-1,\,n_4-1} = \frac{32\pi}{h}\,|\,\Phi_{12,\,34} + \Phi^*_{34;\,12}\,|^2\,(n_1+1)(n_2+1)\,n_3 n_4 \times \\ \times \delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\,\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4). \qquad (10{,}8)$$

Матричный элемент расщепления одной спиновой волны на три спиновые волны, описываемого гамильтонианом $\mathcal{H}_s^{(1)}$, имеет вид

$$(n_1, n_2, n_3, n_4 \,|\, \mathcal{H}_s^{(4)} \,|\, n_1-1, n_2+1, n_3+1, n_4+1) = \\ = 6\Phi^*_{1;\,234} \sqrt{n_1(n_2+1)(n_3+1)(n_4+1)}\, e^{\frac{i}{h}(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1)t}\,\Delta(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4-\mathbf{k}_1).$$

Вероятность этого процесса равна

$$W^{n_1,\,n_2,\,n_3,\,n_4}_{n_1-1,\,n_2+1,\,n_3+1,\,n_4+1} = \frac{72\pi}{h}\,|\,\Phi_{1,\,234}\,|^2\,n_1(n_2+1)(n_3+1)(n_4+1) \times \\ \times \delta(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1)\,\Delta(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4-\mathbf{k}_1). \qquad (10{,}8')$$

Определим теперь изменение числа спиновых волн за счет процессов рассеяния, а также расщепления и слияния спиновых волн, описываемых гамильтонианом $\mathcal{H}_s^{(4)}$:

$$\dot{n}_1^{\text{ст}} \equiv L^{(4)}_{\mathbf{k}_1}\{n\},$$

$$L^{(1)}_{\mathbf{k}_1} = \frac{2\pi}{h}\sum_{234}\{48\,|\,\Phi_{12;\,34}+\Phi^*_{34,\,12}\,|^2\,[(n_1+1)(n_2+1)\,n_3 n_4 - \\ - n_1 n_2 (n_3+1)(n_4+1)]\,\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\,\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4) + \\ + 36\,|\,\Phi_{1;\,234}\,|^2\,[(n_1+1)\,n_2 n_3 n_4 - n_1(n_2+1)(n_3+1)(n_4+1)] \times \\ \times \delta(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\,\Delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4) + \\ + 108\,|\,\Phi_{4,\,231}\,|^2\,[(n_1+1)(n_2+1)(n_3+1)\,n_4 - n_1 n_2 n_3 (n_4+1)] \times \\ \times \delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)\,\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4)\}. \qquad (10{,}9)$$

Оператор столкновений $L^{(4)}_{\mathbf{k}}\{n\}$ мы представим в виде:

$$L^{(4)}_{\mathbf{k}}\{n\} = L^{(e)}_{\mathbf{k}}\{n\} + L^{(r)}_{\mathbf{k}}\{n\}, \qquad (10{,}10)$$

$$L^{(e)}_{\mathbf{k}}\{n\} = \frac{6\pi\mu^4}{hV^2}\sum_{2,\,3,\,4}\alpha(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4)\Big[\alpha(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4)+4\beta+ \\ + 2\pi(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3+\sin^2\theta_4) - \\ - 4\pi\left(\frac{(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_4)_z^2}{(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_4)^2}+\frac{(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)_z^2}{(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)^2}+\frac{(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_4)_z^2}{(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_4)^2}+\frac{(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)_z^2}{(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)^2}\right)\Big] \times \\ \times [(n_1+1)(n_2+1)\,n_3 n_4 - n_1 n_2 (n_3+1)(n_4+1)] \times \\ \times \delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\,\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4), \qquad (10{,}10')$$

$$L_{\mathbf{k}_1}^{(r)}\{n\} = \frac{6\pi\mu^4}{\hbar V^2}\sum_{234}\Big[2\beta + \pi(\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \sin^2\theta_3 + \sin^2\theta_4) -$$
$$- 2\pi\left(\frac{(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_4)_z^2}{(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_4)^2} + \frac{(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)_z^2}{(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)^2} + \frac{(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_4)_z^2}{(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_4)^2} + \frac{(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)_z^2}{(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)^2}\right)\Big]^2 \times$$
$$\times [(n_1+1)(n_2+1)n_3n_4 - (n_3+1)(n_4+1)n_1n_2]\,\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4) \times$$
$$\times \Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4) + \frac{2\pi^3\mu^4}{\hbar V^2}\sum_{234}\{|\sin^2\theta_2 e^{-2i\varphi_2} + \sin^2\theta_3 e^{-2i\varphi_3} + \sin^2\theta_4 e^{-2i\varphi_4}|^2 \times$$
$$\times [(n_1+1)n_2n_3n_4 - n_1(n_2+1)(n_3+1)(n_4+1)]\,\delta(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1) \times$$
$$\times \Delta(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4-\mathbf{k}_1) + 3\,|\sin^2\theta_1 e^{-2i\varphi_1} + \sin^2\theta_2 e^{-2i\varphi_2} + \sin^2\theta_3 e^{-2i\varphi_3}|^2 \times$$
$$\times [(n_1+1)(n_2+1)(n_3+1)n_4 - n_1n_2n_3(n_4+1)]\,\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4) \times$$
$$\times \Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4)\}. \qquad (10{,}10'')$$

Заметим, что в области температур $T \gg \mu M_0$ оператор $L_{\mathbf{k}}^{(r)}\{n\}$ можно рассматривать как малую поправку к оператору $L_{\mathbf{k}}^{(e)}\{n\}$, так как

$$\alpha k^2 \sim \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{\mu M_0} \sim \frac{T}{\mu M_0} \gg 2\pi\beta.$$

Поэтому при определении средней вероятности рассеяния спиновой волны спиновой волной можно пренебречь оператором $L_{\mathbf{k}}^{(r)}\{n\}$, а в операторе $L_{\mathbf{k}}^{(l)}\{n\}$ — опустить слагаемые, связанные с энергией анизотропии и магнитным дипольным взаимодействием. Учет этого оператора оказывается необходимым при рассмотрении релаксации магнитного момента (см. § 12).

Используя выражение (10,10′) для $L_{\mathbf{k}}^{(e)}\{n\}$ и поступая так же, как это было сделано при нахождении $\frac{1}{\tau^{(3)}}$, можно определить среднее время рассеяния спиновой волны на спиновой волне:

$$\frac{1}{\tau^{(e)}} \equiv w^{(e)} = \frac{6\pi}{\hbar}\frac{\alpha^2\mu^4}{V^2}\sum_{1234}(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_4)^2 n_2^0 n_4^0 (n_3^0+1) \times$$
$$\times \Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4)\,\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\frac{1}{\sum_{\mathbf{k}}' n_{\mathbf{k}}^0}. \qquad (10{,}11)$$

Переходя здесь от суммирования по $\mathbf{k}$ к интегрированию, получим с точностью до численного множителя порядка единицы[2, 3]:

$$w^{(e)} \approx \frac{\theta_C}{\hbar}\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^4. \qquad (10{,}11')$$

Процессы рассеяния спиновых волн спиновыми волнами, связанные с обменным взаимодействием, не могут изменить суммарного магнитного момента ферромагнетика, так как магнитный момент тела коммутирует с обменной энергией. Эти процессы можно не учитывать, наряду с расщеплением и слиянием спиновых волн, если $w^{(3)} \gg w^{(e)}$. Если же $w^{(e)} \gg w^{(3)}$, что имеет место при $T \gg \theta_C\left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{4/7}$, их роль становится существенной. Именно благодаря этим процессам устанавливается квазиравновесное бозевское распределение спиновых волн (с неравновесным магнитным моментом), которое постепенно, за счет процессов расщепления и слияния спиновых волн, а также рассеяния, обусловленного энергией анизотропии, переходит в равновесное распределение (см. § 12).

§ 11. Взаимодействие спиновых волн с колебаниями решетки

Перейдем теперь к исследованию процессов взаимодействия между спиновыми волнами и колебаниями решетки. Чтобы найти гамильтониан, описывающий эти взаимодействия, рассмотрим магнитострикционную часть общего гамильтониана ферромагнетика, содержащую спиновые переменные и тензор деформации

$$\mathcal{H}'_{sl} = \int\limits_V \gamma_{ik}(\mathbf{M})\, u_{ik}\, dv + \int\limits_V \gamma_{iklmrs}(\mathbf{M}) \frac{\partial M_r}{\partial x_i} \frac{\partial M_s}{\partial x_k} u_{lm}\, dv, \tag{11,1}$$

где $\gamma_{ik}(\mathbf{M})$ и $\gamma_{iklmrs}(\mathbf{M})$ — тензоры магнитострикционных констант; первый из них описывает магнитоупругие эффекты при однородном, а второй — при неоднородном намагничении.

Выписанными здесь членами исчерпываются все комбинации, содержащие линейно тензор деформации u_{ik} и, следовательно, операторы рождения и поглощения фононов. Этими членами можно ограничиться при рассмотрении низких температур.

По сравнению с гамильтонианом (6,1) здесь выписан добавочный член $\gamma_{iklmrs} \frac{\partial M_r}{\partial x_i} \frac{\partial M_s}{\partial x_k} u_{lm}$, содержащий квадратично производные от магнитного момента и линейно тензор деформации. Так как он является членом третьего порядка малости (относительно M_i и u_{ik}), то при рассмотрении связанных магнитоакустических колебаний в § 5 этот член был опущен.

В выражении $\gamma_{iklmrs} \frac{\partial M_r}{\partial x_i} \frac{\partial M_s}{\partial x_k} u_{lm}$ для неоднородной магнитострикционной энергии достаточно сохранить только главную часть, которая обусловлена обменным взаимодействием, и опустить часть, имеющую релятивистское происхождение. Обменная часть магнитострикционной энергии может быть получена из обменной энергии (1,2), если разложить в ней величины $J(r_{lm})$, зависящие от расстояний между атомами, в ряд по степеням тензора деформации.

Линейный относительно u_{ik} член этого разложения имеет вид $\gamma_{iklm} \frac{\partial M_r}{\partial x_i} \frac{\partial M_r}{\partial x_k} u_{lm}$. Это выражение, инвариантное по отношению к вращениям момента $\mathbf{M}$, и представляет собой интересующую нас обменную часть магнитострикционной энергии; она характеризуется тензором γ_{iklm} не шестого, а четвертого ранга, значения компонент которого могут считаться не зависящими от $\mathbf{M}$. Если для простоты предполагать тело изотропным, то можно записать этот тензор в виде:

$$\gamma_{iklm} = \frac{1}{2} \beta_1 \frac{\theta_C a^2}{\mu M_0} (\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}) + \beta_2 \frac{\theta_C a^2}{\mu M_0} \delta_{ik}\delta_{lm}, \tag{11,2}$$

где $\beta_{1,2}$ — величины порядка единицы. Тензор $\gamma_{ik}(\mathbf{M})$ в этом же случае имеет вид:

$$\gamma_{ik}(\mathbf{M}) = \gamma M_i M_k + \gamma_0 (M^2) \delta_{ik}, \tag{11,2'}$$

причем величины γ и γ_0 могут быть взяты при $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$.

Подставляя (11,2), (11,2′) в гамильтониан (11,1) и замечая, что $\int u_{ii}\, dv = 0$, получим в изотропном случае после разложения момента $\mathbf{M}$

в ряд по степеням отклонения $\mathbf{m}$:

$$\mathcal{H}'_{sl}=2\gamma M_0\int\limits_V(m_xu_{xz}+m_yu_{yz})\,dv+$$
$$+\frac{1}{4}\gamma\int\limits_V\{(m^+)^2(u_{xx}-u_{yy}-2iu_{xy})-(m^-)^2(u_{xx}-u_{yy}+2iu_{xy})+$$
$$+2m^+m^-(u_{xx}+u_{yy})+8M_0m_zu_{zz}\}\,dv+$$
$$+\frac{\theta_C a^2}{\mu M_0}\int\limits_V\left(\beta_1\frac{\partial m^+}{\partial x_i}\frac{\partial m^-}{\partial x_k}u_{ik}+\beta_2\frac{\partial m^+}{\partial x_k}\frac{\partial m^-}{\partial x_k}u_{ll}\right)dv, \qquad (11,3)$$

причем мы ограничились здесь членами первого и второго порядков относительно $\mathbf{m}$.

Первое слагаемое, содержащее линейно колебания магнитного момента и тензор деформации, не играет роли при исследовании процессов взаимодействия спиновых волн с колебаниями решетки и может быть поэтому опущено. Действительно, это слагаемое должно быть отнесено к основному гамильтониану ферромагнетика, содержащему квадратично отклонение магнитного момента и тензор деформации. Оно приводит к существованию связанных магнитоакустических волн. Такого типа волны мы рассматривали в §5 и видели, что связь между магнитными и звуковыми волнами определяется малым параметром. Поэтому при изучении взаимодействия между спиновыми волнами и колебаниями решетки можно не учитывать образования связанных колебаний, а исходить из простых спиновых и простых звуковых колебаний.

Опустив в (11,3) первое слагаемое, мы получим гамильтониан взаимодействия спиновых волн с решеткой, который будем обозначать через $\mathcal{H}_{sl}$.

Чтобы определить матричные элементы переходов, обусловленные гамильтонианом $\mathcal{H}_{sl}$, необходимо связать тензор деформации u_{ik} с операторами рождения и поглощения фононов. С этой целью разложим вектор смещения $\mathbf{u}(\mathbf{r},\ t)$ на плоские волны:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\ t)=\left(\frac{\hbar}{2\varrho V}\right)^{1/2}\sum_{\mathbf{f},\ s}\frac{\mathbf{e}_{\mathbf{f}s}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{f}s}}}\left(b_{\mathbf{f}s}e^{i\mathbf{f}\mathbf{r}}+b^+_{\mathbf{f}s}e^{-i\mathbf{f}\mathbf{r}}\right), \qquad (11,4)$$

где $\mathbf{f}$ и $\omega_{\mathbf{f}s}$ — волновой вектор и частота колебания с поляризацией s' $\mathbf{e}_{\mathbf{f}s}$ — единичный вектор поляризации, $b^+_{\mathbf{f}s}$ и $b_{\mathbf{f}s}$ — операторы рождения и поглощения фонона с волновым вектором $\mathbf{f}$ и поляризацией s, ϱ — плотность вещества.

Матричные элементы операторов рождения и поглощения фонона с волновым вектором $\mathbf{f}$ равны

$$\begin{aligned}(N_{\mathbf{f}s}-1\,|\,b_{\mathbf{f}s}\,|\,N_{\mathbf{f}s})&=\sqrt{N_{\mathbf{f}s}}\,e^{-i\omega_{\mathbf{f}s}t},\\ (N_{\mathbf{f}s}\,|\,b^+_{\mathbf{f}s}\,|\,N_{\mathbf{f}s}-1)&=\sqrt{N_{\mathbf{f}s}}\,e^{i\omega_{\mathbf{f}s}t},\end{aligned} \qquad (11,4')$$

где $N_{\mathbf{f}s}$ — число фононов поляризации s с волновым вектором $\mathbf{f}$.

Используя выражение (11,4) для оператора смещения, а также выражения (3,6), связывающие $\mathbf{m}$ с операторами рождения и поглощения спиновых волн, перепишем гамильтониан $\mathcal{H}_{sl}$ в виде:

$$\mathcal{H}_{sl}=\sum_{123}\{\Psi_{12;\,3}a^+_1a^+_2b_3\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{f}_3)+\Psi_{1;\,23}a^+_1a^+_2b_3\Delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{f}_3)\}, \qquad (11,5)$$

где

$$\Psi_{12,\,3}=\frac{i}{2V^{1/2}}\gamma\mu M_0\left(\frac{\hbar}{2\varrho\omega_3}\right)^{1/2}e_3^-f_3^-,$$

$$\Psi_{1;\,23}=i\theta_C a^2\sqrt{\frac{\hbar}{2\varrho V\omega_3}}\left[\beta_1(\mathbf{e}_3\mathbf{k}_1)(\mathbf{f}_3\mathbf{k}_2)+\beta_1(\mathbf{e}_3\mathbf{k}_2)(\mathbf{f}_3\mathbf{k}_1)+2\beta_2(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)(\mathbf{e}_3\mathbf{f}_3)\right]+$$

$$+\,i\gamma\mu M_0\sqrt{\frac{\hbar}{2\varrho V\omega_3}}(\mathbf{f}_3\mathbf{e}_3-3f_{3z}e_{3z})$$

(индекс «3» служит для обозначения волнового вектора и поляризации фонона).

Если рассматривать температуры $T\gg 2\pi\mu M_0$, то вторым слагаемым в $\Psi_{1;\,23}$ можно пренебречь, так как отношение второго члена к первому по порядку величины равно

$$\frac{\theta_C(ak)^2}{\mu M_0}\sim\frac{T}{\mu M_0}\gg 1.$$

Гамильтониан (11,5) описывает, очевидно, процессы рождения и поглощения фонона спиновой волной, а также процессы взаимного превращения фонона в две спиновые волны. Процессу рождения фонона спиновой волной соответствует закон сохранения импульса:

$$\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_2+\mathbf{f}_3,$$

а процессу превращения двух спиновых волн в фонон — закон сохранения:

$$\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{f}_3.$$

Рассмотрим прежде всего рождение и поглощение фонона спиновой волной. Эти процессы можно трактовать как черенковское излучение (поглощение) звуковых волн. Излучающей частицей при этом является спиновая волна. Так как закон дисперсии спиновых волн совпадает (при пренебрежении магнитным взаимодействием) с законом дисперсии обычных нерелятивистских свободных частиц с массой $m_0=\frac{\hbar^2}{2\theta_C a^2}$, то условие излучения фонона заключается в том, что скорость спиновой волны v должна превосходить скорость звука s. Замечая, что $v=\frac{\hbar k}{m_0}$, и выражая k через энергию спиновой волны, можно представить условие излучения в виде:

$$\varepsilon_k\gg\frac{\theta_D^2}{4\theta_C},$$

где $\theta_D=\frac{\hbar s}{a}$ — температура Дебая.

Матричный элемент процесса рождения фонона спиновой волной согласно (11,5), (1,11) и (11,4′) имеет вид:

$$(n_1,\ n_2,\ N_3\,|\,\mathcal{H}_{sl}\,|\,n_1+1,\ n_2-1,\ N_3+1)=$$

$$=\Psi_{1,\,23}^*\sqrt{(n_1+1)\,n_2\,(N_3+1)}\,\Delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2+\mathbf{f}_3)\,e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\hbar\omega_3)\,t},$$

а вероятность «черенковского» излучения фонона равна

$$W_{n_1+1,\ n_2-1,\ N_3+1}^{n_1,\ n_2,\ N_3}=$$

$$=\frac{2\pi}{\hbar}\,|\Psi_{1;\,23}|^2(n_1+1)(N_3+1)\,n_2\delta(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\hbar\omega_3)\,\Delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2+\mathbf{f}_3).\qquad(11,6)$$

Найдем изменение чисел спиновых волн, обусловленное процессами рождения и поглощения фонона спиновой волной:

$$\dot{n}_1^{\text{ст}} \equiv L_{\mathbf{k}_1}^{(ls)}\{n,\ N\},$$

$$L_{\mathbf{k}_1}^{(ls)}(n,N) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{23} \{ |\Psi_{1;\,23}|^2 [(n_1+1)\,n_2 N_3 - n_1(n_2+1)(N_3+1)] \times$$

$$\times\,\delta(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\hbar\omega_3)\,\Delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2+\mathbf{f}_3) + |\Psi_{1;\,23}|^2 [(n_1+1)\,n_2(N_3+1) -$$

$$- n_1(n_2+1)N_3]\,\delta(\varepsilon_2-\varepsilon_1-\hbar\omega_3)\,\Delta(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1-\mathbf{f}_3)\}. \qquad (11{,}7)$$

Поступая аналогично тому, как это было сделано в § 10, можно определить средние времена испускания продольных и поперечных фононов спиновой волной:

$$\frac{1}{\tau_l} = -\frac{\sum\limits_{\mathbf{k}} \left(\dfrac{\delta L_{\mathbf{k}}^{(ls)}}{\delta n_{\mathbf{k}}}\right)_{0,\,l} n_{\mathbf{k}}^0}{\sum\limits_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}^0} =$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{12\mathbf{f}} |\Psi_{12;\,\mathbf{f}l}|^2 [(N_{\mathbf{f}l}^0+1)\,n_1^0 + N_{\mathbf{f}l}^0 n_2^0]\,\delta(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\hbar\omega_l)\,\frac{1}{\sum\limits_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}^0},$$

$$\frac{1}{\tau_t} = -\frac{\sum\limits_{\mathbf{k}} \left(\dfrac{\delta L_{\mathbf{k}}^{(ls)}}{\delta n_{\mathbf{k}}}\right)_{0,\,t} n_{\mathbf{k}}^0}{\sum\limits_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}^0} =$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{12\mathbf{f}s_t} |\Psi_{12;\,\mathbf{f}s_t}|^2 [(N_{\mathbf{f}t}^0+1)\,n_1^0 + N_{\mathbf{f}t}^0 n_2^0]\,\delta(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\hbar\omega_t)\,\frac{1}{\sum\limits_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}^0},$$

где $N_{\mathbf{f}s}^0 = \left(\exp\dfrac{\hbar\omega_{\mathbf{f}s}}{T} - 1\right)^{-1}$.

Переходя от суммирования по $\mathbf{k}$, $\mathbf{f}$ к интегрированию, получим:

$$\frac{1}{\tau_l} \equiv w_l = \frac{1}{\pi^{3/2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{\theta_C}{\hbar} \left(\frac{\theta_C}{\theta_l}\right)^{1/2} \frac{T}{\varrho a^3 s_l^2} \left(\frac{T}{\theta_l}\right)^{11/2} J_l(\alpha_l), \qquad (11{,}8)$$

$$\frac{1}{\tau_t} \equiv w_t = \frac{\beta_1^2}{4\pi^{3/2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{\theta_C}{\hbar} \frac{T}{\varrho a^3 s_t^2} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{5/2} J_t(\alpha_t), \qquad (11{,}8')$$

где

$$J_l(\alpha_l) = \int_0^\infty \frac{y^2\,dy}{e^y-1} \int_{\frac{(y+\alpha_l)^2}{4\alpha_l}}^\infty \left[\frac{1}{4}\beta_1(y+\alpha_l)^2 + \beta_2\alpha_l x - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\,y\,(y+\alpha_l)\right]^2 \left(\frac{e^y}{e^x-1} + \frac{1}{e^{x-y}-1}\right) dx,$$

$$J_t(\alpha_t) = \int_0^\infty \frac{y^2\,dy}{e^y-1} \int_{\frac{(y+\alpha_t)^2}{4\alpha_t}}^\infty \left[x - \frac{(y+\alpha_t)^2}{4\alpha_t}\right] \left(\frac{e^y}{e^x-1} + \frac{1}{e^{x-y}-1}\right) dx$$

и

$$\alpha_l = \frac{\theta_l^2}{T\theta_C}, \quad \alpha_t = \frac{\theta_t^2}{T\theta_C}.$$

Входящие сюда интегралы могут быть вычислены при больших и малых значениях параметров α_l и α_t. В результате мы получим [1, 4]:

$$w_l = \begin{cases} 0{,}2\,(\beta_1+\beta_2)^2 \frac{\theta_l}{\hbar} \frac{\theta_l}{\varrho a^3 s_l^2} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{5/2} e^{-\frac{\theta_l^2}{4T\theta_C}}, & T \ll \frac{\theta_l^2}{\theta_C}, \\ 0{,}4\,(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_1\beta_2) \frac{\theta_C}{\hbar} \frac{T}{\varrho a^3 s_l^2} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{5/2}, & T \gg \frac{\theta_l^2}{\theta_C}, \end{cases}$$

$$w_t = \begin{cases} 0{,}4\beta_1^2 \frac{\theta_C}{\hbar} \frac{T}{\varrho a^3 s_t^2} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{5/2} e^{-\frac{\theta_t^2}{4T\theta_C}}, & T \ll \frac{\theta_t^2}{\theta_C}, \\ 0{,}2\beta_1^2 \frac{\theta_t}{\hbar} \frac{\theta_t}{\varrho a^3 s_t^2} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{5/2}, & T \gg \frac{\theta_t^2}{\theta_C}. \end{cases} \tag{11,9}$$

Сравнивая полученные выражения для w_l и w_t, мы видим, что при низких температурах более вероятно рождение фононов с поперечной поляризацией ($\theta_t < \theta_l$, так как $s_t < s_l$), а при высоких температурах — фононов с продольной поляризацией.

Если интересоваться испусканием фонона с произвольной поляризацией, то для средней вероятности такого процесса мы получим выражение [1, 4]:

$$w_p = \begin{cases} 0{,}4\beta_1^2 \frac{\theta_C}{\hbar} \frac{T}{\varrho a^3 s_t^2} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{5/2} e^{-\frac{\theta_t^2}{4T\theta_C}}, & T \ll \frac{\theta_D^2}{\theta_C}, \\ 0{,}4\,(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_1\beta_2) \frac{\theta_C}{\hbar} \frac{T}{\varrho a^3 s_l^2} \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{5/2}, & T \gg \frac{\theta_D^2}{\theta_C}. \end{cases} \tag{11,10}$$

Экспоненциальная зависимость средней вероятности испускания фонона при $T \ll \theta_t^2/\theta_C$ от температуры связана с тем, что в процессах излучения могут принимать участие только те спиновые волны, энергия которых больше $\theta_D^2/4\theta_C$.

Так как при низких температурах эта вероятность содержит экспоненциальный малый множитель, то, наряду с процессами испускания фонона спиновой волной, необходимо учитывать также процессы слияния двух спиновых волн в фонон и расщепление фонона на две спиновые волны. Эти процессы описываются, как видно из выражения для гамильтониана (11,5), не обменным, а однородным магнитострикционным взаимодействием. Поэтому вероятность их, вообще говоря, значительно меньше вероятности w_p процессов рождения и поглощения фонона спиновой волной и может быть сравнимой с w_p только при достаточно низких температурах.

Матричный элемент превращения двух спиновых волн в фонон имеет вид:

$$(n_1,\ n_2,\ N_3) \,|\, \mathcal{H}_{sl} \,|\, n_1-1,\ n_2-1,\ N_3+1) =$$
$$= 2\Psi^*_{12;\,3} \sqrt{n_1 n_2 (N_3+1)}\, \Delta\,(\mathbf{f}_3-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\, e^{\frac{i}{\hbar}(\hbar\omega_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2)t},$$

а вероятность рассматриваемого процесса равна

$$W^{n_1,\,n_2,\,N_3}_{n_1-1,\,n_2-1,\,N_3+1} = \frac{8\pi}{\hbar} \,|\, \Psi_{12;\,3} \,|^2\, n_1 n_2 (N_3+1)\, \Delta\,(\mathbf{f}_3-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\, \delta\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\hbar\omega_3).$$

Отсюда можно, как и ранее, найти среднюю вероятность слияния двух спиновых волн в фонон:

$$w_p' = \begin{cases} \frac{\mu M_0}{h} \frac{\gamma^2 \mu M_0}{\varrho a^3 s_t^2} \left(\frac{T}{\theta_t}\right)^3, & T \ll \frac{\theta_D^2}{\theta_C}, \\ \frac{h}{\varrho a^5} \left(\frac{\gamma \mu M_0}{\theta_C}\right)^2 \left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{1/2}, & T \gg \frac{\theta_D^2}{\theta_C}. \end{cases} \tag{11,11}$$

Сравнение формул (10,10) и (10,11) показывает, что имеет место неравенство $w_p \gg w_p'$ вплоть до температур порядка одного градуса.

Сравним теперь вероятности $w^{(e)}$ и $w^{(3)}$, характеризующие интенсивность взаимодействия спиновых волн друг с другом, с вероятностями w_p и w_p', характеризующими интенсивность взаимодействия спиновых волн с решеткой. Легко видеть, что $w^{(e)} \gg w_p$, если $T \gg \theta_C \left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{4/7}$, и $\omega^{(3)} \gg \omega_p$, если $\theta_C \left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{4/7} \gg T \gg 2\pi\mu M_0$. Таким образом, взаимодействие спиновых волн друг с другом является более сильным, чем взаимодействие спиновых волн с решеткой. Отсюда можно заключить, что равновесие в системе спиновых волн может наступить быстрее, чем равновесие между спиновыми волнами и решеткой. Поэтому температуры спиновых волн и решетки могут, вообще говоря, отличаться друг от друга [1]. Процесс выравнивания температур мы рассмотрим вместе с релаксацией магнитного момента в § 12.

§ 12. Релаксация магнитного момента в ферродиэлектриках

Найденные нами вероятности процессов взаимодействия спиновых волн друг с другом и с фононами позволяют выяснить, как происходит релаксация магнитного момента в ферродиэлектриках [3].

Выше мы определили равновесное значение магнитного момента при заданной температуре. Задача о релаксации магнитного момента заключается в выяснении того, каким образом неравновесное значение магнитного момента приближается к его равновесному значению.

Мы будем сначала предполагать, что константа анизотропии либо внешнее магнитное поле $\mathbf{H}_0$ достаточно велики, и начнем с рассмотрения температур $\theta_C \gg T \gg \theta_C \left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{4/7}$. При таких температурах наиболее сильным взаимодействием является, как мы видели, обменное взаимодействие спиновых волн друг с другом. Оно приводит к установлению бозевского распределения спиновых волн. Обменное взаимодействие не изменяет магнитного момента системы; поэтому устанавливающееся бозевское распределение не соответствует, вообще говоря, равновесному значению магнитного момента. Напротив, так как гамильтониан обменного взаимодействия коммутирует с полным магнитным моментом системы $\mathfrak{M}$, то последний может иметь произвольное значение как по величине, так и по направлению. Переход к равновесному значению момента обусловливается взаимодействиями, могущими изменить магнитный момент системы, т. е. магнитным дипольным взаимодействием, энергией анизотропии и взаимодействием между спиновыми волнами и фононами. Все эти виды взаимодействий в рассматриваемой области температур являются слабыми по сравнению с обменным взаимодействием между спиновыми волнами; поэтому релаксация магнитного момента происходит медленно по сравнению с процессом установления бозевского распределения с заданным значением магнитного момента $\mathfrak{M}$.

Чтобы определить времена релаксации магнитного момента $\mathfrak{M}$, а также время выравнивания температур спиновых волн T_s и решетки T_l, которые, вообще говоря, могут отличаться друг от друга, будем исходить из кинетического уравнения для спиновых волн

$$\dot{n}_{\mathbf{k}} = \dot{n}_{\mathbf{k}}^{\text{ст}} \equiv L_{\mathbf{k}}\{n, N\}, \tag{12,1}$$

где $L_{\mathbf{k}}\{n, N\}$ — суммарный оператор столкновения спиновых волн:

$$L_{\mathbf{k}}\{n, N\} = L_{\mathbf{k}}^{(e)}\{n\} + L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n\} + L_{\mathbf{k}}^{(r)}\{n\} + L_{\mathbf{k}}^{(ls)}\{n, N\}$$

(операторы $L_{\mathbf{k}}^{(e)}\{n\}$, $L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n\}$, $L_{\mathbf{k}}^{(r)}\{n\}$ и $L_{\mathbf{k}}^{(ls)}\{n, N\}$ связаны с гамильтонианами $\mathscr{H}_s^{(4)}$, $\mathscr{H}_s^{(3)}$, $\mathscr{H}_{ls}$ и были определены в § 9 и § 10).

В области температур $\theta_C \gg T \gg \theta_C\left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{4/7}$ справедливо неравенство $w^{(e)} \gg w^{(3)}$, поэтому наибольшим слагаемым в $L_{\mathbf{k}}\{n, N\}$ будет $L_{\mathbf{k}}^{(e)}\{n\}$. Остальные слагаемые

$$L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n\} + L_{\mathbf{k}}^{(r)}\{n\} + L_{\mathbf{k}}^{(ls)}\{n, N\} \equiv L'_{\mathbf{k}}\{n, N\}$$

можно рассматривать как малое возмущение и в первом приближении исходить взамен (12,1) из уравнения

$$L_{\mathbf{k}}^{(e)}\{n\} = 0. \tag{12,2}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$n_{\mathbf{k}} = \begin{cases} n_0, & \mathbf{k} = 0, \\ \left(e^{\frac{\varepsilon_k - \zeta}{T_s}} - 1\right)^{-1}, & \mathbf{k} \neq 0, \end{cases} \tag{12,3}$$

где n_0 и ζ — произвольные константы. Они могут быть связаны с начальными значениями квадрата магнитного момента и квадрата составляющей магнитного момента, перпендикулярной к оси легчайшего намагничения:

$$\begin{gathered} \mathfrak{M}^2 = \left(\int \mathbf{M}\, dv\right)^2 = (M_0 V)^2 - 2\mu M_0 V \sum_{\mathbf{k} \neq 0} n_{\mathbf{k}}, \\ \mathfrak{M}_\perp^2 = \mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 = 2\mu M_0 V n_0. \end{gathered} \tag{12,4}$$

Учтем теперь слабые взаимодействия, описываемые в кинетическом уравнении операторами $L_{\mathbf{k}}^{(3)}$, $L_{\mathbf{k}}^{(r)}$ и $L_{\mathbf{k}}^{(ls)}$. Распределение (12,3), удовлетворяющее уравнению (12,2), не будет тогда удовлетворять уравнению (12,1). Так как, однако, $w^{(e)} \gg w^{(3)}$, w_p, то распределением (12,3) с медленно меняющимися параметрами ζ, n_0, T_s можно приближенно удовлетворить уравнению (12,1). Если тело теплоизолировано от внешней среды. то при этом температуру фононов также следует считать медленно меняющейся функцией времени.

Заметим, что хотя $L_{\mathbf{k}}^{(r)}\{n\}$ значительно меньше $L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n\}$, оператор $L_{\mathbf{k}}^{(r)}\{n\}$ должен быть, тем не менее, сохранен в кинетическом уравнении (12,1). Действительно, время релаксации $\mathfrak{M}_\perp$, как видно из формул (12,4), представляет собой время релаксации спиновых волн с волновым вектором, равным нулю. С другой стороны, процессы слияния двух спиновых волн в одну и расщепления одной спиновой волны на две не могут изменить n_0, если константа анизотропии или внешнее магнитное поле достаточно велики. Рассмотрим, например, расщепление спиновой волны с волновым вектором $\mathbf{k} = 0$ на две спиновые волны с волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}$. Этот процесс невозможен, так как закон сохранения энергии:

$$\varepsilon_0 = 2\varepsilon_k,$$

где $\varepsilon_k = \mu M_0\left(ak^2 + \beta + \frac{H_0}{M_0}\right)$, как легко видеть, в этом случае не может выполняться. Точно так же невозможен процесс слияния спиновой волны с волновым вектором $\mathbf{k}$ со спиновой волной с волновым вектором, равным нулю. Поэтому для вычисления времени релаксации $\mathfrak{M}_\perp$ необходимо учитывать процессы с участием большего числа спиновых волн, причем эти процессы не должны сопровождаться сохранением магнитного момента. Такими процессами являются процессы рассеяния спиновой волны спиновой волной, обусловленные энергией анизотропии и дипольным магнитным взаимодействием, а также процессы слияния трех спиновых волн в одну. Все эти процессы описываются в кинетическом уравнении оператором $L_{\mathbf{k}}^{(r)}\{n\}$.

Наша задача заключается в том, чтобы выяснить, как изменяются со временем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_\perp^2$. Для этого согласно (12,4) нужно найти вид функций $\zeta(t)$, $n_0(t)$ и $T_s(t)$ Величина ζ является химическим потенциалом спиновых волн и определяется их общим числом. Поэтому для нахождения $\dot{\zeta}(t)$ следует воспользоваться уравнением

$$\sum_{\mathbf{k}} \dot{n}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} L_{\mathbf{k}}\{n, N\}. \tag{12,1'}$$

Для получения полной системы уравнений, определяющих как ζ, так и n_0, T_s и T_l, к этому уравнению необходимо присоединить уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{n}_0 &= L_0\{n, N\}, \\ \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}\dot{n}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{f}s} \hbar\omega_{\mathbf{f}s}\dot{N}_{\mathbf{f}s} &= 0, \\ \sum_{\mathbf{f}s} \hbar\omega_{\mathbf{f}s}\dot{N}_{\mathbf{f}s} &= -\sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} L_{\mathbf{k}}\{n\}, \end{aligned}\right\} \tag{12,1''}$$

где

$$N_{\mathbf{f}s} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{f}s}}{T_l}} - 1}.$$

Подставляя в эти уравнения выражения для оператора столкновений $L_{\mathbf{k}}\{n, N\}$ и линеаризуя по малым величинам ζ, $\Delta T = T_s - T_l$ и $\eta = \varepsilon_0 \frac{n_0}{N}$, где N — полное число атомов тела (величина $\frac{n_0}{N}$ считается малой*), но конечной при $N \to \infty$), получим:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\dot{T} + G_1\dot{\zeta} - \frac{1}{C_l}\dot{\eta} &= B_{\zeta\zeta}\zeta + B_{\zeta\eta}\eta + B_{\zeta T}\Delta T, \\ \Delta\dot{T} + G_2\dot{\zeta} + \frac{1}{C_s}\dot{\eta} &= B_{T\zeta}\zeta + B_{T\eta}\eta + B_{TT}\Delta T, \\ \dot{\eta} &= B_{\eta\eta}\eta, \end{aligned}\right\} \tag{12,5}$$

*) Малость n_0/N соответствует малому отклонению $\mathfrak{M}$ от равновесного направления.

где

$$G_1 = -\frac{1}{C_l}\left\{\frac{T}{N}\sum_{\mathbf{k}}\frac{\partial n_k^0}{\partial T} + (C_s + C_l)\frac{\sum\limits_{\mathbf{k}}\frac{\partial n_{\mathbf{k}}^0}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}}{\sum\limits_{\mathbf{k}}\frac{\partial n_{\mathbf{k}}^0}{\partial T}}\right\},$$

$$G_2 = \frac{T}{N}\frac{1}{C_l}\sum_{\mathbf{k}}\frac{\partial n_k^0}{\partial T},$$

$$B_{\zeta\zeta} = A\frac{T}{G_2}\sum_{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial L'_{\mathbf{k}}}{\partial \zeta}\right)_0, \quad B_{T\zeta} = A\sum_{\mathbf{k}}\varepsilon_k\left(\frac{\partial L'_k}{\partial \zeta}\right)_0,$$

$$B_{\zeta\eta} = A\frac{T}{G_2}\sum_{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial L'_{\mathbf{k}}}{\partial \eta}\right)_0, \quad B_{T\eta} = A\sum_{\mathbf{k}}\varepsilon_k\left(\frac{\partial L'_k}{\partial \eta}\right)_0,$$

$$B_{\zeta T} = A\frac{T}{G_2}\sum_{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial L'_{\mathbf{k}}}{\partial \Delta T}\right)_0, \quad B_{TT} = A\sum_{\mathbf{k}}\varepsilon_k\left(\frac{\partial L'_k}{\partial \Delta T}\right)_0,$$

$A = \frac{C_s + C_l}{C_s C_l}\frac{1}{N}$; C_s и C_l—теплоемкости спинов и решетки, отнесенные к одному атому; $n_k^0 = \left(\exp\frac{\varepsilon_k}{T} - 1\right)^{-1}$, $\left(\frac{\partial L'_k}{\partial \zeta}\right)_0$, $\left(\frac{\partial L'_k}{\partial \eta}\right)_0$ и $\left(\frac{\partial L'_k}{\partial \Delta T}\right)_0$ — коэффициенты в разложении

$$L'_{\mathbf{k}}\{n, N\} = \zeta\left(\frac{\partial L'_k}{\partial \zeta}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial L'_{\mathbf{k}}}{\partial \eta}\right)_0 + \Delta T\left(\frac{\partial L'_{\mathbf{k}}}{\partial \Delta T}\right)_0$$

(индекс «0» означает, что значения производных от интеграла столкновений берутся при $\zeta = \eta = \Delta T = 0$).

Предполагая, что величины ζ, η и ΔT изменяются со временем по закону $e^{-\lambda t}$, получим следующие три значения λ:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2(G_2 - G_1)}\{G_1 B_{TT} + B_{\zeta\zeta} - 2G_2 B_{\zeta T} \mp$$
$$\mp [B_{\zeta\zeta}(B_{\zeta\zeta} - 4G_2 B_{\zeta T}) + G_1 B_{TT}(G_1 B_{TT} - 4G_2 B_{\zeta T}) +$$
$$+ 4G_1 G_2 B_{\zeta T}^2 - 2B_{\zeta\zeta}B_{TT}(G_1 - 2G_2)]^{1/2}\}, \qquad \lambda_3 = -B_{\eta\eta}. \quad (12,6)$$

Выражения для λ_1, λ_2 и λ_3 сильно упрощаются, если $T \gg \theta_C\left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{4/7}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1 \approx \frac{\mu M_0}{\hbar}\frac{\mu M_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \theta_C}}\frac{T}{\theta_C},\\
&\lambda_2 \approx \begin{cases} \frac{\hbar}{\varrho a^5}\beta_1^2\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^2 e^{-\frac{\theta_t^2}{4T\theta_C}}, & T \ll \frac{\theta_D^2}{\theta_C},\\ \frac{\hbar}{\varrho a^5}[\beta_1^2 + 2(\beta_1 + \beta_2)^2]\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{5/2}, & T \gg \frac{\theta_D^2}{\theta_C},\end{cases}\\
&\lambda_3 \approx \frac{\mu M_0}{\hbar}\frac{\mu M_0}{\theta_C}\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^2,
\end{aligned}\right\} \quad (12,7)$$

где $\varepsilon_0 = \mu(H_0 + \beta M_0)$.

Приведем численную оценку величин λ_1, λ_2 и λ_3. Полагая $\theta_C \sim 10^3$, $M_0 \approx 10^3$, $\varrho \approx 10$, $a \approx 2\cdot 10^{-8}$, $\theta_D \approx 10^2$, $T \approx 10^2$, получим $\lambda_1 \approx 10^7$, $\lambda_2 \approx 10^9$, $\lambda_3 \approx 10^5$. Отметим, что величины $\lambda_{1,2,3}$ удовлетворяют при $T \gg \frac{\theta_D^2}{\theta_C} \sim 10$ неравенству $\lambda_2 \gg \lambda_1 \gg \lambda_3$.

Определим теперь $\mathfrak{M}(t)$ и $\mathfrak{M}_\perp^2(t)$. Линеаризуя выражение (11,4) для $\mathfrak{M}$ по ΔT, ζ, η, получим:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \overline{\mathfrak{M}} - M_0 V \frac{G_2 c_s c_l}{(c_s + c_l)\, T}\left(\Delta T + G_1 \zeta - \frac{\eta}{c_l}\right), \\ \mathfrak{M}_\perp^2 &= 2\,(M_0 V)^2 \frac{\eta}{\varepsilon_0}, \end{aligned}\right\} \qquad (12,8)$$

где $\overline{\mathfrak{M}}$ — равновесное при данной температуре значение величины магнитного момента тела. Используя далее уравнения (12,5), найдем окончательно:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_\perp^2 &= \mathfrak{M}_{\perp 0}^2 e^{-\lambda_3 t}, \\ \frac{\mathfrak{M} - \overline{\mathfrak{M}}}{M_0 V} &= \frac{\mathfrak{M}_0 - \overline{\mathfrak{M}}}{M_0 V} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\Delta T_0}{T}\frac{\varepsilon_0}{\theta_C}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{1/2}\left(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}\right) + \\ &\quad + \frac{\mathfrak{M}_{\perp 0}^2}{(M_0 V)^2}\left(\frac{\beta}{8}\right)^2\left(\frac{\varepsilon_0}{\theta_C}\right)^{1/2}\frac{T}{\theta_C}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_3 t}\right), \\ \frac{\Delta T}{T} &= \frac{\Delta T_0}{T}\frac{e^{-\lambda_2 t} + \alpha e^{-\lambda_1 t}}{1+\alpha} + 10\,\frac{\mathfrak{M}_0 - \overline{\mathfrak{M}}}{M_0 V}\left(\frac{\varepsilon_0 \theta_C}{T^2}\right)^{1/2}\frac{\theta_C}{T}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) + \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2T}\frac{\mathfrak{M}_{\perp 0}^2}{(M_0 V)^2}\left[\frac{\lambda_3}{c_s \lambda_2}\left(e^{-\lambda_3 t} - e^{-\lambda_1 t}\right) + \beta^2\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)\right], \end{aligned}\right\} \qquad (12,9)$$

где $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_{\perp 0}$ и ΔT_0 — начальные значения величин $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_\perp$ и ΔT; $\alpha = 2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\left(\frac{\varepsilon_0}{T}\right)^{1/2}$. Эти формулы справедливы при $T \gg \theta_D^2/\theta_C$ $\left(\text{полагая } \theta_C \sim 10^3,\ \theta_D \sim 10^2, \text{ найдем } \frac{\theta_D^2}{\theta_C} \sim \theta_C\left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{4/7} \sim 10\right)$.

Так как из трех величин λ_1, λ_2, λ_3 наименьшей является λ_3, то при достаточно больших значениях t изменение со временем всех отклонений происходит по закону $e^{-\lambda_3 t}$.

Из формул (12,9) ясно, что изменение $\mathfrak{M}_\perp$ связано только с константой λ_3. Поэтому величину $\tau_\perp = 2/\lambda_3$ можно трактовать как время релаксации поперечной составляющей магнитного момента. Согласно (12,7)

$$\tau_\perp \approx 2\frac{h}{\mu M_0}\frac{\theta_C}{\mu M_0}\left(\frac{\theta_C}{T}\right)^2. \qquad (12,10)$$

Для выяснения физического смысла константы λ_1 предположим, что $\Delta T_0 = \mathfrak{M}_{\perp 0} = 0$; тогда

$$\mathfrak{M} - \overline{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}_0 - \overline{\mathfrak{M}})\, e^{-\lambda_1 t}. \qquad (12,9')$$

Таким образом, при рассмотренных начальных условиях величина $\tau = \frac{1}{\lambda_1}$ определяет время установления равновесного значения $\mathfrak{M}$. Согласно (12,7)

$$\tau \approx \frac{h}{\mu M_0}\frac{(\varepsilon_0 \theta_C)^{1/2}}{\mu M_0}\frac{\theta_C}{T}. \qquad (12,11)$$

Мы видим, что установление равновесного значения квадрата величины магнитного момента происходит быстрее, чем изменение перпендикулярной составляющей магнитного момента. Иными словами, вначале устанавливается равновесное значение величины магнитного момента, а затем уже происходит поворот магнитного момента к оси легчайшего намагничения. Такой процесс релаксации феноменологически может быть описан с помощью релаксационного члена $\frac{\lambda}{M^2}[\mathbf{M}, [\mathbf{M}, \mathbf{H}^{(e)}]]$ в уравнении Ландау — Лифшица (2,12).

Рассмотрим, наконец, процесс выравнивания температур T_l и T_s. Предполагая, что $\mathfrak{M}_{\perp 0} = \mathfrak{M}_0 = 0$, найдем

$$\Delta T = \Delta T_0 \frac{e^{-\lambda_2 t} + \alpha e^{-\lambda_1 t}}{1+\alpha}. \qquad (12,9'')$$

Так как $\alpha \ll 1$ и $\lambda_2 \gg \lambda_1$, то на начальной стадии выравнивания температур основную роль играет первая экспонента, а на конечной стадии — вторая.

Перейдем теперь к исследованию релаксации магнитного момента в области температур $T \ll \theta_C \left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{4/7}$, предполагая по-прежнему что константа анизотропии или внешнее магнитное поле достаточно велики [5]. При температурах $T \ll \theta_C \left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{4/7}$ имеет место неравенство $w^{(3)} \gg w^{(e)}$, т. е. процессы рассеяния спиновых волн спиновыми волнами, обусловленные обменным взаимодействием, менее существенны, чем процессы слияния и расщепления спиновых волн. Это означает, что в кинетическом уравнении (12,1) главную роль играет оператор $L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n\}$, а интегралы столкновений $L_{\mathbf{k}}^{(e)}\{n\}$, $L_{\mathbf{k}}^{(r)}\{n\}$, $L_{\mathbf{k}}^{(l_s)}\{n, N\}$ можно рассматривать как малое возмущение.

Таким образом, при $T \ll \theta_C \left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{4/7}$ кинетическое уравнение в первом приближении может быть заменено уравнением

$$L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n\} = 0. \qquad (12,12)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$n_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \left(e^{\frac{\varepsilon_k}{T_s}} - 1\right)^{-1}, & k \neq 0 \\ n_0, & k = 0. \end{cases} \qquad (12,12')$$

Заметим, что это решение обращает в нуль также интеграл столкновений $L_{\mathbf{k}}^{(e)}\{n\}$. Время установления распределения (12,12′) по порядку величины равно среднему времени слияния двух спиновых волн $\tau^{(3)}$. За это же время устанавливается равновесное значение абсолютной величины магнитного момента $\mathfrak{M}$.

Параметры T_s и n_0 распределения (12,12′) определяются по-прежнему энергией спинов и поперечной составляющей магнитного момента. Установление полного термодинамического равновесия обусловлено слабыми взаимодействиями, описываемыми в кинетическом уравнении (12,1) интегралами столкновений $L_{\mathbf{k}}^{(r)}$ и $L_{\mathbf{k}}^{(ls)}$. Благодаря этим взаимодействиям магнитный момент тела медленно поворачивается к своему равновесному направлению и выравниваются температуры спиновых волн и решетки.

Используя выражения для функций распределения спиновых волн (12,12′) и фононов, а также кинетическое уравнение (12,1), можно получить следующую систему уравнений для определения величин $\eta = \frac{\varepsilon_0 n_0}{N}$ и $\Delta T = T_s - T_l$:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{T} + \frac{1}{c_s}\dot{\eta} &= B'_{T\eta}\eta + B'_{TT}\Delta T, \\ \dot{\eta} &= B'_{\eta\eta}\eta, \end{aligned} \qquad (12,13)$$

где

$$B'_{TT}=\left(\frac{1}{c_s}+\frac{1}{c_l}\right)\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial L_{\mathbf{k}}}{\partial\Delta T}\right)_0,$$

$$B'_{T\eta}=\left(\frac{1}{c_s}+\frac{1}{c_l}\right)\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial L_{\mathbf{k}}}{\partial\eta}\right)_0,$$

$$B'_{\eta\eta}=\frac{\varepsilon_0}{N}\left(\frac{\partial L_0}{\partial\eta}\right)_0$$

и N — число атомов тела. Если $\varepsilon_0 \ll T \ll \theta_C\left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{4/7}$, то

$$\left.\begin{aligned}
B'_{TT} &\approx -\frac{\hbar\beta_1^2}{\varrho a^5}\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^2 e^{-\frac{\theta_t^2}{4\theta_C T}},\\
B'_{T\eta} &\approx -\frac{\hbar}{\pi^3\varrho a^5}\left(\frac{\gamma\mu M_0}{\theta_t}\right)^2\left(\frac{\varepsilon_0}{T}\right)^2\left(\frac{\theta_t^2}{T\theta_C}\right)^2 e^{-\frac{4\varepsilon_0^2\theta_C}{T\theta_t^2}},\\
B'_{\eta\eta} &\approx \frac{\mu M_0}{\hbar}\frac{\mu M_0}{\theta_C}\left(\frac{T}{\partial_C}\right)^2.
\end{aligned}\right\}\qquad (12,13')$$

Предполагая, что величины η и ΔT изменяются со временем как $e^{-\lambda t}$, получим следующие значения релаксационных констант:

$$\begin{aligned}
\lambda' &= -B'_{\eta\eta}\approx\frac{\mu M_0}{\hbar}\frac{\mu M_0}{\theta_C}\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^2,\\
\lambda'' &= -B'_{TT}\approx\frac{\hbar\beta_1^2}{\varrho a^5}\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^2 e^{-\frac{\theta_t^2}{4\theta_C T}}.
\end{aligned}\qquad (12,14)$$

Изменение со временем величин $\mathfrak{M}_\perp^2$ и ΔT определяется формулами:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_\perp^2 &= \mathfrak{M}_{\perp 0}^2 e^{-\lambda' t},\\
\Delta T &= \Delta T_0 e^{-\lambda'' t}+\frac{1}{2}B'_{T\eta}\left(\frac{\varepsilon_0}{\lambda''}\right)^2\left(\frac{\mathfrak{M}_{\perp 0}}{M_0 V}\right)^2\left(e^{-\lambda' t}-e^{-\lambda'' t}\right).
\end{aligned}\qquad (12,15)$$

Мы видим, что λ' имеет простой физический смысл: $2/\lambda'$ представляет собой время релаксации перпендикулярной составляющей магнитного момента. Отметим, что λ' совпадает с выражением (12,7) для λ_3.

Если отклонение от равновесия связано только с различием между температурами спиновой системы и решетки, а $\mathfrak{M}_{\perp 0}=0$, то время выравнивания температур определяется величиной λ''. Если же $\Delta T_0=0$, а $\mathfrak{M}_{\perp 0}\neq 0$, то в процессе релаксации магнитного момента будут изменяться температуры спиновых волн и фононов за счет перехода в тепло энергии, связанной с отклонением магнитного момента от равновесного направления. Время установления общей температуры в этих условиях равно половине времени релаксации поперечной составляющей магнитного момента.

Полученные результаты относятся к тому случаю, когда константа анизотропии или магнитное поле H_0 достаточно велики. Как уже отмечалось выше, при этом невозможны процессы слияния и расщепления спиновых волн с волновым вектором $\mathbf{k}=0$. В кристаллах с малой константой анизотропии (такими кристаллами являются кристаллы кубической симметрии) и при достаточно слабых полях становится возможным расщепление спиновой волны с волновым вектором $\mathbf{k}=0$ на две спиновые волны с волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}$. Этот процесс может обеспечить поворот магнитного момента к оси легчайшего намагничения, а так как он более вероятен, чем процесс рассеяния спиновых волн, обусловленный энергией анизотропии, то при исследовании релаксации магнитного момента в кристаллах кубической симметрии можно в кинетическом уравнении для спиновых волн не учитывать оператор $L_{\mathbf{k}}^{(r)}\{n\}$.

Рассмотрим более подробно этот случай релаксации[6]. Пусть ферродиэлектрик с кубической симметрией заполняет полупространство, границей которого является одна из кристаллографических плоскостей. Поле $\mathbf{H}_0$ лежит в этой плоскости и направлено вдоль кристаллографической оси. Энергия спиновой волны с волновым вектором $\mathbf{k}=0$ при этом, как мы видели в § 4, равна

$$\varepsilon_0 = \mu\sqrt{(H_0+\beta M_0)(B_0+\beta M_0)}.$$

Расщепление такой волны на две спиновые волны с волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}$ возможно, как видно из закона сохранения энергии

$$\varepsilon_0 = 2\varepsilon_{\mathbf{k}},$$

при выполнении неравенства $\beta+\frac{H_0}{M_0}<\frac{4\pi}{3}$. Полученные ранее результаты относятся к тому случаю, когда $\beta+\frac{H_0}{M_0}>\frac{4\pi}{3}$. Если $\beta+\frac{H_0}{M_0}<\frac{4\pi}{3}$, то требуется специальное вычисление релаксационных констант. Мы не будем производить его здесь, а приведем лишь окончательные результаты:

$$\lambda_1' \approx \begin{cases} \dfrac{\mu M_0}{\hbar}\left(\dfrac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{1/2}\dfrac{T}{\theta_C}\dfrac{1}{\ln\left[2\left(\beta+\dfrac{H_0}{M_0}\right)\right]^{-1}}, & \beta+\dfrac{H_0}{M_0}\ll 1, \\ \dfrac{\mu M_0}{\hbar}\left(\dfrac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{1/2}\dfrac{T}{\theta_C}, & \beta+\dfrac{H_0}{M_0}\sim\dfrac{4\pi}{3}, \end{cases}$$

$$\lambda_2' \approx \begin{cases} \dfrac{\hbar}{\varrho a^5}\beta_1^2\left(\dfrac{T}{\theta_C}\right)^2 e^{-\frac{\theta_t^2}{4T\theta_C}}, & T\ll\dfrac{\theta_D^2}{\theta_C}, \\ \dfrac{\hbar}{\varrho a^5}[\beta_1^2+2(\beta_1+\beta_2)^2]\left(\dfrac{T}{\theta_C}\right)^{5/2}, & T\gg\dfrac{\theta_D^2}{\theta_C}, \end{cases} \tag{12,16}$$

$$\lambda_3' \approx \begin{cases} \dfrac{\mu M_0}{\hbar}\left(\dfrac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{1/2}\dfrac{T}{\theta_C}, & \beta+\dfrac{H_0}{M_0}\ll 1, \\ \dfrac{10^2\mu M_0}{\hbar}\left(\dfrac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{1/2}\dfrac{T}{\theta_C}\left(\dfrac{4\pi}{3}-\beta-\dfrac{H_0}{M_0}\right)^{5/2}, & \left|\beta+\dfrac{H_0}{M_0}-\dfrac{4\pi}{3}\right|\ll 1. \end{cases}$$

Можно показать, что величина $2/\lambda_3'$ имеет смысл времени релаксации поперечной составляющей магнитного момента тела, а $1/\lambda_1'$ — времени релаксации абсолютного значения магнитного момента. Величина λ_3', как и следовало ожидать, обращается в нуль при $\beta+\frac{H_0}{M_0}=\frac{4\pi}{3}$.

Приведем оценку величин λ_1', λ_2', λ_3'. Полагая $\theta_C\sim10^3$, $\theta_D\sim10^2$, $\beta+\frac{H_0}{M_0}\sim1$, $M_0\sim10^3$, $T\sim10^2$, получим $\lambda_1'\sim\lambda_3'\sim10^7\,\textit{сек}^{-1}$, $\lambda_2\sim3\cdot10^8\,\textit{сек}^{-1}$. Таким образом, если $\beta+\frac{H_0}{M_0}$ не слишком близко к $\frac{4\pi}{3}$, то времена релаксации абсолютного значения и поперечной составляющей магнитного момента имеют одинаковый порядок. В этом заключается отличие релаксации в случае малой анизотропии и слабых полей от релаксации в случае большой анизотропии или сильных полей, когда установление равновесного значения магнитного момента происходит значительно быстрее поворота момента к равновесному направлению.

В области температур $T\ll\theta_C\left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{4/7}$ в кинетическом уравнении главную роль играет оператор $L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n\}$. Поэтому в кристаллах с малой магнитной анизотропией, в которых возможен распад спиновой волны с волновым вектором $\mathbf{k}=0$ на две спиновые волны с волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}$, одновременно с установлением бозевского распределения спиновых волн устанавливается равновесное значение магнитного момента.

§ 13. Дисперсия магнитной проницаемости ферромагнитного диэлектрика

В предыдущем параграфе была рассмотрена релаксация магнитного момента. Сложный характер релаксации накладывает существенный отпечаток на частотную зависимость магнитной восприимчивости ферродиэлектрика [1,7]. Мы рассмотрим тот случай, когда переменное магнитное поле поляризовано вдоль направления равновесного магнитного момента, т. е. вычислим продольную составляющую магнитной проницаемости $\chi_3 \equiv \chi_{zz}$. Напомним, что статическое значение этой величины можно получить, дифференцируя магнитный момент единицы объема (3,23) по магнитному полю.

Если частота переменного магнитного поля $h_0 e^{-i\omega t}$ значительно меньше обратного времени релаксации в системе спиновых τ_{ss}, т. е.

$$\omega\tau_{ss} \ll 1, \tag{13,1}$$

то это поле можно рассматривать классически, как причину, выводящую систему спиновых волн из равновесия.

Условие $\omega\tau_{ss} \ll 1$ позволяет представить энергию спиновой волны в виде:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_0 + \theta_C (ak)^2 + \mu h_0 e^{-i\omega t}. \tag{13,2}$$

Это выражение для энергии спиновой волны справедливо, как уже отмечалось, при любых температурах $T \ll \theta_C$, если $\varepsilon_0 \gg 2\pi\mu M_0$. Если $\varepsilon_0 \lesssim 2\pi\mu M_0$, то формулой (13,2) можно пользоваться при $\theta_C \gg T \gg 2\pi\mu M_0$.

Для определения функции распределения спиновых волн $n_{\mathbf{k}}(t)$ служит кинетическое уравнение (12,1).

Рассмотрим низкие температуры $\varepsilon_0 \ll T \ll T_0$, где $T_0 = \theta_C \left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^{4/7}$. В этой области температур, согласно § 11, наиболее вероятными являются процессы слияния двух спиновых волн в одну и расщепления одной спиновой волны на две. Это означает, что $\tau_{ss} \sim \tau_3$ (см. (10,7)).

Согласно § 11, решение кинетического уравнения (12,1) при $\varepsilon_0 \ll T \ll T_0$ следует искать в виде

$$n_{\mathbf{k}} = n^0 \left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{T_s}\right) + n'_{\mathbf{k}} \qquad |n'_{\mathbf{k}}| \ll n^0_{\mathbf{k}}. \tag{13,3}$$

Отметим, что величины $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ и T_s являются здесь медленно меняющимися функциями времени. Такой вид решения означает, что в системе спиновых волн «успевает» устанавливаться квазиравновесное состояние со своей температурой, отличной от температуры решетки. Дисперсия магнитной восприимчивости в этом случае связана с двумя принципиально различными механизмами: во-первых, с зависимостью от времени спиновой температуры T_s, причем диссипация энергии обусловлена передачей энергии фононам; во-вторых, с отклонением функции распределения от ее равновесного значения. Соответственно этому мы запишем χ_3 в виде:

$$\chi_3 = \chi_{3,1} + \chi_{3,2}, \tag{13,4}$$

где $\chi_{3,1}$ обусловлено первым механизмом, а $\chi_{3,2}$ — вторым механизмом. Характерным временем для первого механизма является время выравнивания температур $\tau_{sl} \approx \frac{1}{\lambda_2}$ (см. (12,7)). Характерным временем второго механизма является время спин-спиновой релаксации τ_{ss}. Так как $\tau_{ss} \ll \tau_{sl}$, то при частотах $\omega\tau_{sl} \ll 1$ главную роль в дисперсии магнитной восприимчивости играет спин-фононное взаимодействие, а при частотах $\frac{1}{\tau_{sl}} \ll \omega \ll \frac{1}{\tau_{ss}}$ — отклонение функции распределения от ее равновесного значения.

Для вычисления зависимости температуры T_s от времени надо воспользоваться уравнением теплового баланса, которое можно получить из кинетического уравнения (12,1) с учетом выражений (12,3) и (13,3):

$$\dot{T}_s + \frac{1}{\tau_{sl}}(T_s - T_l) = q\mu\dot{h}, \qquad q \approx 0{,}4, \tag{13,5}$$

где

$$\frac{1}{\tau_{sl}} = \frac{64\beta_1^2}{5\pi^{7/2}\zeta(5/2)} \frac{\theta_C}{\hbar} \frac{T^{7/2}}{\varrho a^3 s_l^2 \theta_C^{5/2}} \exp\left(-\frac{\theta_l^2}{4\theta_C T}\right).$$

Аналогичное уравнение можно получить и для фононной температуры T_l. При этом, однако, возникает вопрос о взаимодействии фононов с внешней средой. Если тепловой контакт очень хорош, то температура решетки не будет изменяться. Мы ограничимся рассмотрением этого случая*).

Из уравнения (13,5) имеем:

$$T_s = T_l + T', \quad T' = -q\frac{i\omega\tau_{sl}}{1 - i\omega\tau_{sl}}\mu h. \tag{13,6}$$

Воспользуемся теперь выражением для магнитного момента (3,23). Если считать $n_{\mathbf{k}} = n^0\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{T_s}\right)$, то

$$\chi_{3,1} = \frac{\partial M}{\partial h} + \frac{\partial M}{\partial T_s}\frac{\partial T_s}{\partial h}. \tag{13,7}$$

Отсюда и из выражения (3,23) имеем:

$$\chi_{3,1} = (\chi_3)_{\text{стат}} - \frac{\partial M}{\partial T_s}\frac{i\omega\tau_{sl}}{1 - i\omega\tau_{sl}}q\mu. \tag{13,8}$$

Вычислим теперь величину $\chi_{3,2}$, связанную с отклонением функции распределения от ее равновесного значения. Этот механизм диссипации существен при сравнительно больших частотах $\omega\tau_{sl} \gg 1$, при которых, однако, еще можно пользоваться формулой (13,2) ввиду справедливости условия (13,1). В кинетическом уравнении (12,1) при этом можно пренебречь членом $L_{\mathbf{k}}^{sl}\{n\} = L_{\mathbf{k}}^{sl}\{n_0\} + L_{\mathbf{k}}^{sl}\{n'\}$. Действительно, первое слагаемое $L_{\mathbf{k}}^{sl}\{n_0\}$ мало по сравнению с $\frac{\partial n_{\mathbf{k}}^0}{\partial t}$, а второе слагаемое $L_{\mathbf{k}}^{sl}\{n'\}$ мало по сравнению с $L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n'\}$, так как $\tau_{ss} \ll \tau_{sl}$. Замечая также, что $L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n_0\} = 0$ и $\frac{\partial n'}{\partial t} \ll L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n'\}$, так как $\omega\tau_{ss} \ll 1$, кинетическое уравнение (12,1) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}^0}{\partial t} = L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n'\}. \tag{13,9}$$

---

*) Отличие τ_{sl} от $1/\lambda_2$ (см. (12,7)) связано с тем, что в § 12 рассмотрено выравнивание температур между спинами и решеткой в случае теплоизоляции системы.

Пренебрежение членом $L_{\mathbf{k}}^{sl}\{n_0\}$ в кинетическом уравнении соответствует пренебрежению теплоотводом в уравнении теплового баланса (13,5). Поэтому при $\omega\tau_{sl} \gg 1$ имеем $\dot{T}_s = q\mu\dot{h}$, и уравнение (13,9) можно записать следующим образом:

$$\left(1 - q\frac{\varepsilon}{T}\right)\frac{\partial n_{\mathbf{k}}^0}{\partial\left(\frac{\varepsilon}{T}\right)}\frac{\mu\dot{h}}{T} = L_{\mathbf{k}}\{n'\} = \frac{1}{\tau_{ss}}L\{n'\}, \tag{13,10}$$

где L—безразмерный оператор столкновений, который легко получается из формулы (10,3), если перейти от суммирования к интегрированию по волновым векторам $\mathbf{k}$, введя безразмерный волновой вектор $\mathbf{x} = \left(\frac{\theta_C}{T}\right)^{1/2} a\mathbf{k}$, а

$$\frac{1}{\tau_{ss}} = \frac{\mu M_0}{\hbar}\frac{\mu M_0}{\theta_C}\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{1/2}. \tag{13,11}$$

Из уравнения (13,10) имеем:

$$n'_{\mathbf{k}} = \tau_{ss}\mu\dot{h}\varphi(\mathbf{x}), \tag{13,12}$$

где $\varphi(\mathbf{x})$ — безразмерная функция безразмерного аргумента, которая не может быть определена без точного решения уравнения (13,10). Эта функция, по-видимому, порядка единицы, так как уравнение для нее не содержит ни малых, ни больших параметров.

Зная зависимость n' от температуры, можно найти зависимость $\chi_{3,2}$ от температуры и частоты. Для этого опять можно воспользоваться выражением для магнитного момента (3,23). Из (3,23) и (13,12) имеем с точностью до численного множителя [7]:

$$\chi_{3,2} \sim i\frac{\mu^2}{a^3\theta_C}\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{1/2}\omega\tau_{ss}. \tag{13,13}$$

Как видно из последнего выражения, в этом случае $\operatorname{Re}\chi_{3,2} = 0$, что связано с пренебрежением членом $\frac{\partial n'}{\partial t}$ в кинетическом уравнении (12,1). Если не пренебрегать этим членом, а интеграл столкновений $L_{\mathbf{k}}^{(3)}$ заменить выражением $\frac{n'}{\tau_{ss}}$, то для $\chi_{3,2}$ будем иметь:

$$\chi_{3,2} \sim i\frac{\mu^2}{a^3\theta_C}\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^{1/2}\frac{\omega\tau_{ss}}{1 - i\omega\tau_{ss}}. \tag{13,14}$$

Это выражение, конечно, менее точно, чем выражение (13,8) для $\chi_{3,1}$.

Сравнивая формулы (13,8) и (13,14), убеждаемся, что $\chi_{3,1}$ и $\chi_{3,2}$ совпадают при $\omega \approx (\tau_{sl}\tau_{ss})^{-1/2}$. При меньших частотах $|\chi_{3,1}| > |\chi_{3,2}|$, при бóльших $|\chi_{3,1}| < |\chi_{3,2}|$.

Рассмотрим теперь случай сравнительно высоких температур [7]: $T_0 \ll T \ll \theta_C$. В этой области температур главную роль во взаимодействии спиновых волн друг с другом играют обменные силы.

Тем не менее в кинетическом уравнении мы не можем отбросить малые релятивистские слагаемые, так как именно они ответственны за дисперсию магнитной восприимчивости.

Решение уравнения (12,1) надо искать в виде (см. § 12):

$$n = n_0^{(0)}\left(\frac{\varepsilon - \zeta}{T_s}\right) + n', \quad |n'| \ll n_0, \tag{13,15}$$

учитывая при этом, что энергия ε, химический потенциал ζ и температура спиновых волн T_s зависят от времени. В дальнейшем мы будем пользоваться формулой (13,2) для энергии спиновой волны, считая ее справедливой и для $\mathbf{k}=0$. Иначе говоря, полученные ниже формулы справедливы при $\varepsilon_0 \gg 2\pi\mu M_0$.

Из уравнения (12,1) с учетом (13,5) легко найти связь между переменной частью температуры T'_s, химическим потенциалом ζ и переменным магнитным полем:

$$(A_{T\zeta} - i\omega qC_s)\, T'_s + (TA_{\zeta\zeta} - i\omega B)\,\zeta = B\mu\dot{h},$$
$$(A_{TT} - i\omega C_s)\, T'_s + (A_{T\zeta} - i\omega C_s)\,\zeta = qC_s\mu\dot{h}. \quad (13,16)$$

Здесь

$$A_{T\zeta} = \frac{\hbar\gamma_1}{6\pi^2\varrho a^5}\left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^2\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^2,$$
$$A_{TT} = \frac{2\pi^2 h}{45\varrho a^5}\,[2\beta_1^2 + (2\beta_1+\beta_2)^2]\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^4, \quad (13,17)$$
$$A_{\zeta\zeta} = \frac{\chi}{\hbar}\left(\frac{\mu M_0}{\theta_C}\right)^2\frac{T^2}{\varepsilon_0\theta_C}, \quad \chi \approx 0,1,$$
$$B = \frac{1}{8\pi}\,\frac{T^2}{\varepsilon_0^{1/2}\theta_C^{3/2}}.$$

С помощью уравнений (13,16) определяем T_s и ζ и, зная их, по формуле для магнитного момента (3,23) — магнитную восприимчивость ферромагнитного диэлектрика:

$$\chi(\omega) = \chi_{\text{стат}}\left\{1 + \frac{i\omega\tau_2(1-i\omega\tau_2)}{1-i\omega\tau_1-\omega^2\tau_1\tau_2}\right\} -$$
$$-\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \frac{i\omega\tau_2(1+iq^*\omega\tau_1)}{1-i\omega\tau_1-\omega^2\tau_1\tau_2}, \quad \tau_1 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\lambda_2}, \quad q^* \approx \frac{3}{2}. \quad (13,18)$$

Может показаться, что имеется еще механизм, приводящий к дисперсии магнитной восприимчивости, обусловленный отклонением функции распределения от ее равновесного значения (аналогично второму механизму при низких температурах). Легко, однако, видеть, что этот механизм всегда несуществен, так как обменные силы, которые играют главную роль в этой области температур, не изменяют величины магнитного момента, а релятивистские взаимодействия учтены в уравнениях (13,16).

Перейдем теперь к рассмотрению высокочастотного случая $\omega \gg \frac{1}{\tau_{ss}}$. Магнитная восприимчивость, как известно[8], с возрастанием частоты стремится к единице. Поэтому при достаточно больших частотах имеет смысл говорить не о вычислении магнитной восприимчивости, а о коэффициенте поглощения фотона Γ, определяемом как разность вероятностей всех процессов поглощения и испускания фотона.

Можно показать[7], что поглощение фотона осуществляется за счет распада последнего на две спиновые волны, причем вероятность этого процесса равна

$$4\pi^2 V\omega\mu^2\,|v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}'}u_{\mathbf{k}}|^2\,(n_{\mathbf{k}}+1)\,(n_{\mathbf{k}'}+1)\,\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}}+\varepsilon_{\mathbf{k}'}-\omega\hbar).$$

Отсюда коэффициент поглощения Γ имеет вид:

$$\Gamma = \sum_{\mathbf{k}} 4\pi^2 V\omega\mu^2\,(n_{\mathbf{k}}+n_{-\mathbf{k}}+1)\,|v_{\mathbf{k}}u_{-\mathbf{k}}+u_{\mathbf{k}}v_{-\mathbf{k}}|\,\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}}+\varepsilon_{-\mathbf{k}}-\hbar\omega). \quad (13,19)$$

При получении последней формулы мы воспользовались тем, что импульс фотона значительно меньше импульсов спиновых волн, и положили его равным нулю.

Расщепление фотона на две спиновые волны может происходить только в том случае, если энергия фотона $\hbar\omega$ больше $2\varepsilon_0$. При $\hbar\omega < 2\varepsilon_0$ поглощение энергии магнитного поля в основном связано с неупругим рассеянием фотона на спиновой волне. Этот процесс крайне маловероятен, так как он имеет место только во втором приближении теории возмущений.

Из выражения (13,19), учтя, что $\varepsilon_{\mathbf{k}}$, $u_{\mathbf{k}}$, $v_{\mathbf{k}}$ — четные функции волнового вектора, находим:

$$\Gamma = \begin{cases} \dfrac{\mu^2 (2\pi\mu M_0)^{3/2}}{2\theta_C^{3/2} a^3 \hbar} \operatorname{cth}\dfrac{\hbar\omega}{4T} I(\nu, \eta), & \nu > \eta, \\ 0, & \nu < \eta, \end{cases} \tag{13,20}$$

где

$$\nu = \frac{\hbar\omega}{4\pi\mu M_0},$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_0}{2\pi\mu M_0},$$

а

$$I = \int_0^{\sigma(\nu, \eta)} \frac{x^2 [\sqrt{x^2+\nu^2} - (x+\eta)]^{1/2}\, dx}{\sqrt{(1-x)(x^2+\nu^2)}},$$

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \nu > \sqrt{\eta^2 + 2\eta}, \\ \dfrac{\nu^2 - \eta^2}{2\eta}, & \eta < \nu < \sqrt{\eta^2+2\eta}. \end{cases}$$

Приведем асимптотические значения интеграла I:

$$I \approx \begin{cases} \dfrac{16}{15}\sqrt{\nu}, & \nu \gg \eta, \\ \dfrac{16}{105}\dfrac{(\nu-\eta)^3}{\eta}, & \nu \gtrsim \eta \gg 1, \\ \dfrac{\pi}{8\sqrt{2}}\sqrt{\eta}\,(\nu-\eta)^2, & \nu \gtrsim \eta, \quad \eta \ll 1. \end{cases} \tag{13,21}$$

Подставляя найденные выражения в формулу (13,20), можно определить частотную зависимость коэффициента поглощения фотона во всех предельных случаях. Выпишем ее только в случае больших частот *):

$$\Gamma \approx \frac{16}{15}\frac{\mu^2}{a^3\hbar}\left(\frac{2\pi\mu M_0}{\theta_C}\right)^{3/2}\left(\frac{2\pi\mu M_0}{\hbar\omega}\right)^{1/2} \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{4T},$$
$$\hbar\omega \gg 2\pi\mu M_0\,\varepsilon_0. \tag{13,22}$$

При энергиях фотона, больших по сравнению с температурой ($\hbar\omega \gg 4T$), коэффициент поглощения убывает пропорционально $\omega^{-3/2}$.

§ 14. Теплопроводность ферродиэлектриков

Зная гамильтонианы взаимодействия спиновых волн друг с другом, а также спиновых волн с фононами и фононов друг с другом, можно вычислить теплопроводность ферродиэлектрика.

Напишем с этой целью кинетические уравнения, определяющие изменения чисел спиновых волн $n_{\mathbf{k}}$ и фононов $N_{\mathbf{k}s}$ при наличии слабого

*) Конечно, при этом $\hbar\omega \ll \theta_C$.

градиента температуры ∇T. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\dot{n}_{\mathbf{k}}^{\text{ст}} \equiv L_{\mathbf{k}}^{ss}\{n\} + L_{\mathbf{k}}^{sl}\{n,\ N\} = n_{\mathbf{k}}^{0}(n_{\mathbf{k}}^{0}+1)\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{T^2}(\mathbf{v}_{\mathbf{k}},\ \nabla T),\\ \dot{N}_{\mathbf{k}s}^{\text{ст}} \equiv L_{\mathbf{k}s}^{ll}\{N\} + L_{\mathbf{k}s}^{sl}\{n,\ N\} = N_{\mathbf{k}s}^{0}(N_{\mathbf{k}s}^{0}+1)\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}s}}{T^2}(s_{\mathbf{k}s},\ \nabla T),\end{gathered} \tag{14,1}$$

где $\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}}$ и $\mathbf{s}_{\mathbf{k}s} = \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}s}}{\partial \mathbf{k}}$; операторы $L_{\mathbf{k}}^{ss}\{n\}$ и $L_{\mathbf{k}}^{sl}\{n,\ N\}$ описывают столкновения спиновых волн друг с другом и спиновых волн с фононами, а операторы $L_{\mathbf{k}s}^{ll}\{N\}$ и $L_{\mathbf{k}s}^{ls}\{n,\ N\}$ — столкновения фононов друг с другом и спиновыми волнами.

Операторы $L_{\mathbf{k}}^{ss}\{n\} = L_{\mathbf{k}}^{(e)}\{n\} + L_{\mathbf{k}}^{(3)}\{n\}$ и $L_{\mathbf{k}}^{sl}\{n,\ N\}$ определяются формулами (10,3), (10,10′), (11,7), в которых, однако, необходимо учитывать процессы переброса. Это значит, что в этих формулах функция $\Delta(\sum \mathbf{k})$ должна быть заменена функцией $\Delta(\sum \mathbf{k} - 2\pi n \boldsymbol{\tau})$, где $\boldsymbol{\tau}$ — вектор обратной решетки, а n — целое число, и должно быть произведено суммирование по всем значениям n.

Оператор $L_{\mathbf{k}s}^{ls}\{n,\ N\}$ может быть получен с помощью гамильтониана (11,5) и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}L_1^{ls}\{n,\ N\} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{23;\ n} |\Psi_{1,\ 23}|^2[(N_1+1)(n_2+1)\,n_3 - N_1 n_2(n_3+1)]\times\\ \times\delta(\hbar\omega_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-2\pi n\boldsymbol{\tau}).\end{aligned} \tag{14,2}$$

Оператор $L_{\mathbf{k}s}^{ll}\{N\}$ при учете только процессов слияния двух фононов в один и расщепления одного фонона на два определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned}&L_{\mathbf{k}_1}^{ll}\{N\} =\\ &= \frac{8\pi}{\hbar}\sum_{2\ 3;\ n}\{|X_{12,\ 3}|^2[(N_1+1)(N_2+1)N_3 - N_1N_2(N_3+1)]\,\delta(\hbar\omega_1+\hbar\omega_2-\hbar\omega_3)\times\\ &\times\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-2\pi n\boldsymbol{\tau}) + |X_{13,\ 2}|^2[(N_1+1)(N_3+1)N_2 - N_1N_3(N_2+1)]\times\\ &\times\delta(\hbar\omega_1+\hbar\omega_3-\hbar\omega_2)\,\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_2-2\pi n\boldsymbol{\tau})+\\ &\qquad+|X_{23,\ 1}|^2[(N_1+1)N_2N_3 - N_1(N_2+1)(N_3+1)]\times\\ &\qquad\qquad\times\delta(\hbar\omega_2+\hbar\omega_3-\hbar\omega_1)\,\Delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-2\pi n\boldsymbol{\tau})\},\end{aligned} \tag{14,3}$$

где величина $X_{12,\ 3}$ равна

$$X_{12,\ 3} = A_{12,\ 3}\frac{\hbar^{3/2}s^2}{\varrho^{1/2}V^{1/2}}\frac{k_1k_2k_3}{\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3}} \tag{14,4}$$

и $A_{12,\ 3}$ — безразмерная величина порядка единицы, зависящая от поляризаций и направлений волновых векторов фононов, участвующих в процессе столкновения.

Приравняв $\dot{n}_{\mathbf{k}}^{\text{ст}}$ и $\dot{N}_{\mathbf{k}s}^{\text{ст}}$ нулю, мы получим уравнения для определения стационарных распределений спиновых волн и фононов.

Если при этом в интегралах столкновений не учитывать процессов переброса, то стационарные распределения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\tilde{n}_{\mathbf{k}} &= \{e^{\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}+\mathbf{kg}}{T}} - 1\}^{-1},\\ \tilde{N}_{\mathbf{k}s} &= \{e^{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}s}+\mathbf{kg}}{T}} - 1\}^{-1},\end{aligned} \tag{14,5}$$

где $\mathbf{g}$ — произвольный постоянный вектор, который определяется суммарным импульсом спиновых волн и фононов.

Этим распределе иям соответствует, очевидно, тепловой поток

$$S = \sum_{\mathbf{k}s} \hbar\omega_{\mathbf{k}s}\mathbf{s}_{\mathbf{k}s}\tilde{N}_{\mathbf{k}s} + \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}\mathbf{v}_{\mathbf{k}}\tilde{n}_{\mathbf{k}},$$

который при $\mathbf{g} \neq 0$ отличен от нуля в отсутствие градиента температуры *). Такой вывод связан с тем, что при определении стационарного распределения спиновых волн и фононов мы не учитывали процессов переброса, при которых нарушается закон сохранения квазиимпульса. Это значит, что без учета процессов переброса мы получим для коэффициента теплопроводности бесконечную величину [9].

При учете процессов переброса уравнения

$$\dot{n}_{\mathbf{k}}^{\text{ст}} = 0, \quad \dot{N}_{\mathbf{k}s}^{\text{ст}} = 0$$

удовлетворятся только в том случае, если $\mathbf{g} = 0$, и поэтому при $\nabla T = 0$ тепловой поток обращается в нуль.

Решения уравнений (14,1) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{k}} &= n_{\mathbf{k}}^0 + n_{\mathbf{k}}^0 (n_{\mathbf{k}}^0 + 1) \frac{\varphi_{\mathbf{k}}}{T},\\ N_{\mathbf{k}s} &= N_{\mathbf{k}s}^0 + N_{\mathbf{k}s}^0 (N_{\mathbf{k}s}^0 + 1) \frac{\Phi_{\mathbf{k}}}{T}.\end{aligned} \tag{14,6}$$

Если градиент температуры ∇T мал, то малыми будут также добавки к равновесным функциям. Поэтому интегралы столкновений в уравнениях (14,1) могут быть линеаризованы относительно $\varphi_{\mathbf{k}}$ и $\Phi_{\mathbf{k}}$. В результате мы получим следующие уравнения для определения $\varphi_{\mathbf{k}}$ и $\Phi_{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}(n_1^0+1)\, n_1^0 \frac{\varepsilon_1}{T} (\mathbf{v}_1, \nabla T) = &-\frac{96\pi}{\hbar} \sum_{234,\,n} |\Phi_{12,\,34} + \Phi_{34,\,12}^*| (n_1+1)(n_2+1) n_3 n_4 \times\\ &\times (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4)\, \delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\, \Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4-2\pi n\boldsymbol{\tau}) -\\ &-\frac{8\pi}{\hbar} \sum_{23,\,n} \{|\Phi_{12,\,3}|^2 (n_1+1)(n_2+1) n_3 (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)\, \delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3) \times\\ &\times \Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-2\pi n\boldsymbol{\tau}) + |\Phi_{13,\,2}|^2 (n_1+1)(n_3+1) n_2 (\varphi_1+\varphi_3-\varphi_2) \times\\ &\times \delta(\varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2)\, \Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_2-2\pi n\boldsymbol{\tau}) +\\ &+ |\Phi_{23,\,1}|^2 (n_1+1) n_2 n_3 (\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3)\, \delta(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3)\, \Delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-2\pi n\boldsymbol{\tau})\} -\\ &-\frac{2\pi}{\hbar} \sum_{23,\,n} \{|\Psi_{12,\,3}|^2 (n_1+1) n_2 N_3 (\varphi_1-\varphi_2-\Phi_3)\, \delta(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\hbar\omega_3) \times\\ &\times \Delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-2\pi n\boldsymbol{\tau}) + |\Psi_{12,\,3}|^2 (n_1+1) n_2 (N_3+1)(\varphi_1+\Phi_3-\varphi_2) \times\\ &\times \delta(\varepsilon_1+\hbar\omega_3-\varepsilon_2)\, \Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_2-2\pi n\boldsymbol{\tau})\},\end{aligned} \tag{14,7}$$

*) Тело как целое предполагается покоящимся.

$$(N_1+1)N_1\frac{\hbar\omega_1}{T}(\mathbf{s}_1,\nabla T)=-\frac{8\pi}{\hbar}\sum_{2\,3;\,n}\{|X_{12,\,3}|^2(N_1+1)(N_2+1)N_3(\Phi_1+\Phi_2-$$
$$-\Phi_3)\,\delta(\hbar\omega_1+\hbar\omega_2-\hbar\omega_3)\,\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-2\pi n\boldsymbol{\tau})+$$
$$+|X_{13,\,2}|^2(N_1+1)(N_3+1)N_2(\Phi_1+\Phi_3-\Phi_2)\,\delta(\hbar\omega_1+\hbar\omega_3-\hbar\omega_2)\times$$
$$\times\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_2-2\pi n\boldsymbol{\tau})+|X_{23,\,1}|^2(N_1+1)N_2N_3(\Phi_1-\Phi_2-\Phi_3)\times$$
$$\times\delta(\hbar\omega_1-\hbar\omega_2-\hbar\omega_3)\,\Delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-2\pi n\boldsymbol{\tau})\}-$$
$$-\frac{2\pi}{\hbar}\sum_{23,\,n}|\Psi_{23,\,1}|^2(N_1+1)(n_2+1)n_3(\Phi_1+\varphi_2-\varphi_3)\times$$
$$\times\delta(\hbar\omega_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)\,\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-2\pi n\boldsymbol{\tau}). \qquad (14,8)$$

Покажем, что главная часть функций $\varphi_{\mathbf{k}}$ и $\Phi_{\mathbf{k}}$ имеет следующий вид[10]:

$$\varphi_{\mathbf{k}}^0=\Phi_{\mathbf{k}}^0=\mathbf{k}\mathbf{g}, \qquad (14,9)$$

где g — некоторый постоянный вектор, пропорциональный градиенту температуры. Эта главная часть функций $\varphi_{\mathbf{k}}$ и $\Phi_{\mathbf{k}}$ соответствует стационарным функциям вида (14,5), в которых произведено разложение в ряд по степеням $\mathbf{g}$ и сохранены первые два члена.

Чтобы убедиться в том, что поправки к $\varphi_{\mathbf{k}}^0$ и $\Phi_{\mathbf{k}}^0$ малы, запишем систему уравнений (14,7), (14,8) схематически в виде уравнения с одной неизвестной функцией:

$$L_0(\varphi)+\xi L_u(\varphi)=n(n+1)\frac{\varepsilon}{T}(\mathbf{v},\nabla T). \qquad (14,10)$$

где L_0 — оператор столкновений без учета процессов переброса, L_u — оператор столкновений, описывающий процессы переброса, и ξ — малый параметр, характеризующий вероятность процессов переброса. Оператор L_0 отличается тем свойством, что $L_0(\varphi_0)=0$, если $\varphi_0=\mathbf{g}\mathbf{k}$.

Будем искать решение уравнения (14,10) в виде $\varphi=\mathbf{g}\mathbf{k}+\varphi'$ и подберем $\mathbf{g}$ из условия

$$\xi\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{k}L_u(\mathbf{g}\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{k}}n(n+1)\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{T}\mathbf{k}(\mathbf{v}_{\mathbf{k}},\nabla T). \qquad (14,11)$$

Левая часть этого соотношения определяет изменение импульса системы в единицу времени в результате столкновений, а правая часть — изменение импульса системы благодаря наличию градиента температуры. Из уравнения (14,11) следует, что $g\sim\frac{1}{\xi}\nabla T$. Покажем теперь, что $\varphi'\ll\varphi_0$. При $\xi\ll 1$ уравнение для определения φ' имеет вид:

$$L_0(\varphi')=n(n+1)\frac{\varepsilon}{T}(\mathbf{v},\nabla T)+\xi L_u(g\mathbf{k}).$$

Так как это уравнение не содержит малого параметра ($\xi g\sim 1$), то φ' будет равно по порядку величины единице, в то время как φ_0 обратно пропорционально ξ.

Возвращаемся теперь к исходной системе уравнений (14,7), (14,8). Для того чтобы найти вектор $\mathbf{g}$, в соответствии с условием (14,11) следует умножить кинетические уравнения (14,7) и (14,8) на волновой вектор $\mathbf{k}$ и сложить их. В результате мы получим следующее уравнение для определения вектора g:

$$\mathbf{R}_l+\mathbf{R}_s=A\mathbf{g}, \qquad (14,12)$$

где

$$\mathbf{R}_s=\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k}}+1)\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{T}\mathbf{k}(v_{\mathbf{k}},\ \nabla T),$$

$$\mathbf{R}_l=\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}s} N_{\mathbf{k}s}(N_{\mathbf{k}s}+1)\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}s}}{T}\mathbf{k}(\mathbf{s}_{\mathbf{k}s},\ \nabla T).$$

$$A=L^{ss}+L^{sl}+L^{ll},$$

$$L^{ss}=\frac{24\pi}{\hbar V}(2\pi\tau)^2\sum_{1234}|\Phi_{12,\,34}+\Phi^*_{34,\,12}|^2(n_1+1)(n_2+1)\times$$
$$\times n_3 n_4\,\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4-2\pi\boldsymbol{\tau})+$$
$$+\frac{8\pi}{\hbar V}(2\pi\tau)^2\sum_{123}|\Phi_{12,\,3}|^2(n_1+1)(n_2+1)\,n_3\,\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)\times$$
$$\times\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-2\pi\boldsymbol{\tau}),$$

$$L^{sl}=\frac{2\pi}{\hbar V}(2\pi\tau)^2\sum_{123}|\Psi_{12,3}|^2(n_1+1)\,n_2N_3\delta(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\hbar\omega_3)\,\Delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-2\pi\boldsymbol{\tau}),$$

$$L^{ll}=\frac{8\pi}{\hbar V}(2\pi\tau)^2\sum_{123}|X_{12,\,3}|^2(N_1+1)(N_2+1)\,N_3\delta(\hbar\omega_1+\hbar\omega_2-\hbar\omega_3)\times$$
$$\times\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-2\pi\boldsymbol{\tau}).$$

В выражениях L мы учитываем слагаемые с наименьшим n, отличным от нуля, т. е. $n=1$. Величины $\mathbf{R}_s$ и $\mathbf{R}_l$ легко вычислить:

$$\mathbf{R}_s=\frac{2}{3a^2}\frac{T}{\hbar}C_s\nabla T,\qquad \mathbf{R}_l=\frac{1}{3a^3}\frac{T}{\hbar}C_l\nabla T. \tag{14,13}$$

Поэтому $\mathbf{g}$ равно

$$\mathbf{g}=\frac{C_l+2C_s}{3A}\frac{T}{\hbar}\nabla T. \tag{14,14}$$

Используя формулы (14,6) для $n_{\mathbf{k}}$ и $N_{\mathbf{k}s}$ и формулу (14,14) для $\mathbf{g}$, получим следующее выражение для теплового потока:

$$S=\sum\varepsilon_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}+\sum\hbar\omega_{\mathbf{k}_s}N_{\mathbf{k}_s}\mathbf{s}_{\mathbf{k}_s}=-\frac{V}{a^3}\left(\frac{T}{\hbar}\right)^2\left(\frac{2}{3}C_s+\frac{1}{3}C_l\right)^2\frac{1}{A}\nabla T.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{S}=-V\varkappa\nabla T,$$

где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности. Поэтому

$$\varkappa=\left(\frac{T}{\hbar}\right)^2\left(\frac{2}{3}C_s+\frac{1}{3}C_l\right)^2\frac{1}{a^3A}. \tag{14,15}$$

Оценим теперь величину A. Так как при несохранении квазиимпульса не могут быть одновременно малыми все компоненты квазиимпульсов сталкивающихся частиц, то величины L должны содержать экспоненциальные множители. Показатели этих множителей определяются, очевидно, наименьшими значениями величин $\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\hbar\omega_1+\hbar\omega_2$ и $\hbar\omega_1+\varepsilon_2$ в соответствующих областях интегрирования. Найти в общем виде эти наименьшие значения нельзя, так как для этого необходимо знать точные законы дисперсии спиновых волн и фононов в области больших волновых векторов. Можно, однако, утверждать, что по порядку величины наименьшие значения $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ и $\hbar\omega_1+\hbar\omega_2$ равны θ_C и θ_D.

Поэтому величины L^{ss} и L^{ll} можно записать в виде:

$$L^{ss}=\alpha_s \frac{\theta_C}{\hbar}\frac{V}{a^5}\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^s e^{-\gamma_s \frac{\theta_C}{T}}, \qquad (14,16)$$

$$L^{ll}=\alpha_l \frac{\hbar}{\varrho a^5}\frac{V}{a^5}\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^l e^{-\gamma_l \frac{\theta_D}{T}}, \qquad (14,17)$$

где γ_s, γ_l и α_s, α_l по порядку величины равны единице, а степени предэкспоненциальных множителей зависят от того, где достигают наименьшего значения величины $\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\hbar\omega_1+\hbar\omega_2$ внутри области интегрирования, когда оба квазиимпульса $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ велики или при $k_1=\frac{\pi}{b}$, $k_2 \ll \frac{\pi}{b}$. Если считать, что $\varepsilon(\mathbf{k})=\theta_C(ak)^2$ и $\omega_{\mathbf{k}s}=s_s k$ вплоть до $k=\frac{\pi}{a}$, то величины s и l будут равны $s=4$, $l=2$ и $\gamma_s={}^1/_2$, $\gamma_l=1$.

Оценим теперь величину L^{sl} в двух предельных случаях, когда $\theta_D \gg \theta_C$ и $\theta_D \ll \theta_C$. Если $\theta_D \ll \theta_C$, то, как следует из законов сохранения,

$$\varepsilon_1+\hbar\omega_2=\varepsilon_3 \text{ и } \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+2\pi\boldsymbol{\tau},$$

$$-\pi\tau \leqslant k_j \leqslant \pi\tau, \quad k_1 \approx k_3 \approx \pi\tau, \quad k_1 \ll \pi\tau$$

и поэтому

$$\varepsilon_1+\hbar\omega_2 \approx \theta_C.$$

Таким образом, при $\theta_C \gg \theta_D$ показатель экспоненты в выражении для L^{sl} равен по порядку величины θ_C и L^{sl} имеет вид:

$$L^{sl} \simeq \alpha \frac{\hbar}{\varrho a^5}\frac{V}{a^5}\left(\frac{T}{\theta_C}\right)^n\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^m e^{-\gamma \frac{\theta_C}{T}}. \qquad (14,18)$$

Заметим, что если бы квадратичный закон дисперсии для спиновых волн и линейный закон дисперсии для фононов были справедливы вплоть до $k=\pi\tau$, то величины n, m и γ имели бы следующие значения:

$$n=1, \qquad m=2, \qquad \gamma=\frac{1}{4}.$$

Легко показать, что в предельном случае $\theta_D \gg \theta_C$ излучение фонона спиновой волной невозможно; поэтому при $\theta_D \gg \theta_C$ величина $L^{sl}=0$.

Сравнение выражений (14,16), (14,17) и (14,18) для L^{ss}, L^{ll} и L^{ls} показывает, что если $\theta_C \gg \theta_D$, то $L^{ll} \gg L^{ss}$, L^{sl}; если $\theta_C \ll \theta_D$, то $L^{ss} \gg L^{ll}$, L^{ls}. Поэтому в рассматриваемых предельных случаях коэффициент теплопроводности определяется следующими формулами:

$$\varkappa \approx \frac{4}{9}\frac{T}{a\hbar} e^{\frac{\theta_C}{2T}} C_s^2, \qquad \theta_D \gg \theta_C. \qquad (14,19)$$

Если $\theta_D \ll \theta_C$, то

$$\varkappa \approx \frac{ms^2}{9a\hbar} e^{\frac{\theta_D}{T}} \cdot \begin{cases} 4C_s^2, & T \ll \dfrac{\theta_D^2}{\theta_C}, \\ C_l^2, & \theta_D \gg T \gg \dfrac{\theta_D^2}{\theta_C}. \end{cases} \qquad (14,20)$$

Отметим, что при $T \ll \frac{\theta_D^2}{\theta_C}$ основную роль в теплопроводности играют спиновые волны, так как при этом $C_s \gg C_l$. Если же $\theta_D \gg T \gg \frac{\theta_D^2}{\theta_C}$, то тепло переносится фононами, так как при этом $C_s \ll C_l$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА II

1. А. Ахиезер, J. Phys. USSR **10**, 217 (1946).
2. М. Каганов, В. Цукерник, ЖЭТФ **35**, 474 (1958).
3. А. Ахиезер, В. Барьяхтар, С. Пелетминский, ЖЭТФ **36**, 216 (1959).
4. М. Каганов, В. Цукерник, ЖЭТФ **36**, 224 (1959).
5. В. Барьяхтар, ЖЭТФ **37**. 690 (1959).
6. В. Барьяхтар, Г. Урушадзе, ЖЭТФ **38**, 1253 (1960).
7. М. Каганов, В. Цукерник, ЖЭТФ **37**, 829 (1959).
8. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
9. А. Ахиезер, Л. Шишкин, ЖЭТФ **34**, 1267 (1958); А. Ахиезер, В. Барьяхтар, Физ. твердого тела, **2**, 2442 (1960).
10. А. Ахиезер, ЖЭТФ **10**, 1934 (1940).