1960 г. Июнь **Т. LXXI, вып. 2**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ТЕОРЕМА *TCP* И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *)

Г. Граверт, Г. Людерс, Г. Рольник

ВВЕДЕНИЕ

В квантовой теории поля вводятся различные унитарные или антиунитарные операторы симметрии в гильбертовом пространстве физических состояний. Предметом этой статьи служат три дискретных преобразования симметрии: пространственное отражение P, отражение времени T и зарядовое сопряжение C (точнее, замена частиц античастицами). Физический смысл этих преобразований заключается в следующем. П р о с т р а н с т в е н н о е о т р а ж е н и е P: состояние частиц с пространственными координатами $\mathbf{r}_i$, импульсами $\mathbf{p}_i$ и проекциями спинов σ_i (для спинов, отличных от нуля) преобразуется в состояние тех же частиц с координатами $-\mathbf{r}_i$, импульсами $-\mathbf{p}_i$ и прежними проекциями спинов σ_i. О т р а ж е н и е в р е м е н и T: состояние частиц с координатами $\mathbf{r}_i$, импульсами $\mathbf{p}_i$ и проекциями спинов σ_i преобразуется в состояние тех же частиц с прежними координатами $\mathbf{r}_i$, но с импульсами $-\mathbf{p}_i$ и обратными по знаку проекциями спинов $-\sigma_i$. Кроме того, направление времени изменяется на обратное, т. е. падающие частицы заменяются уходящими частицами и наоборот. З а р я д о в о е с о п р я ж е н и е C: частицы преобразуются в соответствующие античастицы без изменения пространственных координат $\mathbf{r}_i$, импульсов $\mathbf{p}_i$ и спинов σ_i.

Точные определения и свойства операторов симметрии и их произведений для свободных полей излагаются в главе I.

Постулат инвариантности квантовой теории поля относительно этих преобразований накладывает определенные ограничения на гамильтониан взаимодействия. При этом важно, что инвариантность относительно преобразования TCP обеспечивается всегда и не накладывает никаких ограничений на константы связи.

Теорема TCP гласит (пока мы приводим предварительный вариант): локальная теория квантового поля, инвариантная относительно лоренцовых вращений и включающая в себя обычную причинную коммутативность или антикоммутативность операторов поля, всегда инвариантна относительно произведения преобразований TCP. Подробное обсуждение этой теоремы в ее различных вариантах проводится в главе II.

Физически теорема TCP, например, означает, что равны между собой вероятности перехода для следующих двух процессов:

1) в результате взаимодействия частиц в точках с координатами $\mathbf{r}_i$, импульсами $\mathbf{p}_i$ и спинами σ_i образуются частицы в точках с координатами $\mathbf{r}_i'$, импульсами $\mathbf{p}_i'$ и спинами σ_i', 2) в результате взаимодействия соответствующих античастиц в точках с координатами $-\mathbf{r}_i'$, импульсами $\mathbf{p}_i'$ и

*) Fortschritte der Physik 7, 291—328 (1959). Перевод А. А. Сазыкина. Под редакцией Я. А. Смородинского.

спинами $-\sigma_i'$ образуются античастицы в точках с координатами $-\mathbf{r}_i$, импульсами $\mathbf{p}_i$ и спинами $-\sigma_i$.

Общий результат, содержащийся в теореме, был получен уже несколько лет тому назад, когда инвариантность квантовой теории поля относительно всех трех преобразований по отдельности не подвергалась сомнению. Сначала было показано на двух примерах, что в теории, инвариантной относительно преобразований Лоренца и P, постулат T-инвариантности, с одной стороны, и постулат C-инвариантности, с другой стороны, накладывают на гамильтониан взаимодействия в точности одинаковые ограничения. Биденхарн и Розе [1], а также Толхук и де Гроот [2] исследовали наиболее общее для того времени выражение для взаимодействия между четырьмя спинорными полями

$$H_{\text{вз}} = \sum_i g_i \bar{\psi}(1)\, O_i \varphi(2)\, \bar{\psi}(3)\, O_i \varphi(4)$$

(значком i здесь пронумерованы хорошо известные инварианты S, V, T, A, P). Как из T-инвариантности, так и из C-инвариантности следует, что все пять постоянных связи g_i действительны с точностью до общего фазового множителя. Посредством аналогичных рассуждений было показано, что, принимая постулат T-инвариантности либо C-инвариантности, нельзя построить связь между нейтральным скалярным (или псевдоскалярным) бозонным полем и полем Дирака одновременно с производными и без них (Людерс, Эме, Тирринг [3]; Пайс, Йост [4]; Людерс [5]). Опираясь на эти результаты, Людерс [5,6] предположил и доказал, что всякая P-инвариантная релятивистская теория квантового поля автоматически инвариантна относительно произведения CT. Паули [7] обобщил этот результат, отказавшись от предположения о P-инвариантности. Постулируя лишь инвариантность относительно собственных преобразований Лоренца, он доказал инвариантность относительно TCP. Аналогичное доказательство содержится в статье Белла [8]. В доказательстве Паули применяется только алгебра операторов и используется инверсия порядка операторов поля — преобразование, которое трудно представить оператором в гильбертовом пространстве.

Дополняя преобразование Паули эрмитовым сопряжением, можно доказать инвариантность теории относительно антиунитарного оператора TCP в гильбертовом пространстве (Людерс [6,9]). Наконец, Йост [10] дал хорошее доказательство теоремы для варианта теории поля, в котором исходным пунктом являются усредненные по вакууму значения произведений операторов. (Теорема содержалась, но не была явно сформулирована в некоторых работах Швингера [11].)

Первоначально теорема TCP представляла, в общем, лишь академический интерес. Большее значение она приобрела в связи с открытием несохранения четности при слабых взаимодействиях. В главе III обсуждаются некоторые следствия теоремы. Прежде всего показывается, что с помощью преобразования TCP можно доказать наличие частиц и античастиц в теориях квантованных релятивистских полей при условии, что существует некий обобщенный заряд. Предположение о существовании обобщенного заряда абсолютно необходимо для доказательства существования «одетых» частиц и античастиц даже в том случае, если предполагается C-инвариантность или CP-инвариантность. Далее обсуждается роль теоремы TCP в связи с эмпирическим анализом различных свойств симметрии. С одной стороны, если четность не сохраняется, то по крайней мере одно из двух других свойств симметрии (T, C) также не должно сохраняться. С другой стороны, при некоторых дополнительных предположениях теорему TCP можно использовать для косвенной проверки C-инвариантности (посредством проверки TP).

I. ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИММЕТРИИ *)

Рассмотрим теорию квантового поля, инвариантную относительно собственных (неоднородных) преобразований Лоренца $\mathfrak{L}_c$, и зададим вопрос о дополнительных свойствах симметрии, существующих в теории. Для ясного ответа на этот вопрос необходимо, очевидно, помимо законов преобразования, сформулировать все физические предположения, которые выполняются для рассматриваемых полей. Некое, довольно слабое предположение, позволяющее получить дополнительные свойства симметрии, содержится в теореме TCP. Однако для математической формулировки операций C, P и T по отдельности примем наиболее сильное предположение о нашей теории поля: будем рассматривать только свободные частицы, т. е. тем самым только линейные уравнения поля.

На первый взгляд нашу задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо построить все преобразования симметрии U, унитарные или антиунитарные[12], преобразующие операторы поля $\varphi_r(x)$ (значок r нумерует независимые компоненты поля) в $\varphi_r'(x')$, причем пространственно-временные координаты x' получаются посредством одного из четырех дискретных преобразований Лоренца: тождества E ($x_\mu'=x_\mu$); пространственного отражения P ($x_k'=-x_k$, $x_4'=x_4$**)); обращения времени T ($x_k'=x_k$, $x_4'=-x_4$); инверсии PT ($x_\mu'=-x_\mu$). Однако, мы немедленно покажем, что таким образом получается значительно более широкий класс преобразований симметрии, чем обычно рассматриваемый. Имея в виду применение преобразований к взаимодействующим полям, мы с самого начала ограничимся локальными преобразованиями симметрии, в которых $\varphi_{r'}'(x)$ связывается с $\varphi_r(x)$ линейным преобразованием вида

$$\varphi_{r'}'(x')=\sum_r a_{r'r}\varphi_r(x). \tag{1}$$

Таким образом, мы исключаем из рассмотрения линейные интегральные преобразования. В «нормальном» случае поля с неисчезающей массой дополнительное предположение о локальности приводит точно к группе симметрии, состоящей из зарядового сопряжения, пространственного отражения и обращения времени. Для нулевой массы, кроме того, получается так называемая группа Паули — Перси. Мы ограничим наши вычисления типичными примерами комплексного скалярного поля и спинорного поля Дирака.

1. Пространственно-временные координаты фиксированы: зарядовое сопряжение

а) *Скалярное поле*

Рассмотрим поле $\varphi(x)$, инвариантное относительно собственных преобразований Лоренца. В общем случае $\varphi(x)$ — это неэрмитов оператор***), подчиняющийся уравнениям

$$(\Box-\mu^2)\varphi(x)=0,\quad [\varphi^\dagger(x_1),\ \varphi(x_2)]=i\Delta(x_1-x_2). \tag{2}$$

Оператор U, преобразующий $\varphi(x)$ в $\varphi'(x)$, должен коммутировать

*) Главы I—II написаны Г. Гравертом и Г. Рольником, глава III— Г. Людерсом.

**) Латинские индексы принимают значения от 1 до 3, греческие — от 1 до 4.

***) Может быть, не лишне подчеркнуть, что в неквантованной теории неэрмитову оператору отвечает комплексная волновая функция, а эрмитову — вещественная. (*Прим. перев.*)

с энергией-импульсом. Следовательно, вакуум инвариантен относительно U (с точностью до фазового множителя, который мы положим равным единице). Далее, оператор U должен действовать на базисные векторы гильбертова пространства одной частицы следующим образом:

$$\Phi'_\sigma(k) \equiv U\Phi_\sigma(k) = \sum_{\sigma'=-} \alpha_{\sigma\sigma'}\Phi_{\sigma'}(k) \qquad (\sigma = \pm). \tag{3}$$

Значок «σ» различает две частицы, которые описываются неэрмитовым полем $\varphi(x)$. В силу унитарности или антиунитарности U матрица $\alpha_{\sigma\sigma'}$ должна быть унитарной (см. Приложение 1). Из формулы (3) получаем для операторов рождения *)

$$a_\sigma^{\dagger\prime}(k) = \sum_{\sigma'} \alpha_{\sigma\sigma'},\ a_{\sigma'}^\dagger(k) = Ua_\sigma^\dagger(k)U^\dagger. \tag{3'}$$

Если задать $\alpha_{\sigma\sigma'}$, оператор U будет определен единственным образом только для базисных векторов. Он будет унитарным оператором во всем гильбертовом пространстве, если предположить, что U — линейный оператор; оператор U будет антиунитарным, если он антилинеен. При переходе от (3) к координатному представлению это различие становится вполне очевидным. Учитывая, что

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}}[a_+(k)e^{ikx} + a_-^\dagger(k)e^{-ikx}] \equiv \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x), \tag{4}$$

получим

$$\varphi'(x) = U\varphi(x)U^\dagger = \alpha_{++}^*\varphi^{(+)}(x) + \alpha_{--}\varphi^{(-)}(x) + \alpha_{-+}\varphi^{(+)\dagger}(x) + \alpha_{+-}^*\varphi^{(-)\dagger}(x), \tag{5}$$

если U — линейный оператор. (Мы ввели здесь разложение $\varphi(x)$ на положительные и отрицательные частоты в соответствии с формулой (4).) Если U — антилинейный оператор, то вместо формулы (5) получим

$$\varphi'(x) = \alpha_{++}^*\varphi^{(+)}(-x) + \alpha_{--}\varphi^{(-)}(-x) + \alpha_{-+}\varphi^{(+)\dagger}(-x) + \alpha_{+-}^*\varphi^{(-)\dagger}(-x)\ ^{**}).$$

Следовательно, антиунитарные преобразования всегда содержат в себе обращение времени, которое будет рассмотрено позже.

Возвращаясь к формуле (5), заметим, что в общем случае $\varphi'(x)$ связано с $\varphi(x)$ интегральным преобразованием. Преобразование будет локальным лишь в том случае, если выполняются условия

$$\alpha_{++} = \alpha_{--}^* \equiv \alpha_1, \quad \alpha_{+-} = \alpha_{-+}^* \equiv \alpha_2. \tag{3а}$$

В силу унитарности имеем также

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1, \quad \alpha_1\alpha_2 = 0. \tag{3б}$$

Это уравнение запрещает умножение всех одночастичных состояний на один и тот же фазовый множитель (ибо это означало бы $\alpha_{++} = \alpha_{--} = e^{i\alpha}$, $\alpha_{+-} = \alpha_{-+} = 0$). Резюмируя, можно утверждать: все локальные преобразования симметрии, не изменяющие пространственно-временны́х координат, являются унитарными и выражаются либо формулой

$$\varphi'(x) = \eta\varphi(x) \equiv E\varphi(x)E^\dagger, \tag{5а}$$

либо альтернативной формулой

$$\varphi'(x) = \eta_c\varphi^\dagger(x) \equiv C\varphi(x)C^\dagger. \tag{5б}$$

*) Операторы уничтожения преобразуются с помощью эрмитово-сопряженной матрицы. (*Прим. перев.*)

**) При антилинейной операции коэффициент при операторах $a(k)$ переходит в комплексно-сопряженный $e^{ikx} \to e^{ik(-x)}$. (*Прим. перев.*)

В этих формулах η и η_c означают произвольные фазовые множители. Инфинитезимальный производящий оператор группы (5а), непрерывно связанной с тождественным преобразованием, порождает обобщенный заряд Q *)

$$Q = i \int\limits_{\sigma} (\varphi^{\dagger}{}_{,\mu}\,\varphi - \varphi^{\dagger}\varphi_{,\mu})\, d\sigma^{\mu},$$

обладающий свойством

$$[Q,\ \varphi(x)] = \varphi(x).$$

Унитарный оператор E равен $e^{i\alpha Q}$, при этом $\eta = e^{i\alpha}$. Оператор C, определенный формулой (5б), антикоммутирует с Q:

$$CQ = -QC.$$

Преобразование C называется зарядовым сопряжением[13]. Оно преобразует собственные состояния Q в состояния с противоположными знаками собственных значений.

Добавим еще несколько замечаний. Оператор C выражается через Q и операторы $\widetilde{Q}$ и N

$$\widetilde{Q} = \int d^3k(a_+^{\dagger} a_- + a_-^{\dagger} a_+), \quad N = \int d^3k\,(a_+^{\dagger} a_+ + a_-^{\dagger} a_-)$$

следующим образом:

$$C = e^{-i\frac{\pi}{2}N}\, e^{i\frac{\pi}{2}\widetilde{Q}}\, e^{i\alpha_c Q}.$$

Это оказывается возможным, потому что C непрерывно связано с тождеством преобразованиями (3′) (в общем случае нелокальными). Наблюдаемые Q и $\widetilde{Q}$, очевидно, не коммутируют, однако N коммутирует с Q и $\widetilde{Q}$. Если ограничиться рассмотрением «голых» частиц, то можно без труда получить собственные состояния как $\widetilde{Q}$, так и Q. В нормальном случае, т. е. среди «старых» частиц, в природе существуют лишь собственные состояния Q. Только для одних K^0-мезонов можно получить физические собственные состояния $\widetilde{Q}$.

Мы должны различать три возможных случая:

а) Поле $\varphi(x)$ описывает дублет нейтральных частиц (например, K^0-мезоны). Как Q, так и $\widetilde{Q}$ имеют физический смысл. Собственные состояния Q получаются в результате рождения K^0-мезонов при столкновении частиц со странностью, равной нулю. В процессе распада эти состояния переходят в собственные состояния K_1 и K_2 оператора $\widetilde{Q}$.

б) Поле $\varphi(x)$ заряжено (например, $\pi^{\pm}$-мезоны). Состояния физической частицы характеризуются импульсом, угловым моментом и зарядом. Заряд определяется электрическим взаимодействием с «единичным зарядом». В природе мы всегда находим заряды обоих знаков, а потому преобразования симметрии типа $UQU^{\dagger} = \pm Q$ физически дозволены. Нижний знак получается при зарядовом сопряжении.

в) Оператор $\varphi(x)$ эрмитов (например, π^0-мезоны). Преобразования (5а, б) сводятся к равенству

$$\varphi'(x) = \pm\, \varphi(x). \tag{5в}$$

В соответствии с этим операторы Q и $\widetilde{Q}$ тождественно равны нулю.

---

*) Для производных поля применяется сокращенное обозначение $\varphi_{,\mu}$.

Обобщение на случай векторных полей тривиально. В частном случае действительных векторных полей существуют только преобразования

$$A'_\mu(x) = \pm A_\mu(x). \tag{5г}$$

б) *Спинорное поле*

После подробного рассмотрения случая скалярного поля можно начать сразу с формулы локального преобразования спинора *)

$$\psi'(x) = A\psi(x) + B\psi^\dagger(x). \tag{6}$$

Прямым вычислением можно легко доказать, что и $\psi'(x)$ и $\psi(x)$ подчиняются уравнению Дирака, если матрицы A и B имеют вид:

$$A = \lambda_1 1, \quad B = \lambda_2 c\gamma_4^T \text{ **)}, \tag{6а}$$

где λ_ν — произвольные комплексные числа.

В свою очередь, (6а) представляет условие, необходимое для того, чтобы спинор $\psi'(x)$ подчинялся уравнению Дирака в случае, когда масса частицы не равна нулю. В случае $m=0$ наиболее общими матрицами, удовлетворяющими упомянутому требованию, будут

$$A = \lambda_1 1 + \lambda'_1\gamma_5, \quad B = (\lambda_2 + \lambda'_2\gamma_5)\, c\gamma_4^T. \tag{6б}$$

Воспользовавшись структурой B, введем сокращенное обозначение

$$\psi^c(x) = c\bar\psi(x) = c\gamma_4^T\psi^\dagger(x) \tag{7}$$

и перепишем преобразование (6) в виде

$$\psi'(x) = (\lambda_1 + \lambda'_1\gamma_5)\,\psi(x) + (\lambda_2 + \lambda'_2\gamma_5)\,\psi^c(x). \tag{8}$$

В случае ненулевой массы следует положить $\lambda'_i = 0$ $(i=1,\ 2)$. Далее, преобразование (8) не должно изменять перестановочных соотношений

$$\{\psi(x_1),\ \bar\psi(x_2)\} = iS(x_1 - x_2), \quad \{\psi(x_1),\ \psi(x_2)\} = 0. \tag{9}$$

Из этого требования путем элементарных, но несколько громоздких вычислений нетрудно получить следующие условия для коэффициентов (6б):

$$\sum_{i=1}^{2}(|\lambda_i|^2 + |\lambda'_i|^2) = 1, \quad \lambda_1\lambda_2 = \lambda'_1\lambda'_2, \quad \mathrm{Re}\,(\lambda_1\lambda_1'^* + \lambda_2\lambda_2'^*) = 0. \tag{10}$$

В случае спинорных полей с нулевой массой эти условия допускают существование следующих двух групп симметрии:

$$\psi(x) = \eta\psi(x) \equiv E\psi(x)E^\dagger \text{ и } \psi'(x) = \eta_c\psi^c(x) \equiv C\psi(x)C^\dagger. \tag{11}$$

Эти группы точно соответствуют группам (5а, б) в случае скалярных полей. Действительно, если $m \neq 0$, уравнения (10) совпадают с уравнениями (3б).

---

*) В соответствии с обычным определением, при умножении на матрицу слева вектор $\psi^\dagger$ должен изображаться столбцом. По определению, $A\psi = \psi A^T$, $B\bar\psi = \bar\psi B^T$ и т. д. Значок «T» обозначает транспонированную матрицу.

В спинорном случае мы предлагаем другой способ введения оператора C. Однако само собой разумеется, что вместо этого здесь можно применять также и метод параграфа а), и наоборот, способ рассуждения этого параграфа вполне применим для скалярных полей.

**) Матрица c определяется равенствами: $c\gamma_\mu c^{-1} = -\gamma_\mu^T$, $-c^T = c$, $c^\dagger = c^{-1}$.

В случае нейтринного поля наиболее общее преобразование (8), удовлетворяющее условиям (10), имеет вид (группа Паули — Перси[14])

$$\psi'(x) = ae^{i\alpha\gamma_5}\psi(x) + be^{i\alpha\gamma_5}\gamma_5\psi^c(x), \qquad (11')$$

причем $|a|^2 + |b|^2 = 1$, α действительно. Преобразование (11′) можно получить из следующих преобразований:

$$\psi'(x) = \eta e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x) \equiv E\psi(x)E^\dagger \quad (\alpha \text{ действительно}), \qquad (11а)$$

$$\psi'(x) = \eta_c e^{i\alpha'\gamma_5}\psi^c(x) \equiv C\psi(x)C^\dagger \quad (\alpha' \text{ действительно}), \qquad (11б)$$

$$\psi'(x) = \cos\beta\cdot\psi(x) + \sin\beta\cdot\gamma_5\psi^c(x) \quad (\beta \text{ действительно}). \qquad (11в)$$

Оператор C из (11) и (11б) опять обладает свойством оператора зарядового сопряжения

$$CQ = -QC.$$

Для заряда Q выполняются уравнения

$$E = e^{i\alpha Q}, \quad [Q, \psi(x)] = \psi(x), \quad Q = i\int_\sigma \bar{\psi}\gamma_\mu\psi\, d\sigma^\mu.$$

Добавим еще несколько замечаний. В случае полей с нулевой массой зарядовое сопряжение C можно получить непрерывно из тождества. Это возможно в силу новой группы преобразований (11в).

Вплоть до этих строк преобразования (11а — 11в) были разрешены только для «голого» нейтринного поля. Можно ли их применять также к физическим состояниям — зависит от физической природы нейтрино. Снова имеются три возможности:

а) Число фермионов не сохраняется. Все преобразования от (11а) до (11в) приводят к физически осуществимым состояниям.

б) Физические нейтрино имеют фермионный заряд, определяемый Q. В природе можно обнаружить только собственные состояния Q. Допускаются только «градиентное» преобразование (11а) и зарядовое сопряжение C.

в) Поле Майорана: $\psi = \psi^c$. Имеют смысл только градиентные преобразования (11а). Производящий оператор этого преобразования

$$\int \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi\, d\sigma^\mu$$

можно рассматривать как некую разновидность заряда («псевдозаряд»). Могут существовать поля, обладающие или не обладающие законом сохранения по отношению к этому новому заряду. В рамках двухкомпонентной теории его величина определяется разностью чисел правовинтовых и левовинтовых нейтрин.

Уравнение движения и перестановочные соотношения остаются инвариантными относительно преобразований (11). Тем не менее, вследствие существования неэквивалентных представлений для перестановочных соотношений коммутации (9) отсюда еще не следует, что уравнение (11) определяет унитарные преобразования в гильбертовом пространстве свободных частиц. Однако, прямым вычислением из уравнения (11) можно получить соответствующие преобразования для операторов рождения и, следовательно, доказать непосредственно, что уравнение (11) определяет унитарные преобразования в гильбертовом пространстве.

2. Пространственное отражение

Методами предыдущего параграфа можно легко получить наиболее общие преобразования, включающие пространственное отражение:

а) скалярное поле

$$\varphi'(\mathbf{r}, t) = \eta_p \varphi(-\mathbf{r}, t) \equiv P\varphi(\mathbf{r}, t) P^{\dagger}, \tag{12}$$

или

$$\varphi'(\mathbf{r}, t) = \eta_{p'} \varphi^{\dagger}(-\mathbf{r}, t) \equiv P'\varphi(\mathbf{r}, t) P'^{\dagger}; \tag{12'}$$

б) нейтральное векторное поле

$$A'_k(\mathbf{r}, t) = \pm A_k(-\mathbf{r}, t), \quad A'_0(\mathbf{r}, t) = \mp A_0(-\mathbf{r}, t); \tag{13}$$

в) спинорное поле

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = \eta_p \gamma_4 \psi(-\mathbf{r}, t) \equiv P\psi(\mathbf{r}, t) P^{\dagger}, \tag{14}$$

или

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = \eta_{p'} \gamma_4 \psi^c(-\mathbf{r}, t) \equiv P'\psi(\mathbf{r}, t) P'^{\dagger}. \tag{14'}$$

Все преобразования являются унитарными. Вторые возможности (12′) или (14′) получаются, очевидно, из (12) или (14) зарядовым сопряжением.

Вопрос о том, какому из преобразований: P или P' —соответствует á priori «истинное» пространственное отражение, относительно которого должна соблюдаться инвариантность взаимодействий, является вполне академическим. Рассмотрим систему заряженных частиц, например позитроний, и фиксируем внешним измерением одни только пространственно-временные координаты частиц. В такой ситуации заряды частиц проявляют себя лишь благодаря взаимодействию между собой, и преобразование P не отличается от P'. Однако, во многих опытах заряды фиксируются «абсолютно» посредством сравнения их с внешним единичным зарядом, произвольным, но фиксированным. (Например, в опытах с μ-мезонами это сравнение проводится при помощи поглощения отрицательных μ-мезонов в веществе.) В этих случаях преобразование P отличается от P'.

Постулируя же á priori принцип инвариантности относительно пространственного отражения мира в целом (если только этот постулат вообще имеет какой-нибудь смысл в квантовой теории), мы не можем установить, относительно какого из преобразований: P или P'— должна соблюдаться инвариантность.

3. Обращение времени и инверсия. Произведения преобразований симметрии

Унитарных преобразований симметрии, связанных с обращением времени, не существует. Доводы в пользу этого утверждения были приведены уже в п. 1. Преобразования (3′), содержащие унитарные и антиунитарные преобразования, приводят к обращению времени лишь в том случае, если U — антилинейный оператор.

Прямое доказательство этого утверждения для скалярных полей (или вообще для любого бозонного поля) можно получить, используя линейное соотношение

$$\varphi'(\mathbf{r}, t) = A\varphi(\pm\mathbf{r}, -t) + B\varphi^{\dagger}(\pm\mathbf{r}, -t).$$

Если φ' связано с φ унитарным преобразованием, то φ' должно подчиняться тем же перестановочным соотношениям, что и φ. Однако это требование ведет к противоречию:

$$(|A|^2+|B|^2)\,\Delta(\pm\mathbf{r}_1\mp\mathbf{r}_2,\ t_2-t_1)=-(|A|^2+|B|^2)\,\Delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\ t_1-t_2)=$$
$$=\Delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\ t_1-t_2).$$

В случае фермионов это доказательство неприменимо. Преобразование

$$\psi'(\mathbf{r},t)=\eta\gamma_1\gamma_2\gamma_3\psi(\mathbf{r},\ -t)$$

(обращение времени Рака) не меняет перестановочных соотношений[15] (9). Однако это преобразование приводит к неэквивалентному представлению для этих соотношений и обращает все одночастичное гильбертово пространство в нулевой вектор.

Физическая основа всех этих доказательств заключается в том, что унитарное обращение времени должно приводить к отрицательным энергиям. Учитывая перестановочные соотношения и инвариантность относительно трансляций по времени:

$$Te^{i\mathbf{Pr}+iP_0t}=e^{i\mathbf{Pr}-iP_0t}T,$$

где P_0 означает энергию; можно сделать вывод, что отсюда для унитарного T

$$TP_0=P_0T.$$

Антиунитарные преобразования с обращением времени можно записать в виде произведения преобразования

$$T\varphi(\mathbf{r},t)\,T^{\dagger}=\eta_T\varphi(\mathbf{r},\ -t);\quad T\psi(\mathbf{r},t)\,T^{\dagger}=\eta_Tc^{\dagger}\gamma_5\psi(\mathbf{r},\ -t) \tag{15}$$

и зарядового сопряжения (5б) или (11). Поэтому, кроме (15), возможно также преобразование

$$T'\varphi(\mathbf{r},t)\,T'^{\dagger}=\eta_{T'}\varphi^{\dagger}(\mathbf{r},\ -t);\quad T'\psi(\mathbf{r},\ t)\,T'^{\dagger}=\eta_{T'}c^{\dagger}\gamma_5\psi^{c}(\mathbf{r},\ -t). \tag{15'}$$

Преобразование (15) называется обращением времени по Вигнеру[16].

Наконец, последнее преобразование — инверсия пространства и времени — рассмотрено в таблице I, где перечислены все дискретные преобразования симметрии.

Таблица I

Дискретные преобразования симметрии для скалярных, спинорных и нейтральных векторных полей

U	$\varphi'(\mathbf{r},\ t)$	$\psi'(\mathbf{r},\ t)$	$A'_k(\mathbf{r},\ t)$	$A'_0(\mathbf{r},\ t)$	
E C	$\eta\varphi(\mathbf{r},\ t)$ $\eta_C\varphi^{\dagger}(\mathbf{r},\ t)$	$\eta\psi(\mathbf{r},\ t)$ $\eta_C\psi^C(\mathbf{r},\ t)$	$\pm A_k(\mathbf{r},\ t)$	$\pm A_0(\mathbf{r},\ t)$	унитарные
P P'	$\eta_P\varphi(-\mathbf{r},\ t)$ $\eta_{P'}\varphi^{\dagger}(-\mathbf{r},\ t)$	$\eta_P\gamma_4\psi(-\mathbf{r},\ t)$ $\eta_{P'}\gamma_4\psi^C(-\mathbf{r},\ t)$	$\mp A_k(-\mathbf{r},\ t)$	$\pm A_0(-\mathbf{r},\ t)$	
T T'	$\eta_T\varphi(\mathbf{r},\ -t)$ $\eta_{T'}\varphi^{\dagger}(\mathbf{r},\ -t)$	$\eta_Tc^{\dagger}\gamma_5\psi(\mathbf{r},\ -t)$ $\eta_{T}c^{\dagger}\gamma_5\psi^C(\mathbf{r},\ -t)$	$\pm A_k(\mathbf{r},\ -t)$	$\mp A_0(\mathbf{r},\ -t)$	антиунитарные
J $\Theta\equiv J'$	$\eta_J\varphi(-\mathbf{r},\ -t)$ $\eta'_{\theta}\varphi^{\dagger}(-\mathbf{r},\ -t)$	$\eta_Tc^{\dagger}\gamma_{123}\psi(-\mathbf{r},\ -t)$ $\eta_{\theta}c^{\dagger}\gamma_{123}\psi^C(-\mathbf{r},\ -t)$	$\pm A_k(-\mathbf{r},\ -t)$	$\pm A_0(-\mathbf{r},\ -t)$	
$\psi^c(x)=c\bar{\psi}(x);\quad \gamma_{123}=\gamma_1\gamma_2\gamma_3;\quad \lvert\eta_i\rvert^2=1$					

В таблице II перечисляются квадраты операторов симметрии, которые могут оказать нам помощь в практическом выборе фазовых множителей в таблице I.

Таблица II

Фазовые множители ε в $U^2\varphi U^{-2} = \varepsilon\varphi$

U	E	C	P	P'	T	T'	J	Θ	
	η^2,	$+1$	η_P^2,	$+1$	$+1$,	$\eta_{T'}^{*2}$	$+1$,	η_θ^{*2}	скалярное поле
	η^2,	$+1$	η_P^2,	-1	-1,	$\eta_{T'}^{*2}$	-1,	η_θ^{*2}	поле Дирака

В случае бозонов все фазы можно выбрать таким образом, что квадраты всех операторов будут пропорциональны единичному оператору. В случае же фермионов независимо от выбора η_i имеем:

$$P'^2\psi P'^{\dagger 2} = -\psi, \qquad T^2\psi T^{\dagger 2} = -\psi,$$
$$I^2\psi I^{\dagger 2} = -\psi. \tag{16}$$

Аналогично при любом выборе фаз в таблице I выполняются следующие соотношения:

$$C^2\psi C^{\dagger 2} = \psi, \qquad (PT')\,\psi\,(PT')^\dagger = -(T'P)\,\psi\,(T'P)^\dagger,$$
$$(P\Theta)\,\psi\,(P\Theta)^\dagger = -(\Theta P)\,\psi\,(\Theta P)^\dagger. \tag{16''}$$

Последние два соотношения можно подтвердить непосредственным вычислением.

Для иллюстрации теоремы TCP вычислим, каким образом TCP преобразуют спинор ψ. Легко получаем соотношение

$$U\psi U^\dagger = \eta\,(\gamma_5\,\psi\,(-x))^\dagger, \tag{17}$$

Таблица III

Фазовые множители для TCP

U	η
CPT	$\eta_P\eta_T\eta_C$
PTC	$\eta_P^*\eta_T^*\eta_C^*$
TCP	$-\eta_P^*\eta_T^*\eta_C^*$
PCT	$-\eta_P^*\eta_T\eta_C$
CTP	$\eta_P^*\eta_T\eta_C$
TPC	$\eta_P\eta_T^*\eta_C^*$

где фаза зависит от порядка трех операторов и приведена в таблице III.

В следующих двух таблицах мы перечисляем преобразования операторов рождения частиц при действии операторов симметрии. Мы пользуемся разложением (4) для скалярного поля и соответствующим преобразованием Фурье для спинора Дирака

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_r \int \frac{d^3k}{2k_0}\,\{u_r^{(+)}(k)\,e^{ikx}\,a_{r,+}(k) + u_r^{(-)}(k)\,e^{-ikx}\,a_{r,-}^\dagger(k)\}. \tag{4'}$$

Здесь $u_r^{(\sigma)}(k)$ означает решение уравнения $(i\gamma_\mu k^\mu + m)\,u = 0$ и $a_{r,\sigma}^\dagger(k)$ — оператор рождения частицы типа σ (частицы-античастицы) с импульсом k и проекцией спина r в направлении оси $z\,(r = \pm)$. Без учета фазовых множителей получаются таблицы IVa и б.

Наконец, мы перечисляем все правила преобразований для наблюдаемых: заряда Q, энергии-импульса P_ν и углового момента *) $M_j = iJ_{kl}$. Из этих правил для операторов можно получить трансформационные свойства состояний частиц, сформулированные во введении. Без сомнения, калибровочные преобразования E коммутируют с Q, P и M. В таблице V правила для T, PT и т. д. существенно основаны на антилинейности этих операторов. Например, оператор T должен коммутировать со всеми трансляциями пространства, и выводы таблицы V оправдываются при условии антиунитарности T.

*) Здесь (jkl) означает циклическую перестановку (123), а J_{kl}—бесконечно малый поворот.

Таблица IV

Преобразования операторов рождения (с точностью до фазового множителя) для скалярных полей (а) и спиноров Дирака (б)

а)

U	$Ua^\dagger_+(k)U^\dagger$	$Ua^\dagger_-(k)U^\dagger$
PT (J, P', T' и т. д.)	$a^\dagger_+(k)$	$a^\dagger_-(k)$
P, T ($P'C$ и т. д.)	$a^\dagger_+(-k)$	$a_-(-k)$
C, PTC (Θ, ...)	$a^\dagger_-(k)$	$a_-(k)$
PC, TC (P', ...)	$a^\dagger_-(-k)$	$a_+(-k)$

б)

U	$Ua^\dagger_{r,+}(k)U^\dagger$	$Ua^\dagger_{r,-}(k)U^\dagger$
P	$a^\dagger_{r,+}(-k)$	$a^\dagger_{r,-}(-k)$
T	$a^\dagger_{-r,+}(-k)$	$a^\dagger_{r,-}(-k)$
PT	$a^\dagger_{-r,+}(k)$	$a^\dagger_{-r,-}(k)$
C	$a^\dagger_{r,-}(k)$	$a^\dagger_{-r,+}(k)$
CP	$a^\dagger_{r,-}(-k)$	$a^\dagger_{r,+}(-k)$
CT	$a^\dagger_{-r,-}(-k)$	$a^\dagger_{-r,+}(-k)$
CPT	$a^\dagger_{-r,-}(k)$	$a^\dagger_{r,+}(k)$

Таблица V

Правила преобразования для наблюдаемых

U	UQU^{-1}	UP_kU^{-1}	UP_0U^{-1}	UM_jU^{-1}
P	Q	$-P_k$	P_0	M_j
T	Q	$-P_k$	P_0	$-M_j$
C	$-Q$	P_k	P_0	M_j
PT	Q	P_k	P_0	$-M_j$
PC	$-Q$	$-P_k$	P_0	M_j
CT	$-Q$	$-P_k$	P_0	$-M_j$
PTC	$-Q$	P_k	P_0	$-M_j$

4. Инвариантность взаимодействий: определение фаз

Для каждого преобразования симметрии: зарядового сопряжения, пространственного отражения и обращения времени—мы получили систему унитарных или антиунитарных операторов в гильбертовом пространстве (таблица I). Однако, каждую систему, очевидно, можно представить в виде произведения одного из операторов этой системы (фиксируя произвольным образом фазовые множители η_i *)) на систему калибровочных преобразований. Произвол в выборе фазы можно уменьшить, приняв постулат о том, что квадраты операторов симметрии должны совпадать с тождеством. (Этот постулат является возможным, но совсем необязательным.) Постулат

*) Операторы U даже после выбора η_i содержат произвольные фазовые множители. Как обычно, мы фиксируем их, полагая $U\chi_{\text{вакуум}}=\chi_{\text{вакуум}}$.

ограничивает фазовые множители (P, T' и Θ') значениями ± 1, $\pm i$. Дальнейшие ограничения можно получить из требования, чтобы произведения некоторых операторов были равны между собой. Для того чтобы все операторы могли коммутировать или антикоммутировать, необходимо выбрать фазовые множители равными ± 1 для бозонных полей и ± 1, $\pm i$ для фермионных полей. При этом допустима произвольная комбинация фаз. Этим способом мы получаем (не более чем двузначные) представления абстрактной абелевой группы, порожденной элементами

$$1,\ P,\ T \text{ и } C$$

с таблицей умножения

$$P^2 = T^2 = C^2 = 1,\ P' = PC = CP,\ T' = TC = CT,\ J = PT = TP,\ \Theta = PTC. \tag{18}$$

При этом могут встретиться только двузначные представления *) со свойствами (16′) и (16″). Однако в случае некоторого заданного поля представление группы симметрии (18) можно определить только посредством взаимодействия.

В этом месте мы явно используем предположение о том, что квантовая теория поля может быть получена из лагранжиана, аддитивно составленного из лагранжиана свободного поля и лагранжиана взаимодействия, а также о том, что можно ввести обычным способом представление взаимодействия (представление Томонага — Швингера). Операторы C, P и T и их произведения действуют на векторы состояния этого представления, и последующие рассуждения этого параграфа будут всегда относиться к нему.

Если существует взаимодействие двух полей, инвариантное относительно преобразования U, то можно фиксировать относительные фазы. Действительно, взаимодействие, которое описывается в лагранжиане членом L_W, будет инвариантным относительно U, если преобразованный оператор $UL_WU^\dagger$ можно получить из L_W калибровочным преобразованием E; это означает, что возможен такой выбор фаз, что выполняется условие

$$UL_WU^\dagger = L_W. \tag{19}$$

Это уравнение определяет фазы U для полей, содержащихся в L_W. Рассмотрим подробно юкавовское взаимодействие между бесспиновым полем $A(x)$ и двумя спинорными полями $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ с ненулевыми массами. Наиболее общим выражением для L_W, инвариантным относительно собственных преобразований Лоренца и некоторых калибровочных преобразований, будет следующее:

$$L_W = g\bar{\psi}_1\psi_2 A + g'\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_2 A + f\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 A'^{\mu} + f'\bar{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2 A'^{\mu} + \text{эрм. сопр.} \tag{20}$$

Зададим вопрос об ограничениях (20), вытекающих из инвариантности относительно C, P или T. Обозначим лагранжиан (20) сокращенно символом $(g,\ g';\ f,\ f')$. Непосредственными вычислениями можно получить следующие трансформационные свойства L_W:

$$C\,(g, g';\ f, f')\,C^\dagger = (\eta_C g^*,\ -\eta_C g'^*;\ \eta_C f^*,\ -\eta_C f'^*), \tag{21а}$$

$$P\,(g, g';\ f, f')\,P^\dagger = (\eta_P g,\ -\eta_P g';\ \eta_P f,\ -\eta_P f'), \tag{21б}$$

$$T\,(g, g';\ f, f')\,T^\dagger = (\eta_T g^*,\ \eta_T g'^*;\ \eta_T f^*,\ \eta_T f'^*). \tag{21в}$$

Для удобства здесь введены обозначения ($\eta_i(0)$ — фазовый множитель бозонного поля):

$$\eta_i \equiv \eta_i^*(1)\,\eta_i(2)\,\eta_i(0) \qquad (i = C,\ P,\ T).$$

В формуле (21в) принята во внимание антиунитарность.

*) Это означает: если представление группы Лоренца двузначно, то тождеству в дискретной группе симметрии может отвечать либо элемент $+1$, либо элемент -1.

Объединяя в любом порядке (21а — в), получим

$$\Theta(g, g'; f, f')\,\Theta^{\dagger} = \alpha(g, g'; f, f'). \tag{21'}$$

В этой формуле Θ означает произведение C, P и T, взятых в определенном порядке, α — фазовый множитель, зависящий от этого порядка. Выбирая $\eta_C = \eta_P\eta_T$ и $\eta_P^2 = 1$, получим в любом случае $\alpha = 1$. Это частный случай теоремы TCP: взаимодействие (20) инвариантно относительно TCP без всяких ограничений для постоянных связи.

Напротив, если требовать инвариантности относительно только одного из преобразований симметрии, то этому можно удовлетворить только при определенном выборе постоянных связи. Из формул (20) и (19) мы получаем следующие необходимые условия:

C-инвариантность:

$$\operatorname{Re}(g'g^*) = \operatorname{Re}(g'f^*) = \operatorname{Re}(f'g^*) = \operatorname{Re}(f'f^*) = \operatorname{Im}(g^*f) = \operatorname{Im}(g'^*f') = 0. \tag{22а}$$

Иначе говоря, фазы g и f (или g' и f') равны так же, как и фазы g и g' и т. д.

P-инвариантность:

$$g^*g' = f^*f' = g^*f' = f^*g' = 0, \tag{22б}$$

T-инвариантность:

$$\operatorname{Im}(g^*g') = \operatorname{Im}(f^*f') = \operatorname{Im}(g^*f') = \operatorname{Im}(f^*g') = \operatorname{Im}(g^*f) = \operatorname{Im}(g'^*f') = 0. \tag{22в}$$

Другими словами, все постоянные связи имеют одни и те же фазы. Очевидно, P-инвариантность соблюдается, если

$$g' = f' = 0 \quad \text{и} \quad \eta_P^*(1)\,\eta_P(2)\,\eta_P(0) = 1$$

или

$$g = f' = 0 \quad \text{и} \quad \eta_P^*(1)\,\eta_P(2)\,\eta_P(0) = -1.$$

Следовательно, P-инвариантное взаимодействие фиксирует для $A(x)$ фазу $\eta_P(0)$ относительно $\overline{\psi}_1\psi_2$, но оно не может фиксировать абсолютную фазу бозонного поля. Вид взаимодействия (P-инвариантного) определяет фазу единственным образом лишь при условии $\psi_1 \equiv \psi_2$, когда $A(x)$ является нейтральным полем. Иначе говоря, подобными рассуждениями можно установить псевдоскалярность нейтральных π-мезонов [17]. Наоборот, для заряженных π-мезонов нельзя определить $\eta_P(0)$ абсолютно. Фазы нейтрона и протона считаются равными лишь в силу чисто условного соглашения. Фазы заряженных π-мезонов можно определить экспериментально, только приняв это соглашение [17]. Из наших аргументов мы сразу заключаем, что существуют нейтральные частицы, фаза η_P которых не определяется никаким взаимодействием. Например, в случае K^0-мезонов два фермионных поля должны отличаться друг от друга в сильных взаимодействиях типа Юкава из-за сохранения странности.

Случай $\psi_1 \equiv \psi_2$ также накладывает особые условия на зарядовое сопряжение и обращение времени. Лагранжиан L_W является эрмитовым только при условии, что g действительно, а g', f, f' мнимы. В соответствии с этим из (22а) и (22*в*) заключаем:

при зарядовом сопряжении

$$ff' = gf = g'f = 0, \tag{23а}$$

при обращении времени

$$gg' = gf = gf' = 0. \tag{23б}$$

Оба эти условия означают, что нейтральное скалярное поле ($g' = f' = 0$)

может допускать связь или только с производными, или только без производных [3, 4, 5]. Причиной этого опять-таки является теорема *TCP*; *P*-инвариантное взаимодействие должно преобразовываться при действии оператора *C* так же, как и при действии *T*. Еще один вывод из (22) и (23) гласит: в случае взаимодействий без производных *P*-инвариантность автоматически сопряжена с *T*-инвариантностью, а потому всегда соблюдается и *C*-инвариантность.

Если условия (22а, в) выполняются, то фазы следует выбирать в соответствии с условиями:

$$\eta_C^*(1)\,\eta_C(2)\,\eta_C(0)=\frac{g}{g^*}=-\frac{g'}{g^*}=\frac{f}{f^*}=-\frac{f'}{f'^*}\,, \tag{24а}$$

$$\eta_T^*(1)\,\eta_T(2)\,\eta_T(0)=\frac{g}{g^*}=\frac{g'}{g'^*}=\frac{f}{f^*}=\frac{f'}{f'^*}\,. \tag{24б}$$

Фазы бозонного поля опять фиксируются условием $\psi_1\equiv\psi_2$.

Точно таким же способом можно получить условия инвариантности для взаимодействия векторного поля A_μ с двумя спинорными полями. Назовем связь без производных g-связью, связь с производными — f-связью; условия инвариантности эквивалентны (22а) вследствие формулы (22в). Для $\psi_1\equiv\psi_2$ возникает отличие. В этом случае эрмитовость L_{W} накладывает другие ограничения: f' должно быть действительным, а g, g' и f должны быть мнимыми. Поэтому условия (23а, б) необходимо заменить на следующие:

$$C:\qquad gg'=g'f'=g'f=0,$$
$$T:\qquad ff'=g'f'=gf'=0.$$

В силу инвариантности как относительно C, так и относительно T отсюда следует, что псевдовекторное поле ($g=f=0$) не должно допускать одновременно связь и с производными, и без производных. Далее отметим, что электромагнитное взаимодействие, включающее член Паули (только g и $f\neq 0$), инвариантно относительно C и T.

Фазы η_C, η_P тесно связаны с зарядовой и пространственной четностью одночастичных состояний. Зарядовая четность может быть определена только для «нейтральных» состояний, например собственных состояний заряда Q с нулевым собственным значением. Пусть таким состоянием является χ:

$$C\chi(p,s)=c(p,s)\,\chi(p,s). \tag{24}$$

В этом уравнении p означает 4-вектор энергии-импульса с квадратом $p_\mu p^\mu=-m^2$, а символом s различаются спиновые состояния. Состояние $\chi(p,s)$ может быть получено из некоторого состояния $\chi(p_0,s_0)$ с помощью собственных преобразований Лоренца и операторов спина, которые коммутируют с зарядовым сопряжением C. Поэтому четность c в (24) не может зависеть от p и s. Она зависит только от природы частицы.

Связь четности c с фазой η_C можно получить из закона преобразования

$$Ca_+^\dagger(k,s)\,C^\dagger=\eta_C a_-^\dagger(k,s),\qquad Ca_-^\dagger(k,s)\,C^\dagger=\eta_C a_+^\dagger(k,s).$$

В соответствии с этим четность c равна умноженной на η_C зарядовой четности вакуума, которая обычно принимается равной единице. Отношение зарядовых четностей $\frac{c_1}{c_2}$ двух частиц A_1, A_2 даже независимо от этого соглашения равно $\frac{\eta_C(1)}{\eta_C(2)}$ и может быть определено экспериментально, если взаимодействие частиц A_1 и A_2 инвариантно относительно C. Например, равенство зарядовых четностей двух полей можно установить, доказав существование процесса

$$N + A_1 \longrightarrow N + A_2, \tag{25а}$$

где N — дополнительная «истинно» нейтральная частица. На практике большое значение имеют процессы распада

$$A_1 \longrightarrow nA_2, \tag{25б}$$

из существования которых следует: $c_1 = c_2^n$. Если n четно (например, в случае $\pi^0 \longrightarrow 2\gamma$), то $c_1 = +1$, если, кроме того, отсутствуют распады с нечетным n, то определяется также четность A_2: $c_2 = -1$. До настоящего времени среди элементарных частиц установлено существование только двух истинно нейтральных бозонов γ, π^0. Поэтому понятие зарядовой четности имеет значение главным образом для сложных частиц (например, для позитрония [4, 18, 19]).

Пространственная четность может быть определена для состояний частиц с ненулевой массой. Рассмотрим систему координат, в которой частица покоится, и введем определение $P\chi(0, s) = p\chi(0, s)$. Четность p опять не зависит от спина s. В полной аналогии с зарядовой четностью можно написать

$$Pa_+^\dagger(k, s) P^\dagger = \eta_p^* a_+^\dagger(-k, s); \quad Pa_-^\dagger(k, s) P^\dagger = \pm \eta_p a_-^\dagger(-k, s).$$

Во втором уравнении верхний знак относится к бозонам, нижний знак — к фермионам (необходимо воспользоваться соотношением $\gamma_4 u_\pm(-k) = \pm u_\pm(-k)$). Если наложить упомянутое выше условие $P^2 = 1$, то в случае бозонов фазы должны быть действительными, и четности частиц и античастиц будут одинаковыми. В случае фермионов это утверждение справедливо только при условии $\eta_p = \pm i$. Однако состояние частица — античастица (обе частицы в покое)

$$Pa_+^\dagger(0, s)\, a_-^\dagger(0, s')\, \chi_{\text{вакуум}} = -|\eta_p|^2 a_+^\dagger(0, s')\, a_-^\dagger(0, s')\, \chi_{\text{вакуум}}$$

всегда имеет отрицательную четность. Это служит основанием для утверждения, что четности частиц и античастиц в случае фермионов противоположны. Для экспериментального определения четности необходимо опять использовать реакции (25а, б). В реакции (25а) в этом случае частица может быть произвольной, однако необходимо учитывать относительное движение частиц. Процессы (25а, б) ограничены различными законами сохранения (заряда, числа барионов и т. д.). В действительности эти законы и определяют, какую из относительных четностей можно измерить экспериментально. Для обращения времени четность определить нельзя. В силу антиунитарности T понятие собственного состояния T лишено смысла (см. приложение 1)*).

5. Физический смысл обращения времени

Для обсуждения физической интерпретации обращения времени мы исследуем трансформационные свойства S-матрицы относительно T или J. Из коммутативности T и гамильтониана взаимодействия, а также из антилинейности T заключаем:

$$T^\dagger S T = T^\dagger P\left[e^{i\int H_{\text{вз}}\, d^4x}\right] T = \widetilde{P}\left[e^{-i\int H_{\text{вз}}\, d^4x}\right] = S^{-1}.$$

*) Речь, конечно, идет об абсолютной четности. Относительная четность разных частиц не лишена смысла, так как волновые функции разных частиц нельзя умножать на разные фазовые множители. (*Прим. перев.*)

(Здесь P означает хронологически упорядоченное произведение, $\widetilde{P}$ — то же произведение, написанное в обратном порядке.) Отсюда получаем

$$(T\chi_A,\ ST\chi_F) = (T^{\dagger}ST\chi_F,\ \chi_A) = (\chi_F,\ S\chi_A). \tag{26}$$

Мы воспользовались здесь определением антиэрмитова сопряженного оператора (см. приложение 1). Применим (26) к состояниям свободных частиц $|k_1, s_1;\ k_2, s_2>$, которые характеризуются импульсами k_i и проекциями спина s_i. В силу равенства (с точностью до фазы)

$$T\,|k_1, s_1;\ k_2, s_2> = \\ = |-k_2, -s_1;\ -k_2, -s_2>$$

уравнение (26) означает, что вероятности процессов (*а*) и (*б*) на рис. 1 равны. Например, если вероятность перехода из состояния A в состояние F равна W, то вероятность перехода из F' в A' также равна W; при этом состояние A' (или F') отличается от A (или F) инверсией всех импульсов и угловых моментов:

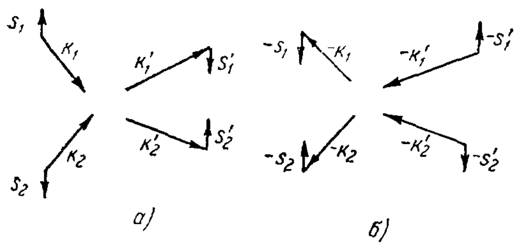

Рис. 1. Процессы, связанные между собой обращением времени.

$$W\,(k_1, s_1, k_2, s_2 \to k_1', s_1', k_2', s_2') = \\ = W\,(-k_1', -s_1', -k_2', -s_2' \to -k_1, -s_1, -k_2, -s_2). \tag{27а}$$

При условии инвариантности относительно инверсии (т. е. относительно произведения PT) процессы рис. 1 и рис. 2 происходят с равными вероятностями (заметим, что

$$J\,|k_1, s_1;\ k_2, s_2> = |k_1, -s_1;\ k_2, -s_2>).$$

Если в этих процессах участвуют только бесспиновые частицы, то J-инвариантность приводит к принципу детального равновесия

$$W\,(k_1, k_2 \to k_1', k_2') = W\,(k_1', k_2' \to k_1, k_2). \tag{27б}$$

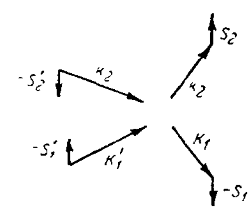

Рис. 2. Процесс, получаемый из диаграммы 1, *б* при отражении пространственных координат.

В случае ненулевых спинов это равенство выполняется только после усреднения по направлениям спина (полудетальное равновесие [20]). Этот принцип легко сформулировать в более общем виде. Начальное и конечное состояния характеризуются набором квантовых чисел, часть из которых не изменяется при инверсии, тогда как остальные умножаются на —1. Уравнение (27б) справедливо[21] после усреднения по величинам, умножаемым на (—1). (К сожалению, в литературе понятие детального равновесия применяется в разных смыслах. Например, некоторые авторы определяют этот принцип при помощи уравнения (27а).)

Простую интерпретацию теоремы TCP можно также дать с помощью рис. 1 и 2. Согласно этой теореме процесс 1,*а* для частиц и процесс 2 для соответствующих античастиц равновероятны.

6. Дискретные преобразования симметрии в общей теории поля

Рассуждения § 4 основаны на предположении о существовании лагранжиана взаимодействия и представления взаимодействия для описания зависимости от времени. В общей релятивистской квантовой теории взаимодействующих полей предполагается лишь, что операторы поля при

$t=\pm\infty$ асимптотически ведут себя как свободные поля. Более точно: мы имеем два набора операторов поля $\varphi_{\text{in}}(x)$, $\psi_{\text{in}}(x),\ldots$ и $\varphi_{\text{out}}(x)$, $\psi_{\text{out}}(x),\ldots$, удовлетворяющих уравнениям поля и перестановочным соотношениям для свободных (скалярных, спинорных) полей; считается, что эти два набора описывают физическое состояние в бесконечно далеком будущем и в бесконечно далеком прошлом соответственно. Кроме того, мы имеем операторы $\varphi(x)$, $\psi(x),\ldots$, которые связывают для конечных времен сходящиеся и расходящиеся поля; т. е. при произвольных (нормируемых) векторах состояния Φ, Ψ для компонент Фурье операторов a $(k,\ t)$ выполняются равенства

$$\lim_{t\to\pm\infty}\langle\Phi\,|\,a(k,\ t)|\,\Psi\rangle=\langle\Phi\,|\,a_{\substack{\text{out}\\ \text{in}}}(k)|\,\Psi\rangle \quad \text{и т. д.}$$

S-матрица определяется равенствами

$$S^{\dagger}\varphi_{\text{in}}(x)\,S=\varphi_{\text{out}}(x) \quad \text{и т. д.}$$

Теперь можно ввести преобразования симметрии для сходящихся и расходящихся полей по отдельности. При этом можно применять все формулы для унитарных преобразований симметрии (которые не содержат в себе обращения времени), если только операторы поля и операторы симметрии дополняются значками «in» и «out». Например, определим оператор C_{in} для скалярных полей

$$C_{\text{in}}\varphi_{\text{in}}(x)\,C_{\text{in}}^{\dagger}=\eta_C\varphi_{\text{in}}^{\dagger}(x)$$

(ср. с формулой (5б)).

Учитывая рассмотренный физический смысл и антиунитарность обращения времени, потребуем (в случае скалярных полей)

$$T_{\text{in}}\varphi_{\text{in}}(\mathbf{r},\ t)\,T_{\text{in}}^{\dagger}=\eta_T\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r},\ -t),$$

$$T_{\text{out}}\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r},\ t)\,T_{\text{out}}^{\dagger}=\eta_T\varphi_{\text{in}}(\mathbf{r},\ -t).$$

Аналогичные уравнения получаются для произведений обращения времени и любого унитарного оператора симметрии. С помощью интерполяционных операторов $\varphi(x)$, $\psi(x)$, ... можно также определить операторы симметрии для произвольной пространственно-подобной поверхности σ

$$C_{\sigma}\varphi(x)\,C_{\sigma}^{\dagger}=\eta_C\varphi^{\dagger}(x) \quad \text{для} \quad x\in\sigma.$$

Однако, оставаясь в обычных рамках современной теории поля, мы не будем пользоваться этими обобщениями и ограничим наше рассмотрение асимптотическими операторами C_{in}, C_{out} и т. д.

Оба вида операторов симметрии «in» и «out» связаны S-матрицей тем же способом, что и операторы поля. С точностью до фазовых множителей имеем

$$S^{\dagger}C_{\text{in}}S=C_{\text{out}},\qquad S^{\dagger}P_{\text{in}}S=P_{\text{out}},\qquad S^{\dagger}T_{\text{in}}S=T_{\text{out}} \quad \text{и т. д.}$$

Инвариантность относительно зарядового сопряжения или пространственного отражения теперь означает возможность такого выбора фазовых множителей η_C или η_P, что

$$C_{\text{in}}S=SC_{\text{in}} \ \text{ или } \ C_{\text{in}}\equiv C_{\text{out}}, \ \text{ соответственно, } \ P_{\text{in}}S=SP_{\text{in}} \ \text{ или } \ P_{\text{in}}\equiv P_{\text{out}}.$$

Инвариантность относительно обращения времени означает

$$T_{\text{in}}S^{\dagger}=ST_{\text{in}} \quad \text{или} \quad T_{\text{in}}\equiv T_{\text{out}}$$

(отметим опять антилинейность T при коммутации с S-матрицей). Как показал Уайтмен [27], общая теория «взаимодействующих» полей может быть построена без явного использования лагранжианов, если принять в качестве основных переменных усредненные по вакууму значения произведений операторов поля. В этом случае инвариантность теории относительно преобразований симметрии приводит к определенным соотношениям для вакуумных средних. Перечислим эти соотношения только для случая скалярных полей.

C-инвариантность:

$$\langle \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\,\ldots\,\varphi_n(x_n)\rangle_0 = \langle \varphi_1^{\dagger}(x_1)\,\varphi_2^{\dagger}(x_2)\,\ldots\,\varphi_n^{\dagger}(x_n)\rangle_0.$$

P-инвариантность:

$$\langle \varphi_1(\mathbf{r}_1, t_1)\,\varphi_2, (\mathbf{r}_2, t_2)\ldots\varphi_n(\mathbf{r}_n, t_n)\rangle_0 = \langle \varphi_1(-\mathbf{r}_1, t_1)\,\varphi_2(-\mathbf{r}_2, t_2)\ldots\varphi_n(-\mathbf{r}_n, t_n)\rangle_0.$$

T-инвариантность:

$$\langle \varphi_1(\mathbf{r}_1, t_1)\,\varphi_2(\mathbf{r}_2, t_2)\,\ldots\,\varphi_n'(\mathbf{r}_n, t_n)\rangle_0 = \langle \varphi_1(\mathbf{r}_1, -t_1)\,\varphi_2(\mathbf{r}_2, -t_2)\,\ldots\,\varphi_n(\mathbf{r}_n, -t_n)\rangle_0^{*}.$$

TCP-инвариантность:

$$\langle \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\,\ldots\,\varphi_n(x_n)\rangle_0 = \langle \varphi_1^{\dagger}(-x_1)\,\varphi_2^{\dagger}(-x_2)\,\ldots\,\varphi_n^{\dagger}(-x_n)\rangle_0^{*}.$$

II. ТЕОРЕМА *TCP*

Предположим, что мы рассматриваем теорию некоторого квантового поля с явно заданным лагранжианом. Тогда непосредственным вычислением можно показать, что инвариантность лагранжиана относительно собственных преобразований Лоренца всегда влечет за собой инвариантность лагранжиана относительно *TCP*. Пример такого вычисления был приведен в гл. I, п. 4.

Для общего доказательства теоремы *TCP* мы применим несколько измененный путь рассуждений. Именно, мы не будем основывать наши рассуждения на явном построении операторов T, C и P. Вместо этого выдвинем на первый план следующий вопрос: если известна теория некоторого поля, инвариантная относительно собственной группы Лоренца, окажется ли возможным найти какое-нибудь другое преобразование симметрии, относительно которого теория остается инвариантной? Доказав существование такого преобразования, мы покажем, что оно физически идентично с произведением *TCP* (с точностью до фазового множителя).

1. Теорема *TCP* в алгебре операторов поля

Примем следующие постулаты:

1) Уравнения поля локальны.

2) Лагранжиан инвариантен относительно собственной группы Лоренца.

3) Имеет место обычная связь между спином и статистикой; например, операторы поля с целым спином коммутируют в пространственно-подобных точках; операторы поля с полуцелым спином антикоммутируют *).

4) Бозонные поля коммутируют со всеми другими полями; кинематически независимые фермионные поля антикоммутируют **).

---

*) Вывод этого постулата, основанный на причинности и положительной определенности энергии (в качестве главных предпосылок), для свободных полей несколько лет назад был дан в работе В. Паули [22]. Недавно были опубликованы доказательства для взаимодействующих полей независимо в работах [23] и [24].

**) Вывод этого постулата впервые был проделан Людерсом [25]. Обсуждение необходимости этого предположения для теоремы *TCP* приведено там же и в работе [26]

5) Всякое произведение операторов поля полностью симметризовано в случае бозонных полей и антисимметризовано в случае фермионных полей *).

Постулат 1), сформулированный подробнее, означает, что все полевые величины суть спиноры или тензоры конечного ранга и что взаимодействие локально и содержит производные только до некоторого конечного порядка. Не теряя общности, можно принять, что «элементарные» операторы поля ведут себя как неприводимые представления собственной группы Лоренца. Как хорошо известно, эти неприводимые представления можно характеризовать двумя целыми числами, и поэтому при действии собственного преобразования Лоренца Λ всякое поле $u_r(x)$ преобразуется следующим образом:

$$D(\Lambda)\, u_r(x)\, D(\Lambda)^{-1} = \sum_{r'} d_{rr'}(\Lambda)\, u_{r'}(\Lambda^{-1}x),$$

где матрица $d_{rr'}$, принадлежит одному из представлений $\mathrm{D}(n, m)$**).

Представления, а следовательно и полевые функции, можно разбить на четыре класса**):

класс I: n, m четные
II: n, m нечетные
III: n четное, m нечетное
IV: n нечетное, m четное.

Ясно, что всякое произведение операторов поля входит в определенный класс. В дальнейшем мы будем обозначать символом u_A полевую функцию, входящую в класс A. Введем следующее «преобразование классов»***):

$$\left.\begin{aligned} u_{\mathrm{I}}\ (x) &\to u_{\mathrm{I}}(-x),\\ u_{\mathrm{II}}\ (x) &\to -u_{\mathrm{II}}(-x),\\ u_{\mathrm{III}}(x) &\to iu_{\mathrm{III}}(-x),\\ u_{\mathrm{IV}}(x) &\to -iu_{\mathrm{IV}}(-x).\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Теперь мы можем сформулировать теорему Паули [7]. Если мы преобразуем элементарные операторы поля в соответствии с (28) и если мы заменим в каждом произведении порядок операторов поля на обратный, то всякое симметризованное произведение также будет преобразовываться в соответствии с (28).

Преобразование (28) вместе с инверсией операторов в произведениях означает отображение алгебры операторов поля самой в себя. Оно называется сильным отражением.

---

*) Формально это означает: вместо «простых» произведений $u_1 \cdot u_2 \cdots u_N$ мы вводим величины

$$\frac{1}{N!}\sum_P (-1)^{\varrho(P)} P\{u_1 \cdot u_2 \ldots u_N\},$$

где P пробегает все перестановки из чисел $1, 2, \ldots, N$. $\varrho(P)$ — число перестановок фермионных полей в порядках сомножителей $i_1, i_2, \ldots, i_N$, переставленных по сравнению с первоначальным порядком $1, 2, \ldots, N$. Например, ток Дирака $ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ следует заменить на

$$j^\mu = \frac{ie}{2}\{\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta - \psi_\beta\gamma^\mu_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\alpha\} = ie\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta - \frac{ie}{2}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\{\bar{\psi}_\alpha, \psi_\beta\}.$$

В силу постулата 4) простые и симметризованные произведения в величинах, содержащих кинематически независимое поле, только линейно, конечно, совпадают.

**) Ср. Приложение 2.

***) Это преобразование было введено уже Паули при обсуждении связи между спином и статистикой [22].

Из теоремы следует, очевидно, что всякое лоренц-ковариантное уравнение поля инвариантно относительно сильного отражения. Дело в том, что ковариантное уравнение связывает функции только одного класса, и при сильном отражении все уравнение в целом, следовательно, лишь приобретает общий множитель. Лагранжиан, принадлежащий классу I ($m=n=0$), инвариантен относительно сильного отражения. Таким образом, мы получаем теорему: всякая теория квантового поля, удовлетворяющая всем пяти постулатам, остается инвариантной при сильном отражении [7].

В целях физической интерпретации заметим, что тензор энергии-импульса изображается функцией класса I, электрический ток — функцией класса II *)

$$T_{\mu\nu}(x) \to T_{\mu\nu}(-x), \quad j_\mu(x) \to -j_\mu(-x).$$

Следовательно, сильное отражение физически означает комбинацию отражения пространства-времени с переменой знака электрических зарядов на обратный.

Продемонстрируем смысл сильного отражения на двух примерах. Произведение

$$f(x) = \frac{1}{2}\{u_{\text{III}}(x)\, u_{\text{IV}}(x) - u_{\text{IV}}(x)\, u_{\text{III}}(x)\}$$

принадлежит к классу II и под действием преобразования (28) и инверсии порядка операторов поля преобразуется в

$$\frac{1}{2}\{(-i)\, u_{\text{IV}}(-x)\, i u_{\text{III}}(-x) - i u_{\text{III}}(-x)\,(-i)\, u_{\text{IV}}(-x)\}.$$

Таким образом, $f(x) \to -f(-x)$, как и должно быть по теореме Паули. Четырехкомпонентный спинор Дирака состоит из двухкомпонентного спинора класса III и двухкомпонентного спинора класса IV

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u_{\text{III}}(x) \\ u_{\text{IV}}(x) \end{pmatrix}.$$

Преобразование (28) означает **)

$$\psi(x) \to i\gamma_5\, \psi(-x), \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(-x)\, i\gamma_5.$$

Величина (часть тензора энергии-импульса)

$$f^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\left\{\bar{\psi}_\alpha(x)\, \gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi_\beta(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi_\beta(x)\, \gamma^\mu_{\alpha\beta}\, \bar{\psi}_\alpha(x)\right\}$$

преобразуется в

$$\frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\psi_\beta(-x)\,[i\gamma_5\gamma^\mu i\gamma_5]_{\alpha\beta}\,\bar{\psi}_\alpha(-x) + \bar{\psi}_\alpha(-x)\,[i\gamma_5\gamma^\mu i\gamma_5]_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\psi_\beta(-x)\right\}.$$

Следовательно, $f^{\mu\nu}(x) \to f^{\mu\nu}(-x)$, как и должно быть, если $f^{\mu\nu}$ — функция класса I.

---

*) Ср. Приложение 2.

**) В силу выбранной формы $\psi(x)$ мы должны пользоваться для γ-матриц представлением Ван-дер-Вердена; инфинитезимальные преобразования Лоренца $\gamma_\mu\gamma_\nu$ с $\mu \neq \nu$ пропорциональны

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

причем A, B — двухрядные матрицы. Мы выбираем γ_5 эрмитовой,

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Доказательство теоремы Паули

Пусть $\Pi(x)$ означает некое симметризованное произведение, содержащее n_A множителей класса A. Преобразование элементарных полевых операторов по формулам (28) дает

$$\Pi(x) \longrightarrow (-1)^{n_{\mathrm{II}}}\, i^{n_{\mathrm{III}}}\, (-i)^{n_{\mathrm{IV}}}\, \Pi(-x).$$

При инверсии порядка операторов возникает еще один множитель

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n_{\mathrm{III}}+n_{\mathrm{IV}})(n_{\mathrm{III}}+n_{\mathrm{IV}}-1)}$$

(показатель равен числу перестановок фермионных полей, возникающих при инверсии $\Pi(x)$). С помощью таблицы умножения классов (ср. Приложение 2) получим, перемножая все множители -1 и i, таблицу:

n_I	n_{II}	n_{III}	n_{IV}	$\Pi(x)$ принадлежит классу	Сильное отражение переводит $\Pi(x)$ в
произвольное	g	g	g	I	$\Pi(-x)$
	u	g	g	II	$-\Pi(-x)$
	g	u	g	III	$i\Pi(-x)$
	u	u	g	IV	$-i\Pi(-x)$
	g	g	u	IV	$-i\Pi(-x)$
	u	g	u	III	$i\Pi(-x)$
	g	u	u	II	$-\Pi(-x)$
	u	u	u	I	$\Pi(-x)$

g—четно, u—нечетно.

Сравнение последних двух столбцов с (28) показывает, что все преобразования происходят в соответствии с этой теоремой.

3. Теорема TCP в гильбертовом пространстве

Вариант теоремы TCP, предложенный Паули и рассмотренный в п. 1 этой главы, устанавливает инвариантность в рамках алгебры операторов. В нем ничего не говорится о гильбертовом пространстве, в котором действуют эти операторы. Сильное отражение есть отображение алгебры самой в себя, что не может быть представлено унитарным или антиунитарным оператором в гильбертовом пространстве. Это вытекает из того, что сильное отражение требует инверсии порядка операторов в произведениях [9].

В качестве примера рассмотрим подробнее применение сильного отражения к свободному спинорному полю Дирака. Разлагая спинор Дирака на положительную и отрицательную частотные части, т. е. на операторы рождения и уничтожения, получим

$$\psi'(x) = i\gamma_5\psi(-x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 k_0} \{\varphi_r^{(+)}(k, x)\, a^{+}_{-r,+}(k) + \varphi_r^{(-)}(k, x)\, a_{-r,-}(k)\}.$$

[Ср. эту формулу с (4′) в гл. 1, § 3!] Если мы попытаемся получить формулу

$$i\gamma_5\psi(-x) = U\psi(x)\,U^{-1}$$

с унитарным оператором U в гильбертовом пространстве (унитарным, поскольку $\psi'(x)$ и $\psi(x)$ подчиняются одним и тем же уравнениям поля и перестановочным соотношениям), то мы придем к условию

$$Ua^{\dagger}_{r,-}(k)\,U^{-1}=a_{-r,-}(k).$$

Это соотношение для унитарного оператора, конечно, невозможно.

Чтобы изобразить сильное отражение оператором в гильбертовом пространстве, мы должны добавить второе отображение алгебры операторов, еще раз изменяющее порядок операторов на обратный. Однако это отображение не должно изменять значения физически наблюдаемых величин. Этим требованиям удовлетворяет эрмитово сопряжение. Чтобы обеспечить инвариантность теории квантового поля, мы должны теперь в дополнение к пяти постулатам гл. II, п. 1 ввести еще шестой:

6) Лагранжиан является самосопряженным.

Эрмитово сопряжение означает, конечно, комплексное сопряжение всех c-чисел. Поэтому оператор симметрии должен быть антилинейным оператором.

Ограничиваясь скалярным, спинорным и векторным полями, сформулируем теорему[9]:

Всякая квантовая теория взаимодействующих полей со спином 0, $^1/_2$ и 1, удовлетворяющая постулатам 1)—6), будет инвариантной относительно следующего антиунитарного преобразования в гильбертовом пространстве:

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(x)\longrightarrow\Theta\varphi(x)\Theta^{-1}=\varphi^{\dagger}(-x),\\ &\psi(x)\longrightarrow\Theta\psi(x)\Theta^{-1}=-i\gamma_5^T\psi^{\dagger}(-x),\\ &A_\mu(x)\longrightarrow\Theta A_\mu(x)\Theta^{-1}=-A_\mu(-x).\end{aligned}\right. \tag{29}$$

Это преобразование получается из (28) посредством «комплексного сопряжения».

Доказательство этой теоремы будет получено, как только мы продемонстрируем, что Θ действительно является антиунитарным оператором в гильбертовом пространстве. Для этого нужно только сравнить (29) с таблицей I гл. I, п. 3: Θ с точностью до фазового множителя совпадает с произведением трех операторов T, C и P в гильбертовом пространстве. Операторы C и P унитарные, T — антиунитарный оператор, следовательно, Θ — антиунитарный оператор. Из этого сравнения выясняется также физическая интерпретация оператора Θ, равно как и соотношение инвариантности для элементов S-матрицы

$$(\Theta\chi_A,\,S\Theta\chi_B)=(\chi_B,\,S\chi_A), \tag{30}$$

естественное с физической точки зрения.

4. Теорема *TCP* в терминах вакуумных средних

Уайтмен[27] показал, что всякая теория квантового поля полностью определяется набором усредненных по вакууму произведений операторов поля. Доказательство теоремы *TCP*, выраженной через эти средние по вакууму, получено Йостом[10].

Постулаты:

1) Инвариантность теории относительно собственной группы Лоренца.
2) Положительная определенность энергии; существование вакуума.
3) Слабая причинность.

Для всех наборов $n+1$ пространственно-временны́х точек $(x_1,\ldots,x_{n+1})$, для которых $\sum\lambda_i(x_i-x_{i+1})$ всегда будет пространственно-подобным вектором при условиях $\lambda_i\geqslant 0$ и $\sum\lambda_i=1$, мы имеем соотношение

$$\langle\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_{n+1}(x_{n+1})\rangle_0=(-1)^{\sigma}\langle\varphi_{n+1}(x_{n+1})\ldots\varphi_2(x_2)\,\varphi_1(x_1)\rangle_0, \tag{31}$$

где σ есть число перестановок фермионных полей в произведении справа, в котором порядок сомножителей, обратный первоначальному.

Такая слабая причинность, конечно, соблюдается, если на операторы накладываются обычные требования причинности, сформулированные в постулатах 3) и 4) гл. II, п. 1, но в действительности она значительно слабее указанных требований.

Теорема Йоста.

Во всякой квантовой теории поля, удовлетворяющей постулатам 1) — 3), вакуумные средние инвариантны относительно Θ, т. е. для всякого набора $n+1$ пространственно-временных точек мы имеем

$$\langle \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_{n+1}(x_{n+1})\rangle_0 = \\ = \langle \Theta\varphi_1(x_1)\Theta^{-1}\Theta\varphi_2(x_2)\Theta^{-1}\ldots\Theta\varphi_{n+1}(x_{n+1})\Theta^{-1}\rangle_0^*. \quad (32)$$

Например, если $n+1$ полей φ_i являются скалярными*), уравнение (32) гласит

$$\langle \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_{n+1}(x_{n+1})\rangle_0 = \langle \varphi_1^\dagger(-x_1)\varphi_2^\dagger(-x_2)\ldots\varphi_{n+1}^\dagger(-x_{n+1})\rangle_0^*. \quad (32')$$

Доказательство этой теоремы основано на результатах изучения аналитических свойств вакуумных средних, которые были получены Бергманом-Холлом и Уайтменом. Сформулируем эти результаты без доказательств или подробного обсуждения, ограничившись скалярными полями [27,28].

В силу инвариантности при трансляциях вакуумное среднее значение произведения $n+1$ операторов скалярного поля всегда является функцией только n переменных $\xi_i = x_i - x_{i+1}$

$$\langle \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_{n+1}(x_{n+1})\rangle_0 = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n). \quad (33)$$

Эта функция $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ представляет собой граничное значение функции $F(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ комплексных 4-векторов, определенной и аналитичной в области R_n, состоящей из всех точек $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ с $\operatorname{Im}\zeta_i > 0$ $(i=1, \ldots, n)$ переднего светового конуса. Имеем

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re}\zeta_k\to\xi_k \\ \operatorname{Im}\zeta_k\to 0}} F(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = F(\xi_1, \ldots, \xi_n). \quad (34)$$

По отношению к собственной группе Лоренца имеем

$$F(\Lambda\zeta_1, \ldots, \Lambda\zeta_n) = F(\zeta_1, \ldots, \zeta_n).$$

Функцию $F(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, определенную в области R_n, можно непротиворечивым образом аналитически продолжить на область R_n', которая возникает в результате применения всех комплексных преобразований Лоренца с определителем $+1$ ко всем точкам R_n.

Аналитически продолженная функция удовлетворяет для всех комплексных преобразований Лоренца Λ с определителем $+1$

$$F(\Lambda\zeta_1', \ldots, \Lambda\zeta_n') = F(\zeta_1', \ldots, \zeta_n').$$

Хотя R_n не содержит действительных точек, но область R_n' будет содержать точки $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ с действительными 4-векторами.

Если в области действительных точек, содержащихся в R_n', будет задана некоторая функция, то мы получим только одно аналитическое продолжение (если оно существует) во всей области R_n'. Поэтому вакуумные средние в действительных точках R_n' определяют единственным образом значения вакуумных средних во всей области.

---

*) φ_i скалярны по отношению к собственной группе Лоренца.

Область действительных точек, содержащихся в R_n', была определена Йостом [10]. Она состоит из всех действительных $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$, для которых $\sum \lambda_i \varrho_i$ пространственно-подобна при $\lambda_i \geqslant 0$ и $\sum \lambda_i = 1$. (Это в точности совпадает с требованием для $(n+1)$ наборов точек, содержащимся в постулате слабой причинности).

Получив эти результаты, можно довольно элементарным путем доказать теорему Йоста. Ограничимся опять скалярными полями и рассмотрим функцию $F(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, определенную формулой (33), а также следующую функцию:

$$G(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \langle \varphi_n^\dagger(x_1)\, \varphi_2^\dagger(x_2) \ldots \varphi_{n+1}^\dagger(x_{n+1})\rangle_0.$$

Постулат слабой причинности ($\sigma = 0$ в нашем случае) для всех действительных точек R_n' означает

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = G^*(\xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{35}$$

Одним, из комплексных преобразований Лоренца, не изменяющим средних значений, является инверсия пространства-времени $\xi_i \to -\xi_i$. (Заметим, что с помощью комплексных преобразований Лоренца инверсию можно получить из тождества непрерывно.) Поэтому можно утверждать, что для всех действительных точек R_n'

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = G^*(-\xi_1^*, \ldots, -\xi_n^*). \tag{36}$$

Продолжая теперь на все точки R_n', получим

$$F(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = G^*(-\zeta_1^*, \ldots, -\zeta_n^*). \tag{37}$$

Если $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ является элементом R_n, то $(-\zeta_1^*, \ldots, -\zeta_n^*)$ тоже будет элементом R_n. Следовательно, в уравнении (37) можно перейти к пределу $\operatorname{Im}\zeta_i \to 0$ согласно формуле (34). Отсюда следует, что уравнение (36) выполняется во всей области R_n.

Однако уравнения (36) и (32) в точности совпадают. Таким образом, теорема Йоста доказана. (Интересно отметить, что выполняется также следующая обратная теорема: постулаты 1) и 2) совместно с TCP-инвариантностью приводят к слабой причинности. Иначе говоря, TCP-инвариантность и слабая причинность суть эквивалентные требования *). Доказательство: предполагая, что уравнение (36) выполняется всюду, мы немедленно заключаем, что (35) выполняется для всех действительных точек R_n' в силу инвариантности функций Уайтмена в области R_n' относительно комплексной группы Лоренца.)

III. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ **)

1. Частицы и античастицы

Опыт показывает, что некоторые частицы встречаются в природе только в одной форме, тогда как для других известны два типа. Так, все нейтральные π-мезоны идентичны, а заряженные π-мезоны могут иметь оба знака заряда. В последнем случае говорят о частицах и античастицах, хотя логически и нельзя приписать частице свойство быть либо частицей, либо античастицей, можно лишь утверждать, что по отношению друг к другу эти две формы частиц являются античастицами. Мы пока-

*) Именно это и есть точная формулировка теоремы Йоста, доказанной им в оригинальной работе [10].

**) Переработанный вариант цикла лекций, прочитанных осенью 1958 г. на семинаре по физике высоких энергий в Обервольфахе, Блек-Форест.

жем, что для оправдания существования таких пар частиц, кроме теоремы TCP, необходимо понятие обобщенного заряда.

Под обобщенным зарядом мы понимаем строго сохраняющееся аддитивное квантовое число *), переносимое индивидуальными частицами. Все обобщенные заряды вакуума по определению равны нулю. В природе, по-видимому, существует три таких обобщенных заряда:

1) электрический заряд,
2) лептонный заряд,
3) барионный заряд.

Электрический заряд играет особую роль, поскольку он является не только аддитивным квантовым числом, но также измеряет силу взаимодействия частицы с электромагнитным полем. Ограничиваясь рассмотрением сильных и электромагнитных взаимодействий, мы обнаруживаем еще один обобщенный заряд, называемый странностью. На опыте все пары частица — античастица на самом деле характеризуются одним или несколькими обобщенными зарядами, не равными нулю:

1) электрическим зарядом: e^+, e^-; μ^+, μ^-; K^+, K^-; π^+, π^-; p^+, p^-;
2) лептонным зарядом: ν, $\bar{\nu}$; e^+, e^-; μ^+, μ^-;
3) барионным зарядом: p^+, p^-; n, $\bar{n}$; Λ^0, $\bar{\Lambda}^0$.

По-видимому, для всех барионов существуют антибарионы; они должны характеризоваться (по меньшей мере) своим барионным зарядом. В пределах применимости сильных и элекромагнитных взаимодействий существуют также пары частица — античастица, характеризуемые только ненулевой странностью, а именно пара K^0, $\bar{K}^0$.

В главе II было показано, что для весьма широкого класса релятивистских теорий поля существует антиунитарное преобразование Θ (преобразование TCP), которое антикоммутирует со всеми операторами обобщенных зарядов Q:

$$\{\Theta, Q\} = 0. \tag{III,1}$$

Оно коммутирует с операторами импульса **):

$$[\Theta, P_\mu] = 0. \tag{III,2}$$

Одночастичное состояние Φ с массой покоя μ определяется решением задачи о собственных значениях уравнения

$$(P_\sigma P^\sigma + \mu^2)\,\Phi = 0. \tag{III,3}$$

Для одночастичного состояния должны выполняться определенные дополнительные условия. Поскольку Q определяет сохраняющуюся величину

$$[Q, P_\mu] = 0, \tag{III,4}$$

то в качестве состояния Φ можно взять собственное состояние Q с собственным значением (зарядом) q:

$$Q\Phi = q\Phi. \tag{III,5}$$

В духе строгих правил отбора [29] можно даже сказать, что только собственные значения Q обладают физическим смыслом. Из уравнения (III.2) следует, что $\Theta\Phi$ является одночастичным состоянием с той же массой

$$(P_\sigma P^\sigma + \mu^2)\,\Theta\Phi = 0, \tag{III,6}$$

*) Напомним читателю, что, например, четность представляет собой мультипликативное квантовое число.

**) Ввиду антилинейности Θ в этом уравнении необходимо применять эрмитовы операторы P_μ (например, с 0-компонентной вместо 4-компоненты).

но с противоположным зарядом (в силу уравнения (III,1)). Если Ф (или соответствующая частица) не обладает каким-либо обобщенным зарядом, то нельзя утверждать, что Ф и ΘФ будут относиться к разным частицам. Они могут лишь представлять состояния одной и той же частицы (т. е. будут принадлежать тому же самому линейному множеству, преобразуемому само в себя собственной неоднородной группой Лоренца). Однако для ненулевого заряда оба состояния, конечно, существенно различны; в этом случае существуют два типа частиц с одинаковой массой, которые взаимно являются античастицами. Легко показать, что они обладают также одинаковым спином. Все рассуждение относится, строго говоря, лишь к стабильным частицам; нестабильные частицы будут рассмотрены позднее*).

Поучительным примером роли обобщенного заряда для понятия «частица — античастица» могут служить нейтральные K-мезоны. В пределах применимости сильных и электромагнитного взаимодействий существует пара, состоящая из частицы и античастицы, странность которой не равна нулю. При «включении» слабых взаимодействий этот обобщенный заряд перестает сохраняться, и вырожденная масса расщепляется на две в общем различные массы; тот факт, что истинные K-мезоны нестабильны, для данного общего рассуждения несуществен.

Добавим несколько замечаний более формального характера. Как показано в гл. I, § 1а, оператор Q порождает калибровочные преобразования первого рода, по крайней мере для «голых» полей. Это обстоятельство проливает некоторый свет на использование неэрмитовых полей в квантовой теории. Поскольку можно рассматривать эрмитовы поля в качестве основных элементов, понятие неэрмитовых полей становится разумным лишь при условии, что действительная и мнимая части взаимосвязаны градиентной инвариантностью. Если же исходить из неэрмитовых «голых» полей, то в отсутствие градиентной инвариантности (или соответствующего обобщенного заряда) мы не обнаружим в общем случае дублетов по массам для физических состояний (определяющих физические неэрмитовы поля). Однако, при наличии такой градиентной инвариантности теорема TCP сразу приводит к дублетам по массам и оправдывает использование физических неэрмитовых полей.

К нестабильным частицам предыдущие замечания неприменимы. Хотя, насколько нам известно, формальная роль нестабильных частиц в теории квантованного поля полностью не выяснена, все же весьма вероятно, что свойства этих частиц можно получить из S-матрицы (которая связывает начальные и конечные состояния только стабильных частиц). Последующее обсуждение будет основываться на предположении**), что в процессе взаимодействия между стабильными продуктами распада нестабильной частицы эта нестабильная частица проявляет себя благодаря резонансу, обусловленному ее «пропагатором»

$$\langle b \mid S \mid a\rangle = \langle b \mid a\rangle - 2\pi i \delta^4 (p_a - p_b) \left(\frac{\cdots}{k_\sigma k^\sigma + \left(\mu - \frac{i\Gamma}{2}\right)^2} + \cdots \right). \quad (III,7)$$

На рис. 3 изображен переход из состояния a в состояние b через промежуточную нестабильную частицу.

---

*) Заметим, что требование об обращении заряда в нуль нельзя обойти, постулируя инвариантность относительно C или CP.

**) Те же самые окончательные результаты были получены Людерсом и Цумино [30] *без этого предположения*. Эти авторы пользовались формулировкой, примененной в квантовой механике, но, возможно, менее пригодной в квантовой теории поля. См. также первую в этом направлении работу Ли, Эме и Янга [31]. Заслугой именно этих авторов является осознание практического значения теоремы TCP.

Масса покоя μ и обратное среднее время жизни Γ входят в формулу (III, 7) именно в указанной комбинации потому, что «волновая функция» (каково бы ни было значение этого слова) нестабильной частицы должна зависеть от времени как $\exp\left[-i\left(\mu-\frac{i\Gamma}{2}\right)t\right]$. Можно далее предполагать, что числитель резонансного члена может быть выбран таким образом, что получится матрица распада, однако это второе предположение не будет здесь обсуждаться.

Если начальное и конечное состояния имеют некоторый ненулевой заряд, то этот заряд, конечно, можно приписать и промежуточной нестабильной частице*). Тогда уравнение (30), или в принятом здесь обозначении

$$\langle b \mid S \mid a\rangle = \langle \Theta a \mid S \mid \Theta b\rangle, \qquad \text{(III,8)}$$

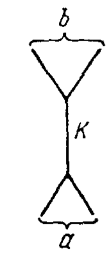

Рис. 3.

позволяет перейти к процессам для соответствующих античастиц. Нестабильная частица, которая связывает начальное состояние с конечным, имеет теперь противоположный заряд и должна считаться античастицей по отношению к только что рассмотренной частице. Как непосредственно следует из уравнений (III, 8 и 7), масса и время жизни обеих частиц должны быть одинаковыми**). Как мы уже упоминали по этому поводу ранее (и еще вернемся к этому в п. 2), вследствие изменения порядка событий во времени на обратный и теоремы TCP нельзя сделать вывод о том, что относительные вероятности для соответствующих каналов у частицы и античастицы также будут одинаковыми. Однако они будут одинаковыми, если соблюдается C; они также будут одинаковыми после усреднения по проекциям спина, если соблюдается только CP, что, по-видимому, имеет место в действительности при слабых взаимодействиях.

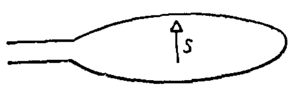

Рис. 4. Частица со спином «вверх» в магнитном поле петли с током.

Наконец, покажем, что вследствие теоремы TCP (стабильные) частицы и античастицы имеют противоположные магнитные дипольные моменты***). Слово «противоположный» здесь, конечно, относится к направлению спина. Рассмотрим вместо формального доказательства мысленный эксперимент (рис. 4). Для измерения магнитного момента частицы ее необходимо поместить во внешнее магнитное поле; это магнитное поле можно получить, пропуская электрический ток через проволочную петлю. Предположим, что спин частицы (пользуясь пока этим неудовлетворительным термином) направлен «вверх». Пространственное отражение, входящее в TCP, будем производить по отношению к центру петли. Тогда после применения преобразования TCP мы получим античастицу в той же точке, но со спином, направленным «вниз». Что происходит при этом преобразовании с магнитным полем? Первоначально по проволоке движутся отрицательные электроны в направлении, противоположном направлению тока. Под действием T направление движения электронов изменяется на обратное; C преобразует отрицательные электроны в положительные электроны, так что после преобразования TC электрический ток (и магнитное поле) остается

---

*) Это предположение о ненулевом заряде, в сущности, равносильно постулату о том, что частица и античастица не имеют общих каналов распада [31].

**) Как указал автору Г. Вандерс, в действительности, достаточно постулировать существование какой-нибудь процедуры, посредством которой можно изучать свойства нестабильной частицы с помощью S-матрицы.

***) Аналогичные результаты получаются для высших статических моментов, а также для распределения заряда и плотностей моментов в пространстве.

тем же самым. Наконец, P не изменяет тока в петле. Итак, при действии TCP магнитное поле не меняется. Вследствие теоремы TCP энергии частицы в магнитном поле со спином «вверх» и античастицы со спином «вниз» равны между собой. Поскольку в выражение для энергии входит произведение $\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}$, в обоих случаях магнитный момент должен быть одинаковым по отношению к внешнему полю. Это означает, что для частицы и античастицы он будет численно равным, но противоположным по направлению относительно спина*).

2. Экспериментальная проверка преобразований симметрии

Вплоть до конца 1956 г. единственной экспериментальной задачей, связанной с преобразованиями симметрии, было определение внутренних четностей, а для строго нейтральных частиц — также зарядовых четностей; как указывается в Приложении 1, с операцией обращения времени не связано никакое квантовое число. Классическая работа Ли и Янга[33] открыла новую область экспериментальных проблем, связанных с эмпирическим определением инвариантности или неинвариантности относительно отдельных преобразований симметрии. Теорема TCP входит в этот класс проблем двумя путями[31].

1. Если одно из трех свойств симметрии T, C или P нарушается (как это очевидно для P в слабых взаимодействиях), то по крайней мере нарушается еще одно**). Эмпирически представляется очевидным, что нарушается также C, но доказательств нарушения T пока нет.

2. *Инвариантность относительно C или CP* можно проверить, не сравнивая процесс для некоторых частиц с процессом для соответствующих античастиц. Вместо этого просто проверяется TP или T (что, однако, как мы увидим, связано с дополнительными предположениями).

Очевидно,общая теорема наподобие теоремы TCP необходима только в том случае, если мы хотим проверить свойства симметрии независимо от детальных предположений о механизме взаимодействия. В противном случае наблюдаемые величины можно было бы вычислить как функции констант связи в предполагаемых взаимодействиях; затем можно было бы сделать из данных опыта выводы об этих константах связи и сравнить выводы с ограничениями, следующими из инвариантности относительно различных преобразований симметрии. В дальнейшем мы будем рассматривать только независимые от модели способы проверки законов преобразований симметрии. Однако, эта проблема будет обсуждаться в аспекте более широком, чем применение теоремы TCP.

В силу малости всех эффективных сечений единственными практически выполнимыми экспериментами в области слабых взаимодействий являются опыты по распадам. Наша первая задача состоит в том, чтобы выразить такие опыты на языке математики. Для этой цели введем матрицу распада $\langle a|M|k\rangle$, которая связывает состояния k нестабильной частицы (строго говоря, спиновые состояния с нулевым импульсом) с состояниями a продуктов распада (с полным нулевым импульсом и полной энергией,

---

*) Заменяя петлю конденсатором, можно показать, что электрические дипольные моменты (если они существуют) у частицы и античастицы также должны быть противоположными. Это замечание дополняет доказательство Ландау [32], что CP-инвариантность требует обращения в нуль электрических дипольных моментов. Однако, легче рассмотреть T-инвариантность прямо в мысленном эксперименте и лишь затем применить теорему TCP.

**) Эта роль теоремы TCP была указана также в конспекте лекций Р. Гатто (осень 1958 г.).

равной энергии покоя для нестабильной частицы). Мы не касаемся здесь проблемы фактического вычисления этой матрицы*). В отдельном опыте**) приготавливается начальное состояние нестабильных частиц (например, ориентируются спины), которое можно описать матрицей $\langle k \mid \varrho_{\text{нач}} \mid k' \rangle$. Далее производятся определенные измерения нестабильных частиц при помощи специального набора детекторов. Эти измерения также можно характеризовать некоторой матрицей плотности***). Ненормированная вероятность переходов из начального состояния в конечное тогда будет равна

$$w(\text{нач.} \to \text{кон.}) =$$
$$= \int \langle a \mid M \mid k \rangle \langle k \mid \varrho_{\text{нач}} \mid k' \rangle \langle a' \mid M \mid k' \rangle^* \langle a' \mid \varrho_{\text{кон}} \mid a \rangle \, dk \, dk' \, da \, da'. \qquad (\text{III},9)$$

Прежде чем обсуждать результаты экспериментальной проверки различных преобразований симметрии, основанной на уравнении (III,9), мы перечислим свойства импульсов, спинов и зарядов частиц по отношению к преобразованиям симметрии (таблица VI). Эта таблица представляет собой сжатый вариант таблицы V. Зарядовое сопряжение ($q \to -q$) означает, что частицы следует заменить античастицами. В таблице указывается также, изменяется порядок событий во времени или нет.

Таблица VI

	p	s	q	Порядок времени
T	—p	—s	q	Обратный
C	p	s	$-q$	Прежний
P	—p	s	q	Прежний
Θ	p	—s	$-q$	Обратный

Метод экспериментальной проверки сохранения или несохранения четности теперь совершенно ясен. Логически можно рассуждать следующим образом. Предположим, что четность сохраняется; из этого предположения мы получим следствия для наблюдаемых величин и проверим эти следствия экспериментально. Если они не оправдываются на опыте, то четность не сохраняется. При сохранении четности имеем

$$\langle a \mid M \mid k \rangle = \langle Pa \mid M \mid Pk \rangle. \qquad (\text{III}, 10)$$

(Это соотношение представляется почти очевидным; его можно подтвердить с помощью формулы первого порядка (16) или другой формулы, полученной из теории возмущений.) Определим матрицы плотности зеркальных состояний равенствами:

$$\begin{aligned} \langle k \mid \varrho_{P\,\text{нач}} \mid k' \rangle &\equiv \langle Pk \mid \varrho_{\text{нач}} \mid Pk' \rangle, \\ \langle a' \mid \varrho_{P\,\text{кон}} \mid a \rangle &\equiv \langle Pa' \mid \varrho_{\text{кон}} \mid Pa \rangle. \end{aligned} \qquad (\text{III},11)$$

Эти матрицы, очевидно, описывают зеркальные состояния, в которых все импульсы заменены на обратные, но спины оставлены без изменения

*) См. уравнение (16) и замечания в связи с уравнением (28).

**) Мы рассматриваем только идеализированные эксперименты без локализации в пространстве.

***) Конечное наблюдение только в очень редких случаях выбирает чистые состояния (даже если отвлечься от того факта, что в действительных опытах импульсы наблюдаемых частиц содержатся в некотором конечном объеме импульсного пространства). Нормально не все продукты распада наблюдаются одновременно или по крайней мере измеряются не все спины.

(ср. таблицу VI). Заменяя переменные интегрирования (с якобианом, равным единице), получим из уравнения (III,9)

$$w\,(\text{нач.} \to \text{кон.}) =$$
$$= \int \langle Pa \mid M \mid Pk \rangle \langle Pk \mid \varrho_{\text{нач}} \mid Pk' \rangle \langle Pa' \mid M \mid Pk' \rangle^{*} \langle Pa' \mid \varrho_{\text{кон}} \mid Pa \rangle\, dk\, dk'\, da\, da'. \qquad \text{(III,12)}$$

Отсюда, с учетом уравнений (III,10) и (III,11), получим

$$w\,(\text{нач.} \to \text{кон.}) = w\,(P\,\text{нач.} \to P\,\text{кон.}). \qquad \text{(III,13)}$$

Если это соотношение не выполняется, то возможен лишь однозначный вывод: четность не сохраняется. Рассмотрим простой пример (опыт Ву). Пусть спин нестабильной частицы $\mathbf{s}_{\text{нач}}$ ориентирован по некоторому выделенному направлению («вверх»). Будем наблюдать один из продуктов распада с импульсом $\mathbf{p}_{\text{нач}}$. Схематически это показано на рис. 5, *а*. На рис. 5, *б* изображено зеркальное состояние: начальный спин по-прежнему направлен «вверх», но импульс вторичной частицы заменен на обратный. (В силу несомненной инвариантности относительно вращений достаточно рассматривать только угол между направлением спина первичной частицы и импульсом вторичной частицы.) Если четность сохраняется, т. е. если выполняется уравнение (III,13), то вероятности обоих процессов равны и угловое распределение симметрично относительно плоскости, перпендикулярной направлению ориентации. Кратко можно сказать, что четность не сохраняется, если «наблюдается» скалярное произведение $\mathbf{s}_{\text{нач}}\mathbf{p}_{\text{кон}}$ (однако это требует дополнительных пояснений). Действительно, если четность сохраняется, то положительные и отрицательные значения этого произведения будут встречаться с одинаковой частотой. Упомянем между прочим, что то же самое формальное выражение $\mathbf{sp}$ характеризует также продольную поляризацию продуктов распада неполяризованного источника.

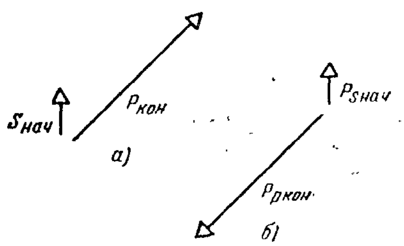

Рис. 5. *а* — ориентация спина нестабильной частицы и импульс наблюдаемого продукта распада; *б* — результат пространственного отражения состояния *а*.

Все опыты по проверке четности можно сформулировать следующим образом. Из спинов частиц в начальном состоянии и из спинов и импульсов продуктов распада составляются выражения, инвариантные относительно вращений. Затем этим величинам дается физическая интерпретация, как в только что рассмотренном случае. Если эти величины содержат нечетное число импульсов, то это значит, что они меняют знак при отражении пространственных координат (см. таблицу VI) и что их «обнаружение» является признаком несохранения четности в рассматриваемом процессе *).

Аналогичным образом можно проверить, в принципе, инвариантность относительно зарядового сопряжения. Уравнение (III,10) следует заменить на

$$\langle a \mid M \mid k \rangle = \langle Ca \mid M \mid Ck \rangle, \qquad \text{(III,14)}$$

а уравнение (13) на

$$w\,(\text{нач.} \to \text{кон.}) = w\,(C\,\text{нач.} \to C\,\text{кон.}). \qquad \text{(III,15)}$$

*) Это правило, по-видимому, проще, чем то, в котором необходимо делать различие между скалярами и псевдоскалярами.

Таким образом, необходимо сравнить распад какой-нибудь частицы с распадом соответствующей античастицы. Однако, обычно инвариантность относительно зарядового сопряжения проверяется только на одном типе частиц; в этом случае применяется теорема TCP.

Совершая преобразование TCP (или обращение времени) над процессом распада, мы сталкиваемся с тем, что это преобразование заменяет порядок событий во времени на обратный. Следовательно, в противоположность результату применения P или C, процесс распада не отображается на другой процесс распада. Поэтому неудивительно, что из инвариантности относительно преобразований симметрии, включающих обращение времени, можно получить полезные сведения только в том случае, если будут сделаны некоторые дополнительные предположения.

Следствия из TCP-инвариантности для процессов распада будут анализироваться при следующих предположениях [30]: рассматриваемые частицы стабильны при сильных взаимодействиях (термин «сильные» означает здесь как сильные, так и электромагнитные взаимодействия в обычном смысле)*); в первом порядке достаточно рассматривать слабые взаимодействия, ответственные за распад. Тогда сильные взаимодействия определяют одночастичное состояние Ψ_k (характеризуемое импульсом частицы и ее спином), которое начнет распадаться после включения слабых взаимодействий. Сильные взаимодействия приводят также к рассеянию продуктов распада в состояния $\Psi_{a\mathrm{out}}$, характеризуемые конечными частицы с квантовыми числами a. Вычислим матрицу распада $<a\,|\,M\,|\,k>$ в представлении взаимодействия, в котором полевые операторы подчиняются уравнениям поля с учетом сильных взаимодействий, а изменение амплитуды состояния во времени определяется гамильтонианом слабого взаимодействия $H(t)$**):

$$2\pi\delta^4(k-p_a)\langle a\,|\,M\,|\,k\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\Psi_{a\,\mathrm{out}}, H(t)\,\Psi_k)\,dt. \qquad \text{(III,16)}$$

Обратное время жизни Γ выражается через матрицу распада***):

$$\mu\Gamma = 2\pi \int |\langle a\,|\,M\,|\,k\rangle|^2\,\delta^4(k-p_a)\,da, \qquad \text{(III,17)}$$

причем интегрирование проводится по конечным состояниям a. Символом μ обозначена масса покоя нестабильной частицы. Аналогично относительные вероятности процессов получаются из уравнения (III,17) в результате интегрирования только по избранным конечным состояниям. В предположении TCP-инвариантности $\Theta\Psi_k$ есть состояние стабильной античастицы с прежним импульсом и обратным направлением спина (см. таблицу VI)

$$\Theta\Psi_k = \Psi_{\Theta k}. \qquad \text{(III,18)}$$

Таким же точно образом получаем

$$\Theta\Psi_{a\,\mathrm{out}} = \Psi_{\Theta a\,\mathrm{in}}. \qquad \text{(III,19)}$$

Замена значка «out» значком «in» есть следствие обращения порядка во времени; состояние $\Psi_{\Theta a\,\mathrm{in}}$ характеризуется начальными античастицами

*) Вообще можно говорить об определяющих (вместо сильных) и распадных (вместо слабых) взаимодействиях.

**) Строго говоря, предполагается релятивистская нормировка собственных состояний импульса, но для наших рассуждений эта техническая подробность несущественна. Матрица распада в уравнении (III, 16) относится к произвольному полному импульсу, тогда как матрица распада в уравнениях (III, 9) —(III, 15) была определена для полного импульса, равного нулю.

***) Дифференциал da означает произведение релятивистски инвариантных дифференциалов импульса.

с прежними импульсами и обратными направлениями спинов. Состояния «in» связаны с состояниями «out» S-матрицей сильных взаимодействий

$$\Psi_{\Theta a\,\mathrm{in}} = S\Psi_{\Theta a\,\mathrm{out}} = \int db < \Theta b \,|\, S \,|\, \Theta a > \Psi_{\Theta b\,\mathrm{out}}. \tag{III,20}$$

Постулат TCP-инвариантности для слабого распадного взаимодействия $H(t)$ означает

$$\Theta H(t)\,\Theta^{-1} = H(-t). \tag{III,21}$$

Наконец, тем же способом получаем *)

$$\langle a \,|\, M \,|\, k\rangle = \int db\,\langle \Theta b \,|\, M \,|\, \Theta k\rangle^* \langle \Theta b \,|\, S \,|\, \Theta a\rangle = \int db\,\langle \Theta b \,|\, M \,|\, \Theta k\rangle^* \langle a \,|\, S \,|\, b\rangle \tag{III,22}$$

(см. уравнение (III,8)).

Укажем два применения уравнения (III,22):

1) С помощью этой формулы первого порядка может быть проверено равенство времен жизни частиц и античастиц, являющееся следствием TCP-инвариантности (что было доказано в § 1).

Подставляя (III,22) в (III,17), получаем

$$\mu\Gamma = 2\pi \int \langle \Theta b \,|\, M \,|\, \Theta k\rangle^* \langle \Theta c\, M\, \Theta k\rangle \langle a \,|\, S \,|\, b\rangle \langle a \,|\, S \,|\, c\rangle^*\, da\, db\, dc, \tag{III,23}$$

что после применения условия унитарности

$$\int \langle a \,|\, S \,|\, b\rangle \langle a \,|\, S \,|\, c\rangle^* = \langle c \,|\, b\rangle \tag{III,24}$$

сводится к

$$\mu\Gamma = 2\pi \int |\langle \Theta b \,|\, M \,|\, \Theta k\rangle|^2\, \delta^4(k - p_b)\, db. \tag{III,25}$$

В правой части здесь, очевидно, содержится произведение массы и обратного времени жизни античастицы (в первом порядке теории возмущений слабые взаимодействия не влияют на массы, так что массы частиц и античастиц равны).

2) Если сильными взаимодействиями в данном процессе распада можно пренебречь (т. е. если рассеяние продуктов распада практически отсутствует):

$$\langle a \,|\, S \,|\, b\rangle = \langle a \,|\, b\rangle, \tag{III,26}$$

то из (III,22) получим

$$\langle a \,|\, M \,|\, k\rangle = \langle \Theta a \,|\, M \,|\, \Theta k\rangle^*. \tag{III,27}$$

Если уравнение (III,27) выполняется при наличии TCP-инвариантности, мы будем говорить, что рассматриваемый процесс распада является процессом «существенно первого порядка». Наш вывод получен для процессов первого порядка в строгом смысле; однако уравнение (III,27) выполняется при более общих предпосылках. Предположим, что матрица распада может быть вычислена в теории возмущений. Тогда эта матрица будет представлять сумму членов, числители которых образуются из произведений матричных элементов гамильтониана взаимодействия (как

---

*) Совершенно таким же образом из T-инвариантности следует, что

$$\langle a \,|\, M \,|\, k\rangle = \int db\,\langle Tb \,|\, M \,|\, Tk\rangle^* \langle Tb \,|\, S \,|\, Ta\rangle = \int db\,\langle Tb \,|\, M \,|\, Tk\rangle^* \langle a \,|\, S \,|\, b\rangle$$

с хорошо известными следствиями (см. [34]). В литературе иногда утверждают, что эта формула выражает взаимодействие между продуктами распада в конечном состоянии, хотя в действительности она является более общей.

сильного, так и слабого), а знаменатель состоит из произведений разностей энергии. Учитывая TCP-инвариантность, для матричных элементов получаем

$$\langle c \mid H \mid d\rangle = \langle \Theta c \mid H \mid \Theta d\rangle^*. \tag{III,28}$$

Энергетические знаменатели действительны с точностью до известного слагаемого $i\varepsilon$. Это слагаемое $i\varepsilon$ имеет значение только для исчезающих энергетических знаменателей, т. е. в том случае, если промежуточное состояние может быть также и конечным состоянием. Если вклады таких промежуточных состояний пренебрежимо малы, то уравнение (III,27) выполняется. Если имеется взаимодействие в конечных состояниях, то всегда существуют промежуточные состояния, которые являются также конечными состояниями, и, следовательно, уравнение (III,27) не выполняется; действительно, при дополнительных предположениях его следует заменить на уравнение (III,23). Иногда предполагают, что, например, бета-распад происходит не прямо, а через некоторые промежуточные состояния; однако такие промежуточные состояния, вероятно, не могут быть конечными состояниями, поскольку в противном случае они проявились бы на опыте в виде дополнительных каналов распада (возможно, более вероятных).

Обратимся теперь к проблеме проверки C-инвариантности без перехода к античастицам. В предположении C-инвариантности имеем

$$\langle \Theta a \mid M \mid \Theta k\rangle = \langle C\Theta a \mid M \mid C\Theta k\rangle = \langle TPa \mid M \mid TPk\rangle. \tag{III,29}$$

Это соотношение можно подставить или в (III,22) или в (III,24) (когда имеются процессы существенно первого порядка). В последнем случае получим

$$\langle a \mid M \mid k\rangle = \langle TPa \mid M \mid TPk\rangle^*. \tag{III,30}$$

Рассмотрим следствия из (III,30). Вводя TP-преобразованные матрицы плотности посредством равенств

$$\begin{aligned} \langle k \mid \varrho_{TP\,\text{нач}} \mid k'\rangle &\equiv \langle TPk' \mid \varrho_{\text{нач}} \mid TPk\rangle, \\ \langle a' \mid \varrho_{TP\,\text{кон}} \mid a\rangle &\equiv \langle TPa \mid \varrho_{\text{кон}} \mid TPa'\rangle, \end{aligned} \tag{III,31}$$

совершенно таким же образом, как в случае P-инвариантности, мы получим следующее соотношение:

$$w\,(\text{нач.} \to \text{кон.}) = w\,(TP\,\text{нач.} \to TP\,\text{кон.}) \tag{III,32}$$

Состояния, преобразованные операцией TP, получаются при замене $\mathbf{p} \to \mathbf{p}$, $\mathbf{s} \to -\mathbf{s}$ (см. таблицу VI). Если нужно проверить инвариантность относительно зарядового сопряжения, не сравнивая процессы между частицами с соответствующими процессами между античастицами, то необходимо «наблюдать» величины, инвариантные относительно вращений и содержащие нечетное число спинов. Примером может служить величина $\mathbf{sp}$, которая уже рассматривалась в связи с экспериментами по несохранению четности. Однако выводы о нарушении зарядовой инвариантности можно делать таким способом только в случае пренебрежимо малого взаимодействия в конечном состоянии (например, в бета-распаде только для членов, пропорциональных $(\alpha Z)^0$).

Независимая от модели проверка инвариантности относительно обращения времени (это преобразование не имеет ничего общего с TCP) совершается аналогичным способом. В случае процесса существенно первого порядка имеем

$$\langle a \mid M \mid k\rangle = \langle Ta \mid M \mid Tk\rangle^*. \tag{III,33}$$

Из этого уравнения получаем

$$w\,(\text{нач.} \to \text{кон.}) = w\,(T\,\text{нач.} \to T\,\text{кон.}), \qquad (\text{III},34)$$

где обращенные во времени состояния характеризуются обратными направлениями импульсов и спинов. Для проверки инвариантности относительно обращения времени необходимо наблюдать инвариантные относительно вращений величины, содержащие нечетное число множителей (например, $(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2)\,\mathbf{s}$).

Экспериментальная проверка TCP-инвариантности, в принципе, может быть проведена с помощью уравнений (III,22) или (III,27). Для применимости этих уравнений необходимо ввести некоторые дополнительные предположения. Для прямой проверки TCP-инвариантности необходимо было бы сравнить реакции между некоторыми частицами и реакции между соответствующими античастицами. Однако эффективные сечения реакций, вызванных слабыми взаимодействиями, настолько малы, что подобный эксперимент пока невозможен.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Антиунитарные операторы в гильбертовом пространстве

Оператор T, отображающий всякое линейное множество $\mathbf{D}$ гильбертова пространства $\mathbf{H}$ на другое линейное множество $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{H}$ называется антилинейным, если для любых векторов f, g в $\mathbf{D}$ и комплексных чисел a, b соблюдается следующее соотношение:

$$T\,(af + bg) = a^* Tf + b^* Tg. \qquad (\text{П}1,1)$$

При умножении антилинейного оператора на линейный оператор снова получается антилинейный оператор. Произведение двух антилинейных операторов линейно. В силу уравнения (П1,1) понятие собственного пространства антилинейного оператора лишено смысла. Ибо если φ есть собственный вектор с собственным значением a, то вектор $e^{i\alpha}\varphi$ будет собственным вектором с собственным значением $e^{-2i\alpha}a$.

Если $\mathbf{D}$ плотно в $\mathbf{H}$, то антиэрмитов сопряженный оператор $T^\dagger$ можно определить непротиворечивым образом равенством

$$(Tf,\, g) = (T^\dagger g,\, f). \qquad (\text{П}1,2)$$

Доказательство: величина (Tf, g) есть линейный функционал относительно f. Поэтому можно применить теорему Рисса: для каждого вектора g соответственно существует другой вектор $g^\dagger$ такой, что соблюдается условие $(Tf, g) = (g^\dagger, f)$. $T^\dagger$ есть оператор, который отображает g на $g^\dagger$. Оператор $T^\dagger$ можно назвать транспонированным по отношению к оператору T, причем последний, в противоположность случаю линейных операторов, может быть определен независимо от векторного базиса в гильбертовом пространстве. Применение одинакового обозначения как для эрмитова, так и для антиэрмитова сопряжения указывает на важный факт, что для линейного оператора L и антилинейного оператора T соблюдаются следующие равенства:

$$(T_1 T_2)^\dagger = T_2^\dagger T_1^\dagger, \quad (TL)^\dagger = L^\dagger T^\dagger, \quad (T_1 L T_2)^\dagger = T_2^\dagger L^\dagger T_1^\dagger.$$

Антиунитарным оператором W мы называем оператор, отображающий $\mathbf{H}$ на $\mathbf{H}$ и удовлетворяющий для всяких векторов f, g в гильбертовом пространстве условию

$$(Wg,\, Wf) = (f,\, g). \qquad (\text{П}1,3)$$

Простые рассуждения показывают, что оператор W антилинеен и что существует обратный оператор W^{-1}, в точности совпадающий с $W^{\dagger}$.

Предположим, что $\{\varphi_\nu\}$ есть полная система ортонормированных векторов. Разлагая $W\varphi_\mu$ по этой системе, получим

$$W\varphi_\mu = \sum_\nu w_{\mu\nu}\varphi_\nu. \qquad (\text{П}1,4)$$

Тогда из формулы (П1,3) следует

$$\sum_\mu w^*_{\nu\mu} w_{\rho\mu} = \delta_{\nu\rho}. \qquad (\text{П}1,5)$$

Заметим, что равенство (П1,5) в точности совпадает с условием для матричного представления унитарного оператора.

Легко также доказать обратную теорему: оператор, определенный равенством (П1,4), отображающий H на H и удовлетворяющий условию (П1,5), является унитарным, если он линеен, этот оператор является антиунитарным, если он антилинеен. Произведение двух антиунитарных операторов является унитарным.

Таким образом, всякий антиунитарный оператор W может быть получен из некоторого заданного антиунитарного оператора W_0 при помощи умножения W_0 на унитарный оператор U. В качестве оператора W_0 можно взять комплексное сопряжение в некоторой системе координат, например, в $\mathbf{r}$-представлении:

$$K\left(\frac{\mathbf{r}}{f}\right) = \left(\frac{\mathbf{r}}{f}\right)^*.$$

Оператор K имеет простые свойства

$$K^2 = 1, \quad K = K^{\dagger}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Мы полагаем, что для удобства читателей небесполезно изложить некоторые хорошо известные результаты относительно конечномерных неприводимых представлений собственной однородной группы Лоренца. Собственная группа Лоренца — это группа преобразований 4-векторов

$$x'_\mu = \sum_\nu x_\nu \alpha^\nu_\mu$$

с $\mathrm{Det}\,\|\alpha^\nu_\mu\| = +1$. Эта группа порождается шестью инфинитезимальными преобразованиями $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$ (инфинитезимальными вращениями в плоскости $\mu\nu$), которые удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[J_{\mu\nu}, J_{\varkappa\lambda}]_- = -g_{\mu\varkappa}J_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}J_{\mu\varkappa} + g_{\mu\lambda}J_{\nu\varkappa} + g_{\nu\varkappa}J_{\mu\lambda}.$$

Если ввести

$$\left.\begin{aligned} M_j &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i}J_{kl} + J_{j4}\right), \\ N_j &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i}J_{kl} - J_{j4}\right) \end{aligned}\right\} \quad (j, k, l) = (1, 2, 3) \text{—циклические перестановки,}$$

то найдем

$$\left.\begin{aligned} [M_j, M_k]_- &= iM_l, \\ [N_j, N_k]_- &= iN_l \end{aligned}\right\} \quad (j, k, l) = (1, 2, 3)\text{—циклические перестановки,}$$

$$[M_j, N_k]_- = 0 \quad (j,\ k \text{ произвольны}).$$

Следовательно, операторы M_j, равно как и N_j, обладают свойствами операторов углового момента, так что мы можем воспользоваться хорошо известными результатами относительно неприводимых представлений группы трехмерных вращений.

Конечномерные неприводимые представления собственной группы Лоренца можно характеризовать двумя целыми числами n, m, причем собственное значение $\sum N_j^2$ равно $\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)$, а собственное значение $\sum M_j^2$ равно $\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)$. Представление $\mathbf{D}(n, m)$ $\left(\text{для которого некоторые авторы предпочитают обозначение } \mathbf{D}\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)\right)$ имеет размерность $(n+1)(m+1)$.

Формула для приведения прямого произведения неприводимых представлений снова к неприводимым представлениям имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(n_1, m_1)\times\mathbf{D}(n_2, m_2) = {} & \mathbf{D}(n_1+n_2, m_1+m_2)\oplus\ldots\oplus\mathbf{D}(n_1+n_2, |m_1-m_2|)\\ & \oplus\mathbf{D}(n_1+n_2-2, m_1+m_2)\oplus\ldots\oplus\mathbf{D}(n_1+n_2-2, |m_1-m_2|)\\ & \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots\\ & \oplus\mathbf{D}(|n_1-n_2|, m_1+m_2)\oplus\ldots\oplus\mathbf{D}(|n_1-n_2|, |m_1-m_2|).\end{aligned}$$

Классификация представлений по четырем классам была введена в главе II, § I. Естественно, что все представления в правой части формулы приведения принадлежат точно к одному классу. Имеется следующая таблица умножения классов:

Произведение величин классов	Есть величина класса
I×I, II×II, III×III, IV×IV	I
I×II, III×IV	II
I×III, II×IV	III
I×IV, II×III	IV

Если M_j+N_j является физическим оператором углового момента, то полевые операторы, входящие в классы I и II, представляют поля с целым спином, а операторы классов III и IV представляют поля с полуцелым спином. Класс I содержит тензоры четного ранга, класс II — тензоры нечетного ранга. Перечислим для примера несколько представлений: $\mathbf{D}(0,0)$ — скаляры; $\mathbf{D}(0,1)$ и $\mathbf{D}(1,0)$ — двухкомпонентные спиноры; $\mathbf{D}(1,1)$ — векторы; $\mathbf{D}(2,0)$ и $\mathbf{D}(0,2)$ — антисимметричные тензоры (второго ранга); $\mathbf{D}(2,2)$ — симметричные тензоры со следом, равным нулю. Базисные векторы в пространствах, соответствующих представлениям $\mathbf{D}(n, m)$, с одной стороны, и $\mathbf{D}(m, n)$, с другой, могут быть выбраны так, что матрицами представления для $\mathbf{D}(n, m)$ будут служить комплексно-сопряженные матрицы представления для $\mathbf{D}(m, n)$. Следовательно, если u есть величина класса III, то оператор $u^{\dagger}$ должен принадлежать классу IV.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. L. C. Biedenharn and M. E. Rose, Phys. Rev. **83**, 459 (1951).
2. H. A. Tolhoek and S. R. de Groot, Phys. Rev. **84**, 151 (1951).
3. G. Lüders, R. Oehme, W. E. Thirring, Z. Naturforsch. **7a**, 213 (1952).
4. A. Pais, R. Jost, Phys. Rev. **87**, 871 (1952).
5. C. Lüders, Z. Phys. **133**, 325 (1952).
6. G. Lüders, K. Danske Vidensk. Selsk. mat.-fys. Medd. 28, № 5 (1954).
7. В. Паули, в книге «Niels Bohr and the Development of Physics», London, 1957 (см. перевод: «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, М., 1958).
8. J. S. Bell, Proc. Roy. Soc. **A231**, 479 (1955).
9. G. Lüders, Ann. Phys. (N. Y.) 2, 1 (1957).

10. R. J o s t, Helv. Phys. Acta 30, 409 (1957).
11. J. S c h w i n g e r, Phys. Rev. 82, 914 (1951) (см. перевод: сборник «Новейшее развитие квантовой электродинамики» под ред. Д. Д. Иваненко, ИЛ, М., 1954); Phys. Rev. 91, 713 (1951).
12. Напомним, что преобразования симметрии в гильбертовом пространстве обязательно выражаются унитарными или антиунитарными операторами. См., напр., E. W i g n e r, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Braunschweig, 1931; G. L ü d - w i g, Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin (1954).
13. Это преобразование впервые было применено к электронно-позитронному полю в работе W. F u r r y, Phys. Rev. 51, 125 (1937). Математическая формулировка преобразования была уточнена в работах H. A. K r a m e r s, Proc. K. N e d. Acad. Wetensch. 40, 814 (1937); W. P a u l i, Rev. Mod. Phys. 13, 203 (1941), J. S c h w i n g e r, Phys. Rev. 74, 1439 (1948) (см. перевод: сборник «Новейшее развитие квантовой электродинамики» под ред. Д. Д. Иваненко, ИЛ, М., 1954).
14. W. P a u l i, Nuovo Cimento 6, 204 (1957); D. P u r s e y, Nuovo Cimento 6, 266 (1957).
15. G. R a c a h, Nuovo Cimento 14, 322 (1937).
16. E. P. W i g n e r, Göttinger Nachr. 31, 546 (1932).
17. См., напр., B e t h e a. H o f f m a n n, Mesons and Fields, II, New York, 1955 (см. перевод: Бете и Гофман «Мезоны и поля», ч. II, ИЛ, 1958).
18. L. W o l f e n s t e i n, D. R a v e n h a l l, Phys. Rev. 88, 279 (1952).
19. J a u c h-R o h r l i c h, Theory of Photons and Electrons, Cambridge Mass. (1954).
20. W. H e i t l e r, Quantum Theory of Radiation, Oxford, 1954 (см. перевод: В. Гайтлер «Квантовая теория излучения», 2-е изд., ИЛ, 1956); F. C o e s t e r, Phys. Rev. 84, 1259 (1951).
21. S. W a t a n a b e, Rev. Mod. Phys. 27, 26 (1955).
22. W. P a u l i, Phys. Rev. 58, 716 (1940).
23. G. L ü d e r s, B. Z u m i n o, Phys. Rev. 110, 1450 (1958).
24. N. B u r g o y n e, Nuovo Cimento 8, 607 (1958).
25. G. L ü d e r s, Z. Naturforschg. 13a, 254 (1958).
26. K i n o s h i t a, Phys. Rev. 110, 978 (1958).
27. A. S. W i g h t m a n, Phys. Rev. 101, 860 (1956).
28. D. H a l l, A. S. W i g h t m a n, K. Danske Vidensk, Selsk. mat.-fys. Medd. 31, № 5 (1957).
29. G. C. W i c k, A. S. W i g h t m a n, E. P. W i g n e r, Phys. Rev. 88, 101 (1952).
30. G. L ü d e r s, B. Z u m i n o, Phys. Rev. 106, 385 (1957), Proceedings Seventh Annunal Rochester Conference, IV—55 (1957).
31. T. D. L e e, R. O e h m e, C. N. Y a n g, Phys. Rev. 106, 340 (1957).
32. L. D. L a n d a u, Nucl. Phys. 3, 127 (1957).
33. T. D. L e e, C. N. Y a n g, Phys. Rev. 104, 254 (1956).
34. M. K a w a g u c h i, N. N i s h i j i m a, Progr. Theoret. Phys. 15, 182 (1956).
35. R. G a t t o, Phys. Rev. 108, 1103 (1957).