

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ

Распределение энергии в сплошном спектре чаще всего описывают зависимость спектральной плотности, представляющей собой производную лучистого потока P , т. е. мощности, по длине волны λ , от последней

$$p(\lambda) = \frac{dP}{d\lambda}.$$

Эта функция (часто называемая спектральной интенсивностью) может иметь различный вид. В частном случае $p(\lambda) = \text{const}$. Тогда спектр обычно называют равноэнергетическим, потому что в нем равные интервалы $\Delta\lambda$ спектральной шкалы содержат равные потоки (рис. 1).

Возможно также описывать распределение энергии в спектре в зависимости от какой-либо другой величины, однозначно связанной с длиной волны¹, рассматривая производную потока по этой величине. Если в качестве такой величины взять волновое число² $n = 1/\lambda$, то функцией, характеризующей распределение энергии в спектре, будет

$$p(n) = \frac{dP}{dn}.$$

С $p(\lambda)$ эта функция связана соотношением

$$p(n) = -\lambda^2 p(\lambda) = -\frac{p(\lambda)}{n^2}.$$

При $p(n) = \text{const}$ (рис. 2) спектр можно назвать равноэнергетическим в том же смысле, что и на рис. 1. Однако в равноэнергетическом спектре, характеризуемом постоянством $p(\lambda)$, распределение энергии, представляемое функцией $p(n)$, имеет вид, изображенный на рис. 2³, а при $p(n) = \text{const}$ спектральная плотность $p(\lambda)$ обратно пропорциональна длине волны (рис. 1).

Рассмотрим лучистый поток в интервале $\lambda, \lambda + \Delta\lambda$ равноэнергетического спектра на рис. 1

$$\Delta P = p(\lambda) \Delta\lambda;$$

он изображается заштрихованной площадкой. На рис. 2 этот же поток, также изображенный заштрихованной площадкой, при достаточно малом $\Delta\lambda$

$$\Delta P = p(n_{\text{ср}}) \Delta n,$$

где

$$\Delta n = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda},$$

а $n_{\text{ср}}$ — среднее волновое число в этом интервале. Сохраняя неизменным интервал $\Delta\lambda$, изменим длину волны λ . Тогда в равноэнергетическом спектре на рис. 1 найдем тот же поток ΔP . На рис. 2 тоже получится прежний поток, если в соответствии с новым значением длины волны изменить интервал Δn и среднее волновое

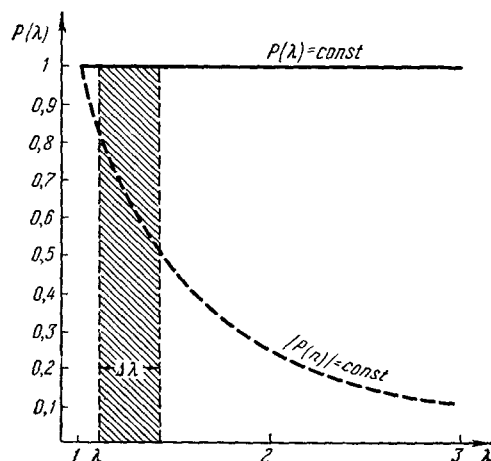


Рис. 1.

число. Если же интервал $\Delta\lambda$ оставить неизменным, то поток, находимый на рис. 2, будет изменяться, уменьшаясь при увеличении длины волны.

Если распределение энергии в спектре таково, что $p(\lambda)$ имеет максимум при некоторой длине волны, то функция $p(n)$ имеет максимум при другой длине волны. Рассматривая поток в интервале $\Delta\lambda$, неизменном по всему спектру, найдем наибольшее значение этого потока в месте максимума спектральной интенсивности.

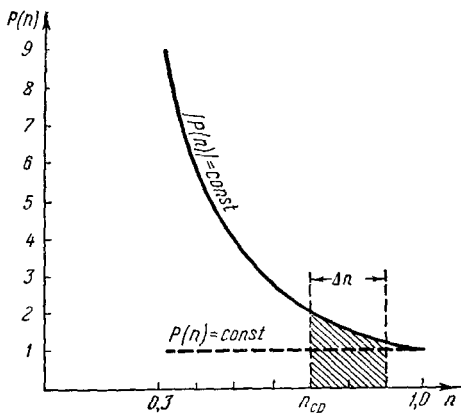


Рис. 2.

Рассматривая же поток в интервале $\Delta\lambda$, также неизменном по спектру, найдем его наибольшее значение в месте максимума $p(n)$. То и другое, конечно, верно: в первом случае мы находим максимум потока в постоянном по спектру интервале $\Delta\lambda$, а во втором — в постоянном интервале Δn . Эти максимумы находятся в разных местах спектра, потому что постоянному интервалу $\Delta\lambda$ соответствуют переменные по спектру интервалы Δn и наоборот⁴.

В общем случае спектральная шкала может быть представлена некоторой функцией $f(\lambda)$, а распределение энергии в спектре — спектральной плотностью

$$p(f) = \frac{dP}{df}. \quad (1)$$

В зависимости от вида функции $f(\lambda)$ спектральная плотность будет иметь, как указывал Фабри⁵, различные значения в одном и том же месте спектра, а ее максимум будет располагаться при той или иной длине волны, на что обратил внимание Планк, рассматривая шкалы длин волны и частоты⁶. Тем не менее различным образом составленные спектральные плотности одинаково удобны для вычисления потока, как

$$P = \int p(f) df, \quad (2)$$

что позволяет находить поток как площадь⁷, ограниченную кривой $p(f)$ и осью $f(\lambda)$ в требуемых пределах. Но максимальный поток, как поток в интервале df , получает различные значения и оказывается в разных местах спектра в зависимости от вида спектральной шкалы, т. е. функции $f(\lambda)$. Это побуждало искать спектральную шкалу, в которой максимум спектральной плотности находился бы в месте предполагаемого «истинного» максимума потока. Однако, как указал Гершун¹, такая задача не может быть законно поставлена, потому что поток в том или ином месте спектра только и мыслим как поток в некотором интервале какой-либо спектральной шкалы. Возможно, что неправильной постановке задачи способствовала допускавшаяся порой неточность терминологии, вследствие которой максимум спектральной плотности называли максимумом кривой энергии⁸.

Можно сопоставить каждой точке спектральной шкалы некоторый лучистый поток, рассматривая интервал $f, f+df$ спектра и вычисляя поток $p(f)df$ в этом интервале или отношение того же потока к полному потоку всего спектра

$$\eta = \frac{p(f)df}{P}, \quad (3)$$

имеющее смысл коэффициента полезного действия в данном интервале⁹. В последнем случае спектральной координате f будет сопоставлен поток ηP . При $df = \text{const}$ к. п. д. будет иметь максимум при том же значении f , что и плотность $p(f)$. Если $f(\lambda) = \lambda$, то интервал $\Delta\lambda$ должен быть мал по сравнению с длиной волны λ ; в противном случае поток в нем, т. е. числитель (3), нужно было бы вычислять интегрированием в его пределах. Предположим, что это условие соблюдается в рассматриваемой части спектра, в которой вычисляется к. п. д. η , при $\Delta\lambda = \text{const}$. Тогда к. п. д. будет иметь максимум в месте максимума спектральной плотности $p(\lambda)$. В частности, для абсолютно черного тела длина волны, при которой максимален к. п. д., будет определяться в этом случае законом смещения в виде, полученном Вином.

Для абсолютно черного тела можно исследовать максимум к. п. д. η и иначе¹⁰, рассматривая η в функции температуры T и длины волны. При этом будем считать, что интервал $\Delta\lambda$ от температуры не зависит. Вводя постоянную закона

Стефана — Больцмана σ и постоянные Планка c_1 и c_2 , имеем

$$\eta = \frac{c_1}{\sigma} \cdot \frac{\lambda^{-5} T^{-4} \Delta \lambda}{\exp \frac{c_2}{\lambda T} - 1}.$$

Полагая $\lambda = \text{const}$, найдем температуру T_m , при которой к. п. д. η максимален. Из

$$\frac{d\eta}{dT} = 0$$

нетрудно получить⁹

$$T_m = \frac{C}{\lambda}, \quad (4)$$

где

$$C = \frac{c_2}{x},$$

а x определяется уравнением¹⁰

$$\frac{x}{1 - \exp(-x)} = 4.$$

Тогда максимальное значение к. п. д. при длине волны λ

$$\eta_{\max} = k \frac{\Delta \lambda}{\lambda}, \quad (5)$$

где

$$k = \frac{c_1}{\sigma} \frac{C^{-4}}{\exp x - 1}.$$

Формула (5) показывает, что максимальное значение к. п. д. η , возможное при каждой длине волны λ , будет одинаково по всему спектру, если постоянное по спектру относительное значение $\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$ интервала, находящуюся в котором долю полного потока излучателя определяет этот коэффициент. При этом каждой длине волны будет соответствовать свое значение T_m по (4). Для длины волны λ' это будет температура T_m^1 , при которой к. п. д. $\eta < \eta_{\max}$ для всех длин волны $\lambda \leq \lambda'$. Следовательно, в относительном интервале, определяемом длиной волны λ' , при этом, т. е. при температуре T_m^1 , будет максимальный поток. Но постоянство относительного интервала $\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$ имеет место в спектральной шкале $f(\lambda) = \ln \lambda$. Поток в интервале такой шкалы должен быть максимален при той длине волны, при которой имеет максимум спектральная плотность

$$p(\ln \lambda) = \frac{dP}{d(\ln \lambda)} = \lambda p(\lambda). \quad (6)$$

Вследствие этого спектральная плотность $p(\ln \lambda)$ излучения абсолютно черного тела при температуре T_m имеет максимум при длине волны, связанной с T_m соотношением (4)¹⁰. Максимумы к. п. д. η и спектральной плотности $p(\ln \lambda)$ получаются в одном и том же месте спектра только тогда, как и следовало ожидать, когда мы рассматриваем к. п. д. излучателя в постоянном по спектру относительном интервале длины волны, т. е. в постоянном интервале логарифмической спектральной шкалы. Это можно получить и непосредственно из выражения к. п. д. Введя

$$\delta \lambda = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \text{const}$$

и имея в виду (6), находим, что

$$\eta = \frac{p(\ln \lambda)}{P} \delta \lambda = \frac{c_1}{\sigma} \cdot \frac{\lambda^{-4} T^{-4} \delta \lambda}{\exp \frac{c_2}{\lambda T} - 1}. \quad (7)$$

Дифференцирование этого выражения по λ при $T = \text{const}$ приводит к (4) и (5) с прежними⁴ значениями C и k . Заметим, что выражение (7) лишь постоянным множителем отличается от введенного Уортингом¹¹ выражения числа фотонов в единичном спектральном интервале, испускаемых в единицу времени единицей площади абсолютно черного тела. Это число, следовательно, имеет максимум при тех же условиях, что и к. п. д. по (7).

Можно пользоваться любой спектральной шкалой¹, какая оказывается предпочтительной в зависимости от решаемой задачи, и описывать распределение энергии в спектре спектральной плотностью лучистого потока в интервале этой шкалы. Для каждой спектральной плотности в одном и том же спектре, получаемой в зависимости от выбранной спектральной шкалы, характерен, как указывал Гершун¹, свой максимум в тех случаях, когда она его имеет. В частности, это относится к описанию распределения энергии в спектре абсолютно черного тела. Закон Вина в его классическом выражении, соответствующем описанию распределения энергии функцией $p(\lambda)$, так же верен, как и в других выражениях, которые он получает при применении других функций, в частности $p(\ln \nu)$ или $p(\ln \lambda)$. Хотя в последних двух случаях максимум спектральной плотности имеет место при одной и той же длине волны^{3, 12}, нет оснований считать правильным мнение о логарифмической шкале как привилегированной для определения «максимума энергии» в спектре, получившее некоторое распространение^{10, 4, 13}. Логарифмическая шкала удобна, как указал Релей, для графического изображения спектров: все октавы имеют в ней одинаковую длину¹⁴. Шкала частот ν , сохраняющих свои значения при переходе из одной среды в другую, может быть предпочтительной в задачах, где это имеет место¹⁵. Если нет особых условий, то для описания распределения энергии в спектре следует пользоваться привычной шкалой длин волны, наиболее удобной в связи с тем, что обычно к ней относятся справочные данные.

Р. А. Сапожников

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гершун, УФН 46, 388 (1952).
2. G. J. Stoney, Brit. Assoc. Rep. 41, (Sect.), 42 (1871).
3. L. Foitzik, Experim. Techn. d. Phys. 1, 209 (1953).
4. М. М. Гуревич, УФН 56, 417 (1955).
5. И. Фабри, Общее введение в фотометрию, ГТТИ, 1934, стр. 130.
6. М. Планк, Теория теплового излучения, ОНТИ, 1935, стр. 26.
7. R. A. Houstons, A treatise on light. Lnd., 1938, стр. 485.
8. F. Benford, JOSA 29, 92 (1939).
9. A. H. Boerdijk, Philips Res. Rep. 8, 291 (1953).
10. A. G. Worthing, JOSA 29, 97 (1939).
11. R. N. Bracewell, Nature 174, 563 (1954).
12. В. В. Мешков, Основы светотехники, ч. 1, ГЭИ, 1957, стр. 37.
13. W. A. Shurcliff, JOSA 32, 229 (1942).
14. Р. Вуд, Физическая оптика, ОНТИ, 1936, стр. 27.