

О СПЕКТРАХ СИСТЕМ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ И КОЛЛЕКТИВНЫХ ПОТЕРЯХ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

Ю. Л. Екимонтович, В. П. Силин

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена в основном рассмотрению двух тесно связанных вопросов. Это, во-первых, вопрос о спектрах коллективных возбуждений в системах взаимодействующих частиц, а во-вторых, вопрос о потерях энергии на возбуждение коллективных колебаний при прохождении частиц через вещество.

В системах сильно взаимодействующих частиц, таких как жидкости и твердые тела, плазма и ядерное вещество, можно говорить об уровнях энергии и состояниях лишь всей системы в целом. Исследование всего спектра уровней такой системы весьма сложно. Значительно проще рассмотрение слабовозбужденных состояний, т. е. состояний, мало отличающихся от равновесного. Так, колебания ионов в твердом теле относительно узлов кристаллической решетки представляют собой состояния, слабо отличающиеся от равновесного, о которых можно говорить как о слабовозбужденных состояниях. В данном случае возбуждениями системы являются фононы — кванты звука. Другим примером являются плазменные колебания в плазме или металлах. В квантовом рассмотрении при этом можно говорить о квазичастицах (фононах, плазмонах и т. д.) с определенной энергией и импульсом, в то время как в классическом рассмотрении речь идет о волнах с определенной частотой и волновым вектором. Зависимость энергии квазичастиц от импульса или соответственно частоты от волнового числа и называется ниже спектром возбуждений.

Возбуждения, естественно, могут подчиняться статистике Ферми — Дирака или Бозе — Эйнштейна. Наше рассмотрение коллективных колебаний фактически посвящено изучению возбуждений, подчиняющихся статистике Бозе. Подобными возбуждениями являются звуковые волны в твердых телах, фононно-ротонные возбуждения в сверхтекучем гелии, спиновые волны. Последние являются примером бозевских возбуждений, появляющихся в системе частиц, подчиняющихся статистике Ферми.

Аналогом элементарных возбуждений бозевского типа в классической физике являются волновые процессы. Одним из таких процессов является распространение продольных плазменных волн. Вопросу исследования спектров возбуждений в системах заряженных частиц и посвящены § 3—5 настоящей статьи. При этом исследование спектров возбуждений основано на использовании уравнений для квантовой функции распределения (матрицы плотности), ряд свойств которой рассмотрен в § 1.

В § 6 рассматривается вопрос о потерях энергии при прохождении быстрой заряженной частицы через вещество, обусловленных возбужде-

нием коллективных колебаний. Потери по существу связаны с возбуждением в среде электромагнитных (как поперечных, так и продольных) колебаний, спектр которых фактически определяется диэлектрической проницаемостью среды, являющейся при учете пространственной дисперсии функцией как частоты, так и волнового вектора соответствующих колебаний. Поэтому потери быстрой частицы также полностью определяются диэлектрической проницаемостью.

Однако существуют случаи, когда приведенные в § 6 формулы для потерь энергии не могут объяснить экспериментальные результаты. Таким примером служит известный парадокс Ленгмюра, состоящий в том, что наблюдаемые на опыте расстояния, на которых электроны, входящие в плазму, передают ей свою энергию, оказываются во много раз меньше, чем длины релаксации, которые могут быть найдены по формулам § 6.

Для того чтобы проанализировать и этот случай, в § 2 рассмотрен другой подход к вопросу о потерях энергии заряженных частиц при прохождении их через плазму. Этот подход основан на использовании кинетических уравнений, с помощью которых можно также описать процесс передачи энергии заряженных частиц на возбуждение коллективных колебаний. В том случае, когда влетающие в плазму частицы не меняют заметно свойств среды, полученные выражения для силы торможения совпадают с выражениями, которые могут быть получены на основании формул § 6.

При прохождении через плазму пучков электронов достаточной интенсивности эти условия уже не выполняются, т. е. нельзя считать, что свойства плазмы при наличии пучка характеризуются тем же спектром возбуждений или той же диэлектрической проницаемостью, что и при отсутствии пучка. В этом случае надо совместно решать систему нелинейных уравнений для электронов пучка и электронов плазмы. § 7 и посвящен решению одной из частных задач такого типа, когда достаточно интенсивный пучок электронов проходит через плазму. Полученные результаты позволяют в основных чертах объяснить быстрое изменение энергии электронов, проходящих через плазму, которое впервые наблюдал Ленгмюр.

С целью облегчить ознакомление читателей с нашей статьей мы старались построить изложение так, чтобы каждый параграф, с одной стороны, можно было читать практически независимо от других, а с другой стороны, так, чтобы последовательно охватить все указанные выше вопросы. Авторы не считают, что приведенный в статье список литературы является исчерпывающим. В статьях, посвященных рассмотрению такого сравнительно широкого круга вопросов, подобные промахи, по-видимому, являются неизбежными.

Наконец укажем, что § 3 содержит результаты совместной работы авторов, опубликованной в 1952 г.³, в которой были изложены некоторые основные вопросы квантовой теории плазменных колебаний. Заметим, что аналогичные вопросы квантовой теории плазмы иными методами рассматривались также и другими авторами вне связи с указанной нами статьей. Однако метод, используемый в работе³, представляется нам наиболее простым. В течение нескольких лет, прошедших со времени написания работы³, теория квантовой плазмы развивалась авторами настоящей статьи в различных направлениях. Результаты одного из этих направлений наряду с соответствующими результатами других авторов изложены в § 2, 7, написанных Ю. Л. Климонтовичем, а другого — в § 4, 5, 6, написанных В. П. Силиным *).

*) Кроме того, развитие работы³ в таком направлении отражено в § 3.

§ 1. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КВАНТОВОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Для статистического описания квантовых свойств макроскопических систем можно использовать уравнение для матрицы плотности. Наиболее полная аналогия с классическим методом функции распределения в фазовом пространстве координат и импульсов получается при использовании смешанного представления для матрицы плотности, в котором она является, как и классическая функция распределения, функцией координат и импульсов. В настоящей работе будем использовать матрицу плотности в форме, предложенной Вигнером, и назовем ее «квантовой функцией распределения»¹⁻⁵.

Квантовая функция распределения связана с обычной матрицей плотности в координатном представлении следующим преобразованием:

$$f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3N}} \int e^{-i\mathbf{r}\mathbf{p}} \varrho\left(\mathbf{q} - \frac{1}{2}\hbar\mathbf{r}, \mathbf{q} + \frac{1}{2}\hbar\mathbf{r}, t\right) d\mathbf{r}. \quad (1,1)$$

В случае чистого ансамбля функция распределения выражается непосредственно через волновую функцию системы

$$f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3N}} \int e^{-i\mathbf{r}\mathbf{p}} \Psi^*\left(\mathbf{q} - \frac{1}{2}\hbar\mathbf{r}, t\right) \Psi\left(\mathbf{q} + \frac{1}{2}\hbar\mathbf{r}, t\right) d\mathbf{r}. \quad (1,2)$$

В выражениях (1,1), (1,2) N обозначает число частиц в рассматриваемой системе, векторы \mathbf{q} и \mathbf{p} обозначают совокупность всех координат и импульсов частиц. Использование квантовой функции распределения позволяет единым образом описывать как классические, так и квантовые системы. Переход от квантового описания к классическому ($\hbar \rightarrow 0$) очень нагляден.

Отметим некоторые свойства квантовой функции распределения.

1. $f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ — действительная функция, однако может принимать отрицательные значения. Поэтому лишь распределения, получающиеся из функции $f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ после интегрирования по координатам или импульсам, характеризуют вероятность нахождения системы в состоянии с заданным q или p соответственно:

$$\begin{aligned} \int f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} &= \overline{\Psi^*(\mathbf{q}, t) \Psi(\mathbf{q}, t)} = \varrho_N(\mathbf{q}, t), \\ \int f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{q} &= \overline{\varphi^*(\mathbf{p}, t) \varphi(\mathbf{p}, t)} = F_N(\mathbf{p}, t). \end{aligned}$$

2. Средние значения функции координат и импульсов $A(q, p)$ определяются, как и в классической статистической механике:

$$\bar{A} = \int A(\mathbf{q}, \mathbf{p}) f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{q} d\mathbf{p}.$$

Таким образом, для получения средних значений физических величин можно использовать сами величины, а не операторы, соответствующие им.

3. Свойства симметрии квантовой функции распределения не столь наглядны, как это имеет место для матрицы плотности в координатном представлении. Поэтому для исследования свойств симметрии функции $f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ следует перейти к матрице плотности в координатном представлении $\varrho(\mathbf{q}', \mathbf{q}, t)$, для которой имеют место следующие соотношения:

$$P\varrho(\mathbf{q}', \mathbf{q}, t) = \varrho(\mathbf{q}', \mathbf{q}, t) = \varrho(\mathbf{q}', \mathbf{q}, t)P$$

для систем частиц, подчиняющихся статистике Бозе, и

$$P\varrho(\mathbf{q}', \mathbf{q}, t) = (-1)^P \varrho(\mathbf{q}', \mathbf{q}, t) = \varrho(\mathbf{q}', \mathbf{q}, t)P$$

для случая статистики Ферми. В этих выражениях P — оператор

перестановки. Уравнение, определяющее изменение квантовой функции распределения, может быть найдено при помощи фурье-преобразования уравнения для матрицы плотности в координатном представлении. Оно может быть записано в форме

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = \frac{i}{\hbar (2\pi)^{6N}} \int \dots \int \left[H\left(\mathbf{q} + \frac{1}{2} \hbar \mathbf{k}, \mathbf{r} - \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\tau}\right) - H\left(\mathbf{q} - \frac{1}{2} \hbar \mathbf{k}, \mathbf{r} + \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\tau}\right) \right] \times \\ \times f_N(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) e^{i\boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) + i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{q})} d\boldsymbol{\tau} d\mathbf{k} d\mathbf{q} d\mathbf{r}. \quad (1,3)$$

В этом уравнении H — функция Гамильтона рассматриваемой системы.

Если, например, $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{q})$, то уравнение (1,3) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = \frac{i}{(2\pi)^3 \hbar} \int \dots \int \left[U\left(\mathbf{q} - \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\tau}\right) - U\left(\mathbf{q} + \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\tau}\right) \right] \times \\ \times f(\mathbf{q}, \mathbf{q}) e^{i\boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}-\mathbf{p})} d\boldsymbol{\tau} d\mathbf{q}.$$

В классическом случае (при $\hbar \rightarrow 0$) уравнение (1,3) переходит в уравнение для классической функции распределения

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = \sum_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i} \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{q}_i} \right\} = [H f_N], \quad (1,4)$$

где $[\]$ — классическая скобка Пуассона.

Чтобы установить вид уравнения для квантовой функции распределения, можно и не использовать понятие матрицы плотности, а исходить непосредственно из уравнения (4) и изменить его так, чтобы в нем была учтена конечность объема ячейки фазового пространства рассматриваемой системы³.

§ 2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КВАНТОВОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Непосредственное использование уравнения (1,3) для функции f_N в большинстве случаев весьма затруднительно, так как искомая функция зависит от огромного числа переменных ($6N+1$). Однако для практических целей, например для вычисления средних значений физических величин, при получении уравнения состояния, расчета флуктуаций физических величин и т. д., достаточно знать функции распределения, зависящие от координат и импульсов одной и двух частиц, т. е. первую и вторую функции распределения:

$$f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t) = \int f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{q}_2, \dots, d\mathbf{q}_N, d\mathbf{p}_2, \dots, d\mathbf{p}_N,$$

$$f_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = \int f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{q}_3, \dots, d\mathbf{q}_N, d\mathbf{p}_3, \dots, d\mathbf{p}_N.$$

Естественно поэтому стремление получить уравнения, которые содержали бы лишь простейшие функции распределения f_1 и f_2 . Однако уравнение для первой функции распределения содержит вторую функцию распределения, уравнение для второй функции распределения — третью функцию распределения f_3 и т. д. Таким образом, получается цепочка уравнений, в которой уравнение, определяющее функцию f_s , содержит функцию f_{s+1} .

Такая цепочка уравнений для классических функций распределения была впервые рассмотрена в работах Н. Н. Боголюбова⁶ и в работах Борна и Грина. Используя метод, развитый в этих работах, из уравнения (1,3) для функции f_N можно получить цепочку уравнений для кван-

товых функций распределения³, связывающих функции f_s и f_{s+1} . Цепочка этих уравнений, естественно, совершенно аналогична цепочке уравнений для матрицы плотности, которая рассматривалась в работе Н. Н. Боголюбова и К. П. Гурова⁷. Так, например, для систем взаимодействующих частиц, когда функция Гамильтона может быть записана в виде суммы кинетических энергий отдельных частиц и потенциальной энергии их парных взаимодействий

$$H = \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} U(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|), \quad (2,1)$$

первое уравнение цепочки, связывающее функции f_1 и f_2 , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{q}} - \frac{i}{(2\pi)^3 \hbar} \int \dots \int \left[U\left(\left|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\tau}\right|\right) - U\left(\left|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 + \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\tau}\right|\right) \right] \times \\ \times f_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{p}_2, t) e^{i\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p}_1)} d\mathbf{q}_2 d\mathbf{p}_2 d\boldsymbol{\tau} d\boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \quad (2,2)$$

Это уравнение при $\hbar \rightarrow 0$ переходит в соответствующее классическое уравнение. Естественно, что строгое решение рассматриваемой цепочки уравнений столь же сложно, как и решение исходного уравнения, так как требует, в конечном счете, знания функции f_N .

Однако хорошо известно, что основное значение для физических приложений имеют так называемые кинетические уравнения — замкнутые уравнения для первой функции распределения f_1 :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = S(\mathbf{q}, \mathbf{p}; f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)),$$

в которых изменение функции распределения в момент времени t полностью определяется заданием функции распределения f_1 в тот же момент времени t . К числу кинетических уравнений относятся, например, уравнение Больцмана, уравнение Фоккера — Планка в фазовом пространстве и соответствующее ему квантовое кинетическое уравнение, самосогласованное уравнение для функции распределения, плодотворность использования которого для решения задач о плазменных колебаниях впервые была показана А. А. Власовым⁸.

В кинетическом уравнении начальное распределение функции f_1 полностью определяется значением этой функции в более поздние моменты времени. С другой стороны, из цепочки уравнений для функций распределения видно, что вид функции распределения f_1 определяется не только начальным значением этой функции распределения, но и начальными значениями всех высших функций распределения f_2, \dots, f_N или начальными значениями всех корреляционных функций. Из этого следует, что решения кинетических уравнений являются частными решениями цепочки уравнений для функций распределения, для которых вид корреляционных функций полностью определяется значениями только первой функции распределения f_1 . Рассмотрение именно таких решений и позволяет, исходя из цепочки уравнений, прийти к кинетическим уравнениям. Такой подход к решению этой задачи развит в известной монографии Н. Н. Боголюбова. Даже если ограничиться указанным классом решений цепочки для функций распределения, то задача получения кинетических уравнений остается все же еще слишком сложной, и поэтому приходится обрывать цепочку уравнений, аппроксимируя высшие функции распределения через низшие. Естественно, что характер сделанной аппроксимации определяется тем кругом задач, для описания которых предназначены кинетические уравнения, и свойствами рассматриваемой системы.

Допустим, что рассматриваемую систему можно разбить на две подсистемы, одна из которых близка к состоянию равновесия, а другая находится в неравновесном состоянии. В результате взаимодействия этих подсистем через некоторое время τ —время релаксации—установится равновесное состояние во всей системе в целом. Причины, приводящие к установлению равновесия, в разных случаях различны.

В плазме процессы установления равновесного состояния обусловлены несколькими причинами. Если концентрация нейтральных молекул невелика, то время релаксации определяется столкновениями заряженных частиц и процессом возбуждения хаотических плазменных колебаний. В этом случае соответствующее кинетическое уравнение для плазмы является уравнением Фоккера—Планка в импульсном пространстве^{9, 11}. При учете лишь столкновений такое уравнение было выведено Л. Д. Ландау из уравнения Больцмана. Из-за медленности спада кулоновских сил с увеличением расстояния коэффициенты этого уравнения содержат расходящиеся интегралы. Для получения конечных выражений пределы интегрирования обрываются на больших и малых расстояниях. Для вывода кинетического уравнения в случае пространственно-неоднородного распределения неравновесных частиц можно использовать метод Н. Н. Боголюбова⁶.

В работе⁹ уравнение Фоккера—Планка для плазмы было получено путем приближенного решения цепочки уравнения для функций распределения. Благодаря учету дебаевской корреляции в коэффициентах полученного таким образом уравнения ликвидируется расходимость на больших расстояниях.

Более общее кинетическое уравнение, учитывающее и процесс возбуждения продольных колебаний, получено в работе¹¹. При однородном распределении заряженных частиц уравнение для электронов плазмы может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}(\mathbf{p}, t) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} B_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial p_\beta} f_1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\mathbf{A} f_1), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (2,3)$$

Здесь $B_{\alpha\beta}$ и \mathbf{A} —соответствующие коэффициенты диффузии и систематического трения. Каждый из них может быть разбит на две части, соответствующие процессам столкновения и возбуждения продольных колебаний

$$B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}^{(ст)} + B_{\alpha\beta}^{(кол)}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^{(ст)} + \mathbf{A}^{(кол)}.$$

Выражения для $B_{\alpha\beta}^{(ст)}$ и $\mathbf{A}^{(ст)}$ получены в работах^{10, 9} для больших и малых значений энергий заряженных частиц. Выражения для $B_{\alpha\beta}^{(кол)}$ и $\mathbf{A}^{(кол)}$ имеют следующий вид¹¹:

$$B_{\alpha\beta}^{(кол)} = \frac{e^2 \kappa T}{2\pi} \int \delta \left(\omega_L - \frac{\mathbf{k} \mathbf{p}}{m} \right) a_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\beta} d\mathbf{k}, \quad (2,4)$$

$$\mathbf{A}^{(кол)} = \frac{e^2}{2\pi m} \int \delta \left(\omega_L - \frac{\mathbf{k} \mathbf{p}}{m} \right) \mathbf{a}_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{p}) d\mathbf{k}. \quad (2,5)$$

Здесь T —температура электронов, κ —постоянная Больцмана, $\omega_L = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$ —ленгмюровская частота для электронов плазмы, $a_{\mathbf{k}\alpha}$ —компонента единичного вектора, направленного вдоль волнового числа. Из выражений (2,4), (2,5) следует, что коэффициенты $B_{\alpha\beta}^{(кол)}$ и $\mathbf{A}^{(кол)}$ отличны от нуля лишь при выполнении условия черенковского излучения продольных плазменных волн $p/m > \omega_L/k$. Следовательно, вследствие

торможения электрона с импульсом p могут возбуждаться плазменные волны лишь с волновым числом $k > \omega_L m/p$. Так как максимальное значение волнового числа определяется величиной дебаевского радиуса $r_d = \sqrt{\kappa T / 4\pi e^2 n}$, то торможение электронов за счет излучения продольных волн возможно лишь при условии, что их скорость больше тепловой скорости.

В выражениях (2,4), (2,5) можно проинтегрировать по волновому числу. В выражении (2,4) отличными от нуля оказываются лишь члены с $\alpha = \beta$. Если при вычислении интегралов полярную ось направить по движению частицы, то приходим к следующим выражениям¹¹ для коэффициентов диффузии:

$$B_{33}^{(\text{кол})} = \frac{e^2 \kappa T}{v^3} \omega_L^2 \ln \frac{v}{v_T}; \quad B_{11}^{(\text{кол})} = B_{21}^{(\text{кол})} = \frac{m e^2 \omega_L^2}{4v} \quad \text{при} \quad v \gg v_T. \quad (2,6)$$

Здесь v_T — средняя тепловая скорость; $v = p/m$. Выражение (2,5) определяет силу торможения F , действующую на заряженную частицу, вследствие излучения продольных волн. В результате интегрирования приходим к следующему выражению:

$$F^{(\text{кол})} = \frac{e^2 \omega_L^2}{v^2} \ln \frac{v}{v_T}. \quad (2,7)$$

Выражения (2,6), (2,7) согласуются с соответствующим выражением, полученным рядом авторов различными способами. Сила торможения $F^{(\text{кол})}$ имеет тот же порядок величин, что $F^{(\text{ст})}$ 10,9

$$F^{(\text{ст})} = \frac{e^2 \omega_L^2}{v^2} \ln \frac{r_d}{a}; \quad a = \frac{e^2}{m v^2}. \quad (2,8)$$

Кинетическое уравнение (2,3) получено в работе¹¹ путем приближенного решения цепочки уравнений для классических функций распределения электронов и колебаний плазмы. Такая цепочка уравнений содержит два уравнения для первых функций распределения $f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, $F_1(Q_k, P_k, t)$, первая из которых определяет вероятности различных состояний электрона, а вторая — вероятности различных значений координаты и импульса плазменного колебания с волновым вектором \mathbf{k} . В уравнения для этих функций распределения входит вторая функция распределения $\Phi_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, Q_k, P_k, t)$. В уравнение для F_2 входят третьи функции распределения и т. д. Аппроксимация высших функций распределения через низшие состоит в том, что третьи функции распределения полагаются равными произведению первых функций распределения, а вторые представляются в виде

$$f_2 = f_1 f_1 + G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{q}', \mathbf{p}', t), \quad (2,9)$$

$$\Phi_2 = f_1 F_1 + g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, Q_k, P_k, t). \quad (2,10)$$

Таким образом, учитываются лишь парные корреляции. При выводе уравнения (2,3), описывающего процесс установления равновесного состояния в импульсном пространстве при однородном распределении по пространству из системы уравнений для функций f_1 и F_1 , первый член в выражении (2,9) не является существенным. Таким образом, эффект установления равновесия в этом случае обусловлен корреляцией значений координат и импульсов электрона и координат и импульсов плазменных колебаний. Кроме того, для вывода уравнения (2,3) из системы уравнений для функций f_1 , F_1 существенно предположить, что

плазменные колебания и частицы плазмы, окружающие выделенную частицу, находятся в начальный момент в состоянии теплового равновесия.

В другом крайнем случае можно найти кинетическое уравнение для функции распределения F_1 , которое описывает процесс установления равновесного состояния плазменных колебаний¹¹. Это уравнение также является уравнением Фоккера — Планка в фазовом пространстве координат и импульсов плазменных колебаний. Приведем здесь полученное с помощью этого уравнения уравнение для среднего значения координаты плазменного осциллятора с волновым вектором k :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\bar{Q}}_k + 2\gamma_k \dot{\bar{Q}}_k + \omega_k^2 \bar{Q}_k &= 0, \\ \bar{Q}_k &= \int Q_k F_1 dQ_k dP_k. \end{aligned} \right\} \quad (2,11)$$

Здесь $\omega_k^2 = \omega_L^2 + \frac{3\kappa T}{m} k^2$ — квадрат частоты плазменного колебания с волновым числом k , а $\gamma_k = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_L}{r_d^3 k^3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} r_d^2 k^2 \right\}$ — дескремент затухания

плазменных колебаний, выражение для которых впервые было получено в работе Л. Д. Ландау²⁰. Используя соответствующую цепочку уравнений для квантовых функций распределения электронов и плазменных колебаний, можно получить квантовые кинетические уравнения, описывающие процесс установления равновесного состояния в плазме с учетом квантовых эффектов. Такое уравнение рассмотрено в работе¹³ только при учете столкновений между заряженными частицами. Используемая в этой работе аппроксимация вышних функций распределения через низшие аналогична приведенной в работе Н. Н. Боголюбова и К. П. Гурова⁷.

Если рассматриваемая система заряженных частиц находится вблизи диэлектрика или в замедляющей системе, то кинетическое уравнение содержит члены, описывающие процессы торможения и диффузии, обусловленные излучением электромагнитных волн¹⁴. Состояние рассматриваемой системы в этом случае характеризуется функцией распределения координат и импульсов заряженных частиц и координат и импульсов осцилляторов электромагнитного поля с различными волновыми числами. Если начальное распределение координат и импульсов осцилляторов является равновесным, а состояние электронов близко к равновесному, то для функции распределения электронов также получается кинетическое уравнение типа уравнения Фоккера — Планка, но теперь в коэффициентах диффузии и систематического трения появляются члены $B_{a\beta}^{(изл)}$, $A^{(изл)}$, обусловленные излучением электромагнитных волн. Выражения для них совпадают с выражениями (8), (9) с той лишь разницей, что плазменная частота ω_L заменяется на $ck/\sqrt{\epsilon} = \omega_k$ и теперь $a_k \perp k$. Коэффициент $A^{(изл)}$ определяет силу торможения со стороны поля на частицу с импульсом p . Выражение для силы торможения имеет вид

$$F^{(изл)} = \left(\frac{e}{c} \right)^2 \int \left(1 - \frac{c^2}{\epsilon v^2} \right) \omega_k d\omega_k$$

и совпадает с известным выражением теории излучения Черенкова. При обратных предположениях, когда в начальный момент электроны находятся в состоянии равновесия, а состояние осцилляторов поля близко к состоянию равновесия, получается¹⁶ кинетическое уравнение для функции распределения осцилляторов поля. Полученные с помощью

этого уравнения усредненные уравнения для координат электромагнитного осциллятора имеют вид:

$$\ddot{\bar{Q}}_k + 2\gamma_k \dot{\bar{Q}}_k + \Omega_k^2 \bar{Q}_k = 0, \quad (2,12)$$

$$\Omega_k^2 = \omega_L^2 + \frac{c^2 k^2}{\epsilon}; \quad \gamma_k = \left(\frac{\pi m}{8\kappa T} \right)^{1/2} \frac{\omega_L^2}{k} \exp\left(-\frac{mc^2}{2\epsilon \kappa T} \right). \quad (2,13)$$

Приведенное выражение для γ_k имеет место при $\Omega_k/k < c$. В обратном случае $\gamma_k = 0$.

Таким образом, путем приближенного решения цепочки уравнений для функций распределения возможно получить кинетические уравнения, описывающие процессы установления статистического равновесия в плазме.

Из изложенного следует, что при однородном пространственном распределении кинетическое уравнение для электронов представляет собой уравнение Фоккера—Планка, которое описывает процесс установления равновесного распределения в импульсном пространстве. Для получения этого уравнения необходим учет, по крайней мере, парных корреляций заряженных частиц. Первый член в правой части выражения (2,9) оказывается в этом случае несущественным. При неоднородном распределении может возникнуть обратная ситуация. Именно, если размер неоднородности много меньше длины релаксации рассмотренных выше процессов, то учет этих процессов в ряде случаев может оказаться несущественным. Следовательно, при этом в выражении (2,9) основным уже будет первый член, и мы можем оборвать цепочку уравнений для функций распределения электронов на первом уравнении, положив

$$f_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{q}', \mathbf{p}', t) = f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) f_1(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t), \quad (2,14)$$

и приходим к кинетическому уравнению с самосогласованным полем. Так, если выражение (2,14) подставить в первое уравнение цепочки для квантовых функций распределения (2,2), то получим квантовое кинетическое уравнение с самосогласованным полем. При $\hbar \rightarrow 0$ это уравнение переходит в известное классическое уравнение с самосогласованным полем. Самосогласованное уравнение для квантовой функции распределения можно уточнить, если при аппроксимации второй функции распределения через первые учесть корреляции, обусловленную тождественностью частиц. Для этого вместо выражения (2,14) используем следующее выражение:

$$f_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, t) \mp \int \varrho \left(\mathbf{q}_1 + \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\tau}_1, \mathbf{q}_2 - \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\tau}_2 \right) \times \\ \times \varrho \left(\mathbf{q}_2 + \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{q}_1 - \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\tau}_1 \right) e^{-i\boldsymbol{\tau}_1 \mathbf{p}_1 - i\boldsymbol{\tau}_2 \mathbf{p}_2} d\boldsymbol{\tau}_1 d\boldsymbol{\tau}_2, \quad (2,15)$$

которое получается из соответствующего выражения для матрицы плотности в координатном представлении. В выражении (2,15) знак «—» для случая систем, подчиняющихся статистике Ферми, а знак «+» для статистики Бозе. В промежуточном случае, когда размер пространственной неоднородности сравним с длиной релаксации, получается более сложное кинетическое уравнение, представляющее собой обобщенное уравнение Фоккера—Планка с учетом самосогласованного взаимодействия. Если длина или время релаксации τ известно, то во многих случаях можно использовать упрощенное кинетическое уравнение, в котором интеграл столкновений, или члены, описывающие диффузию

и систематическое трение, заменены членом

$$-\frac{1}{\tau}(f-f_0), \quad (2,16)$$

где f_0 — равновесная функция распределения.

Приведенные здесь кинетические уравнения для плазмы могут служить для вывода гидродинамических уравнений с учетом процессов релаксации.

§ 3. СПЕКТРЫ КОЛЛЕКТИВНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

В теории классической плазмы широкое применение получил метод самосогласованного поля⁸. С помощью такого метода, как известно, особенно просто рассматривать задачи, связанные с коллективными эффектами в системах заряженных частиц. Можно сказать, что использование приближения самосогласованного поля в классической теории плазмы явилось переносом в классическую область квантового метода самосогласованного поля Хартри¹⁵. Поэтому целесообразность использования такого метода в теории квантовой плазмы совершенно очевидна. Ниже мы изложим некоторые результаты, известные нам в этой области *).

В приближении самосогласованного поля волновая функция, а следовательно и матрица плотности или, соответственно, квантовая функция распределения, принимается в виде произведения соответствующих функций отдельных частиц. При такой аппроксимации пренебрегается корреляцией отдельных частиц. С другой стороны, при этом из уравнения Шредингера для системы многих частиц сразу получается следующее уравнение для одночастичной функции распределения $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ³:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \frac{i}{(2\pi)^3 \hbar} \int \left[U\left(\left|\mathbf{q} - \mathbf{q}' + \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\tau}\right|\right) - U\left(\left|\mathbf{q} - \mathbf{q}' - \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\tau}\right|\right) \right] \times \\ \times f(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t) f(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t) e^{i\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p})} d\boldsymbol{\tau} d\boldsymbol{\eta} d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' = 0. \quad (3,1)$$

Здесь принято, что частицы взаимодействуют по центральному закону сил, а $U(|\mathbf{q}|)$ — энергия парного взаимодействия, равная для случая электронов $e^2/|\mathbf{q}|$ (при этом, вообще говоря, надо учитывать наличие компенсирующего заряда ионов).

В том случае, когда \hbar можно считать малой величиной, т. е. когда речь идет о макроскопических неоднородностях, а в случае колебаний не о микроскопических длинах волн, уравнение (3,1) принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \int U(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|) f(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t) d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' = 0. \quad (3,2)$$

Это уравнение представляет собой известное кинетическое уравнение самосогласованного приближения, широко использующееся для описания плазмы, и впервые предложенное, по-видимому, Власовым⁸.

Уравнения (3,1) и (3,2) мы положим в основу содержащегося в этом параграфе рассмотрения коллективных колебаний. Рассматривая коллективные колебания как слабозбужденные состояния, примем, что функция распределения f слабо отличается от равновесного пространственного однородного распределения $f_0(\mathbf{p})$ **) (поверхностными эффектами

*) Излагаемые ниже результаты существенно связаны с учетом влияния движения частиц на их самосогласованное поле. Надо отметить, что такие эффекты, по крайней мере по порядку величины, могут быть рассмотрены также и в гидродинамическом приближении Блоха^{16, 17}.

**) Самосогласованные колебания электронов, находящихся в периодическом поле решетки, изучались в работах Зырянова¹⁸ и Фейнберга¹⁹.

будем пренебрегать, считая систему неограниченной, что возможно для того случая, когда длина волны колебания мала в сравнении с размером тела). Тогда, приняв зависимость от координат вида e^{ikq} , что естественно для изучения волновых движений в неограниченной среде, получаем из (3,1) уравнение для малой неравновесной добавки к функции распределения $\varphi_k(p) e^{ikq}$ (при этом опущены члены φ^2)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + i \frac{kp}{m} \varphi + \frac{i}{\hbar} v(k) \left[f_0 \left(p + \frac{\hbar k}{2} \right) - f_0 \left(p - \frac{\hbar k}{2} \right) \right] \int \varphi_k(p') dp' = 0, \quad (3,3)$$

где

$$v(k) = \int U(q) e^{ikq} dq.$$

В силу того, что в уравнении (3,3) член, обусловленный взаимодействием частиц, пропорционален плотности числа частиц $\int \varphi dp'$, то ясно, что получаемый ниже из (3,3) спектр коллективных колебаний будет соответствовать колебаниям плотности — продольным волнам.

Далеко не всегда коллективные колебания оказываются незатухающими. Это, естественно, означает, что об истинных коллективных колебаниях, как о новых степенях свободы системы, можно говорить лишь в том случае, когда затухание достаточно мало. В связи с этим удобно²⁰ при решении уравнения (3,3) рассматривать начальную задачу и исследовать возможность получения решений, имеющих при больших моментах времени асимптотический вид $e^{-\gamma t - i\omega t}$. Используя преобразование Лапласа — Меллина, получаем из (3,3)

$$Q_k(t) = \frac{\frac{1}{(2\pi i)} \int_{-i\infty + \sigma}^{i\infty + \sigma} ds e^{st} \int \frac{\varphi_k(0, p)}{s + ikp/m} dp}{\left[1 - \frac{v(k)}{\hbar} \int \frac{f_0 \left(p + \frac{\hbar k}{2} \right) - f_0 \left(p - \frac{\hbar k}{2} \right)}{(kp/m) + s/i} dp \right]}. \quad (3,4)$$

Здесь $\varphi_k(0, p)$ — значение неравновесной добавки к функции распределения в начальный момент времени.

Нетрудно убедиться, что значение частоты ($\omega = -\text{Im } s$) и декремента затухания $\gamma = -\text{Re } s$ определяются полюсами подынтегрального выражения (3,4), т. е. могут быть найдены из следующего дисперсионного уравнения³:

$$1 = \frac{v(k)}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0 \left(p + \frac{\hbar k}{2} \right) - f_0 \left(p - \frac{\hbar k}{2} \right)}{(kp/m) - \omega + i\gamma} dp. \quad (3,5)$$

Отметим, что при интегрировании в (3,5) по компоненте импульса, параллельной k , следует обходить полюс $(kp/m) = \omega - i\gamma$ снизу.

Для случая электронов, когда $v(k) = 4\pi e^2/k^2$, уравнение (3,5) было получено изложенным методом в работах³ и исследовалось в^{21, 22}.

Заметим, что для электронов уравнение (3,5) может быть переписано в виде

$$1 = \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{f_0(p) dp}{(\omega - kp/m)^2 - (\hbar k^2/2m)^2}. \quad (3,5')$$

Иным методом такое дисперсионное уравнение позднее было получено Бомом и Пайнсом²³. Аналогичный метод коллективных переменных в применении к электронному газу был использован Зубаревым²⁴. Наконец также методом самосогласованного поля (3,5) было получено Зыряновым и Елеонским²⁵ и Фереллом²⁶.

В том случае, когда импульс коллективного возбуждения мал в сравнении с характерным импульсом равновесного состояния, можно перейти от (3,5) к классическому пределу. При этом имеем

$$1 = v(k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial p}}{(kp/m) - \omega + i\gamma} dp. \quad (3,6)$$

Такой спектр колебаний в классической теории электронной плазмы рассматривался в работах ^{8, 20, 27}. При этом оказалось ²⁰, что в области длин волн малых или сравнимых с дебаевским радиусом экранирования $r_d = \sqrt{\kappa T / 4\pi e^2 n}$ (где n — число электронов в 1 см³, T — температура, κ — постоянная Больцмана) плазменные колебания плотности заряда или, что, очевидно, то же самое, колебания продольного электромагнитного поля сильно затухают. Напротив, в области длинных волн ($\lambda \gg r_d$) затухание мало и

$$\omega^2 = \omega_L^2 + \frac{3\kappa T}{m} k^2; \quad \gamma = \omega \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\exp -\frac{1}{2} r_d^2 k^2}{r_d^3 k^3},$$

где так называемая плазменная частота $\omega_L = \sqrt{4\pi e^2 n / m}$.

Другой случай, когда также возможен переход к классическому пределу и который осуществляется, например, в случае вырожденного бозе-газа, возможен при условии, что энергия коллективного колебания $\hbar\omega$ велика в сравнении с соответствующей энергией отдельной частицы $\hbar^2 k^2 / 2m$. Это, в частности, видно из спектра колебаний плотности вырожденного бозе-газа ($f_0 = n\delta(p)$), получающегося из (3,5) и имеющего вид³

$$\omega^2 = \frac{v(k)n}{m} k^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2}.$$

Такой спектр впервые был получен Боголюбовым ²⁸ в теории сверхтекучести (см. также ²⁹).

Обратимся теперь к рассмотрению коллективных колебаний вырожденного электронного газа. Такая задача для длин волн, при которых $\hbar k$ много меньше граничного импульса Ферми $p_0 = (3\pi)^{1/3} n^{1/3} \hbar$, впервые была рассмотрена Гольдманом ³⁰. В нашем рассмотрении, не считая $\hbar k$ малым в сравнении с p_0 , из (3,5) получаем ^{21, 22}:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{3}{2} \frac{m^2 \omega_L^2}{p_0^2 k^2} \left(-1 + \frac{1}{2\hbar k p_0} \left\{ \left[\left(m \frac{\omega - i\gamma}{k} + \frac{\hbar k}{2} \right)^2 - p_0^2 \right] \ln \frac{\omega - i\gamma + \hbar k^2 / 2m + k p_0 / m}{\omega - i\gamma + \hbar k^2 / 2m - k p_0 / m} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left[\left(m \frac{\omega - i\gamma}{k} - \frac{\hbar k}{2} \right)^2 - p_0^2 \right] \ln \frac{\omega - i\gamma - \hbar k^2 / 2m + k p_0 / m}{\omega - i\gamma - \hbar k^2 / 2m - k p_0 / m} \right\} + \right. \\ \left. + 2\pi i \frac{m}{\hbar p_0} F \right) = 0, \\ F = 0, \quad \left(\omega \mp \frac{\hbar k^2}{2m} \right)^2 - \gamma^2 > \left(\frac{p_0 k}{m} \right)^2, \\ F = (-\omega + i\gamma), \quad \left(\omega \mp \frac{\hbar k^2}{2m} \right)^2 - \gamma^2 < \left(\frac{p_0 k}{m} \right)^2, \\ F = \pm \frac{(p_0 k, m)^2 - (\omega - i\gamma + \hbar k^2 / 2m)^2}{2\hbar k^2 / m}, \\ \left(\omega \mp \frac{\hbar k^2}{2m} \right)^2 - \gamma^2 < \left(\frac{p_0 k}{m} \right)^2 < \left(\omega \mp \frac{\hbar k^2}{2m} \right)^2 - \gamma^2. \end{aligned} \right\} \quad (3,7)$$

Это дисперсионное уравнение имеет довольно громоздкий вид. Прежде чем переходить к рассмотрению некоторых простых предельных случаев, заметим следующее. Колебания электронного газа не будут затухать лишь в том случае, когда $F=0$. Это, как легко видеть, имеет место в области достаточно больших ω или достаточно больших длин волн. Поэтому лишь в такой области можно говорить о продольных колебаниях электронного газа как о новой степени свободы. В области длинных волн из (3,7) получаем ³

$$\omega^2 = \omega_L^2 + \frac{3}{5} \frac{p_0^2 k^2}{m^2} + \left(\frac{\hbar k^2}{2m} \right)^2. \quad (3,8)$$

При этом считаем, что $k \ll k_c = m\omega_L/p_0$ и $\omega_L \gg \hbar k^2/2m$. Таким образом, в этой области спектр продольных колебаний подобен спектру колебаний высокотемпературной плазмы с тем отличием, что у нас хаотическое движение электронов определяется не температурой, а энергией Ферми. Кроме того, (3,8) учитывает квантовые эффекты. С уменьшением длины волны спектр продольных колебаний переходит в одночастичный. Так, при условии $\hbar^2 k^2/2m \ll 4\pi e^2 n/k^2 \ll p_0^2/2m$ имеем

$$\hbar\omega = \frac{(p_0 + \hbar k)^2 - p_0^2}{2m} \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{2}{3} \frac{p_0^2 k^2}{\omega_L^2} - 2 \right] \right\}. \quad (3,9)$$

Это выражение с точностью до экспоненциально малого члена совпадает с энергией возбуждения свободных электронов, поднимаемых при возбуждении над поверхностью Ферми.

Отметим, что для сил с конечным радиусом действия ($v(0)$ — конечно) вместо (3,8) имеем ³

$$\omega^2 = \left(\frac{v(0)n}{m} + \frac{3}{5} \frac{p_0^2}{m} \right) k^2 + \left(\frac{\hbar k^2}{2m} \right)^2. \quad (3,10)$$

Такой спектр подобен спектру бозе-газа и соответствует фононным колебаниям. Следует подчеркнуть отличие этих колебаний*), а также и плазменных от обычного звука в газе. В последнем случае частицы взаимодействуют лишь в моменты столкновений, поэтому с ростом длины свободного пробега частиц они фактически не взаимодействуют за время периода колебаний, в связи с чем затухание становится весьма большим, и колебания не могут распространяться. Именно такая картина должна иметь место для полностью вырожденной системы частиц, подчиняющихся статистике Ферми и взаимодействующих лишь в моменты столкновений, поскольку при температуре, равной нулю, длина свободного пробега в такой системе становится бесконечно большой. Напротив, в нашем случае колебания самосогласованного звука распространяются тогда, когда столкновения несущественны, и получаемые при этом возбуждения обусловлены наличием самосогласованного взаимодействия между частицами. В результате частицы взаимодействуют отнюдь не только в момент столкновений, а, напротив того, постоянно движутся в общем самосогласованном поле. Необходимо заметить, что, как будет видно из изложенного в следующем параграфе, для спектра нулевого звука важен учет обменного взаимодействия, которое хотя и не меняет физическую картину, но численно изменяет величину скорости самосогласованного нулевого звука.

В системе заряженных частиц приближение Хартри позволяет также получить и спектр поперечных колебаний. Классическое

*) Следуя Ландау ³¹, будем называть такие колебания нулевым звуком или самосогласованным звуком.

приближение *) приводит к спектру поперечных колебаний, имеющему вид

$$\omega^2 = \omega_L^2 + [c^2 + (\overline{pk})^2/m^2k^2]k^2, \quad (3,11)$$

где c — скорость света, а черта означает усреднение по равновесному состоянию. Для вырожденного электронного газа $(\overline{pk})^2 = (1/5) p_0^2 k^2$.

В нашем нерелятивистском рассмотрении скорость частиц мала в сравнении со скоростью света. Поэтому влиянием движения частиц в формуле (3,11) можно пренебречь.

Спектр поперечных колебаний позволяет сразу записать выражение для диэлектрической проницаемости электронного газа, учтя определение проницаемости $\epsilon = c^2 k^2 / \omega^2$. Такую диэлектрическую проницаемость будем называть поперечной ³² (см. § 6). Дело в том, что при учете движения частиц, как это видно из (3,11), ϵ^{tr} зависит не только от ω , но и от k . Роль же продольной диэлектрической проницаемости ϵ^e играет выражение, стоящее в левой части уравнения (3,7), которое является условием существования продольных волн, допустимых лишь при условии обращения в нуль диэлектрической проницаемости. В этом легко убедиться, если учесть тот факт, что энергия взаимодействия заряженных частиц, входящая в уравнение (3,1), определяется скалярным потенциалом электрического поля. Поэтому, выразив с помощью (3,1) плотность заряда через такую энергию взаимодействия, легко находим $\epsilon^e(\omega, k)$, связывающую продольные компоненты электрической индукции и напряженности электрического поля.

Сформулированные выше результаты для электронного газа сохраняются и в случае системы из электронов и ионов. Однако при этом возникает дополнительная ветвь возбуждений. Это — звуковые возбуждения. Скорость таких возбуждений легко определить, вычислив сжимаемость. Действительно, например, в случае вырожденного газа электронов давление будет определяться электронами и $P \approx [(3\pi^2)^{2/3}/5] \hbar^2 n_0^{5/3} / m$, а плотность — ионами $\rho \approx m_i n_{0i} \equiv m_i n_{0e} / Z$. Тогда

$$U^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{Z \hbar^2 (3\pi^2)^{2/3} n_0^{2/3}}{3 m_i m_e} = \frac{Z P_{0e}^2}{3 m_i m_e}. \quad (3,12)$$

*) В классическом пределе ⁸ приближение самосогласованного поля для заряженных частиц, как известно, соответствует системе уравнений Максвелла, в которых плотность тока и плотность заряда определяются с помощью функции распределения, подчиняющейся уравнению (ср., например, ³³)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (3,2')$$

Квантовое рассмотрение колебаний поперечного поля приводит к дисперсионному уравнению колебаний, имеющему следующий вид ³:

$$1 = \frac{4\pi e^2 (\omega - i\gamma)}{m [(\omega - i\gamma)^2 - c^2 k^2]} \int \frac{d\mathbf{p} (\mathbf{p} \mathbf{e}_k)}{\omega - i\gamma - \mathbf{p} \mathbf{k} / m} \left\{ \mathbf{e}_k \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{(\mathbf{p} \mathbf{e}_k)}{m\omega} \left[k \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{1}{\hbar} \left(f_0 \left(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) \right) \right] \right\},$$

где \mathbf{e}_k — единичный вектор, перпендикулярный волновому вектору k . При этом диэлектрическая проницаемость, определяющая распространение поперечных волн, имеет вид

$$\epsilon^{tr} = 1 + \frac{4\pi e^2}{m (\omega - i\gamma)} \int \frac{d\mathbf{p} (\mathbf{p} \mathbf{e}_k)}{\omega - i\gamma - \mathbf{p} \mathbf{k} / m} \left\{ \mathbf{e}_k \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{(\mathbf{p} \mathbf{e}_k)}{m\omega} \left[k \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{1}{\hbar} \left(f_0 \left(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) \right) \right] \right\}.$$

Здесь U — скорость звука, p_{0e} — граничный импульс для электронов, m_i и m_e — массы иона и электрона, Z — число электронов, приходящихся на один ион. Скорость звука (3,12) была получена в работе ³⁴ (см. также ³⁵) и в работе ³⁶ (см. также ²²) из анализа коллективных движений плазмы. При этом в ³⁶ рассмотрен вопрос и о затухании звуковых волн в электронно-ионной плазме. Отметим, что соображения, приведшие нас выше к формуле (3,12), часто используются также и для высокотемпературной плазмы (см. ³⁷), где при этом получается для скорости звуковых волн величина порядка $\sqrt{\kappa T/m_i}$. Однако в действительности таких волн в высокотемпературной плазме не наблюдают. Это может быть связано с обнаруженным в работе ³⁶ сильным затуханием таких волн. Ниже мы приведем некоторые результаты этой работы. Рассматривая систему двух уравнений вида (3,2) (например, в форме (3,2')) соответственно для электронов и ионов и решая задачу о малых отклонениях от равновесия, подобно тому как это делалось выше при рассмотрении уравнения (3,2), нетрудно найти дисперсионное уравнение колебаний в системе электронов и ионов

$$1 = \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \frac{k \frac{\partial f_{0e}}{\partial p}}{pk/m - \omega + i\gamma} dp + \frac{4\pi e^2 Z^2}{k^2} \int \frac{k \frac{\partial f_{0i}}{\partial p}}{pk/m - \omega + i\gamma} dp. \quad (3,13)$$

Здесь Z — количество электронов, приходящихся на один ион, f_{0e} и f_{0i} — соответственно равновесные функции распределения электронов и ионов.

В области длин волн, больших в сравнении с радиусом экранирования кулоновского поля (r_d или r_s соответственно для случая высоких температур и для вырожденного газа электронов), в левой части уравнения (3,13) можно пренебречь единицей. Это приводит к тому, что ω и γ оказываются пропорциональными волновому числу k . В случае вырожденного электронного газа анализ уравнения (3,13) существенно упрощается, во-первых, потому, что скорость звука мала в сравнении со скоростью электронов (это имеет место и при высоких температурах), а во-вторых, скорость звука оказывается большей по сравнению со скоростью ионов. В результате получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{Z}{3} \frac{m_e}{m_i} \frac{P_{0e}}{m_e}} k; \quad \gamma = \frac{\pi Z}{12} \frac{P_{0e} k}{m}. \quad (3,14)$$

Полученное выражение для скорости звука, естественно, совпадает с определенным по сжимаемости (см. (3,12)), которое, как следует отметить, дает правильный порядок величины скорости звука в металлах. Декремент затухания γ оказывается малым в сравнении с ω , что позволяет распространяться звуку на большие расстояния. Затухание, определяющееся формулой (3,14), соответствует тому, что звуковые колебания вырожденной плазмы являются состояниями, обладающими естественной шириной уровня. Следует указать на то, что в последнее время при изучении поглощения звука в металлах такое затухание было обнаружено экспериментально и теоретически интерпретировалось в работах ^{38, 39}.

Наконец укажем на аналогичные результаты, относящиеся к случаю высоких температур, когда для электронов и ионов можно принять распределение Максвелла. В этом случае скорость звука близка к тепловой скорости ионов. Обозначив

$$\omega = xk \sqrt{\kappa T/m_i}; \quad \gamma = yk \sqrt{\kappa T_i/m_i},$$

получаем из (3,13) следующее уравнение для определения x и y^*):

$$\frac{T_i}{ZT_e} + 1 + \frac{x - iy}{V 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi - x + iy} e^{-\xi^2/2} = 0. \quad (3,15)$$

Здесь T_e и T_i — температуры электронов и ионов. Нетрудно убедиться, что решения этого уравнения, соответствующие малому затуханию, возникают лишь при условии $T_i \ll ZT_e$. В противном случае затухание велико.

§ 4. ВЛИЯНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ ЧАСТИЦ НА СПЕКТРЫ КОЛЛЕКТИВНЫХ КОЛЕБАНИЙ (МИКРОРАССМОТРЕНИЕ)

Микроскопической теории, в какой-либо мере полно рассматривающей влияние корреляций частиц на спектр коллективных возбуждений, по-видимому, на сегодняшний день нет. Поэтому ниже мы изложим лишь некоторые частные результаты, позволяющие, как нам представляется, усмотреть общие закономерности, обусловленные корреляцией, а также могущие облегчить понимание феноменологического подхода, изложенного в следующем параграфе.

Основным предположением, существенно упрощающим учет корреляций, по-видимому, следует считать утверждение о том, что в области длин волн возбуждений, больших в сравнении с радиусом корреляции, коррелятивные функции пары частиц фактически не отличаются от равновесных значений. Именно такая ситуация имеет место в приближении Хартри — Фока⁴¹, позволяющем учесть обменную корреляцию частиц. К рассмотрению этого случая мы теперь и перейдем.

Представим, следуя Дираку⁴², матрицу плотности в виде детерминанта матриц плотности отдельных частиц:

$$\varrho_n = \begin{vmatrix} (s'_1, \mathbf{r}'_1 | \varrho | s_1, \mathbf{r}_1), & \dots, & (s'_1, \mathbf{r}'_1 | \varrho | s_n, \mathbf{r}_n) \\ \dots & & \dots \\ (s'_n, \mathbf{r}'_n | \varrho | s_1, \mathbf{r}_1), & \dots, & (s'_n, \mathbf{r}'_n | \varrho | s_n, \mathbf{r}_n) \end{vmatrix}. \quad (4,1)$$

Здесь $(|\varrho|)$ — матрица плотности отдельной частицы, состояние которой характеризуется координатой \mathbf{r} и спиновым индексом s . При этом ϱ подчиняется следующему уравнению приближения Хартри — Фока:

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial r'^2} \right) \right\} (s', \mathbf{r}' | \varrho | s, \mathbf{r}) = \\ = \sum_{s''} \int d\mathbf{r}'' [U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|) - U(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|)] \{ (s', \mathbf{r}' | \varrho | s, \mathbf{r}) (s'', \mathbf{r}'' | \varrho | s'', \mathbf{r}'') - \\ - (s', \mathbf{r}' | \varrho | s'', \mathbf{r}'') (s'', \mathbf{r}'' | \varrho | s, \mathbf{r}) \}. \quad (4,2)$$

Целесообразно перейти к представлению Вигнера

$$f_{s's}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left(s', \mathbf{q} - \frac{\hbar\boldsymbol{\tau}}{2} | \varrho | s, \mathbf{q} + \frac{\hbar\boldsymbol{\tau}}{2} \right) e^{-i\boldsymbol{\tau}\mathbf{p}} d\boldsymbol{\tau}. \quad (4,3)$$

При этом запишем уравнение сразу для случая малых отклонений от состояния равновесия

$$f_{s's}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \delta_{s's} f_0(\mathbf{p}) + \delta f_{ss'}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (4,4)$$

(здесь $f_0 = [2/(2\pi\hbar)^3] \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_0(p) - \mu}{kT}\right) + 1 \right]^{-1}$, $\varepsilon_0(p)$ — энергия частицы,

*) Относительно интеграла в (3,15) см. ⁴⁰.

μ — химический потенциал). Ограничимся тем случаем, когда длина волны возбуждения намного превышает длину волны частиц на поверхности Ферми, по порядку величины совпадающую со средним расстоянием между частицами. Тогда имеем ^{43, 44}

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \left\{ \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{1}{2} \text{Sp}_{s'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int \hat{\Phi}^0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_0(\mathbf{p}') d\mathbf{p}' \right\} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{q}} - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \text{Sp}_{s'} \left\{ U(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|) \delta f(\mathbf{q}', \mathbf{p}') d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' - \int \hat{\Phi}^0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta f(\mathbf{q}', \mathbf{p}') \right\} = 0, \quad (4,5)$$

где

$$\hat{\Phi}^0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = v \left(\left| \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar} \right| \right) \frac{1 + \hat{\sigma} \hat{\sigma}'}{2},$$

σ — оператор спина, $v(\mathbf{k}) = \int U(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} d\mathbf{q}$.

Величина $\hat{\Phi}^0$ является обменной частью амплитуды рассеяния вперед для столкновения двух частиц, вычисленной в приближении Борна. Для сил с малым радиусом действия, много меньшим по сравнению с характерным расстоянием изменения δf , наличие $U(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|)$ в уравнении (4,4) приводит к возникновению полной борновской амплитуды рассеяния вперед двух частиц со спином половина

$$-v(0) + v \left(\left| \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar} \right| \right) \frac{1 + \hat{\sigma} \hat{\sigma}'}{2}.$$

Приближенность уравнения (4,4) видна уже из того, что возникает борновское приближение для амплитуды рассеяния. Поэтому приближение Хартри—Фока не является точным в случае сильного взаимодействия частиц. Далее полученная амплитуда рассеяния не зависит от наличия остальных частиц, кроме пары сталкивающихся. Учет остальных частиц, вообще говоря, весьма существен ^{45 *}).

Заметим, что второй член в первой фигурной скобке уравнения (4,4) соответствует изменению массы частицы. В силу того, что δf отлично от нуля лишь у поверхности Ферми, можно говорить о появлении эффективной массы частицы. Известно, что поправка к $(1/m)$ в приближении Хартри—Фока оказывается бесконечной для случая кулоновского взаимодействия частиц. Однако в уравнении (4,4), кроме добавки к эффективной массе, имеется еще один член, содержащий $\hat{\Phi}^0$ и обладающий такой же сингулярностью. Если при этом мы примем, что энергия частицы, являющаяся аргументом функции f_0 , соответствует энергии свободной частицы, то в уравнении (4,4) сингулярные члены взаимно компенсируются. В таком приближении легко оценить влияние обменных эффектов на спектр плазменных колебаний электронного газа. В области длинных волн, как нетрудно убедиться, имеем ^{43 **})

$$\omega^2 = \omega_L^2 + \frac{3}{5} \frac{p_0^2 k^2}{m^2} - \omega_L^2 \frac{3}{20} \left(\frac{\hbar k}{p_0} \right)^2.$$

Отсюда ясно, что влиянием обменной корреляции на зависимость частоты от волнового вектора можно пренебречь лишь в случае электронного

*) Однако, на наш взгляд, запрет, действующий в силу принципа Паули и осуществляющийся благодаря заполненности уровней, лежащих ниже поверхности Ферми, и учитываемый, например, в уравнении Бете—Голдстона ⁴⁶ в теории ядерного вещества, не изменит выражения $\hat{\Phi}^0$, поскольку в нашем рассмотрении существенно рассеяние частиц, лежащих на поверхности Ферми, для которых такой запрет не имеет места.

**) Такое же выражение впоследствии было получено и в работе ⁴⁷.

газа высокой плотности, когда энергия Ферми ($p_0^2/2m$) значительно превышает энергию плазменного колебания $\hbar\omega_L$ (см. также ^{26, 50}).

Для случая сил с конечным радиусом действия в качестве энергии частицы $\varepsilon_0(p)$ можно принять соответствующее выражение приближения Хартри—Фока

$$\varepsilon_0(p) = \frac{p^2}{2m} + \int \left\{ v(0) - \frac{1}{2} v\left(\left|\frac{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}{\hbar}\right|\right) \right\} f_0(\mathbf{p}') d\mathbf{p}'.$$

Далее в этом случае наряду с колебаниями плотности открывается возможность существования и иных возбуждений ^{43, 48, 49}. Анализ всего рассмотрения при этом затрудняется необходимостью делать определенные высказывания о виде $v(|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|/\hbar)$. Если же не делать каких-либо высказываний о виде амплитуды рассеяния вперед, то уравнение (4,4) не будет отличаться от соответствующего уравнения теории ферми-жидкости, к рассмотрению результатов которой мы перейдем в следующем параграфе.

§ 5. ВЛИЯНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ ЧАСТИЦ НА СПЕКТРЫ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЫРОЖДЕННОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

Непосредственным обобщением приближения Хартри—Фока, также по существу пренебрегающим отличием корреляций от равновесных, является теория ферми-жидкости Ландау ⁵¹. Ниже мы приведем некоторые результаты, полученные на основании такой теории. Здесь целесообразно предварительно сделать некоторые замечания об использовании модели независимых частиц для описания квантовой плазмы, образуемой электронами металла.

Электронная теория металлов успешно использует для описания многих свойств металлов представление об электронах как независимых частицах, рассматривая по существу электроны металла как газ. В силу того, что электроны находятся в поле решетки, их свойства весьма отличаются от свойств свободных электронов, что, в частности, характеризуется законом дисперсии, т. е. зависимостью энергии электрона от его квазиимпульса *). Другая причина, обуславливающая отличие электронов от газа свободных частиц, связана с междueleктронным взаимодействием, которое отнюдь не мало. Это сразу видно из того факта, что средняя энергия кулоновского взаимодействия электронов металла по порядку величины совпадает с их средней кинетической энергией. Поэтому естественно ожидать существенного влияния корреляции электронов на ряд свойств металлов.

Действительно, в различных приближенных методах учета корреляции электронов было обнаружено заметное влияние корреляции на ряд свойств металлов (определение парамагнитной восприимчивости ^{52, 53}, определение теплоемкости и корреляционной энергии электронного газа большой плотности ⁵⁴, влияние корреляций на спектр колебаний электронной плазмы см. § 4). Однако все подобные рассмотрения представляют собой микроскопические теории, применимость которых к реальным металлам весьма проблематична, что обусловлено отсутствием в реальных металлах малого параметра, вызванным фактическим совпадением порядка величин кинетической и потенциальной энергий электронов. Такое положение заставляет уделить особое внимание феноменологической теории, достаточно полно учитывающей корреляцию частиц.

*) Эффекты, обусловленные периодическим полем решетки, мы не будем рассматривать (так же как и в предыдущих параграфах) анализируя лишь коллективные эффекты.

Следует отметить, что в кинетической теории электронов металла обычно корреляция частиц не учитывается. Действительно, при этом обычно используется кинетическое уравнение Больцмана. В таком рассмотрении частичный учет корреляции электронов, возникающей на малых расстояниях и приводящей к столкновениям, проводится с помощью интеграла столкновений электронов с электронами. Известно ⁵⁵, что такие столкновения играют малую роль *), а следовательно, и учитываемая ими корреляция не дает существенного эффекта. С другой стороны, как было показано выше, учет корреляции, обусловленной тождественностью, существенно меняет кинетические уравнения даже в пренебрежении столкновениями ⁴³. Феноменологический учет именно таких эффектов содержится в теории ферми-жидкости.

В квантовой жидкости, благодаря значительному самосогласованному взаимодействию частиц, энергия отдельной частицы зависит от состояния окружающих частиц. В связи с этим, естественно, оказывается, что энергия системы частиц становится не равной сумме энергий отдельных частиц, а является некоторым функционалом функции распределения. В таких условиях становится естественнее говорить не о частицах (например, атомах), из которых состоит жидкость, а о квазичастицах поскольку последние существенно отличаются от свободных частиц.

При бесконечно малом изменении функции распределения $\delta f_{ss'}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ изменение плотности энергии системы имеет вид:

$$\delta E(\mathbf{q}) = \sum_{ss'} \int \varepsilon_{ss'}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \delta f_{ss'}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}. \quad (5,1)$$

Эта формула по существу является определением энергии (функции Гамильтона) квазичастицы, отличающейся от энергии свободной частицы благодаря взаимодействию с окружающими частицами.

Далее, при изменении функции распределения энергия квазичастицы также изменяется ⁴⁴

$$\delta \varepsilon_{ss'}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{s''} \int F_{ss''}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta f_{s''}(\mathbf{q}', \mathbf{p}') d\mathbf{q}' d\mathbf{p}'. \quad (5,2)$$

Функция F является второй вариационной производной плотности энергии и играет существенную роль в определении ряда свойств жидкости. Эта величина, вообще говоря, зависит от импульсов \mathbf{p}, \mathbf{p}' , спинов, а также является функцией координат.

В теории He^3 зависимость от координат фактически принималась в виде $\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$. В нашем случае электронной жидкости благодаря кулоновскому закону сил это уже не так. Действительно, если бы мы пользовались самосогласованным приближением Хартри для частиц, взаимодействующих по центральному закону сил с потенциальной энергией $U(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|)$, то в этом случае функция имела бы следующий вид:

$$F_{ss''}^{(H)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \delta_{ss''} U(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|). \quad (5,3)$$

Ясно, что для короткодействующих сил аппроксимация правой части этой формулы с помощью δ -функции возможна для всех тех состояний, в которых характерный размер возникающих неоднородностей велик в сравнении с радиусом действия сил.

В приближении Хартри полностью пренебрегается корреляцией, ибо функция распределения системы берется в виде произведения функций

*) Исключением может явиться вклад междуэлектронных столкновений в поглощательную способность металла в области частот, где $\hbar\omega \gg kT$ (см. ^{31,56,57}).

распределения отдельных частиц. Ясно поэтому, что разность $(F - F^{(H)})$ должна быть обусловлена эффектом корреляций частиц. В общем случае об этой величине можно сказать довольно мало. Однако основной интерес представляет такой случай, когда радиус корреляции оказывается много меньше расстояний, на которых заметно меняется функция распределения. В таком случае можно приять, что

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{p}, \mathbf{p}') - F^{(H)} \simeq \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \hat{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (5,4)$$

Соответственно этому формула (5,2) принимает вид

$$\delta\varepsilon(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int U(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|) \delta f(\mathbf{q}', \mathbf{p}') d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' + \int \hat{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta f(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}'. \quad (5,5)$$

Если силы обладают малым радиусом действия, то формула (5,5) совпадает с принимаемой в теории He^3 ⁵¹. Благодаря тому, что в случае He^3 как радиус действия сил, так и радиус корреляции частиц являются величинами порядка межатомных расстояний, то из изложенного выше ясно, что локальная связь $\delta\varepsilon$ и δf в этом случае вполне законна.

Иное положение имеет место в случае системы электронов. Дальнедействующий характер кулоновских сил заставляет использовать нелокальную связь $\delta\varepsilon$ и δf , подобную (5,5). Однако при этом следует сделать некоторые замечания. Для использования формулы (5,5) необходимо выполнение условия (5,4). Поэтому обратимся к тем корреляциям, которые могут возникнуть в системе электронов. В частности, корреляция электронов, находящихся в состоянии вырождения, возникает благодаря тождественности частиц. Оценка такой корреляции может быть получена в приближении Хартри—Фока. Сразу же можно сказать, что расстояния, на которых существенна такая корреляция, имеют порядок величины междueleктронных расстояний. Далее, для электронов, например металла, существенна также корреляция, обусловленная взаимодействием (силовая корреляция, приводящая к так называемой корреляционной энергии вырожденного электронного газа). Эта корреляция на больших расстояниях подобна дебаевской корреляции частиц, например в электролитах, а на малых расстояниях связана с сильным отталкиванием электронов друг от друга. Важной особенностью этих корреляций при тех плотностях электронов, какие имеются в реальных металлах, является то, что характерные расстояния, на которых корреляция существенна, оказываются не на много больше межатомных расстояний^{53, 58}. В связи с этим можно сказать, что для электронов металла можно использовать соотношение (5,4). Таким образом, в формуле (5,5) ближняя корреляция будет правильно передаваться вторым слагаемым, содержащим функцию $\hat{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$.

Первое слагаемое в формуле (5,5) учитывает влияние дальних кулоновских сил и для нашего случая электронов $U(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|) = e^2/|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|$. Заметим, что для пространственно-однородных распределений первое слагаемое в этой формуле при ее буквальном понимании дает расходящееся выражение. Такое положение обусловлено тем, что при рассмотрении системы электронов необходимо вводить фон положительных зарядов, компенсирующих заряд электронов и соответствующих электронному заряду ионов. Поэтому в рассматриваемом члене формулы (5,5) в качестве δf следует понимать отклонение функции распределения от пространственного однородного распределения, сохраняющее нейтральность системы частиц.

Итогом вышеизложенного может быть следующее. Ближняя корреляция частиц может быть учтена подобно тому, как это было и в слу-

чае He^3 , с помощью использования теории Ландау. Дальняя кулоновская корреляция может быть учтена введением самосогласованного поля. Очевидно, что таким образом можно учесть не только кулоновское (продольное) поле, которое мы рассматриваем выше, но и поперечное электромагнитное поле. Последнее аналогично тому, что имеет место и обычно, когда в кинетической теории металлов используется уравнение Больцмана, в котором сила Лоренца определяется самосогласованным электромагнитным полем^{8,33}. Поэтому уравнения поля можем записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi e \text{Sp} \int f d\mathbf{p}' - 4\pi q_+, \\ \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi e}{c} \text{Sp} \int \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \mathbf{p}'} f d\mathbf{p}' + 4\pi \beta \text{rot Sp} \int \hat{\sigma} f d\mathbf{p}'; \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \right\} (5,6)$$

где $\hat{\sigma}$ — спиновые матрицы Паули, β — магнитный момент электрона, q_+ — компенсирующий заряд положительного фона ионов. В этих уравнениях $f_{ss'}$ является функцией распределения, определяющейся из следующего кинетического уравнения⁴⁴:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \mathbf{p}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \mathbf{q}} \right) + e \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \\ + \frac{e}{2c} \left\{ \left[\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{H} \right] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \left[\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{H} \right] \right\} - \frac{i}{\hbar} [\epsilon_1, f] = \hat{\Gamma}(f). \end{aligned} \quad (5,7)$$

$\hat{\Gamma}$ — оператор, соответствующий интегралу столкновений. Для равновесных распределений $\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v}$ — скорость электронов; в случае же малых отклонений от равновесия

$$\delta \epsilon_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\beta \hat{\sigma} \mathbf{H} + \int \hat{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta f(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}'. \quad (5,8)$$

При этом пренебрежено возможными спин-орбитальными взаимодействиями. Нетрудно убедиться*), что имеет место равенство

$$\text{Sp} \int \mathbf{p} f d\mathbf{p} = \text{Sp} \int m \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \mathbf{p}} f d\mathbf{p}. \quad (5,9)$$

Из соотношения (5,9) следует

$$\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \mathbf{p}} - \int \hat{\Phi} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}'} d\mathbf{p}'. \quad (5,10)$$

Если это соотношение, найденное Ландау⁵¹, подставить в (5,9), то получим следующее условие:

$$\text{Sp} \int \hat{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}'} f(\mathbf{p}) d\mathbf{p} d\mathbf{p}' = 0, \quad (5,11)$$

налагаемое в силу произвольности функций распределения на Φ .

*) Плотность импульса и плотность тока могут быть определены следующими равенствами:

$$\begin{aligned} P(q) &= \int \mathbf{p}_1 f_n(\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 \dots \mathbf{p}_n \mathbf{q}_n) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{q}_2 \dots d\mathbf{q}_n = \int \mathbf{p} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{p}, \\ j(q) &= e \int \frac{\mathbf{p}_1}{m} f_n(\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 \dots \mathbf{p}_n \mathbf{q}_n) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{q}_2 \dots d\mathbf{q}_n = e \int \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}. \end{aligned}$$

В последнем учтено, что $(\mathbf{p}_1/m) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \left(\sum_i \mathbf{p}_i^2/2m + U_1 + \sum_{i,j} U_{ij} \right)$. Из сравнения выражений для плотности импульса и плотности тока, определенных через f_n и f , следует (5,9).

Заметим, что в том случае, когда Φ соответствует приближению Хартри—Фока и зависит лишь от разности $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$, соотношение (5,11) удовлетворяется автоматически. Это соотношение так же удовлетворяется для равновесных распределений.

Уравнение (5,7), в частности, позволяет рассмотреть плазменные и иные колебания вырожденной электронной жидкости. Этому вопросу были посвящены работы^{58, 59}. Колебания незаряженной Ферми-жидкости рассматривались в работах^{31, 60}.

Прежде всего обратимся к колебаниям, сопровождающимся колебаниями плотности, а поэтому приводящими к возникновению продольного электромагнитного поля. Это—плазменные волны. В области больших длин волн при выполнении условия $\omega_L \gg kv_0$ имеем для спектра таких колебаний следующее выражение⁵⁸:

$$\omega^2 = \omega_L^2 + \frac{v_0 p_0}{m} \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3} \left[A_0 + \frac{4}{25} A_2 \right] \right) k^2. \quad (5,12)$$

Здесь A_0 и A_2 —коэффициенты разложения по полиномам Лежандра функции

$$\frac{8\pi p_0^2}{(2\pi\hbar)^3 v_0^2} \frac{1}{2} \text{Sp } \hat{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_n A_n P_n(\cos \chi). \quad (5,13)$$

χ —угол между \mathbf{p} и \mathbf{p}' , p_0 —граничный импульс Ферми, v_0 —скорость электронов на поверхности Ферми, связанная с p_0 согласно (5,10) соотношением

$$\frac{p_0}{m} = v_0 \left(1 + \frac{A_1}{3} \right). \quad (5,14)$$

Возникшая в формуле (5,12) предельная частота ω_L совпадает с соответствующим значением, полученным в приближении Хартри. Роль же корреляции частиц существенна для малого поправочного члена в (5,12), определяющего дисперсию плазменных волн. Оценка величины A_0 и A_2 в предположении, что функция Φ определяется амплитудой рассеяния вперед, вычисленной в борновском приближении, для экранированного кулоновского взаимодействия при использовании реальных параметров, характерных для большинства металлов, показывает, что эти величины не велики и в таком приближении, во всяком случае, не меняют порядка величины члена, пропорционального k^2 . Однако в реальных металлах ситуация может оказаться более сложной. В частности, коэффициенты разложения A_n могут оказаться значительно превышающими полученные по указанной выше оценке.

Если не делать никаких предположений о виде функции Φ , то выражения для спектров возбуждений электронной жидкости, вообще говоря, определяются весьма сложными соотношениями и соответствуют корням следующего уравнения для различных поляризаций l ($|l| \leq n$):

$$\left| \delta_{nn'} \delta_{ll'} + ikv_0 \frac{A_{n'}}{2n'+1} \left[\sqrt{\frac{(n'+1)^2 - l'^2}{4(n'+1)^2 - 1}} N_{n, n'+1}^{l, l'} + \sqrt{\frac{n'^2 - l'^2}{4n'^2 - 1}} N_{n, n'-1}^{l, l'} \right] + \right. \\ \left. + \frac{4\pi e^2 c^2}{\omega^2 - c^2 k^2} \frac{8\pi p_0^2}{(2\pi\hbar)^3} \left[-\frac{k}{\sqrt{3}} \delta_{n'0} \delta_{l'0} N_{n, 1}^{l, 0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega v_0}{3c^2} \left(1 + \frac{A_1}{3} \right) \delta_{n'1} (\delta_{l', 0} + \delta_{l', 1} + \delta_{l', -1}) N_{n, n'}^{l, l'} \right] \right| = 0, \quad (5,15)$$

где

$$iN_{n, n'}^{l, l'} = \delta_{ll'} \int \frac{d\varphi Y_n^{l*}(\vartheta, \varphi) Y_{n'}^l(\vartheta, \varphi)}{kv_0 \cos \vartheta - \omega}, \quad (5,16)$$

а $Y_n^l(\vartheta, \varphi)$ —нормированные шаровые функции.

Если для простоты принять отличными от нуля лишь A_0 и A_1 , то для продольных колебаний ($l=0$) получаем из (5,15)

$$\left(1 + \frac{A_1}{3}\right) [1 - A_0 \eta(s)] - \left\{ A_1 s^2 + \frac{3\omega_L^2}{k^2 v_0^2} \right\} \eta(s) = 0, \quad (5,17)$$

где

$$\eta(s) = \frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} - 1 \quad (s = \omega/kv_0). \quad (5,18)$$

В области длинных волн $kv_0 \ll \omega_L$ отсюда следует соотношение (5,12) для случая $A_2 = 0$. Спектр поперечных колебаний ($l=1$) в предположении, что лишь A_0 и $A_1 \neq 0$, определяется соотношением

$$1 - \frac{1}{2} A_1 \left\{ \frac{1}{3} - (s^2 - 1) \eta(s) \right\} - \frac{3}{2} \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - c^2 k^2} \left\{ 1 - (s^2 - 1) \eta(s) \right\} = 0. \quad (5,19)$$

При пренебрежении A_1 это соотношение совпадает с соответствующим дисперсионным соотношением приближения согласованного поля, описывающим незатухающие колебания^{3,21,22,32}. Колебания становятся затухающими в том случае, когда $|s| < 1$. В этих условиях логарифм в формуле (5,18) следует понимать как главное значение логарифма минус $2\pi i$. Учет величины A_1 в области $s \gg 1$ приводит к следующей связи ω и k (см. (5,14)):

$$\omega^2 = \omega_L^2 + k^2 \left(c^2 + \frac{1}{5} \frac{p_0}{m} v_0 \right), \quad \omega \gg kv_0. \quad (5,20)$$

Иными словами, в этой области частот учет корреляции проявляется лишь в малом члене. Заметим, что при пренебрежении A_1 , т. е. в приближении самосогласованного поля, уравнение (5,19) не допускает незатухающих решений в области частот $\omega \sim kv_0$. Выясним, к каким изменениям приводит в этом отношении учет корреляции частиц. Нетрудно видеть, что при выполнении неравенства

$$\omega_L \gg \omega \gg (v_0/c) \omega_L A_1^{-1/2}, \quad (5,21)$$

имеющего место для большинства металлов в области инфракрасного излучения, из (5,19) получаем

$$(s^2 - 1) \eta(s) = \frac{1}{3} - \frac{2}{A_1}. \quad (5,22)$$

Это соотношение соответствует спектру поперечных колебаний незаряженной ферми-жидкости и было рассмотрено в⁶⁰. Решения (5,22) возможны лишь при $A_1 > 6$. Оценки для ряда металлов, проведенные в⁶¹, дали $A_1 \leq 3$. Поэтому можно думать, что для таких металлов поперечный нулевой звук вряд ли возможен. Вообще же вопрос о существовании металлов, в которых возможно распространение нулевого звука, впредь до получения больших сведений о корреляции электронов металлов, может быть, по-видимому, решен лишь экспериментально.

Заметим, что, как видно из (5,15), для поляризаций с $l > 1$ наличие заряда электронов несущественно. Поэтому в этом случае теория нулевого звука в электронной жидкости аналогична таковой для $\text{He}^{3,4,60}$. Однако для возможности такого звука необходимо, чтобы были отличны от нуля также коэффициенты разложения (5,13) с $n > 1$. В частном случае, когда равны нулю все A_n с $n > 2$, дисперсионное уравнение для нулевого звука с $l=2$ имеет вид

$$\frac{1}{5} - \frac{4}{A_2} = \frac{3}{2} (s^2 - 1) \left\{ \frac{1}{3} + (s^2 - 1) \left[1 - \frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} \right] \right\}. \quad (5,23)$$

Говоря о природе нулевого звука, мало что можно добавить к сказанному при рассмотрении коллективных колебаний в приближении самосогласованного поля Хартри. Заметим, что для существования нулевого звука необходимо, чтобы период колебаний был мал в сравнении со временем установления равновесия электронной жидкости. Например, в случае неравенства (5,21) такое условие заведомо выполнено. На первый взгляд могло бы показаться, что, понижая температуру, можно существенно расширить возможную область частот нулевого звука. Однако в действительности это не так. Дело в том, что в области частот $\hbar\omega \gg kT$ в столкновениях принимают участие электроны, расположенные от поверхности Ферми на энергетическом рассеянии $\sim \hbar\omega$ ^{62, 31, 63, 56, 57}. Это, естественно, приводит к увеличению частоты столкновений, делая длину свободного пробега электрона практически не зависящей от температуры при достаточно больших частотах ω .

Обратимся теперь к некоторым особенностям коллективных колебаний, возможных в том случае, когда электронная жидкость находится в постоянном магнитном поле (H_0). Электромагнитные колебания (продольные—плазменные и поперечные) изменяются при этом аналогично тому, как это имеет место и в обычной плазме. Также изменяются и колебания, соответствующие нулевому звуку. В области длинных волн, когда выполнено условие $k v_0 \ll \Omega = \frac{e v_0 H_0}{c p_0}$, для спектра таких колебаний имеем простое выражение

$$\omega_{n,l} = l\Omega \left(1 + \frac{A_n}{2n+1} \right) + O \left(\left(\frac{k v_0}{\Omega} \right)^2 \right), \quad (1 < |l| \leq n). \quad (5,24)$$

В случае газа свободных электронов (5,24) соответствует спектру эквидистантных уровней электрона в магнитном поле. Как видим, учет корреляции частиц делает такие уровни уже неэквидистантными. Следует, однако, отметить, что возбуждения (5,24) соответствуют лишь части возможных состояний электронов в магнитном поле. В частности, эти возбуждения по своей природе подобны плазменным волнам, а поэтому подчиняются статистике Бозе.

Кроме таких эффектов, связанных с орбитальным движением электронов, в системе электронов возможны также возбуждения, связанные со спиновым моментом. Для изучения таких возбуждений удобно использовать функцию $\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{ss'} (\hat{\sigma})_{ss'} f_{s's}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Тогда из (5,7) имеем, в частности, следующее уравнение, описывающее колебания компонент σ , перпендикулярных постоянному магнитному полю ($\sigma^{(\pm)} = \sigma_x \pm i\sigma_y$):

$$\frac{\partial \delta \sigma^{(\pm)}}{\partial t} + \left\{ \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} + \frac{e}{c} \left([\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \pm i \frac{2\gamma(p)}{\hbar} \mathbf{H}_0 \right\} \left(\delta \sigma^{(\pm)} - \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \delta \epsilon_2^{(\pm)} \right) = 0. \quad (5,25)$$

Здесь

$$\delta \epsilon_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\beta \mathbf{H} + \frac{1}{12} \text{Sp} \int (\hat{\sigma} \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \hat{\sigma}') \delta \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}', \quad (5,26)$$

H — переменное магнитное поле, а функция $\gamma(p)$ определяет парамагнетизм электронной жидкости и равна ^{51, 59}

$$\gamma(p_0) = \beta \left\{ 1 + \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p_0^2}{v_0} \int \text{Sp}_s \text{Sp}_{s'} \frac{1}{12} \Phi(p_0, p'_0) \hat{\sigma} \hat{\sigma}' d\theta' \right\}^{-1}. \quad (5,27)$$

В области длинных волн (5,25) дает

$$\omega_{l,n} = (\pm \Omega_0 + l\Omega) \left(1 + \frac{B_n}{2n+1} \right) + O(k^2), \quad (5,28)$$

где $\Omega_0 = 2\gamma(p_0) H_0/\hbar$, а B_n — коэффициенты разложения по полиномам

Александр

$$\frac{8\pi p_0^2}{(2\pi\hbar)^3 v_0} \frac{1}{12} \text{Sp}_s \text{Sp}_{s'} \hat{\sigma} \hat{\sigma}' \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_n B_n P_n(\cos \chi). \quad (5,29)$$

Если $l=0$, то (5,28) дает $\omega_{0,0} = \pm 2\beta H_0/\hbar$, что соответствует обычной блоховской частоте. В области коротких волн спектр спиновых волн, вообще говоря, весьма сложен. В частном случае, когда можно считать, что лишь B_0 отлично от нуля, а волновой вектор k параллелен направлению постоянного магнитного поля H_0 , дисперсионное уравнение можно записать в виде

$$-\frac{1}{B_0} = 1 - \frac{s}{2} \ln \left| \frac{s \pm s_0 + 1}{s \mp s_0 - 1} \right|, \quad (5,30)$$

где $s = \omega/kv_0$, $s_0 = \Omega/kv_0$. Для больших длин волн (5,30) дает

$$\omega = kv_0 s = \pm \Omega_0 (1 + B_0) \{1 + k^2 v_0^2 / 3B_0 \Omega_0^2\}. \quad (5,31)$$

Если B_0 положительно, то с увеличением абсолютной величины волнового вектора частота возрастает. При этом в области выполнения неравенства $kv_0 \gg \Omega_0$ дисперсионное уравнение (5,30) принимает вид $(1/B_0) = \eta(s)$ и имеет решения лишь при положительных B_0 ³¹. Ясно поэтому, что в такой области длин волн невозможны спиновые колебания, если $B_0 < 0$. Для больших длин волн согласно (5, 31) в этом случае частота убывает с ростом волнового вектора. Указанные здесь спиновые волны обусловлены парамагнетизмом электронов. При этом дисперсия—зависимость частоты волн от волнового вектора—определяется функцией (5,29), возникающей, в частности, от обменной корреляции электронов. Обменное взаимодействие чрезвычайно существенно в случае ферромагнитных металлов, где оно определяет спектр спиновых волн в электронной жидкости⁶⁴, имеющий вид $\omega \sim k^2$.

§ 6. ПОТЕРИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО, СВЯЗАННЫЕ С ВОЗБУЖДЕНИЕМ КОЛЛЕКТИВНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СРЕДЕ

Как мы видели в предыдущих параграфах, в среде, рассматриваемой как система многих частиц, возможны как поперечные, так и продольные колебания электромагнитного поля. Эти колебания существенно зависят от свойств среды, что, в частности, видно из возможности распространения продольных волн, вообще говоря, не существующих в вакууме. Такие колебания могут возбуждаться заряженной частицей и соответственно могут обуславливать определенную долю потерь заряженной частицы, проходящей через вещество. Надо заметить, что такие коллективные колебания (электромагнитного поля) смогут распространяться в среде лишь в случае малого поглощения. В поглощающих же средах они распространяться не будут, довольно быстро поглощаясь средой, что по существу соответствует передаче энергии от заряженной частицы среде посредством коллективных колебаний.

Примером возбуждения коллективных колебаний электромагнитного поля в среде является черенковское излучение заряженной частицы^{65,66 *}). В изотропной среде при этом возбуждаются колебания поперечного электромагнитного поля. Вопрос о возбуждении как поперечных, так и продольных колебаний электромагнитного поля в среде и соответствующих такому возбуждению потерь заряженной частицы, проходящей через

*) См. также обзор⁶⁷.

вещество, по существу довольно общим образом был рассмотрен Ферми⁶⁸ (см. также ⁶⁹⁻⁷⁵). В таком рассмотрении в качестве характеристики электромагнитных свойств среды использовалась диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$, являющаяся функцией частоты переменного поля. При этом для величины потери энергии быстрой частицы на единицу длины пути в теории Тамма—Франка—Ферми имеет место следующее выражение:

$$W(q_0) = \frac{ie^2 Z^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega \int_0^{q_0} q dq \frac{1}{q^2 v^2 + \omega^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \frac{v^2}{c^2} \frac{q^2}{q^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2} \right)} \right\}. \quad (6,1)$$

Здесь eZ —заряд частицы, v —скорость, $\hbar q_0$ —максимальный импульс, передаваемый заряженной частицей при ионизации. Мы не будем вдаваться в сколько-нибудь детальный анализ формулы (6,1), тем более, что он дан в указанных выше работах. Заметим только, что первое слагаемое в подынтегральном выражении (6,1) соответствует продольным потерям, а второе—поперечным, т. е. обусловлены возбуждением колебаний продольного и соответственно поперечного поля. Целесообразно обратиться к случаю прозрачных сред, когда $\varepsilon(\omega)$ является действительной величиной. В этом случае формула потерь энергии может быть записана в виде ^{67, 70, 75}

$$W(q_0) = \frac{e^2 Z^2}{v^2} \sum_s \frac{\omega_s}{|d\varepsilon(\omega_s)/d\omega_s|} \ln \frac{vq_0}{\omega_s} + \frac{e^2 Z^2}{c^2} \int_{\varepsilon(\omega)v^2/c^2 > 1} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right) \omega d\omega, \quad (6,2)$$

где ω_s суть частоты продольных колебаний электромагнитного поля в среде, определяющихся условием

$$\varepsilon(\omega_s) = 0, \quad (6,3)$$

и принято, что $vq_0 \gg \omega_s$.

Таким образом, кроме черенковских потерь, выражение для которых дается интегралом в формуле (6,2), имеют место потери, связанные с возбуждением продольных или, как их часто называют также, поляризационных или боровских волн *).

Частным, но, по-видимому, одним из весьма интересных случаев колебаний продольного поля являются так называемые плазменные колебания электронного газа с частотой, равной

$$\omega_L = \sqrt{4\pi e^2 n/m}, \quad (6,4)$$

где m —масса электрона, n —число электронов в единице объема. Диэлектрическая проницаемость электронного газа при пренебрежении диссипацией и хаотическим движением обычно записывается в виде ⁷⁶

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_L^2/\omega^2, \quad (6,5)$$

что, естественно, согласно (6,3) и дает формулу (6,4). Вопрос о возбуждении плазменных колебаний движущимся зарядом часто рассматривается с помощью той или иной модели (см., например, ^{8, 12, 77}). Это позволяет весьма конкретизировать получающиеся формулы. Однако такая конкретизация зачастую не позволяет увидеть общие физические закономерности, в связи с чем мы постараемся по возможности оттянуть тот момент, когда нам придется пользоваться модельными представлениями и, в частности, использовать содержание предыдущих параграфов.

*) Возможность выхода из вещества излучения, связанного с возбуждением в среде продольных плазменных волн, указана в работе ⁷⁸.

В последние годы вопрос о поляризационных потерях заряженных частиц широко обсуждается в литературе и, можно сказать, что произошло его второе рождение в связи с вопросом о дискретных потерях электронов, проходящих через тонкие пленки⁷⁹. Есть все основания полагать, что такие дискретные потери связаны с возбуждением продольных колебаний, определяющихся соотношением (6,3). При этом на квантовомеханическом языке можно говорить об испускании кванта электромагнитного поля с продольной поляризацией и частотой ω_s , который часто называют плазмоном⁸⁰. Такая интерпретация дискретных потерь была развита в работах^{81, 23}. Соответствующая теория потерь развивалась в работах многих авторов^{81, 82, 32, 83, 75, 84, 38, 5, 86, 80, 87, 88}.

Одной из особенностей развитой в последнее время теории потерь заряженных частиц является учет пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости *). Иными словами, при распространении в среде волны, зависящей от времени и координат как $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, диэлектрическая проницаемость оказывается функцией не только частоты ω , но и волнового вектора \mathbf{k} . В случае изотропной среды, в отличие от обычного рассмотрения, диэлектрическая проницаемость уже не является скаляром, а имеет, вообще говоря, вид³²

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon^{tr}(\omega, k) \{ \delta_{ij} - k_i k_j / k^2 \} + (k_i k_j / k^2) \epsilon^l(\omega, k). \quad (6,6)$$

Таким образом, распространение продольных и поперечных волн в среде определяется, вообще говоря, различными диэлектрическими проницаемостями.

Формула для полных потерь быстрой заряженной частицы на единицу длины при прохождении через среду с пространственной дисперсией имеет вид

$$W(q_0) = \frac{ie^2 Z^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega \int_0^{q_0} \frac{q}{q^2 v^2 + \omega^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon^l(\omega, \sqrt{q^2 + \omega^2/v^2})} - \frac{v^2}{c^2} \frac{q^2}{q^2 + \omega^2} \left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \epsilon^{tr}(\omega, \sqrt{q^2 + \omega^2/v^2}) \right] \right\} dq. \quad (6,7)$$

При изучении дискретных потерь рассматриваются хотя и быстрые, но нерелятивистские частицы, для которых существенны лишь продольные потери, характеризующиеся первым слагаемым правой части формулы (6,7). Поэтому обратимся теперь к более детальному рассмотрению продольных потерь.

Из формулы (6,7) без труда можно получить выражение для вероятности рассеяния частицы на единице пути в угол θ , $\theta + d\theta$ с испусканием продольного кванта (плазмона) в интервале частот ω , $\omega + d\omega$

$$\frac{dW^l(\theta, \omega)}{\hbar \omega d\theta d\omega} = \frac{2e^2 Z^2}{\hbar v^2} \frac{0}{\theta^2 + \left(\frac{\hbar \omega}{vp}\right)^2} \text{Im} \frac{1}{\epsilon^l\left(\omega, \sqrt{\frac{p^2 \theta^2}{\hbar^2} + \frac{\omega^2}{v^2}}\right)}. \quad (6,8)$$

Здесь учтено, что при излучении продольного фотона импульс быстрой частицы мало меняется ($p \gg \hbar k$), а частица рассеивается на малый угол $\theta \ll 1$.

В том случае, когда можно пренебречь пространственной дисперсией, вероятность рассеяния легко может быть связана с оптическими постоянными среды — показателем преломления n и коэффициентом поглощения κ ,

*) Оптические явления в среде с пространственной дисперсией рассмотрены в работах^{89, 90, 91}. Хорошо изученным явлением, в котором проявляется пространственная дисперсия, является аномальный скин-эффект⁹².

согласно соотношению ⁷⁵

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2n\kappa}{(n^2 + \kappa^2)^2}. \quad (6,9)$$

Благодаря тому, что в любой среде имеется хотя бы малое поглощение, уравнение (6,3), строго говоря, не может быть удовлетворено, ибо одно-временное обращение в нуль действительной и мнимой частей может быть обусловлено лишь чистой случайностью. Поэтому для того, чтобы можно было говорить о дискретных потерях, необходимо, чтобы в определенной области частот (6,9) имело резкий максимум. Определение оптических свойств металлов в некоторых случаях позволяет определить величину (6, 9), а для щелочных металлов и серебра она в действительности обладает довольно резким максимумом (см. ^{75,93,94}). Ясно, что определение n и κ для металлов в широком интервале частот было бы весьма полезно для дальнейшего уяснения природы дискретных потерь.

Здесь уместно остановиться на следующем вопросе интерпретации спектров характеристических потерь быстрых электронов. Часто обсуждается вопрос о том, нельзя ли по крайней мере часть дискретных потерь связать с переходами отдельных электронов между различными зонами. В связи с этим прежде всего заметим, что использование формулы (6,1) для описания потерь законно для прицельных параметров ($1/q_0$), много больших межатомных расстояний, т. е. для твердых тел в том случае, когда $q_0 \ll 10^8 \text{ см}^{-1}$. Поэтому при рассеянии на угол, меньший $\langle v \rangle / v$ (где $\langle v \rangle = 10^8 \text{ см/сек}$), распределение быстрых электронов определяется только диэлектрической проницаемостью среды. В этом смысле всегда при рассеянии на малые углы дискретные потери обусловлены коллективным эффектом. Далее наличие зонной структуры спектра электронов твердого тела, естественно, отражается на виде $\varepsilon(\omega)$ как функции частоты, поэтому, в частности, и вблизи некоторых частот, для которых $\hbar\omega$ близко к расстоянию между зонами, в принципе возможно резкое возрастание величины (6,9). Последнее, естественно, будет приводить также к линии характеристических потерь.

Этот случай, однако, весьма сложен. Существенно проще анализировать спектр дискретных потерь в том случае, когда ширина запрещенной зоны велика в сравнении с плазменной частотой электронов проводимости. При этом диэлектрическая проницаемость может быть представлена в виде:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \omega_L^2 / \omega^2, \quad (6,10)$$

где ε_0 — не зависящий от частоты вклад в диэлектрическую проницаемость от электронов заполненных зон. При этом величина n может быть определена из измерения оптических постоянных металла в области таких частот, когда $\omega^2 \ll \omega_L^2$. Соответствующие эксперименты ⁹⁴ для Na дают для числа электронов проводимости величину, с большой точностью совпадающую с числом атомов в единице объема, эксперименты по дискретным потерям дают ту же величину и тем самым подтверждают правильность оптических экспериментов. С другой стороны, такое совпадение полностью выявляет механизм дискретных потерь, которые в данном случае целиком обусловлены электронами проводимости.

Напротив, измерение числа электронов проводимости для ряда других элементов ^{95,96,61} (например, Cu, Ag, Au, Al) дает для них энергию плазменных колебаний, много меньшую наблюдаемой величины характеристических потерь. В связи с этим заметим, что формула (6, 10) может явиться пригодной и в том случае, когда спектр электронных уровней разделен полосой, ширина которой велика в сравнении с частотой плазмона (случай валентных электронов), а характерные энергии связи электронов,

лежащих выше такой полосы, малы в сравнении с плазменной частотой ^{97*}). Однако в этом случае определение дискретных потерь по существу лишь и может определить n .

Для того чтобы понять область применимости соотношения (6,9), заметим, что если диссипация невелика, а естественно, только в этом случае потери будут в какой-то мере дискретными, характерным параметром, определяющим роль пространственной дисперсии, может быть лишь величина

$$\Pi = \sqrt{\langle v^2 \rangle} (k/\omega), \quad (6,11)$$

где $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ — характерная скорость частиц среды. (Для электронов проводимости металла $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ по порядку величины равна скорости на поверхности Ферми.) При этом пространственная дисперсия становится определяющей, лишь когда параметр (6,11) не мал в сравнении с единицей. Применительно к формуле (6,8) это означает, что не малой величиной должно быть

$$\Pi^2 = \frac{\langle v^2 \rangle p^2}{\hbar^2 \omega^2} \theta^2 + \frac{\langle v^2 \rangle}{v^2}. \quad (6,12)$$

Поэтому ясно, что роль пространственной дисперсии станет важной лишь для рассеяния на углы, не малые в сравнении с

$$\theta_1 = \hbar \omega / (p \sqrt{\langle v^2 \rangle}). \quad (6,13)$$

Здесь уже учтено, что скорость быстрой частицы велика по сравнению с характерной скоростью частиц среды ($v^2 \gg \langle v^2 \rangle$). Угловое распределение рассеянных электронов согласно (6,8) обладает резким максимумом в области углов, значительно меньших θ_1 и равных по порядку величины:

$$\theta_0 = \hbar \omega / p v. \quad (6,14)$$

В этой области углов и вблизи линии потерь Π является малой величиной.

Перейдем теперь к рассмотрению эффектов, для которых пространственная дисперсия существенна. В области, где параметр Π мал в сравнении с единицей, ϵ^l можно представить в виде ⁸⁹)

$$\epsilon^l(\omega, k) = \epsilon(\omega) - \delta \Pi^2. \quad (6,15)$$

Для газа свободных электронов δ положительна.

Расчет, основанный на теории ферми-жидкости, дает для $\epsilon^l(\omega, k)$ при малых k следующее выражение ⁵⁸ (ср. (5,12)):

$$\epsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2} - \frac{v_0 p_0}{m \omega^2} \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3} \left[A_0 + \frac{4}{25} A_2 \right] \right) k^2. \quad (6,16)$$

Величина $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$ в (6,15) является обычной диэлектрической проницаемостью. Считая δ действительной, можем записать следующее выражение для дифференциальной вероятности рассеяния:

$$\frac{dW^l(\theta, \omega)}{\hbar \omega d\theta d\omega} = \frac{2e^2 Z^2}{\hbar v^2} \frac{\theta}{\theta^2 + \theta_0^2} \frac{\epsilon''(\omega)}{[\epsilon'(\omega) - \delta(\theta^2 + \theta_0^2)/\theta_1^2] + [\epsilon''(\omega)]^2}. \quad (6,17)$$

*) Цитируется в ⁸⁰.

**) В приближении Хартри для вырожденного электронного газа в этой области имеем

$$\epsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2} - \frac{3}{5} \frac{v_0^2 k^2}{\omega^2}; \quad \langle v^2 \rangle = \frac{3}{5} v_0^2; \quad \delta = +1.$$

Эксперименты по исследованию зависимости потерь энергии электрона от угла рассеяния в области углов, не слишком малых в сравнении с θ_1 , позволяют определить δ (см. ^{98, 80}). В общем случае полная интерпретация таких экспериментальных результатов нетривиальна. По существу, лишь в модели свободных электронов мы можем предвычислить δ , а уже в такой, сравнительно простой модели, какой является модель ферми-жидкости, δ определяется параметрами, могущими меняться от металла к металлу и зависящими от обменной и силовой корреляции электронов. Поэтому фактически эксперименты по определению углового распределения рассеянных электронов дают новые, как мы видели на примере ферми-жидкости, несводимые к каким-либо известным характеристики металлов.

Обратимся теперь непосредственно к анализу некоторых особенностей потерь заряженных частиц, специфических для модели вырожденной электронной ферми-жидкости. Из формулы (5,17) следует выражение для $\epsilon^l(\omega, k)$, которое мы запишем в виде

$$\epsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{3\omega_L^2}{k^2 v_0^2} \frac{\eta(s)}{(1 + A_1/3)[1 - A_0\eta(s)] - A_1 s^2 \eta(s)}. \quad (6,18)$$

Учет диссипации в электронной жидкости, связанный, например, со столкновениями электронов с решеткой или примесями, можно провести, введя время свободного пробега τ . Это приводит к тому, что в формуле (6,18) $s = (\omega + i\tau)kv_0$. Формула (6,18) предполагает, что $\hbar k$ мало в сравнении с граничным импульсом Ферми. Существенной особенностью выписанного выражения ϵ^l , отличающей его от полученного в приближении Хартри ^{32, 21}, является сингулярность, возникающая при условии

$$(1 + A_1/3)[1 - A_0\eta(s)] - A_1 s^2 \eta(s) = 0 \quad (6,19)$$

и связанная с возбуждением нулевого звука ³¹.

Для выяснения качественной картины, связанной с возможностью возбуждения нулевого звука, рассмотрим случай, когда $A_1 = 0$, а A_0 велико в сравнении с единицей. Тогда решение уравнения (6,19) принимает вид

$$s = \sqrt{\frac{A_0}{3}} \gg 1. \quad (6,20)$$

При этом ϵ^l может быть представлена в виде

$$\epsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - (A_0/3)k^2 v_0^2}. \quad (6,21)$$

Соответственно для дифференциальной вероятности рассеяния такая диэлектрическая проницаемость даст зависимость от θ и ω в виде

$$\frac{\theta}{\theta^2 + \theta_0^2} \frac{\omega_L^2 \delta \left(\omega - \sqrt{\omega_L^2 + (A_0/3)(v_0^2 p^2 / \hbar^2)} (\theta^2 + \theta_0^2) \right)}{\sqrt{\omega_L^2 + (A_0/3)(v_0^2 p^2 / \hbar^2)} (\theta^2 + \theta_0^2)}. \quad (6,22)$$

Эта формула совпадает с тем, что можно получить из (6,16) и (6,17), но отличается тем, что она годна и в случае, когда последнее слагаемое, стоящее под корнем в (6,22), не мало в сравнении с ω_L^2 .

Поэтому в области углов, больших $\theta_2 = \sqrt{\frac{3}{A_0} \left(\frac{\hbar \omega_L}{v_0 p} \right)}$, теряемая энергия может оказаться пропорциональной углу рассеяния и равной $\hbar \omega = \sqrt{A_0/3} v_0 p \theta$, что соответствует возбуждению кванта нулевого звука (6,20). При этом в силу того, что s больше единицы, ϵ^l действительна. Поэтому максимальный угол рассеяния определяется малостью $p\theta$ в срав-

нении с граничным импульсом распределения Ферми p_0 , когда наше выражение для ϵ^l становится незаконным. Заметим, что для идеального электронного газа ϵ^l становится комплексным для $\theta > (\hbar\omega_0/v_0 p)$, а следовательно, при таких углах линия потерь в газе станет диффузной.

Кроме изменения величины теряемой энергии, меняется также и угловое распределение. Именно, если в области углов, меньших θ_2 , угловое распределение имеет тот же вид, что и в случае электронного газа, и пропорционально $[\theta/(\theta^2 + \theta_0^2)]$, то при $\theta > \theta_2$ угловое распределение пропорционально $[1/(\theta^2 + \theta_0^2)]$.

Выражение для спектра нулевого звука имеет простой вид также в случае, когда $A_0 \ll 1$ и положительно. Тогда

$$s = 1 - e^{-(2/A_0)}. \quad (6,23)$$

Поэтому возбуждение нулевого звука проявится в этом случае лишь в узкой области вблизи угла $\theta = (\hbar\omega/pv_0)$.

Обратимся теперь к рассмотрению частот, с одной стороны, много меньших ω_L , а с другой стороны, много больших частоты столкновений $1/\tau$. Тогда при $k < \omega/v_0$ или соответственно при малых углах, когда $\theta^2 + \theta_0^2 < \theta_1^2 = (\hbar\omega/pv_0)^2$, ϵ^l действительно и не обращается в нуль. Поэтому в этой области нет потерь. При больших углах ($\theta > \theta_1$) продольная диэлектрическая проницаемость становится комплексной. Поэтому для такой области углов должны иметь место потери. Однако надеяться на получение какой-либо четкой линии потерь в этом случае нельзя.

Обратим внимание на одну причину, могущую приводить к зависимости величины дискретных потерь от угла рассеяния и связанную с оптической анизотропией. Например, в случае одноосного кристалла при движении быстрого электрона вдоль оси симметрии выражение для дифференциальной вероятности рассеяния имеет вид

$$\frac{dW^l(\theta, \omega)}{\hbar\omega d\theta d\omega} = \frac{2e^2 Z^2}{\hbar v^2} \operatorname{Im} \frac{\theta}{\epsilon_{\perp}(\omega) \theta^2 + \epsilon_{\parallel}(\omega) \theta_0^2}.$$

Ясно, что в том случае, когда поглощение мало, т. е. мала мнимая часть ϵ , линия дискретных потерь будет определяться нулями выражения

$$\epsilon_{\perp}(\omega) \theta^2 + \epsilon_{\parallel}(\omega) \theta_0^2.$$

В силу того, что одновременное обращение в нуль ϵ_{\perp} и ϵ_{\parallel} может быть лишь чисто случайным, то нули выписанного выражения будут существенно зависеть от угла рассеяния θ . В частности, для $\theta \ll \theta_0$ положение линии определяется точкой обращения в нуль $\epsilon_{\parallel}(\omega)$, а для углов $\theta \gg \theta_0$ точкой обращения в нуль $\epsilon_{\perp}(\omega)$. В силу того, что основной вклад в полные потери на возбуждение плазмонов вносят углы $\leq \theta_1$, то при измерении полных потерь возникает уширение линии^{58, 59, 85}

§ 7. О НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТАХ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ ПЛАЗМУ

Во втором параграфе настоящей статьи рассмотрены кинетические уравнения, описывающие релаксационные процессы в плазме.

Еще в 1928 г. Ленгмюром было обнаружено, что пучки электронов, проходящих через плазму, передают свою энергию электронам плазмы на значительно меньших расстояниях, чем длины релаксации, найденные на основе формул § 2 и 6. Оба метода анализа потерь энергии, рассмотренных в этих параграфах, основаны по существу на предположении, что влетающие в плазму частицы не изменяют ее свойств. Так, для электронов

при выводе уравнения Фоккера—Планка, приведенного в § 2, предполагается, что состояние электронов плазмы, окружающих выделенную частицу, и состояние плазменных колебаний являются равновесными.

В методе, изложенном в § 6, это проявляется в том, что при прохождении частиц через плазму ее состояние характеризуется той же комплексной диэлектрической проницаемостью, что и при отсутствии частиц. Это и означает, что влетающие в плазму заряженные частицы не изменяют свойств плазмы.

Наличие эффекта Ленгмюра указывает на то, что такое рассмотрение не является достаточным, т. е. предположения, на которых основаны результаты § 2, 6, в этом случае не выполняются.

При решении более общей задачи, когда ни одна из подсистем (электроны пучка и колебания плазмы) не находится в состоянии статистического равновесия, надо совместно решать систему нелинейных уравнений для электронов пучка и плазмы.

В опытах, в которых обнаруживается явление Ленгмюра, длины релаксации, вычисленные на основе формул § 2, 6, в 10^3 — 10^6 раз превышают расстояния, на которых электроны пучка передают свою энергию электронам плазмы. Из этого следует, что в неоднородном случае, который имеет место при возникновении в плазме упорядоченных колебаний за счет энергии электронов пучка, при аппроксимации второй функции распределения можно не учитывать членов, приводящих в кинетическом уравнении к релаксационным членам. При этих условиях вторую функцию распределения можно представить в виде произведения первых функций распределения. В результате приходим к кинетическому уравнению с самосогласованным полем.

В настоящем параграфе будет рассмотрено решение указанной задачи лишь для классической системы пучка и плазмы. Обобщение приведенных ниже результатов на квантовый случай может быть проведено путем, аналогичным приведенному ниже, но с использованием уравнения для квантовой функции распределения.

Итак, пусть пучок электронов входит в плазму в направлении оси x в точке $x = 0$. Рассмотрим одномерный случай. Тогда систему самосогласованных уравнений для функции распределения электронов пучка и плазмы и электрического потенциала можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (7,1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} = 4\pi e \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t) dv - n_+ \right\}. \quad (7,2)$$

Предполагаем, что заряд электронов скомпенсирован положительно заряженным фоном ионов.

Для решения задачи о торможении пучка электронов за счет возбуждения ими плазменных волн надо найти волновое решение уравнений (7,1), (7,2), удовлетворяющее заданным граничным условиям при $x = 0$. При этом, если считать Φ известной функцией, то, решая уравнение (7,1) относительно f и исключая f из уравнения (7,2), можно получить одно нелинейное уравнение для электрического потенциала.

Из решения линеаризованной системы уравнений (7,1), (7,2) следует^{12,27,99,100}, что в плазме возникают нарастающие вдоль оси x продольные волны, фазовые скорости которых меньше средней скорости электронов пучка \bar{v} . Скорость нарастания возникающих плазменных волн зависит от скорости электронов пучка и их концентрации. При достаточно малой

концентрации электронов пучка нарастание плазменных волн может быть сколь угодно малым.

Таким образом, если концентрация электронов пучка мала по сравнению с концентрацией электронов плазмы, то решение нелинейного уравнения для потенциала можно искать в виде медленно нарастающей волны

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x) \sin(\omega t - kx + \Psi(x)), \quad (7,3)$$

где $\varphi_0(x)$ и $\Psi(x)$ — медленно меняющиеся амплитуда и фаза.

Рассмотрим сначала случай, когда волна установилась, т. е. ее амплитуда и фаза не зависят от x . В таком состоянии потенциал является функцией только $x - v_\phi t$. Решение уравнения (7,1) относительно φ в этом случае имеет следующий вид:

$$f(x, v, t) = \Phi \left(\pm \sqrt{(v - v_\phi)^2 - \frac{2e}{m} \varphi(x - v_\phi t) + v_\phi} \right) \begin{cases} + & \text{при } v > v_\phi, \\ - & \text{при } v < v_\phi, \end{cases} \quad (7,4)$$

где Φ — произвольная функция. Если исключить функцию f из уравнения (7,2) с помощью выражения (7,4), то получим уравнение для φ

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e \left\{ \int \frac{\Phi(v)}{\sqrt{1 + \frac{2e\varphi(x - v_\phi t)}{m(v - v_\phi)^2}}} dv - n_+ \right\}. \quad (7,5)$$

Если в качестве функции Φ взять функцию распределения Максвелла, то уравнение (7,5) совпадает с уравнением, приведенным в работе Бома и Гросса²⁷.

Решение уравнения (7,5) в случае, когда температура электронов плазмы и пучка равна нулю, приведено в работе Ахиезера и Любарского¹⁰¹. В другой работе Ахиезера, Любарского и Фейнберга¹⁰² проведено решение этого уравнения для более общего случая, когда температура электронов плазмы не равна нулю. Выражение для функции Φ в этом случае можно представить в виде

$$\Phi = \Phi_0 \left(\frac{mv^2}{2} \right) + n_1 \delta(v - \bar{v}). \quad (7,6)$$

В этом выражении n_1 — концентрация электронов пучка, \bar{v} — их скорость, Φ_0 — произвольная функция энергии.

Эти решения не могут быть непосредственно использованы для рассматриваемой задачи о торможении электронного пучка, так как при малых тепловых потерях передача энергии от пучка волне происходит именно в области нарастания волны. Следовательно, для решения этой задачи нужно рассматривать процесс установления волны. Кроме того, остается открытым вопрос о том, будет ли вообще нарастающее волновое решение стремиться именно к решению, удовлетворяющему уравнению (7,5).

Однако уже из такого частного решения можно сделать вывод о том, что условия применимости линейного приближения для электронов плазмы и электронов пучка неодинаковы. Действительно, если, например, в качестве функции Φ в правой части уравнения (7,5) взять выражение (7,6) или более общее выражение, учитывающее разброс скоростей электронов пучка, то легко видеть, что при $v_\phi \gg \sqrt{\frac{kT}{m}}$ линейное приближение для электронов плазмы справедливо при условии $e\varphi \ll mv_\phi^2/2$, а для электронов пучка при условии $e\varphi \ll m(\bar{v} - v_\phi)^2/2$. Если $m(\bar{v} - v_\phi)^2 \ll mv_\phi^2$, то нелинейные эффекты для электронов пучка

будут сказываться при значительно меньших потенциалах, чем для электронов плазмы. Использование нелинейного приближения лишь для электронов пучка может быть оправдано, конечно, только в том случае, если полученное в результате такого решения установившееся значение амплитуды таково, что

$$e\varphi_{\text{уст}} \ll m v_{\Phi}^2 / 2.$$

Таким образом, при малой концентрации электронов пучка (но все же, конечно, настолько большой, чтобы за счет энергии пучка могли поддерживаться плазменные колебания) вместо системы уравнений (7,1), (7,2) можно рассматривать систему уравнений для функции распределения только электронов пучка f_1 , а уравнение для φ будет волновым уравнением для плазменной волны. Значение фазовой скорости и декремента затухания плазменной волны можно взять из линейной теории плазменных колебаний.

В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial v} = 0, \quad (7,7)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\gamma}{v_{\Phi}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{v_{\Phi}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 4\pi e \left\{ \int f_1 dv - n_{+1} \right\}, \quad (7,8)$$

$$\varphi = \varphi_0(x) \sin(\omega_k t - kx + \Psi(x)). \quad (7,9)$$

В этих уравнениях $\omega_k^2 = \omega_L^2 + \frac{3\kappa T}{m} k^2$, γ — декремент затухания, который включает как декремент затухания плазменных колебаний, найденный Ландау, так и возможное затухание вследствие столкновений. Функции $\varphi_0(x)$ и $\Psi(x)$, как и прежде, — медленно меняющиеся амплитуда и фаза.

Принимая для потенциала выражение (7,9), найдем решение уравнения (7,7) при заданном значении функции распределения электронов пучка при $x=0$. Обозначим известную функцию f_1 при $x=0$ через $f_1^{(0)}(v^{(0)})$; $\int f_1^{(0)} dv^{(0)} = n_{+1}$. Здесь и ниже верхний индекс «0» означает, что функция или переменная относятся к точке $x=0$.

Так как уравнение (7,7) при заданной функции φ является линейным дифференциальным уравнением первого порядка, то решение его определяется решением характеристического уравнения. Принимая во внимание медленность изменения амплитуды и фазы, это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} \approx -\frac{ek}{m} \varphi_0(x) \cos(\omega_k t - kx + \Psi(x)). \quad (7,10)$$

Если из уравнения (7,10) найдены функции $v^{(0)} = v^{(0)}(x, v, t)$, $t^{(0)} = t^{(0)}(x, v, t)$, то решение уравнения (7,7) можно записать в виде

$$f_1(x, v, t) = f_1^{(0)}(v^{(0)}(x, v, t)).$$

Используя это решение, можно найти выражения для тока и плотности

$$j = -e \int v f_1^{(0)}(v^{(0)}(x, v, t)) dv; \quad \rho = -e \int f_1^{(0)}(v^{(0)}(x, v, t)) dv.$$

Если подставить найденное таким образом выражение для ρ в правую часть уравнения (7,8), то получим нелинейное уравнение для потенциала. При малой интенсивности электронного пучка правая часть этого уравнения мала, поэтому можно применять известный метод теории нелинейных колебаний, чтобы найти более простые уравнения для амплитуды и фазы волны. Для этого надо найти фурье-компоненты

плотности ϱ , считая при интегрировании амплитуду и фазу пучка постоянными. Пусть $\varrho = \varrho^{(1)} \cos(\omega_k t - kx) + \varrho^{(2)} \sin(\omega_k t - kx)$, тогда

$$\varrho^{(i)} = -\frac{e}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\sin}^{\cos} [\omega_k t - kx] f_1^{(0)}(v^{(0)}(x, v, t)) dv d(kx), \quad i = 1, 2. \quad (7,11)$$

Выражение (7,11) можно упростить, если воспользоваться теоремой Лиувилля $dx dv = dx^{(0)} dv^{(0)}$; или так как $dx = v dt$; $dx^{(0)} = v^{(0)} dt^{(0)}$, то $dx dv = v^{(0)} dt^{(0)} dv^{(0)}$. Производя в выражении (7,11) замену переменных $t, v \rightarrow t^{(0)}, v^{(0)}$, получим следующее выражение для фурье-компонент плотности:

$$\varrho^{(i)} = -\frac{e}{\pi v_\phi} \int_0^{2\pi} \int_{\sin}^{\cos} [\omega_k t(t^{(0)}, v^{(0)}, x) - kx] f_1^{(0)}(v^{(0)}) v^{(0)} dv^{(0)} d(\omega_k t^{(0)}). \quad (7,12)$$

Выражения (7,12) позволяют найти $\varrho^{(i)}$, если известна функция $t = t(t^{(0)}, v^{(0)}, x)$. Для ее определения обратимся к уравнению движения (7,10). Если считать, что стоящая в правой части этого уравнения переменная t является известной функцией координат $v^{(0)}$ и $t^{(0)}$, то интеграл уравнения (7,10) можно представить в виде

$$v = v^{(0)} \left\{ 1 - 2 \frac{ek}{mv^{(0)2}} \int_0^x \varphi_0(x') \cos[\omega_k t^{(0)} + \omega_k(t - t^{(0)}) - kx' + \Psi(x')] dx' \right\}^{1/2},$$

а для функции $t = t(t^{(0)}, v^{(0)}, x)$ получаем интегральное уравнение

$$t - t^{(0)} = \frac{1}{v^{(0)}} \int_0^x \left\{ 1 - \frac{2ek}{mv^{(0)2}} \int_0^{x'} \varphi_0(x'') \times \right. \\ \left. \times \cos[\omega_k t^{(0)} + \omega_k(t - t^{(0)}) - kx'' + \Psi(x'')] dx'' \right\}^{-1/2} dx'. \quad (7,13)$$

Из-за сложности уравнения (7,13) решение задачи без применения численных методов может быть проведено приближенно лишь в некоторых частных случаях, имеющих главным образом методическое значение. Рассмотрим некоторые из них.

Обозначим через μ малый параметр. Рассмотрим случай, когда установившееся значение амплитуды колебаний таково, что $ef_0/mv^{(0)2} \sim \mu^2$, максимум возбуждения приходится на волны, для которых $(v^{(0)} - v_\phi)/v^{(0)} \sim \mu$. При этих условиях и при условии медленности изменения амплитуды и фазы $\varphi_0(x)$, $\Psi(x)$ уравнение (7,13) можно упростить, разложив корень квадратный в ряд и оставив лишь первый и второй члены разложения. В результате уравнение (7,13) принимает вид

$$t - t^{(0)} = \frac{x}{v^{(0)}} + \frac{ek}{mv^{(0)3}} \int_0^x (x - x') \varphi_0(x') \cos[\omega_k t^{(0)} + \omega_k(t - t^{(0)}) - kx' + \Psi(x')] dx'. \quad (7,14)$$

Уравнение (7,14) содержит два параметра длины. Один из них, $A = k(v^{(0)} - v_\phi)/v^{(0)}$, определяется величиной превышения скорости электронного потока над фазовой скоростью наиболее быстро нарастающей плазменной волны при $x = 0$, а второй, α , характеризует скорость изменения амплитуды и фазы волны. Рассмотрим сейчас случай, когда $\alpha A \sim \mu$.

Обозначим отношение энергий $ef_0/m(v^{(0)} - v_\phi)^2$ через X и найдем приближенное решение уравнения (7,14) в виде ряда по степеням X ,

предполагая $X \leq 1$. Оставляя члены до X^3 включительно, получим следующее выражение для $t - t^{(0)}$:

$$\omega(t - t^{(0)}) = \frac{\omega x}{v^{(0)}} - \left(X - \frac{5}{16} X^3 \right) \cos[\omega t^{(0)} - Ax + \Psi] - \frac{X^2}{8} \sin 2[\omega t^{(0)} - Ax + \Psi].$$

Подставим это выражение в подынтегральные выражения формул (7,11), проинтегрируем по $t^{(0)}$, выделим опять члены по X до X^3 и воспользуемся формулой

$$\int \frac{f_1(v - \bar{v})}{(v - v_\phi)^n} dv = \oint \frac{f_1(v - \bar{v})}{(v - v_\phi)^n} dv + i\pi \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\partial^n f_1}{\partial v^n} \right)_{v=v_\phi}, \quad (7,15)$$

в которой \oint означает, что интеграл берется в смысле главного значения. Принимая во внимание, что $q = q_1 \cos(\omega_k t - kx) + q_2 \sin(\omega_k t - kx)$, получим в результате следующее выражение для плотности пучка:

$$q = -\frac{e^2}{m} \oint \left(1 - \frac{3}{8} \left(\frac{e\varphi}{m(v - v_\phi)^2} \right)^2 \left(\frac{v_\phi}{v} \right)^2 \right) \frac{f_1(v - \bar{v})}{(v - v_\phi)^2} dv \varphi + \\ + \frac{\pi e^2}{mk} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial v} \right)_{v=v_\phi} - \frac{3}{8 \cdot 4!} \left(\frac{e\varphi_0}{m} \right)^2 \left(\frac{\partial^5 f_1}{\partial v^5} \right)_{v=v_\phi} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7,16)$$

Подставляя это выражение в правую часть уравнения (7,8), получим нелинейное уравнение для потенциала при условии, что решение этого уравнения ищется в форме (7,9).

Если отношение концентраций электронов пучка и плазмы таково, что параметр медленности изменения амплитуды и фазы волны одного порядка малости с параметром, характеризующим малость правой части уравнения для φ , то, приравнявая члены одного порядка малости, получим следующие уравнения для амплитуды и фазы волны:

$$\frac{d\varphi_0}{dx} = \alpha \varphi_0 - \beta \varphi_0^3, \quad (7,17)$$

$$\frac{d\Psi}{dx} = -\frac{2\pi e^2}{mk} \oint \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{e\varphi_0}{m(v - v_\phi)^2} \right) \left(\frac{v_\phi}{v} \right)^2 \right] \frac{f_1(v - \bar{v})}{(v - v_\phi)^2} dv. \quad (7,18)$$

В уравнении (7,17) введены обозначения

$$\alpha = \frac{2\pi^2 e^2}{mk} \left(\frac{\partial f_1}{\partial v} \right)_{v=v_\phi} - \frac{\gamma}{v_\phi}; \quad \beta = \frac{3}{8 \cdot 4!} \frac{2\pi e^2}{mk} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \left(\frac{\partial^5 f_1}{\partial v^5} \right)_{v=v_\phi}.$$

Для самовозбуждения колебаний необходимо, чтобы коэффициент α был положителен. Если величина коэффициента затухания γ определяется в основном декрементом затухания плазменных колебаний, т. е. роль столкновений мала, то условие самовозбуждения можно представить в виде $\left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial v} \right)_{v=v_\phi} > 0$, где $f^{(0)}$ — функция распределения всех электронов (плазмы и пучка) при $x = 0$. Это условие самовозбуждения соответствует полученному в работах 12, 27, 99, 100.

Конкретизируем теперь вид функции распределения $f_1^{(0)}$. С достаточной степенью точности ее, по-видимому, можно задать в виде

$$f_1^{(0)} = n_1 \left(\frac{m}{2\pi k T_1} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{m(v - \bar{v})^2}{2k T_1} \right].$$

В этом выражении n_1 , T_1 , \bar{v} — концентрация, температура и скорость электронов пучка. При таком выборе граничной функции распределения условие самовозбуждения выполняется для области фазовых скоростей $\Delta v_\phi \sim \sqrt{\frac{kT}{m}}$. Коэффициент α максимален для волны с фазовой ско-

ростью $\bar{v} - v_\phi = \sqrt{\frac{\kappa T_1}{m}}$. Так как $\bar{v}, v_\phi \gg \sqrt{\frac{\kappa T_1}{m}}$ и $v_\phi = \omega_k/k \approx \omega_L/k$, то находим значение волнового числа наиболее быстро нарастающей волны $k \approx \omega_L/\bar{v}$. Коэффициенты α и β для этой волны имеют вид

$$\alpha = k \left[\sqrt{\frac{\pi}{22} \frac{n_1}{n} \frac{\bar{v}^2 m}{\kappa T_1}} - \frac{\gamma}{\omega_L} \right]; \quad \beta = \frac{3}{32} \sqrt{\frac{\pi}{22} \frac{n_1}{n} \bar{v}^2} \frac{m e^2}{(\kappa T_1)^3}.$$

Из выражения для α следует, что при заданных значениях параметров \bar{v}, T_1, n всегда существует нижняя граница для значений концентрации электронов пучка, при которых возможно самовозбуждение колебаний. При меньших значениях концентрации переход к равновесному распределению скоростей при движении электронов через плазму происходит лишь вследствие релаксационных процессов, описанных в первой части настоящей статьи.

Решение уравнения (7,17) для амплитуды можно записать в виде

$$\varphi_0(x) = \frac{\varphi^{(0)} e^{\alpha x}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{\beta} \varphi^{(0)2} (e^{2\alpha x} - 1)}}. \quad (7,19)$$

В этом выражении $\varphi^{(0)}$ — значение амплитуды при $x = 0$. Обозначим через $\varphi_{\text{уст}}$ установившееся значение амплитуды. При малых x ($x \ll 1/\alpha$) решение уравнения (7,19) экспоненциально нарастает с ростом x . При больших x амплитуда стремится к значению

$$\varphi_{\text{уст}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (7,20)$$

Если величина γ настолько мала, что вторым членом в выражении для α можно пренебречь, то $e\varphi_{\text{уст}} \approx 3\kappa T_1$. Из полученных формул видно, что установившееся значение амплитуды волны стремится к нулю при $T_1 \rightarrow 0$, т. е. для случая однокоростного пучка. Из выражения для α следует, что в этом случае условие самовозбуждения волн не выполняется. Это, конечно, не означает, что при прохождении однокоростного пучка через плазму плазменные волны не возникают. Дело здесь в том, что решение, рассмотренное здесь, получено при условии $\alpha \ll A$, $X \sim 1$. При этом условия плазменные волны в гидродинамическом приближении действительно не возникают. Чтобы описать возникновение волн в этом случае, надо рассмотреть решение при условии, что $\alpha \sim A$.

Рассмотрим теперь уравнение (7,18) для изменения фазы волны. Это уравнение определяет изменение волнового числа плазменной волны с ростом x ($d\Psi/dx = -\Delta k$). Из уравнения (7,18) следует, что Δk определяется двумя членами, один из которых зависит от амплитуды. Оба они порядка $\mu^2 k$ и, таким образом, малы по сравнению с начальной разностью между скоростью электронов пучка и скоростью волны, которая имеет порядок μ .

Оценим теперь расстояние, на котором энергия электронов пучка переходит в энергию плазменных колебаний. Для этого найдем величину отношения потока электрической энергии плазменных волн в той области, где волна уже установилась, к величине энергии электронного потока при $x = 0$. Это отношение равно

$$\frac{s_{\text{волн}}}{s_{\text{эл}}} = \frac{n}{n_1} \left(\frac{e\varphi_0}{m\bar{v}^2} \right)^2. \quad (7,21)$$

Оценим порядок величины этого отношения. Так как $e\varphi_0/m\bar{v}_0^2 \sim \mu^2$ и $\alpha/k \sim \mu^2$, то из выражения для α следует, что отношение concentra-

ций электронов пучка и плазмы $n_1/n \sim \mu^4$. Из выражения (7,21) получаем, что при этих значениях параметров отношение потоков энергии порядка единицы. Таким образом, пучок передает свою энергию на возбуждение плазменных колебаний на расстоянии l , по порядку величины равном расстоянию, на котором происходит установление волны. Если обозначить через λ длину плазменной волны, то $\lambda \ll l \leq 1/\alpha$. При токах 20–50 ма, $\kappa T_1 \sim 1$ эв, $m\bar{v}^2/2 \sim 20$ эв, $n_1 \sim 10^8$, $n \sim 10^{10}$ расстояние l — порядка сантиметра. В то же время длина релаксации, вычисленная при тех же данных по формулам (1,2), равна примерно 10^5 см.

В работе Луни и Брауна¹⁰⁴ были обнаружены стоячие волны в плазме при прохождении через нее пучка электронов. Стоячие волны возникают при наличии отражающего электрода.

Чтобы найти условия возникновения стоячих волн при прохождении пучка электронов через плазму, решение для электрического поля можно искать, например, в виде

$$\varphi_s = \varphi_0(t) \sin(\omega t + \Psi(t)) \sin \frac{s\pi x}{L}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

где $\varphi_0(t)$, $\Psi(t)$ — медленно меняющиеся во времени амплитуда и фаза волны, а L — длина области вдоль движения пучка. Расчет показывает, что при $n_1/n \ll 1$ условия самовозбуждения наилучшим образом выполняются для частот и длин волн, определяемых формулами

$$\omega_L \approx \frac{s\pi\bar{v}}{L}; \quad \lambda_s \approx \frac{2L}{s}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Из этих формул следует, что переход от основной формы колебания к высшим может происходить или при увеличении концентрации электронов плазмы, или при уменьшении средней скорости электронов пучка.

В условиях опытов Луни и Брауна основной является концентрация электронов пучка, т. е. $n_1/n \gg 1$. Этот случай также может быть проанализирован. При этих условиях квадрат частоты колебаний при заданной средней скорости будет пропорционален концентрации электронов пучка или току.

В линейном приближении теория возбуждения стоячих волн в плазме при любом отношении n_1/n рассматривается в работах^{105, 106}.

Отметим, что иного рода пространственная периодичность наблюдалась в известной работе Меррилла и Вебба¹⁰³ (см. также новые работы^{107, 108, 109}). Здесь нет возможности останавливаться на этом вопросе. Отметим лишь, что величина пространственного периода в этом случае определяется длиной волны наиболее быстро нарастающей плазменной волны и равна

$$\lambda = 2\pi \frac{\bar{v}}{\omega_L} \left(1 - \sqrt{\frac{\kappa T_1}{m}} / \bar{v} \right).$$

Результаты опытов Меррилла и Вебба также указывают на наличие в плазме нарастающих волн. Значения λ , полученные с помощью приведенной выше формулы, хорошо согласуются со значениями пространственного периода, найденного в этой работе.

Известно, что плазменные волны могут также возникать за счет энергии относительного движения электронов и ионов. Этот эффект может дать заметный вклад в повышение температуры плазмы при прохождении через нее импульсов тока большой силы. При длительности импульсов $\sim 10^{-3}$ сек плазменные колебания будут успевать устанавливаться. Скорость затухания этих колебаний будет определять величину энергии, переходящей непосредственно в тепло.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. E. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
2. J. Moyal, Proc. Cambr. Phil. Soc. **45**, 95 (1949).
3. Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, Доклады Академии наук СССР **82**, 361 (1952), ЖЭТФ **23**, 151 (1952).
4. J. Bass, La revue scientifique, 3299, 643 (1948).
5. J. Irving, R. Zwanzig, Journal Chem. Phys. **19**, 1173 (1951).
6. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, 1946.
7. Н. Н. Боголюбов и К. П. Гуров, ЖЭТФ **17**, 614 (1947).
8. А. А. Власов, ЖЭТФ **8**, 291 (1938); Уч. зап. МГУ, вып. 75, кн. 2, ч. I, М., 1945.
9. С. В. Темко, ЖЭТФ **31**, вып. 6 (12), 1021 (1956); В. В. Толмачев, ДАН **113**, 301 (1957).
10. Л. Д. Ландау, Phys. Zeits. Sow. Union **10**, 154 (1936).
11. Ю. Л. Климонтович, Доклад на второй Всесоюзной конференции по газовой электронике, М., октябрь 1958; ЖЭТФ **36**, 1405 (1959).
12. А. И. Ахиезер, А. Г. Спиренко, ЖЭТФ **23**, 161 (1952); А. И. Ахиезер, Nuovo Cimento, Suppl. III, № 4, 581 (1956); Б. П. Давыдов, Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций, т. I, стр. 77, изд. АН СССР.
13. Ю. Л. Климонтович, С. В. Темко, ЖЭТФ **331**, в. I, 182 (1957).
14. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ **35**, № 5 (11), (1958).
15. Hartree, Proc. Cambr. Soc. **24**, 89 (1928).
16. F. Bloch, Zeits. f. Phys. **81**, 363 (1933).
17. F. Bloch, Helv. Phys. Acta **7**, 385 (1934).
18. П. С. Зырянов, ЖЭТФ **25**, 441 (1953).
19. Е. Л. Фейнберг, ЖЭТФ **34**, 1125 (1958).
20. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **16**, 574 (1946).
21. В. П. Силин, ЖЭТФ **23**, 641 (1952).
22. В. П. Силин, Труды Физического института им. П. Н. Лебедева **6**, 200 (1955).
23. D. Bohm, D. Pines, Phys. Rev. **92**, 609 (1953).
24. Д. Н. Зубарев, ЖЭТФ **25**, 548 (1953).
25. П. С. Зырянов, В. М. Елеонский, ЖЭТФ **30**, 592 (1956).
26. R. A. Ferrell, Phys. Rev. **107**, 450 (1957).
27. D. Bohm, E. P. Gross, Phys. Rev. **75**, 1851 (1949); **79**, 992 (1950).
28. Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР **11**, 77 (1947).
29. Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, ЖЭТФ **28**, 129 (1955); С. Т. Беляев, ЖЭТФ **34**, 417, 433 (1958).
30. И. И. Гольдман, ЖЭТФ **17**, 681 (1947).
31. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **32**, 59 (1957).
32. J. Lindhard, Det Kongelige Danske Videnskab. Selsk. Dan. Mat. Fys. Medd. **28**, № 8 (1954).
33. G. E. H. Reuter, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc. **195**, 336 (1946).
34. D. Bohm, T. Staver, Phys. Rev. **84**, 836 (1951).
35. J. Bardeen, D. Pines, Phys. Rev. **99**, 1140 (1955).
36. В. П. Силин, ЖЭТФ **23**, 649 (1952).
37. L. Spitzer, Physics of fully ionized gases, New York, London (1956); ИЛ, М., 1957.
38. A. B. Pippard, Phil. Mag. **46**, 1104 (1955).
39. M. S. Steinberg, Phys. Rev. **111**, 425 (1958).
40. В. Н. Фаддеев, Н. М. Терентьев, Таблицы значений функций $\omega(Z) = e^{-Z^2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^Z e^{t^2} dt \right)$ от комплексного аргумента, Гостехиздат, М., 1954.
41. В. А. Фок, Zeits. f. Phys. **61**, 126 (1930).
42. P. A. M. Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soc. **26**, 240, 376 (1931).
43. В. П. Силин, Физика металлов и металловедения **3**, 193 Свердловск (1956).
44. В. П. Силин, ЖЭТФ **33**, 494 (1957).
45. K. A. Brueckner, C. A. Levinson, Phys. Rev. **97**, 1344 (1955).
46. H. Bethel, J. Goldstone, Proc. Roy. Soc. **A238**, 551 (1957).
47. P. Nozieres, D. Pines, Phys. Rev. **111**, 442 (1958).
48. В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **34**, 139 (1958).
49. В. М. Галицкий, ЖЭТФ **34**, 151 (1958).
50. П. С. Зырянов, ЖЭТФ **35**, 448 (1958).
51. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **30**, 1058 (1956).
52. A. H. Wilson, The theory of metals, 1953.
53. D. Pines, in Solid State Physics (edited by F. Seitz and D. Turnbull, Academic Press Inc., New York (1955), том I, стр. 367; D. Pines, Proc. of the Tenth Solvay Congress (1954).

54. M. Gell-Manna, K. A. Brueckner, Phys. Rev. 106, 364 (1957); K. Sawada, Phys. Rev. 106, 372 (1957); M. Gell-Mann, Phys. Rev. 106, 369 (1957); R. Brout, Phys. Rev. 108, 515 (1958); K. Sawada, K. A. Brueckner, N. Fukuda, R. Brout, Phys. Rev. 108, 507 (1958).
55. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ 7, 379 (1937); M. G. Vabber, Proc. Roy. Soc. 158, 383 (1937); С. В. Вонсовский, А. А. Бердышев, ЖЭТФ 25, 723 (1953); В. Л. Гинзбург, В. П. Силин, ЖЭТФ 29, 64 (1955).
56. А. П. Питаевский, ЖЭТФ 34, 942 (1958).
57. Р. Н. Гуржи, ЖЭТФ 35, 965 (1958).
58. В. П. Силин, ЖЭТФ 34, 781 (1958).
59. В. П. Силин, ЖЭТФ 35, 1243 (1958).
60. И. М. Халатников, А. А. Абрикосов, ЖЭТФ 33, 110 (1957).
61. В. П. Силин, ЖЭТФ 33, 1282 (1957).
62. T. Holstein, Phys. Rev. 96, 535 (1954).
63. Р. Н. Гуржи, ЖЭТФ 33, 660 (1957).
64. А. А. Абрикосов, И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ 35, 771 (1958).
65. П. А. Черенков, ДАН 2, 451 (1934); Phys. Rev. 52, 378 (1937).
66. И. Е. Тамм, И. М. Франк, ДАН 14, 107 (1937).
67. Б. М. Болотовский, УФН 62, 201 (1957).
68. E. Fermi, Phys. Rev. 57, 485 (1940).
69. W. F. G. Swann, J. Frankl. Inst. 226, 598 (1938).
70. H. A. Kramers, Physica 13, 401 (1947).
71. A. Bohr, Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat. Fys. Medd. 24, № 19 (1948).
72. Л. Д. Ландау, Примечание редактора перевода к русскому изданию книги: Н. Бор, «Прохождение атомных частиц через вещество», ИЛ, М., 1950.
73. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., 1957.
74. П. Е. Кушин, Сборник «Мезон» под ред. И. Е. Тамма, ОГИЗ (1947).
75. H. Fröhlich, H. Pelzer, Proc. Phys. Soc. A68, 525 (1955).
76. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М., 1953.
77. R. Kronig, J. Korringa, Physica 10, 406, 800 (1943).
78. R. A. Ferrell, Phys. Rev. 114, 1214 (1958).
79. Г. Фридман, УФН 62, 427 (1957); Fortschritte der Physik 5, 51 (1957).
80. D. Pines, Rev. Mod. Phys. 28, 184 (1956); УФН 62, 399 (1957).
81. D. Pines, D. Bohm, Phys. Rev. 85, 338 (1952).
82. D. Pines, Phys. Rev. 92, 626 (1953).
83. J. Hubbard, Proc. Phys. Soc. A68, 441, 977 (1955).
84. R. A. Ferrell, Phys. Rev. 101, 554 (1956).
85. В. П. Силин, ЖЭТФ 37, 273 (1959).
86. В. М. Агранович, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ 35, 1171 (1958).
87. R. H. Ritchie, Phys. Rev. 106, 1874 (1957).
88. J. Neufeld, R. H. Ritchie, Phys. Rev. 98, 1632 (1955).
89. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 34, 1953 (1958).
90. С. И. Пекар, ЖЭТФ 33, 1022 (1957).
91. В. М. Агранович, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ 35, 982 (1958).
92. A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc. A191, 385 (1947); Proc. Cambr. Phil. Soc. 47, 617 (1951).
93. R. W. Wood, Phys. Rev. 44, 353 (1933); R. W. Wood, C. Lukens, Phys. Rev. 54, 332 (1958).
94. H. E. Ives, H. B. Briggs, J. Opt. Soc. Am. 26, 238 (1936); 27, 181 (1937).
95. В. Л. Гинзбург, Г. П. Мотулевич, УФН 55, 469 (1955).
96. Г. П. Мотулевич, А. А. Шубин, Оптика и спектроскопия 2, 633 (1957).
97. N. F. Mott, Proc. of the Tenth Solvay Congress, Bruxelles, 1954.
98. H. Watanabe, J. Phys. Soc. Japan. 11, 112 (1956).
99. М. Е. Герценштейн, Вестник МГУ, № 11, 1951.
100. Ю. Л. Климонтович, Диссертация МГУ, 1951.
101. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, ДАН 80, 193 (1951).
102. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, Ученые записки Харьковского университета 6, 73 (1955).
103. H. Merrill, H. Webb, Phys. Rev. 55, 1191 (1939).
104. D. Looney, S. Brown, Phys. Rev. 93, 915 (1954).
105. M. Sumi, J. Phys. Soc. Japan 14, 653, 1093 (1959).
106. Р. В. Левен, Вестник МГУ (в печати).
107. G. Boyd, L. Field, R. Gould, Phys. Rev. 109, 1393 (1958).
108. М. Д. Габович, Л. Л. Пасечник, ЖЭТФ 36, 1025 (1959).
109. А. А. Зайцев, Г. С. Леонов, И. А. Савченко, ЖЭТФ 36, 1332 (1959).