Игорь Васильевич
КУРЧАТОВ
(1903—1960)

От Центрального Комитета КПСС и Совета Министров СССР

Центральный Комитет КПСС и Совет Министров СССР с глубоким прискорбием извещают, что 7 февраля 1960 года на 58-м году жизни скоропостижно скончался крупнейший ученый-физик нашей страны, член Президиума Академии наук СССР, директор Института атомной энергии Академии наук СССР, член КПСС, депутат Верховного Совета СССР, трижды Герой Социалистического Труда, академик **КУРЧАТОВ Игорь Васильевич.**

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ КОМИТЕТ КПСС — **СОВЕТ МИНИСТРОВ СССР**

«Правда» 8 февраля 1960 г

В Центральном Комитете КПСС и Совете Министров СССР

Об увековечении памяти академика И. В. Курчатова

Учитывая выдающиеся заслуги академика И. В. Курчатова в развитии ядерной физики и в создании Института атомной энергии Академии наук СССР, директором которого он работал с начала его организации, Центральный Комитет КПСС и Совет Министров Союза ССР постановили:

1. Присвоить имя И. В. Курчатова:

а) Институту атомной энергии Академии наук СССР в г. Москве и впредь именовать его Институт атомной энергии имени И. В. Курчатова Академии наук СССР;

б) Белоярской атомной электростанции.

2. Установить бюсты И. В. Курчатова в Институте атомной энергии и на Белоярской атомной электростанции, а также мемориальную доску в память И. В. Курчатова на здании Ленинградского физико-технического института Академии наук СССР.

3. Принять предложение Академии наук СССР об учреждении медали имени академика И. В. Курчатова, присуждаемой один раз в три года, с выдачей денежной премии в размере 20 тыс. рублей, за выдающиеся работы в области ядерной физики.

Поручить Академии наук СССР утвердить Положение о порядке присуждения медали им. И. В. Курчатова.

4. Установить жене И. В. Курчатова—Марине Дмитриевне Курчатовой персональную пенсию пожизненно.

«Правда» 10 февраля 1960 г.

Редакция журнала «Успехи физических наук» Академии наук СССР от имени читателей выражает глубокую скорбь по поводу преждевременной кончины выдающегося советского физика, директора Института атомной энергии Академии наук СССР, трижды Героя Социалистического труда, академика

Игоря Васильевича
КУРЧАТОВА,

последовавшей 7 февраля 1960 года.

1960 г. Февраль **Т. LXX, вып. 2**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПЛАЗМЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ *)

В. Л. Гинзбург и А. В. Гуревич

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одной из характерных особенностей плазмы (ионизированного газа) является появление нелинейных эффектов уже в сравнительно небольших и легко достижимых электрических полях.

Объясняется это двумя причинами: во-первых, длина свободного пробега электронов в плазме бывает весьма значительной, в силу чего электрон может получать от поля большую энергию, во-вторых, передача энергии от электронов к атомам, молекулам и ионам затруднена вследствие малости отношения массы электрона к массе этих тяжелых частиц. В результате плазменные электроны в электрическом поле разогреваются, и комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы начинает зависеть от напряженности поля. Другими словами, поляризация и ток проводимости уже непропорциональны полю $\mathbf{E}$, вследствие чего электродинамические процессы в плазме и, в частности, распространение электромагнитных волн приобретают нелинейный характер (нарушается принцип суперпозиции и т. д.).

Влиянием поля на свойства плазмы можно в первом приближении пренебречь, если

$$E \ll E_p = \sqrt{3kT \frac{m}{e^2} \delta (\omega^2 + \nu_0^2)} = 4{,}2 \cdot 10^{-10} \sqrt{\delta T (\omega^2 + \nu_0^2)}\ \text{в/см}. \quad (0{,}1)$$

Здесь E_p — характерное «плазменное поле» (см § 1.2), e, m, k — заряд и масса электрона и постоянная Больцмана, T — абсолютная температура плазмы при отсутствии поля, δ - средняя относительная доля энергии, передаваемая при соударении электрона с тяжелой частицей (при упругих соударениях $\delta = \frac{2m}{M}$, где M — масса тяжелых частиц), ω — циклическая частота поля и $\nu_0 \equiv \nu_{\text{эфф}}^{(0)}$ — эффективное число соударений электрона с тяжелыми частицами в отсутствие поля. Заметим, что при записи критерия (0,1) плазма считается, для простоты, изотропной, как это имеет место при отсутствии внешнего магнитного поля.

Электрическое поле, удовлетворяющее условию (0,1), естественно называть слабым. Под воздействием сильного поля ($E \gtrsim E_p$) и особенно очень сильного поля ($E \gg E_p$) свойства плазмы существенно изменяются.

Оценки показывают, что значения «плазменного поля» E_p в ряде случаев не очень велики. В самом деле, например, в ионосфере в слое E: $\nu_0 \sim 10^5$, $T \simeq 300$, $\delta \simeq 10^{-3}$, а в слое F: $\nu_0 \sim 10^3$, $T \simeq 10^3$, $\delta \simeq 10^{-4}$. Поэтому в ионосфере для низких частот

$$\omega^2 \ll \nu_0^2 \quad (0{,}2)$$

поле $E_p \sim 10^{-5} \div 10^{-7}$ *в/см*. В короне Солнца

$$\left(\nu_0 \sim 10,\ T \sim 10^6,\ \delta = \frac{2m}{M_p} = \frac{1}{918}\right)$$

при выполнении того же условия (0,2) $E_p \sim 10^{-7}$ *в/см*. Для более плотной плазмы или же в области высоких частот

$$\omega^2 \gg \nu_0^2 \quad (0{,}3)$$

«плазменное поле», конечно, значительно больше. Например, в ионосфере при $\omega = 2\cdot 10^6 \left(\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \simeq 1 \text{ км}\right)$ $E_p \approx 5\cdot 10^{-4}$ *в/см*, а при $\omega = 2\cdot 10^7 \left(\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \simeq 100 \text{ м}\right) E_p \approx 5\cdot 10^{-3}$ *в/см*. В солнечной короне, в диапазоне изучаемых радиоастрономическими методами метровых волн, $E_p \sim 10$ *в/см*; при $\lambda \sim 1$ *см* в короне уже $E_p \sim 10^4$ *в/см*. Наконец в лабораторных установках ($\nu_0 \sim 10^6 \div 10^9$, $T \sim 10^4$, $\delta \sim 10^{-1} \div 10^{-3}$) для электрического поля низкой частоты (при условии (0,2)) $E_p \sim 10^{-3} \div 10$ *в/см*, а при высоких частотах $E_p \sim (10^{-11} \div 10^{-10}) \sqrt{T}\cdot\omega$ *в/см*.

Таким образом, в плазме нелинейность становится существенной в полях, которые не представляются чрезмерно большими, по крайней мере с точки зрения значений, обычных для лабораторных условий или для мощных радиопередатчиков. В непроводящих чистых жидкостях и в твердых телах (кроме сегнетоэлектриков) положение иное—здесь влиянием поля на свойства среды можно обычно пренебречь вплоть до полей порядка $10^6 \div 10^7$ *в/см*, которые уже приближаются к электрическим полям атомного масштаба $E_q \sim \frac{e}{d^2} \sim 10^8$ *в/см* (d — размер молекул или постоянная решетки). В металлах и в полупроводниках электроны проводимости могут быть в известных пределах уподоблены электронам в плазме. Однако область нелинейности в металлах практически почти не достижима, так как большая электропроводность препятствует созданию в металле достаточно сильного поля (кроме того, нелинейность уменьшается в связи с вырождением электронов [1-3]). В полупроводниках нелинейность наблюдается без особого труда, и в качественном отношении здесь справедливы многие выводы, получающиеся при исследовании нелинейных явлений в газообразной плазме. Вместе с тем нелинейные эффекты в полупроводниках, в общем, менее ярко выражены, чем в газе; количественная теория в обоих случаях также различна. Ниже мы будем поэтому иметь в виду лишь газообразную плазму (некоторые результаты, относящиеся к полупроводникам, см. в [4-7]).

Настоящая статья *) посвящена теории нелинейных явлений в плазме. Уравнения динамики плазмы (в общей постановке—уравнения поля и кинетические уравнения для частиц плазмы) сами являются нелинейными, и, таким образом, в широком плане теория нелинейных явлений охватывает весьма значительную часть физики плазмы. Здесь мы имеем в виду осветить значительно более узкий, но довольно ясно очерченный круг вопросов. В первой части статьи (§§ 1, 2) будет рассмотрен вопрос о влиянии на нерелятивистскую и невырожденную (классическую) плазму однородного электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ (частота ω может быть равна нулю, что отвечает постоянному полю). Плазма может при этом находиться в однородном и постоянном («внешнем») магнитном поле $\mathbf{H}_0$. Макроскопическими (гидродинамическими) движениями в плазме пренебрегается.

Влияние поля на плазму в такой постановке задачи сводится к изменению функции распределения плазменных электронов по скоростям. Эту функцию распределения нужно найти в зависимости от силы поля $\mathbf{E}_0$, частоты ω, магнитного поля $\mathbf{H}_0$ и параметров плазмы. Функция распределения тяжелых частиц (молекул, ионов) будет при этом считаться максвелловской с температурой T; в стационарном

*) Одновременно она печатается на немецком языке в журнале Fortschritte der Physik (ГДР).

режиме, который только и рассматривается ниже, последнее предположение обычно оправдано.

Зная функцию распределения электронов по скоростям, можно найти среднюю кинетическую энергию электронов (или эффективную электронную температуру T_e) и плотность полного электрического тока $\mathbf{j}_t$. В частном случае слабого поля температуры электронов и тяжелых частиц совпадают, а плотность тока $\mathbf{j}_t$ пропорциональна полю $\mathbf{E}$.

Выяснение свойств плазмы в однородном поле любой силы представляет интерес при анализе ряда вопросов физики газового рязряда, проблемы разогрева плазмы и т. п. Вычисление тока $\mathbf{j}_t$ является, кроме того, необходимым предварительным этапом при решении электродинамических задач и, в частности, задач, связанных с распространением в плазме электромагнитных волн. Вторая часть статьи (§ 3) и посвящена теории нелинейных эффектов, возникающих при распространении радиоволн в плазме и, конкретно, в ионосфере. Что же касается газового разряда [8, 9], в частности разряда на высоких и сверхвысоких частотах [10], разогревания плазмы в неоднородном поле [11], теории нестационарных процессов в однородной плазме [12, 13], в том числе вопроса об «убегающих электронах» [14], и т. д., то этих вопросов мы подробно касаться не будем.

§ 1. ПЛАЗМА В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ (ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ)

Под воздействием электрического поля распределение электронов по скоростям в плазме перестает быть равновесным: возникает ускоренное движение электронов в направлении поля. Это движение электронов по полю тормозится соударениями с тяжелыми частицами плазмы—молекулами, атомами, ионами. В результате этих двух процессов — ускорения полем и торможения из-за соударений—в стационарном режиме устанавливается некоторое неравновесное распределение электронов по скоростям; его и нужно определить для того, в частности, чтобы найти электрический ток в поле произвольной напряженности.

В общем случае для решения этой задачи необходимо использовать кинетическое уравнение для функции распределения электронов. Однако для выявления физической картины, а часто и для получения достаточно точных количественных формул оказывается удобным и полезным использование значительно более простой, хотя и приближенной теории, которую будем называть «элементарной».

В элементарной теории состояние плазмы характеризуется двумя величинами: средней скоростью направленного движения электронов $\mathbf{u}$ и электронной температурой T_e. По определению скорости $\mathbf{u}$ плотность полного электрического тока $\mathbf{j}_t$ связана с ней соотношением

$$\mathbf{j}_t = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{j} = eN\mathbf{u}, \tag{1,1}$$

где $\mathbf{P}$—поляризация плазмы, $\mathbf{j}$—плотность тока проводимости и N—электронная концентрация*). Величины $\mathbf{P}$ и $\mathbf{j}$ введены здесь для того,

*) Движением ионов здесь и везде ниже пренебрегаем. В отсутствие магнитного поля вклад ионов определяется отношением mN_i/MN (N_i—концентрация ионов) и всегда мал, если только концентрация отрицательных ионов не очень высока. При наличии внешнего магнитного поля ролью ионов можно пренебречь, если ионная гирочастота $\Omega_H = |e| \frac{H_0}{Mc}$ значительно ниже частоты электрического поля ω (это условие не является необходимым в случае, когда $\Omega_H \ll \nu^{(i)}$, где $\nu^{(i)}$—частота соударений для ионов).

чтобы установить соответствие с обычными понятиями макроскопической электродинамики.

Что же касается электронной температуры T_e, то она в элементарной теории определяется соотношением

$$\frac{3}{2} kT_e = \overline{K} = \frac{\overline{mv^2}}{2}, \tag{1,2}$$

где $\overline{K}$ — средняя кинетическая энергия плазменных электронов; поскольку распределение электронов по скоростям в плазме далеко не всегда является максвелловским (см. § 2), то температуру T_e правильнее, конечно, называть эффективной электронной температурой.

Основным в элементарной теории является, очевидно, установление уравнений, служащих для определения $\mathbf{u}$ и T_e. Затем уже нужно найти сами величины $\mathbf{u}$ и T_e в зависимости от $\mathbf{E}$, ω, $\mathbf{H}_0$ и параметров плазмы. Вопрос о точности элементарной теории и характере приближений, с которыми она связана, последовательным образом может быть выяснен только на основе кинетического рассмотрения (см. § 2).

1.1. Электронный ток. Диэлектрическая проницаемость и проводимость плазмы

Уравнение для средней скорости электронов $\mathbf{u}$ можно получить, исходя из следующих соображений. В отсутствие соударений каждый электрон движется независимо от других; при этом его скорость $\mathbf{v}$ должна, очевидно, удовлетворять уравнению $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_0]$, где $\mathbf{H}_0$ — постоянное магнитное поле*). Представим теперь скорость $\mathbf{v}$ в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$ и усредним уравнение для $\mathbf{v}$ по всем электронам в данный момент времени, учитывая при этом, что $\overline{\mathbf{v}_0} = 0$. Уравнение для средней скорости ($\mathbf{u} = \overline{\mathbf{v}}$) будет в результате таким же, как и уравнение для полной скорости электрона $\mathbf{v}$:

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{u}\mathbf{H}_0].$$

Проведенное усреднение по всем электронам отвечает вместе с тем переходу к среднему электрическому полю; это поле в плазме равно среднему макроскопическому полю феноменологической электродинамики (см. [15], § 57).

Под влиянием соударений скорость $\mathbf{u}$, очевидно, должна уменьшаться; время, в течение которого импульс уменьшается на $m\mathbf{u}$, обозначим через $\tau_{\text{эфф}} = \frac{1}{\nu_{\text{эфф}}}$. Тогда обусловленная соударениями сила трения равна $-m\nu_{\text{эфф}}\mathbf{u}$ и уравнение для $\mathbf{u}$ принимает вид

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{u}\mathbf{H}_0] - m\nu_{\text{эфф}}\mathbf{u}. \tag{1,3}$$

Следует подчеркнуть, что при разных соударениях электрона с тяжелыми частицами изменения импульса различны в силу распределения электронов по скоростям и разных параметров удара. Поэтому время $\tau_{\text{эфф}}$ представляет собой некоторую среднюю эффективную величину — за это время каждый электрон испытывает несколько соударений, общим средним результатом которых является изменение среднего импульса

*) Действием переменного магнитного поля радиоволны здесь и ниже пренебрегаем, что обычно оправдано при условии $\frac{u}{c} \ll 1$.

на $m\mathbf{u}$. В таком же смысле $\nu_{эфф}=\frac{1}{\tau_{эфф}}$ есть эффективное число соударений электрона в единицу времени. Вычисление $\nu_{эфф}$ является задачей кинетической теории и требует знания соответствующего эффективного сечения. Однако и без этих расчетов ясно, что число соударений зависит от скорости электронов и, например, в случае не зависящего от скорости эффективного сечения q: $\nu_{эфф}=qN_m\bar{v}$, где N_m — концентрация молекул (соударениями с ионами здесь пренебрегаем) и $\bar{v}$ — средняя скорость электронов. Поскольку полная скорость электронов в любом поле близка к их хаотической скорости (см. ниже), можно считать, что скорость $\bar{v}$ пропорциональна $\sqrt{T_e}$. Таким образом, для соударений с молекулами, когда в первом приближении сечение q не зависит от скорости, можно положить

$$\nu_{эфф\, m}=\nu^{0}_{эфф\, m}\sqrt{\frac{T_e}{T}}, \tag{1,4}$$

где $\nu^{(0)}_{эфф\, m}$ — число соударений при отсутствии поля (или в слабом поле), т. е. при $T_e=T$.

Для соударений электронов с ионами, когда q обратно пропорционально v^4 (резерфордовское рассеяние), в первом приближении

$$\nu_{эфф\, i}=\nu^{(0)}_{эфф\, i}\left(\frac{T}{T_e}\right)^{3/2}. \tag{1,5}$$

Детальнее на выражениях для $\nu_{эфф}$ мы остановимся в § 2. Здесь же важно только подчеркнуть, что уже в рамках элементарной теории имеются основания считать число соударений $\nu_{эфф}$ зависящим лишь от электронной температуры T_e, но не от скорости $\mathbf{u}$ (см. § 1.2).

При отсутствии внешнего магнитного поля (в изотропной плазме) для электрического поля $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0e^{i\omega t}$ из (1,3) получаем

$$\mathbf{u}=\frac{e\mathbf{E}}{m(i\omega+\nu_{эфф})}=\frac{e\mathbf{E}}{m}\left(\frac{\nu_{эфф}}{\omega^2+\nu^2_{эфф}}-i\frac{\omega}{\omega^2+\nu^2_{эфф}}\right). \tag{1,6}$$

Здесь рассматривается только установившееся решение, а также принимается, что T_e, а значит, и $\nu_{эфф}$ не зависят от времени (хотя они и могут зависеть от амплитуды поля E_0).

В макроскопической электродинамике в линейном приближении обычно вводятся диэлектрическая проницаемость ε и проводимость σ, определяемые соотношениями $\mathbf{P}=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\mathbf{E}$, $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$. В этих терминах выражение (1,1) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{j}_t=i\omega\mathbf{P}+\mathbf{j}=\left(i\omega\frac{\varepsilon-1}{4\pi}+\sigma\right)\mathbf{E}=\frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon'-1)=eN\mathbf{u},\\ \varepsilon'=\varepsilon-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}.\end{aligned}\right\} \tag{1,7}$$

Сравнивая (1,6) и (1,7), получаем

$$\varepsilon=1-\frac{4\pi e^2N}{m(\omega^2+\nu^2_{эфф})};\quad \sigma=\frac{e^2N\nu_{эфф}}{m(\omega^2+\nu^2_{эфф})}. \tag{1,8}$$

Величины ε и σ сохраняют, очевидно, такой же вид, если $\nu_{эфф}$ зависит от силы поля (в связи с тем, что $\nu_{эфф}(T_e)$ и $T_e(E_0)$) и среда становится нелинейной. Поэтому понятием о диэлектрической проницаемости и проводимости обычно удобно пользоваться и в нелинейной теории (по крайней мере в условиях, когда справедливы выражения типа (1,6) с не зависящим от времени числом соударений $\nu_{эфф}$). Если же введение ε и σ нецелесообразно, то нужно пользоваться непосредственно выражением для $\mathbf{j}$.

При наличии магнитного поля $\mathbf{H}_0$ плазма становится анизотропной (магнитоактивной) и вместо (1,7) нужно писать

$$\left.\begin{aligned} j_{t,i} &= (i\omega\mathbf{P}+\mathbf{j})_i = \left(i\omega\frac{\varepsilon_{ik}-\delta_{ik}}{4\pi}+\sigma_{ik}\right)E_k = \frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon'_{ik}-\delta_{ik})E_k = eNu_i, \\ \varepsilon'_{ik} &= \varepsilon_{ik} - i\,\frac{4\pi\sigma_{ik}}{\omega}, \quad \delta_{ik}=1 \text{ при } i=k, \ \delta_{ik}=0 \text{ при } i\neq k, \end{aligned}\right\} \quad (1,9)$$

где по дважды встречающимся индексам проводится суммирование (не путать фигурирующую в качестве множителя мнимую единицу i и индекс i!), а скорость $\mathbf{u}$ должна определяться из уравнения (1,3). Если выбрать поле $\mathbf{H}_0$ за ось z, то, как легко показать (см. [15], § 62):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m}\cdot\frac{1}{2\omega}\left\{\frac{\omega-\omega_H}{(\omega-\omega_H)^2+\nu^2}+\frac{\omega+\omega_H}{(\omega+\omega_H)^2+\nu^2}\right\}, \\ \varepsilon_{yx} &= -\varepsilon_{xy} = i\,\frac{4\pi e^2 N}{m}\cdot\frac{1}{2\omega}\left\{\frac{\omega-\omega_H}{(\omega-\omega_H)^2+\nu^2}-\frac{\omega+\omega_H}{(\omega+\omega_H)^2+\nu^2}\right\}, \\ \varepsilon_{zz} &= 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m}\cdot\frac{1}{\omega^2+\nu^2}, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0; \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \frac{e^2 N}{m}\cdot\frac{\nu}{2}\left\{\frac{1}{(\omega-\omega_H)^2+\nu^2}+\frac{1}{(\omega+\omega_H)^2+\nu^2}\right\}, \\ \sigma_{yx} &= -\sigma_{xy} = i\,\frac{e^2 N}{m}\cdot\frac{\nu}{2}\left\{\frac{1}{(\omega-\omega_H)^2+\nu^2}-\frac{1}{(\omega+\omega_H)^2+\nu^2}\right\}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{e^2 N\nu}{m(\omega^2+\nu^2)}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1,10)$$

Здесь $\omega_H = |e|\frac{H_0}{mc}$ — гиромагнитная частота и $\nu \equiv \nu_{\text{эфф}}$. Из формул (1, 10) видно, что в высокочастотном электрическом поле ($\omega^2 \gg \nu^2$) в случае, когда частота ω близка к гирочастоте ω_H, имеет место резонансное возрастание проводимости, называемое обычно гиромагнитным (или циклотронным) резонансом. Причина этого явления вполне понятна. Переменное электрическое поле частоты ω, направленное перпендикулярно к $\mathbf{H}_0$, можно представить в виде двух полей, поляризованных по кругу и вращающихся с частотой ω в противоположных направлениях. Кроме того, сами электроны вращаются вокруг направления магнитного поля с частотой $\omega_H = |e|\frac{H_0}{mc}$. Следовательно, с точки зрения действия на электроны той компоненты E, которая вращается в направлении, совпадающем с направлением вращения электрона в магнитном поле, наличие магнитного поля эквивалентно уменьшению частоты на ω_H. Поэтому при ω, близком к ω_H, действие этой компоненты переменного электрического поля на электрон эквивалентно действию постоянного электрического поля, что и является причиной резонансного возрастания скорости электрона, а следовательно, и проводимости плазмы при $\omega \simeq \omega_H$.

1.2. Электронная температура

Уравнение для эффективной электронной температуры $T_e = \frac{2}{3k}\frac{\overline{mv^2}}{2}$ получается из закона сохранения энергии. Электрическое поле производит над плазмой в единицу времени работу $\mathbf{jE} = eN\mathbf{uE}$ или на один электрон работу $e\mathbf{u}\mathbf{E}=\mathbf{j}_t\frac{\mathbf{E}}{N}$. С другой стороны, электроны теряют энергию при соударениях с тяжелыми частицами. Эта энергия, отнесенная к единице времени, в среднем равна $\delta_{эфф}\cdot\nu_{эфф}\cdot\frac{3}{2}k(T_e-T)$, где $\delta_{эфф}$ — некоторый коэффициент, имеющий физический смысл средней относительной доли энергии, теряемой при одном соударении (вместе с тем $\delta_{эфф}$ есть отношение времени релаксации для среднего импульса $\tau_{эфф}$ к времени релаксации для средней энергии $\tau^{(k)}_{эфф}$). Определение $\delta_{эфф}$ будет уточнено в § 2, здесь же для пояснения отождествим эффективные и средние значения с истинными и примем, что при каждом соударении (число соударений $\nu_{эфф}$) быстрый электрон отдает тяжелым частицам энергию $\delta_{эфф}\cdot\frac{mv^2}{2}$ (электрон считается быстрым, если его энергия $\frac{mv^2}{2}=\frac{3}{2}kT_e$ значительно больше энергии тяжелых частиц $\frac{3}{2}kT$; в подобных условиях тяжелые частицы можно считать неподвижными). Тогда в единицу времени быстрый электрон отдает энергию

$$\delta_{эфф}\cdot\nu_{эфф}\frac{mv^2}{2}=\delta_{эфф}\cdot\nu_{эфф}\cdot\frac{3}{2}kT_e.$$

Однако с понижением энергии электронов это значение передаваемой энергии не может отвечать действительности, так как при $T_e=T$ (тепловое равновесие), очевидно, средняя энергия электронов при соударениях вообще не изменяется. Физически дело заключается в том, что при приближении T_e к T тяжелые частицы уже нельзя считать неподвижными и происходит не только передача энергии от электронов к этим частицам, но при некоторых соударениях, наоборот, электроны получают энергию. Для того чтобы учесть этот момент, передаваемая тяжелым частицам энергия записывается в виде

$$\delta_{эфф}\cdot\nu_{эфф}\cdot\frac{3}{2}k(T_e-T).$$

Теперь мы можем записать баланс энергии для электронов в плазме в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}NkT_e\right)=\mathbf{j}\mathbf{E}-\frac{3}{2}\delta_{эфф}\cdot\nu_{эфф}\cdot Nk(T_e-T),$$

или

$$\frac{dT_e}{dt}=\frac{2}{3kN}\cdot\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}-\delta_{эфф}\cdot\nu_{эфф}(T_e-T). \quad (1,11)$$

Очень существенно то, что в стационарных условиях в плазме $\delta_{эфф}$ всегда много меньше единицы *). Благодаря этому даже в сильном электрическом поле стационарная хаотическая скорость электрона v

*) В слабо ионизированной плазме в одноатомных газах при невысокой электронной температуре (меньше или порядка 1 *эв*) $\delta_{эфф}=\frac{2m}{M}\sim10^{-4}\div10^{-5}$ (M — масса атома). В тех же условиях в молекулярных газах $\delta_{эфф}\sim10^{-3}$. С ростом электронной температуры повышается роль неупругих соударений и $\delta_{эфф}$ увеличивается. Однако при этом усиливается ионизация и наступает пробой, после чего степень ионизации плазмы резко возрастает. Существенную роль при этом начинают играть соударения электронов с ионами, благодаря которым значение $\delta_{эфф}$ вновь понижается. Максимальное значение $\delta_{эфф}$ в стационарных условиях до пробоя, по-видимому, порядка 10^{-1}. В полностью ионизированной плазме $\delta_{эфф}$ по-прежнему равно $\frac{2m}{M}$. Подробнее см. § 2.

всегда много больше его направленной скорости u. Для того чтобы доказать это и вообще выяснить характер решений уравнения (1,11), остановимся на частных случаях.

При отсутствии электрического поля, если $\delta_{эфф}\cdot\nu_{эфф}=\text{const}$ (т. е. не зависит от T_e):

$$T_e = T + (T_e - T)_{t=0}\cdot e^{-\delta_{эфф}\cdot\nu_{эфф}\cdot t}, \tag{1,12}$$

т. е. время релаксации для температуры действительно равно $\tau^{(k)}_{эфф}=\frac{1}{\delta_{эфф}\cdot\nu_{эфф}}$; при учете зависимости $\delta_{эфф}\cdot\nu_{эфф}$ от температуры картина усложняется, но в качественном отношении остается обычно примерно такой же, как и при $\delta_{эфф}\cdot\nu_{эфф}=\text{const}$. Заметим, что уравнение (1,3) для $\mathbf{u}$ при отсутствии поля и $\nu_{эфф}=\text{const}$ имеет решение $\mathbf{u}=\mathbf{u}_{t=0}\cdot e^{-\nu_{эфф}\cdot t}$; таким образом, время релаксации импульса $\tau_{эфф}=\frac{1}{\nu_{эфф}}$ при $\delta_{эфф}\ll 1$ значительно меньше времени $\tau^{(k)}_{эфф}=\frac{1}{\delta_{эфф}\cdot\nu_{эфф}}$. Ниже релаксирующие члены в выражениях для $\mathbf{u}$ и T_e учитываться не будут, поскольку рассматриваются только установившиеся процессы.

В электрическом поле для нахождения $\mathbf{u}$ и T_e нужно совместно решать уравнения (1,3) и (1,11), что в общем случае сложно. Ситуация упрощается, если $\nu_{эфф}=\text{const}$ и $\delta_{эфф}=\text{const}$. Тогда в поле $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0e^{i\omega t}$ справедливо решение (1,6) или, если перейти к вещественным величинам, $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\cos\omega t$, $\mathbf{j}_t=eN\mathbf{u}=\frac{e^2N\mathbf{E}_0}{m(\omega^2+\nu^2)}(\nu\cos\omega t+\omega\sin\omega t)$. Далее,

$$\frac{dT_e}{dt}=\frac{e^2E_0^2}{3km\,(\omega^2+\nu^2)}(\nu+\nu\cos 2\omega t+\omega\sin 2\omega t)-\delta\nu\,(T_e-T),$$

$$T_e-T=\frac{e^2E_0^2}{3km\delta\,(\omega^2+\nu^2)}\left\{1+\frac{(\delta\nu^2-2\omega^2)\,\delta}{4\omega^2+\delta^2\nu^2}\cos 2\omega t+\frac{\omega\nu\,(2+\delta)\,\delta}{4\omega^2+\delta^2\nu^2}\sin 2\omega t\right\}. \tag{1,13}$$

Здесь и в ряде случаев ниже индекс «эфф» опускается.

Для очень низких частот, когда

$$\omega\ll\delta\nu, \tag{1,14}$$

с точностью до малого члена порядка $\frac{\omega}{\delta\nu}$

$$T_e-T=\frac{2e^2E_0^2}{3km\delta\nu^2}\cos^2\omega t=\frac{2e^2E^2(t)}{3km\delta\nu^2}, \tag{1,15}$$

где учтено, что при (1,14) заведомо $\omega\ll\nu$, поскольку $\delta\ll 1$. В другом предельном случае

$$\omega\gg\delta\nu, \tag{1,16}$$

с точностью до членов порядка $\frac{\delta\nu}{\omega}$ и δ

$$T_e-T=\frac{e^2E_0^2}{3km\delta\,(\omega^2+\nu^2)}=\frac{2\overline{E^2}}{3km\delta\,(\omega^2+\nu^2)} \tag{1,17}$$

($\overline{E^2}$ — среднее значение E^2 по времени). Таким образом, в случае (1,16) температура T_e в первом приближении постоянна; переменная составляющая T_e (с частотой 2ω) имеет малую амплитуду, в $\frac{\delta\nu}{\omega}$ или в δ раз меньшую постоянной составляющей T_e. Факт приближенного постоянства электронной температуры в переменном электрическом поле при $\omega\gg\delta\nu$ вполне понятен. В самом деле, как было показано выше, время релаксации для температуры электронов в плазме порядка $\tau_{\text{эфф}}^{(k)} = \frac{1}{\delta_{\text{эфф}} \cdot \nu_{\text{эфф}}}$, и поэтому температура электронов не может существенно измениться за время $\frac{1}{\omega} \ll \frac{1}{\delta\nu}$, в течение которого меняется электрическое поле. В результате температура и устанавливается на некотором среднем, не зависящем от времени уровне, отклонения от которого малы.

При учете зависимости $\delta_{\text{эфф}} \cdot \nu_{\text{эфф}}$ от T_e решение уравнения (1,11) в условиях (1,16) можно найти с помощью разложения в ряд по параметрам $\frac{\delta_{\text{эфф}} \cdot \nu_{\text{эфф}}}{\omega}$ и $\delta_{\text{эфф}}$. В первом приближении температура электронов T_e при этом постоянна; она определяется соотношением

$$T_e - T = \frac{e^2 E_0^2}{3km\delta(T_e)(\omega^2 + \nu^2(T_e))} . \tag{1,18}$$

Отсюда ясно, что даже в очень сильном поле (при $T_e \gg T$) средняя скорость электрона $\bar{v}$ близка к хаотической скорости, поскольку

$$\bar{v} \sim \sqrt{\frac{kT_e}{m}} \sim \frac{eE_0}{m\sqrt{\delta}\sqrt{\omega^2 + \nu^2}}, \tag{1,19}$$

в то время как упорядоченная скорость (см. (1,6))

$$|\mathbf{u}| = \frac{eE_0}{m\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \sim \sqrt{\delta}\,\bar{v}. \tag{1,20}$$

В постоянном электрическом поле $E = \text{const}$, очевидно, $\mathbf{u} = \frac{e\mathbf{E}}{m\nu}$ и согласно (1.11) в стационарном состоянии при любой зависимости $\delta_{\text{эфф}} \cdot \nu_{\text{эфф}}$ от T_e

$$T_e - T = \frac{2E^2}{3km\delta\nu^2} . \tag{1,21}$$

Выражение (1.21) можно получить из (1.18), если положить в нем $\omega = 0$ и, кроме того, заменить амплитуду E_0 на $\sqrt{2}E$, где E — напряженность постоянного электрического поля. Таким образом, нагревание электронного газа в постоянном поле такое же, как и в переменном поле низкой частоты $\omega^2 \ll \nu^2$, что вполне понятно, так как при $\omega^2 \ll \nu^2$ переменное поле действует на электроны в среднем как постоянное поле $E = E_{\text{эфф}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$. Из (1,21) следует, что условие $|\mathbf{u}| \leqslant \sqrt{\delta}\,\bar{v}$ выполняется и в постоянном поле.

Итак, при любой частоте ω, как это и утверждалось выше, $u \ll \bar{v}$ в силу условия $\delta_{\text{эфф}} \ll 1$.

Выражения (1,18) и (1,21) являются неявными решениями уравнения (1,11) для T_e, поскольку частота соударений $\nu_{\text{эфф}}$ в реальных условиях зависит от T_e (см. (1,4) и (1,5)); зависимость $\delta_{\text{эфф}}$ от T_e в рамках элементарной теории учитывать не будем, хотя это, в принципе, вполне возможно.

Прежде чем найти явное выражение для T_e, запишем решение (1,18) в виде

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \left(\frac{E_0}{E_p}\right)^2 \frac{\omega^2 + \nu_0^2}{\omega^2 + \nu^2(T_e)} , \tag{1,22}$$

где $\nu_0 \equiv \nu_{\text{эфф}}^{(0)}(T)$ — число соударений при $T_e = T$ и E_p — характерное «плазменное поле»

$$E_p = \sqrt{3kT\frac{m}{e^2}\delta(\omega^2 + \nu_0^2)}. \tag{1,23}$$

Из формулы (1,22) видно, что если амплитуда напряженности электрического поля меньше, чем «плазменное поле» ($E_0 \ll E_p$), то температура электронов лишь незначительно изменяется под воздействием поля. Соответственно незначительны в этом случае и изменения частоты соударений электрона (1,4) и (1,5), а следовательно, и проводимости, и диэлектрической проницаемости плазмы. Таким образом, электрическое поле $E_0 \ll E_p$ слабо влияет на плазму и будет называться «слабым».

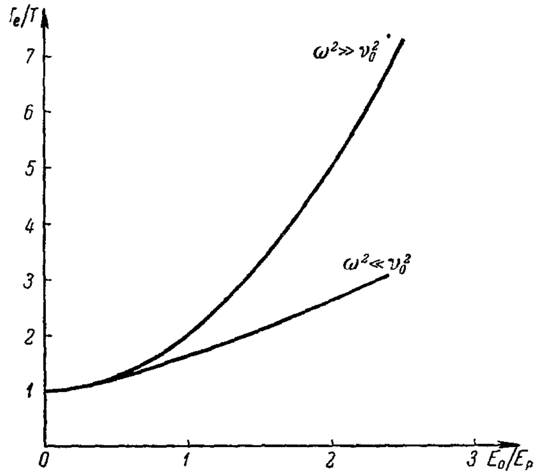

Рис. 1.

Если же $E_0 \gtrsim E_p$, то температура электронов и соответственно другие параметры плазмы ($\nu_{эфф}$, ε, σ) существенно изменяются под воздействием электрического поля. Как уже упоминалось во введении, такие поля будут называться сильными, а при $E_0 \gg E_p$ — очень сильными.

Разрешая алгебраическое уравнение (1,22) в случае, когда основную роль играют соударения электронов с молекулами, т. е. когда $\nu_{эфф}(T_e) = \nu_0 \sqrt{\frac{T_e}{T}}$ (см. (1,4)), находим

$$T_e = T\left[1 + \frac{\omega^2 + \nu_0^2}{2\nu_0^2}\left(\sqrt{1 + \frac{4\nu_0^2}{\omega^2 + \nu_0^2}\left(\frac{E_0}{E_p}\right)^2} - 1\right)\right]. \qquad (1,24)$$

Зависимость T_e от $\frac{E_0}{E_p}$ при $\omega^2 \gg \nu_0^2$ и $\omega^2 \ll \nu_0^2$ изображена на рис. 1. Из рисунка видно, что в этом случае температура электронов монотонно возрастает с ростом E_0.

При высоких частотах $\omega^2 \gg \nu^2$, как ясно из (1,18),

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \frac{e^2 E_0^2}{3kTm\delta\omega^2}. \qquad (1,25)$$

Это выражение для T_e не зависит от ν и ν_0 и, следовательно, справедливо не только при соударениях электронов с молекулами, но и при соударениях с ионами.

При низких частотах $\omega^2 \ll \nu_0^2$ в случае соударений с ионами возникает интересная особенность[13]. Нетрудно видеть, что связь T_e с $\frac{E_0}{E_p}$, определяемая уравнением (1,22), при низких частотах является однозначной только тогда, когда частота соударений не падает с ростом T_e (как это имеет место при соударениях с молекулами) или же падает не быстрее чем $T_e^{-\frac{1}{2}}$. При соударениях с ионами это условие, разумеется, не выполнено ($\nu \sim T_e^{-\frac{3}{2}}$). Вследствие этого при $\omega^2 < \nu_0^2$ в определенной области значений амплитуды поля $E_k^{II} \leqslant E_0 \leqslant E_k^{I}$ одному значению E_0 соответствует не одно, как обычно, а три стационарных состояния с различной электронной температурой (рис. 2). Однако только два из них, соответствующие нижней и верхней кривым на рис. 2, являются устойчивыми; состояние, соответствующее средней кривой, неустойчиво. Критическое поле для нижей кривой $E_k^{\mathrm{I}} = 0{,}28\, E_p(0)$, где $E_p(0)$ — «плазменное поле» (1,23) при $\omega = 0$. Отсутствие «низкотемпературного» стационарного состояния при $E_0 \gg E_k^{\mathrm{I}}$ обусловлено тем, что энергия, сообщаемая электронам низкочастотным электрическим полем, резко растет с ростом электронной температуры $\left(\mathbf{Ej} \sim \frac{1}{\nu} \sim T_e^{\frac{3}{2}}\right)$, в то время как энергия, передаваемая электронами ионам, падает $\left(\delta\nu\,(T_e - T) \sim T_e^{-\frac{1}{2}}\right)$. Поэтому в достаточно сильном электрическом поле $(E_0 \gg E_k^{\mathrm{I}})$ электроны уже не могут передать ионам всей поглощаемой ими энергии, и температура электронов начинает расти. С ростом температуры, однако, падает частота соударений, и после того, как она станет меньше, чем частота поля, условие низкочастотности нарушается. Поэтому и оказывается возможным второе («высокотемпературное») устойчивое стационарное состояние (1,25) для сильно нагретого электронного газа, когда $\nu^2(T_e) \ll \omega^2$. Переход из низкотемпературного состояния в высокотемпературное показан стрелкой на рис. 2. Обратный переход совершается в поле $E_k^{\mathrm{II}} \approx 1{,}7\left(\frac{\omega}{\nu_0}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot E_p(0)$; поле E_k^{II}, разумеется, меньше, чем E_k^{I}. Это приводит к своеобразному гистерезису зависимости температуры электронов от амплитуды электрического поля.

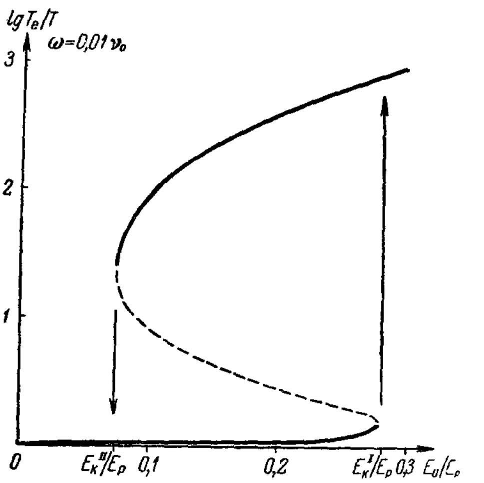

Рис. 2.

Неустойчивость низкотемпературного состояния электронного газа в случае соударений с ионами имеет место и в постоянном электрическом поле; соответствующее критическое поле $E_k = \frac{E_k^{\mathrm{I}}}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}2 E_p(0)$. В отличие от переменного поля второе стационарное состояние при этом отсутствует (так как случай (1,25) при $\omega = 0$ реализоваться, конечно, не может); поэтому температура электронов при $E > E_k$ непрерывно нарастает во времени (см. [13]).

Заметим, кроме того, что в рассматриваемом случае соударений с ионами в очень сильном постоянном электрическом поле

$$E > E_c \simeq \sqrt{kT_e m} \cdot \frac{\nu(T_e)}{e}$$

возникает неустойчивость и для средней направленной скорости электронов. Это связано с тем, что в нестационарных условиях уже нельзя считать, что средняя направленная скорость электронов u много меньше их хаотической скорости (как это всегда имеет место в стационарных условиях; см. (1,20)). В результате число соударений электрона с ионами начинает существенно зависеть от скорости u, причем падает с ростом u, как $\frac{1}{u^3}$ (ср. (1,5)). Поэтому в поле $E > E_c$ средняя скорость электронов может так сильно возрасти, что роль соударений станет пренебрежимо малой и электроны будут равномерно ускоряться полем. По той же причине наиболее быстрые электроны плазмы — электроны, принадлежащие «хвосту» функции распределения $\left(v \gg \sqrt{\frac{kT_e}{m}}\right)$, — не находятся в устойчивом состоянии уже при $E < E_c$: они равномерно ускоряются полем; такие электроны принято называть «убегающими» (run-away)[14]. Таким образом, для чистой электронно-ионной плазмы в «хвосте» функции распределения стационарное состояние в постоянном поле вообще никогда не осуществляется. Однако в условиях, когда $E \ll E_c$, и особенно в стационарных (для температуры) условиях $E < E_k = \frac{E_k^{\mathrm{I}}}{\sqrt{2}}$ число «убежавших» электронов невелико. В переменном электрическом поле эффект «убегания» электронов отсутствует. Подробное рассмотрение отмеченных здесь нестационарных явлений в низкочастотном и в постоянном электрическом полях выходит за рамки настоящей статьи.

Температура электронов оказывается в первом приближении постоянной (в переменном электрическом поле с частотой $\omega \gg \delta\nu$) и при наличии в плазме внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$. При этом в (1,11) полагаем $\frac{dT_e}{dt} = 0$ и $j_i = \sigma_{ik}E_k$, причем σ_{ik} определяется выражением (1,10). В результате для T_e получаем уравнение

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \left(\frac{E_0}{E_p}\right)^2 (\omega^2 + \nu_0^2) \left\{ \frac{\cos^2\beta}{\omega^2 + \nu^2(T_e)} + \frac{\sin^2\beta}{2\left[(\omega - \omega_H)^2 + \nu^2(T_e)\right]} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin^2\beta}{2\left[(\omega + \omega_H)^2 + \nu^2(T_e)\right]} \right\}. \qquad (1,26)$$

Здесь $\omega_H = |e|\frac{H_0}{mc}$ — гиромагнитная частота и β — угол между полем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}_0$. Из (1,26) видно, что в случае высокочастотного электрического поля ($\omega^2 \gg \nu^2$), если частота ω близка к гирочастоте ω_H, имеет место резонансное возрастание температуры электронов. Это возрастание температуры является следствием отмеченного выше резонансного возрастания проводимости.

В постоянном электрическом поле формула (1,26) также справедлива, если положить $\omega = 0$ и, кроме того, заменить амплитуду E_0 на $\sqrt{2}\,E$, где E — напряженность постоянного электрического поля. Следует,, однако, помнить, что в этом случае ролью ионного тока можно пренебречь, как это всегда делалось выше, только при выполнении условия $\Omega_H \leqslant \nu^{(i)}$, где $\nu^{(i)}$ — частота соударений для ионов.

В рамках элементарной теории уравнения (1,3) и (1,11) для $\mathbf{u}$ и T_e являются исходными при анализе поведения плазмы в произвольном поле, в том числе при любой частоте ω или в случае более сложной зависимости от времени (например, если переменное электрическое поле промодулировано по амплитуде низкой частотой Ω). Именно эти уравнения обычно и используются в теории нелинейных эффектов, возникающих при распространении радиоволн в ионосфере (см. § 3), а также в ряде других случаев.

Отметим, что элементарная теория строго справедлива, только когда частота соударений ν и доля энергии, передаваемой при одном соударении δ, одинаковы для всех электронов, т. е. не зависят от их скорости. В плазме же фактически $\nu = \nu(v)$ и $\delta = \delta(v)$. Замена $\nu(v)$ и $\delta(v)$ их средними или эффективными значениями $\nu_{\text{эфф}}$ и $\delta_{\text{эфф}}$, как это делается в элементарной теории, не является вполне последовательной операцией — точность ее должна контролироваться с помощью кинетического расчета, что и будет проделано ниже (см. § 2,5 б). Понятно, что при слабой зависимости ν и δ от v результаты элементарного и кинетического рассмотрения должны быть близки, что и подтверждается.

§ 2. ПЛАЗМА В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ (КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ)

В кинетической теории состояние электронного газа в плазме, помещенной в электрическое и магнитное поля, описывается функцией распределения $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$; при этом, по определению, среднее число электронов в объеме $d\mathbf{v}\, d\mathbf{r} = dv_x\, dv_y\, dv_z\, dx\, dy\, dz$ равно $f\, d\mathbf{v}\, d\mathbf{r}$, где $\mathbf{v}$ — скорость электронов, а $\mathbf{r}$ — соответствующий им радиус-вектор. Отсюда следует, что интересующие нас электронная плотность N, средняя энергия электронов $\overline{K}$ и электронный ток $\mathbf{j}$ в точке $\mathbf{r}$ в момент t могут быть выражены с помощью функции f следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} N &= \int f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)\, d\mathbf{v}, \\ \overline{K} &= \frac{1}{N} \int \frac{mv^2}{2} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)\, d\mathbf{v}, \\ \mathbf{j} &= \int e\mathbf{v} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)\, d\mathbf{v}. \end{aligned}\right\} \qquad (2,1)$$

2.1. Кинетическое уравнение

Кинетическое уравнение Больцмана, из которого должна быть определена функция f, имеет вид *)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\, \mathrm{grad}_{\mathbf{r}} f + \frac{e}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\right) \mathrm{grad}_{\mathbf{v}} f + S = 0. \qquad (2,2)$$

Здесь S — так называемый интеграл столкновений, описывающий изменение функции f при соударениях электронов между собой, а также со всеми другими частицами плазмы:

$$S = \int\int d\mathbf{v}_1\, d\Omega\, q(u, \theta)\, u \{f(\mathbf{v}) F(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}') F(\mathbf{v}_1')\}, \qquad (2,3)$$

где $\mathbf{v}_1$ — скорость той частицы, с которой соударяется электрон (назовем ее частицей 1), $u = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|$, $q(u, \theta)$ — дифференциальное эффективное сечение рассеяния, $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}_1'$ — скорость электрона и частицы 1 до соударения (после удара их скорости равны соответственно $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$), F — функция распределения частиц 1. Интегрирование в (2,3) проводится по скоростям частицы 1 ($d\mathbf{v}_1$) и по углам рассеяния $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, причем θ — угол между $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}' - \mathbf{v}_1'$.

Для электронов в плазме существенны упругие и неупругие соударения с молекулами (S_m^y и S_m^{Hy}), соударения с ионами (S_i) и между собой (S_e), т. е. в общем случае $S = S_m^y + S_m^{Hy} + S_i + S_e$. При соударениях с тяжелыми частицами (молекулами, ионами) их функцию распределе-

*) Применимость уравнения Больцмана к плазме ограничена условиями $e^2 N^{\frac{1}{3}} \ll kT$ (энергия взаимодействия, приходящаяся на одну частицу, должна быть много меньше ее кинетической энергии). Кроме того, будем считать, что $kT \gg h^2 \frac{N^{\frac{2}{3}}}{m}$ (условие невырожденности плазмы). Вывод кинетического уравнения можно найти, например, в [16].

ния F будем считать максвелловской. Если же рассматриваются соударения между электронами, то $F=f$; благодаря междуэлектронным соударениям уравнение (2,2) — нелинейное.

Посмотрим теперь, как можно упростить уравнение (2,2), используя основные особенности поведения электронов в плазме. Учтем прежде всего, что, как было показано выше при элементарном рассмотрении, в стационарном состоянии хаотическая (тепловая) скорость электрона всегда много больше его направленной скорости. Соответственно следует ожидать, что в тех же условиях и функция распределения в основном зависит лишь от модуля скорости, а не от ее направления. Удобно поэтому выделить в функции распределения ее основную, зависящую только от модуля скорости (симметричную) часть $f_0(v, \mathbf{r}, t)$ и направленную часть f_1, т. е. произвести разложение угловой части функции распределения в пространстве скоростей в ряд по шаровым функциям.

Рассмотрим при этом вначале для простоты изотропный случай ($H_0=0$), а также примем, что пространственный градиент функции распределения направлен по оси z, параллельной полю $\mathbf{E}$. Тогда имеется лишь одно выделенное направление $\mathbf{E}$ (т. е. ось z) и функцию распределения можно разложить в ряд по шаровым функциям нулевого порядка, т. е. по полиномам Лежандра $P_k(\cos\theta_1)$, где θ_1 — угол между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{v}$:

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\theta_1)\, f_k(v, \mathbf{r}, t). \tag{2,4}$$

Подставим теперь разложение (2,4) в уравнение (2,2) и, умножая его на полиномы $P_k(\cos\theta_1)$, проинтегрируем по углам, используя при этом ортогональность и другие свойства полиномов Лежандра (см. [17], стр. 394); учтем также, что $\mathbf{E}\,\mathrm{grad}_{\mathbf{r}} f=E\cos\theta_1\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{E\sin^2\theta_1}{v}\frac{\partial f}{\partial(\cos\theta_1)}$. Мы получаем тогда вместо (2,2) следующую систему зацепляющихся уравнений для функций $f_0, f_1, f_2, \ldots$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f_0}{\partial t}+\frac{v}{3}\frac{\partial f_1}{\partial z}+\frac{eE}{3mv^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2 f_1)+S_0=0,\\
&\frac{\partial f_1}{\partial t}+v\left(\frac{\partial f_0}{\partial z}+\frac{2}{5}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\frac{eE}{m}\left[\frac{\partial f_0}{\partial v}+\frac{2}{5v^3}\frac{\partial}{\partial v}(v^3 f_2)\right]+S_1=0,\\
&\frac{\partial f_2}{\partial t}+v\left(\frac{2}{3}\frac{\partial f_1}{\partial z}+\frac{3}{7}\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)+\frac{eE}{m}\left[\frac{2}{3}v\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v}f_1\right)+\frac{3}{7v^4}\frac{\partial}{\partial v}(v^4 f_3)\right]+S_2=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\text{где}\\
&S_k=\frac{2k+1}{4\pi}\int P_k(\cos\theta_1)\, S\, d\Omega_1.
\end{aligned}\right\} \tag{2,5}$$

Заметим, что при рассмотрении соударений с тяжелыми частицами, когда интеграл соударений является линейным выражением относительно функции распределения электронов f, интеграл S_k зависит лишь от функции f_k. В самом деле, подставляя в интеграл соударений разложение (2,4), умножая его на $P_k(\cos\theta_1)$ и интегрируя по $d\Omega_1$, имеем

$$\begin{aligned}
S_k&=\frac{2k+1}{4\pi}\int d\mathbf{v}_1\, d\Omega\int q(u,\theta)\, uP_k(\cos\theta_1)\Big\{F\sum_k P_k(\cos\theta) f_k-\\
&-F'P_k(\cos\theta_1') f_k'\Big\}\, d\Omega_1=\int d\mathbf{v}_1\, d\Omega q(u,\theta)\, u\{f_k\cdot F-F'\cdot f_k'\cdot P_k(\cos\theta)\}.
\end{aligned} \tag{2,5а}$$

Здесь при интегрировании по $d\Omega_1$ учтено, что $\cos\theta_1'=\cos\theta\cdot\cos\theta_1+\sin\theta\cdot\sin\theta_1\cos\varphi_1$ (θ_1 — угол между $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{E}$), а также использована теорема сложения полиномов Лежандра (подробнее см. [18–20]).

Из (2,5) видно, что полученную цепочку уравнений можно оборвать на двух первых, если функцией f_2 можно пренебречь в сравнении с основной функцией f_0, точнее, если $\frac{\partial f_0}{\partial v} \gg \frac{1}{v^3}\frac{\partial}{\partial v}(v^3 f_2)$ и $\frac{\partial f_0}{\partial z} \gg \frac{\partial f_2}{\partial z}$. Учитывая, что с достаточной степенью точности $S_1 = \nu f_1$ (это будет показано в § 2,2) и соответственно $S_2 \simeq \nu f_2$, можно приближенно выразить функцию f_2 через f_0. Например, в пространственно-однородной плазме $\left(\frac{\partial f}{\partial z} = 0\right)$ в стационарных условиях $\frac{\partial f_1}{\partial t} = i\omega f_1$, $\frac{\partial f_2}{\partial t} \approx i\omega f_2$; поэтому, как ясно из (2,5), $f_1 = \frac{eE}{m(i\omega+\nu)}\frac{\partial f_0}{\partial v}$ и, следовательно,

$$|f_2| \sim \left| \frac{eE}{m(i\omega+\nu)} v \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v} f_1\right)\right| \simeq \frac{e^2E^2}{m^2(\omega^2+\nu^2)} v \left|\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v}\right)\right|.$$

Тогда условие $\frac{\partial f_0}{\partial v} \gg \frac{1}{v^3}\frac{\partial}{\partial v}(v^3 f_2)$ перепишется в виде

$$\frac{e^2E^2}{m^2(\omega^2+\nu^2)}\frac{1}{v^2}\left|\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2\frac{\partial f_0}{\partial v}\right)\right| \ll f_0. \qquad (2,6а)$$

При учете неоднородности плазмы, а также нестационарности нужно требовать, кроме того, соблюдения условий:

$$\left|\frac{\partial f_0}{\partial t}\right| \ll \sqrt{\omega^2+\nu^2}\, f_0, \qquad (2,6б)$$

$$\frac{v}{\sqrt{\omega^2+\nu^2}}\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\right| \ll \left|\frac{\partial f_0}{\partial z}\right|. \qquad (2,6в)$$

Выше $\nu = \nu(v)$ — частота соударений для электрона, имеющего скорость v (см. § 2.2), и ω в (2,6) определено как $\omega \sim \left|\frac{\partial f_2}{\partial t}\right| / f_2$.

В интересующем нас случае стационарного распределения в пространственно-однородной плазме условия (2,6б) и (2,6в) всегда выполнены. Существенным является, следовательно, условие (2,6а). Если ограничиться использованием этого условия для средней скорости $\bar{v} \sim \sqrt{\frac{kT_e}{m}}$ и положить $\frac{\partial f_0}{\partial v} \sim \frac{f_0}{\bar{v}}$, то приходим к требованию

$$\frac{e^2E_0^2}{kT_e(\omega^2+\nu^2(T_e))} \simeq \delta \ll 1,$$

где использовано выражение (1,18) для T_e. Таким образом, условие (2,6а) в применении к средним значениям оказывается тождественным исходному требованию $\delta_{эфф} \ll 1$, которое, как уже указывалось в § 1, всегда выполнено. Посмотрим теперь, как выполняется условие (2,6а) при различных скоростях v. При малых v условие (2,6а) может не выполняться лишь при скоростях электрона, которые в $\sqrt{\delta}$ раз меньше его средней скорости; эта область скоростей обычно малосущественна. Условие (2,6а) может нарушаться и при высоких скоростях электронов. При этом в случае высоких частот ($\omega^2 \gg \nu^2$) это условие не выполнено только в малосущественной области скоростей, когда v в $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$ раз превосходит среднюю скорость. При низких частотах и, в частности, в постоянном поле область скоростей, для которых не выполнено условие (2,6а), вообще говоря, более существенна. Например, в случае соударений с ионами, когда $\nu \sim v^{-3}$ для максвелловской функции распределения f_0, условие (2,6а) не выполняется, если $\left(\frac{mv^2}{kT_e} - 3\right)v^6 \gtrsim \delta\left(\frac{kT_e}{m}\right)^3$, т. е. уже при $v \gg 3\sqrt{\frac{kT_e}{m}}$. В этом случае при высоких скоростях следует проводить особое исследование функции распределения электронов.

Таким образом, условие (2,6а) — условие обрыва цепочки уравнений (2,5) на первых двух — в стационарной пространственно-однородной плазме обычно хорошо выполнено*). Условия (2,6б) и (2,6в) указывают допустимую степень нестационарности и неоднородности в плазме. В силу этих условий энергия и плотность электронов не должна значительно изменяться за время $\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\nu^2}}$, а электронный ток — на эффективной длине свободного пробега электрона $l_{\text{эфф}} = \frac{v}{\sqrt{\omega^2+\nu^2}}$.

Совершенно аналогичное разложение функции распределения можно провести и при наличии в плазме постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0$, а также при произвольном направлении пространственного градиента функции распределения. В этом случае, выделяя по-прежнему симметричную (зависящую только от модуля скорости) часть функции распределения $f_0(v, \mathbf{r}, t)$ и ее направленную часть $\frac{\mathbf{v}}{v}\mathbf{f}_1(v, \mathbf{r}, t)$ и пренебрегая остальными членами $\left(\text{т. е. полагая } f = f_0 + \frac{\mathbf{v}}{v}\mathbf{f}_1\right)$, можно свести уравнение (2,2) к следующей системе уравнений для функций f_0 и $\mathbf{f}_1$[4]:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3}\operatorname{div}_{\mathbf{r}}\mathbf{f}_1 + \frac{e}{3mv^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2\mathbf{E}\mathbf{f}_1) + S_0 = 0, \tag{2,7а}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v\operatorname{grad}_{\mathbf{r}} f_0 + \frac{e\mathbf{E}}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{e}{mc}[\mathbf{H}_0\mathbf{f}_1] + \mathbf{S}_1 = 0. \tag{2,7б}$$

В отсутствие магнитного поля и при $\operatorname{grad}_{\mathbf{r}} f$, параллельном $\mathbf{E}$, уравнения (2,7) совпадают с первыми двумя уравнениями системы (2,5), как это и должно быть. Условия применимости уравнений (2,7) те же, что и условия применимости первых двух уравнений системы (2,5).

2.2. Преобразование интеграла столкновений

Прежде чем перейти к анализу различных типов соударений электрона в плазме, отметим их наиболее существенную особенность: в большинстве случаев основную роль играют соударения, при которых электрон лишь незначительно изменяет свою энергию, а иногда также свой импульс**). В подобных случаях связанное с соударениями изменение функции распределения, т. е. плотности электронов в пространстве скоростей, естественно представить в виде

$$S = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{\text{ст}} = -\operatorname{div}\mathbf{j}_v, \tag{2,8}$$

*) Сказанное относится к вычислению основных членов. Разумеется, что при вычислении малых поправочных членов порядка δ функцию f_2 необходимо учитывать. Это существенно, например, при расчете малых переменных членов порядка $\frac{\delta\nu}{\omega}$ (см. §§ 3.1 и 3.5), если только не соблюдается условие $\frac{\delta\nu}{\omega} \gg \delta$.

**) При упругих, а частично и при неупругих соударениях электронов с нейтральными частицами мало изменяется энергия электрона (из-за малости массы электрона). При соударениях с ионами и при междуэлектронных соударениях в большинстве случаев незначительно изменяется не только энергия но и импульс электрона (из-за особенностей кулоновского взаимодействия).

где $\mathbf{j_v}$ — плотность обусловленного соударениями потока частиц в точке $\mathbf{v}$ пространства скоростей. Соотношение (2,8) представляет собой обычное уравнение непрерывности в пространстве скоростей. Плотность потока $\mathbf{j_v}$ при малых изменениях импульса, естественно, дается следующим выражением:

$$\mathbf{j_v} = \frac{1}{2}\int\int d\mathbf{v}_1\, d\Omega q(u,\theta)\, u\, \Delta\mathbf{v}\, \{f(\mathbf{v})\, F(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v})\, F(\mathbf{v}_1')\}. \qquad (2,9)$$

Здесь $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ — изменение скорости электрона при одном соударении; остальные величины имеют тот же смысл, что и в обычном интеграле столкновений. Можно показать, что выражения (2,8) — (2,9) для интеграла столкновений при $\Delta\mathbf{v} \ll \mathbf{v}$ тождественны обычному выражению (2,3) (см. [21]).

Если функция распределения зависит лишь от модуля скорости (т. е. $f = f_0(v, \mathbf{r}, t)$), то выражения (2,8) — (2,9) принимают особенно простой вид

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= -\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2 j_{v_0}),\\ j_{v_0} &= \frac{1}{2}\int\int d\mathbf{v}_1\, d\Omega q(u,\theta)\, u\, (v'-v)\, \{f_0(v)\, F(\mathbf{v}_1) - f_0(v')\, F(\mathbf{v}_1')\}. \end{aligned}\right\} \qquad (2,10)$$

Заметим также, что в том случае, когда не только скорость электрона, но и состояние частицы 1 (или ее скорость $\mathbf{v}_1$) незначительно изменяется при одном соударении, выражение в фигурных скобках в (2,9)— (2,10) можно упростить, представив его в виде

$$f(\mathbf{v})\, F(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v})\, F(\mathbf{v}_1') = (\Delta\mathbf{v}\, \mathrm{grad}_{\mathbf{v}} f)\, F(\mathbf{v}_1) - (\Delta\mathbf{v}_1\, \mathrm{grad}_{\mathbf{v}_1} F)\cdot f(\mathbf{v}), \qquad (2,9а)$$

где $\Delta\mathbf{v}$ по-прежнему равно $\mathbf{v}' - \mathbf{v}$; $\Delta\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1$. При вычислении интегралов в (2,9), (2,10) следует выразить $\Delta\mathbf{v}$ и $\Delta\mathbf{v}_1$ через скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$, а затем уже проводить интегрирование по $d\mathbf{v}_1$ и $d\Omega$.

а) Упругие соударения с нейтральными частицами (молекулами). При упругом ударе легкой частицы (электрона) о тяжелую ее энергия или модуль скорости изменяется лишь незначительно. Используя это обстоятельство, можно в первом приближении принять, что $v' = v$; $v_1' = v_1$. Учитывая также *), что скорость электрона много больше скорости тяжелой частицы v_1, находим из (2,5а), что

$$\mathbf{S}^y_{m_1} = \int\int d\mathbf{v}_1\, d\Omega q(u,\theta)\, u\, \{\mathbf{f}_1(v)\, F(\mathbf{v}_1) - P_1(\cos\theta)\, \mathbf{f}_1(v')\, F(\mathbf{v}_1')\} =$$
$$= \mathbf{f}_1(v)\cdot\int\int d\mathbf{v}_1\, d\Omega q(u,\theta)\, vF(\mathbf{v}_1)\,(1-\cos\theta) = \nu_m(v)\cdot\mathbf{f}_1(v), \qquad (2,11)$$
$$\nu_m(v) = N_m\cdot v\int q(v,\theta)\,(1-\cos\theta)\, d\Omega.$$

Здесь $\nu_m(v)$ — число соударений электрона, а $q(v,\theta)$ — дифференциальное эффективное сечение упругого рассеяния электрона **). При соударении с твердым шариком радиуса «a» (так можно при малых скоростях

*) В настоящей статье фактически всегда принимается, что средняя энергия тяжелых частиц не превышает значительно средней энергии электронов. Возможны, конечно, и другие условия; например, в солнечных корпускулярных потоках равны обычно не средние энергии, а средние скорости электронов и ионов.

**) В том же приближении находим, что $S_2 = \nu_2(v)\, f_2$, где

$$\nu_2(v) = N_m v\int q(v,\theta)\,(1-P_2(\cos\theta))\, d\Omega.$$

Отсюда ясно, что величины ν и ν_2 одного порядка, что мы уже использовали выше при выводе условий применимости уравнений (2,5) и (2,7).

аппроксимировать упругие соударения электронов с нейтральными частицами), как известно, $q(v, \theta)=\frac{\pi a^2}{4}$ и, следовательно,

$$\nu_m(v)=\pi a^2 N_m v, \tag{2,12}$$

где N_m — концентрация молекул

Для S^y_{m0} в том же приближении получается нуль, как это и должно быть при полном пренебрежении энергообменом. Для вычисления S^y_{m0} можно воспользоваться выражением (2,9а) и (2,10), так как энергия или модуль скорости электрона, как уже отмечалось выше, лишь незначительно изменяется при одном ударе. Найдем теперь, как изменяется при одном ударе модуль скорости электрона. Как известно из законов упругого удара (см., например, [22], § 17), скорость электрона после соударения

$$\mathbf{v}=\frac{m\mathbf{v}'+M\mathbf{v}_1'}{m+M}+\mathbf{n}\frac{M}{m+M}|\mathbf{v}'-\mathbf{v}_1'|\simeq\mathbf{n}v'\left(1-\frac{v_1'}{v'}\cos\psi\right)+\mathbf{v}_1'$$

(в последнем выражении учтено, что скорость молекулы $v_1\ll v$; ψ — это угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный параллельно $\mathbf{v}'-\mathbf{v}_1'\simeq\mathbf{v}'$). Отсюда следует, что $v\simeq v'-v_1'(\cos\theta_1-\cos\psi)$ и $\Delta v=$ $=v'-v\simeq v_1'(\cos\theta_1-\cos\psi)\simeq v_1(\cos\theta_1-\cos\psi)=v_1(\cos\theta\cdot\cos\psi+\sin\theta\sin\psi\times$ $\times\cos\varphi-\cos\psi)$. Здесь θ_1 — угол между $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{n}$, а θ и φ — углы рассеяния (т. е. углы между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}-\mathbf{v}'\simeq\mathbf{v}$). Наконец, непосредственно из закона сохранения энергии при соударении следует, что $\Delta v_1=-\frac{m}{M}\frac{v}{v_1}\Delta v$.

Подставим эти выражения в интеграл (2,10) (с учетом (2,9а)) и проинтегрируем его по $d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ и $d\mathbf{v}_1=v_1^2\sin\psi\,dv_1\,d\psi\,d\varphi_1$, принимая при этом, что тяжелые частицы распределены по Максвеллу с температурой T, т. е. что $F(\mathbf{v}_1)=\left(2\pi\frac{kT}{M}\right)^{-\frac{3}{2}}N_m\exp\left[\frac{-Mv_1^2}{2kT}\right]$.

Тогда имеем

$$j_{v_0}=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty v_1^2\,dv_1\int\limits_0^\pi\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^\pi\sin\psi\,d\psi\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_1\cdot v\cdot q(v,\theta)\left\{v_1^2(\cos\theta\cdot\cos\psi+\right.$$
$$+\sin\theta\sin\psi\cos\varphi-\cos\psi)^2\frac{\partial f_0}{\partial v}F+\frac{m}{M}vv_1(\cos\theta\cdot\cos\psi+\sin\theta\sin\psi\cos\varphi-$$
$$\left.-\cos\psi)^2\frac{\partial F}{\partial v_1}\cdot f_0\right\}=\nu_m(v)\frac{kT}{M}\frac{\partial f_0}{\partial v}+\nu_m(v)\frac{m}{M}vf_0.$$

Здесь $\nu_m(v)$ — частота соударений электрона, определенная согласно (2.11). Полученное выражение для потока в пространстве скоростей, обусловленного соударениями электронов с тяжелыми частицами, имеет прозрачный физический смысл: поток j_{v_0} состоит, во-первых, из «потока диффузии» $-\nu\frac{kT}{M}\frac{\partial f_0}{\partial v}=\overline{\frac{d}{dt}v^2}\frac{\partial f_0}{\partial v}$, который возникает при наличии градиента в распределении электронов по скоростям и обусловлен тем, что частицы, с которыми сталкивается электрон, имеют отличную от нуля скорость; во-вторых, в j_{v_0} вносит свой вклад «поток переноса» $\nu\frac{m}{M}vf_0=\overline{\frac{d}{dt}v}f_0$, описывающий потери хаотической скорости (или энергии) электрона при соударениях.

Искомое выражение для интеграла столкновений S^y_{m0} имеет, следовательно, вид

$$S^y_{m0}=-\frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\delta_{yn}\nu_m\left[\frac{kT}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v}+vf_0\right]\right\}. \tag{2,13}$$

Здесь $\delta_{yn} = \frac{2m}{M}$ — средняя доля энергии, теряемая электроном при одном упругом ударе *). Сравнивая (2,13) и (2,11), убеждаемся, что разложение интеграла соударений идет по степеням параметра δ_{yn}, так что следующими членами всегда можно пренебречь.

б) Неупругие соударения с нейтральными частицами. Неупругие соударения электронов с нейтральными частицами сопровождаются возбуждением вращательных, колебательных или оптических уровней, а также ионизацией. Возможны, кроме того, так называемые удары второго рода, когда энергия возбужденного состояния молекулы передается налетающему электрону. Точный учет всех этих неупругих процессов весьма сложен; кроме того, их сечения известны лишь в немногих случаях (см. [23, 24]). Поэтому полной теории неупругих соударений, в которой задача решалась бы так же точно, как и в случае упругих соударений, не существует. Несмотря на это, можно довольно просто рассмотреть два важных предельных случая; именно рассмотрим случаи, когда энергия электронов значительно больше, чем энергия возбуждаемого уровня или энергия ионизации ($K \gg \hbar\omega$), и когда, напротив, энергия электронов лишь незначительно превышает энергию возбуждения ($K - \hbar\omega \ll K$).

В первом случае выражение для интеграла неупругих соударений находится фактически так же, как и при упругих соударениях. Необходимо только учесть, что при неупругом ударе энергия, теряемая электроном, идет в основном на возбуждение молекулы, что связано с передачей энергии $\hbar\omega$ $\left(\text{таким образом, } v' - v = \frac{\hbar\omega}{mv}\right)$; нейтральная частица при этом просто переходит из основного состояния в возбужденное. Тогда имеем [25]

$$\left.\begin{aligned} S_{m0}^{Hy} &= -\frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2 r_\omega\left[\frac{kT_\omega}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_0\right]\right\}, \\ \mathrm{S}_{m1}^{Hy} &= \nu_\omega \mathbf{f}_1. \end{aligned}\right\} \tag{2,14}$$

Здесь ν_ω — число неупругих соударений, сопровождающихся возбуждением кванта $\hbar\omega$ (как мы будем называть передачу молекуле энергии $\hbar\omega$, идущей на возбуждение какого-то уровня)

$$\nu_\omega(v) = v\,(N_m^0 + N_m^b)\int q_\omega(v,\ \theta)(1-\cos\theta)\,d\Omega,$$

причем $q_\omega(v,\ \theta)$ — дифференциальное эффективное сечение рассеяния при неупругом соударении, N_m^0 и N_m^b — числа молекул соответственно

*) По определению $U = \delta K \nu$ есть средняя энергия, передаваемая электронами со скоростью v тяжелым частицам при $K \gg \frac{3}{2}kT$ (см. § 1.2). С другой стороны, $U = N_m v \int \frac{m^2(\Delta \mathbf{v})^2}{2M} q(v,\ \theta)\,d\Omega$, так как тяжелая частица, которая может считаться неподвижной, при соударении получает импульс $m\Delta\mathbf{v} - m(\mathbf{v}' - \mathbf{v})$ и энергию $\frac{[m(\Delta\mathbf{v})]^2}{2M}$ (удар считается упругим, линейный по $\Delta\mathbf{v}$ член в выражении для энергии исчезает, при усреднении по направлению скоростей молекул). Выбирая направление первоначальной скорости электрона $\mathbf{v}'$ за ось, имеем $(\Delta v_z)^2 = v^2(1-\cos\theta)^2$ и $(\Delta v_x)^2 + (\Delta v_y)^2 = v^2\sin^2\theta$. Следовательно, $U = \frac{m^2}{M}v^3 N_m \int q(v,\ \theta)(1-\cos\theta)\,d\Omega = \frac{2m}{M}K\nu$, где $K = \frac{mv^2}{2}$; а ν определено формулой (2,11). Отсюда, очевидно, $\delta_{yn} = \frac{2m}{M}$, причем этот результат не зависит от сечения $q(v,\ \theta)$.

в основном и в возбужденном состояниях. Далее, $r_\omega(v)$ — доля энергии, теряемая в единицу времени электроном на возбуждение кванта $\hbar\omega$

$$r_\omega(v) = \frac{2\hbar\omega}{mv^2}(N_m^0 - N_m^b)\, v \int q_\omega(v, \theta)\, d\Omega,$$

и T_ω — эффективная температура

$$T_\omega = \frac{\hbar\omega}{2k}\,\frac{N_m^0 + N_m^b}{N_m^0 - N_m^b}.$$

Существенно подчеркнуть, что в случае, когда квант $\hbar\omega$ мал не только в сравнении с энергией электрона, но и в сравнении с энергией нейтральных частиц ($\hbar\omega \ll kT$) и если нейтральные частицы распределены по Больцману $\frac{N_m^b}{N_m^0} = \exp\left\{-\frac{\hbar\omega}{kT}\right\}$ (т. е. если соударения с электронами не меняют существенно числа возбужденных молекул), то эффективная температура T_ω равна температуре молекул T.

Во втором предельном случае, когда энергия электрона лишь немного превосходит энергию возбуждения, электрон при соударении просто переходит из области больших энергий в область малых энергий ($K \sim 0$)[26,27]. Поэтому при больших энергиях

$$\left.\begin{aligned} S_{m0}^{Hy} &= \nu_\omega f_0 = N_m v \int q_\omega(v, \theta)\, d\Omega, \\ \mathbf{S}_{m1}^{Hy} &= \nu_\omega \mathbf{f}_1, \end{aligned}\right\} \tag{2,15}$$

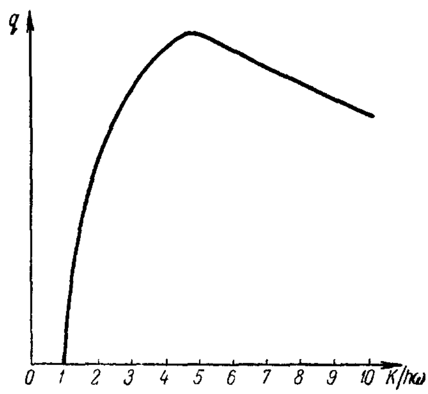

Рис. 3.

где ν_ω — полная частота возбуждений уровня $\hbar\omega$ (предполагается, что $N_m^b \ll N_m^0$). То обстоятельство, что электрон не просто исчезает, а переходит в область малых энергий ($K \sim 0$), учитывается при этом добавлением к уравнению для f_0 дельтаобразного источника электронов $-\frac{Q}{4\pi v^2}\delta(0)$, где $Q = \frac{dN}{dt} = 4\pi \int\limits_{\hbar\omega}^{\infty} \nu_\omega f_0 v^2\, dv$.

Заметим в заключение, что в общем случае характерная зависимость полного сечения неупругого соударения от энергии электрона имеет вид, изображенный на рис. 3: полное сечение $q(v)$ равно нулю при $K < \hbar\omega$, затем оно нарастает, достигая максимума $K \sim (3 \div 5)\,\hbar\omega$, а затем уже медленно падает. Поскольку при одном ударе электрон теряет энергию $\hbar\omega$, то, как ясно из рисунка, наиболее вероятны, вообще говоря, такие неупругие соударения, при которых доля теряемой электроном энергии невелика.

Заметим также, что в тех случаях, когда могут возбуждаться не один, а несколько уровней $\hbar\omega_i$, $S = \sum_i S_{\omega_i}$. Следует, кроме того, учесть, что часть неупругих соударений — ионизация и эффективная рекомбинация (рекомбинация, захват электрона молекулой и т. д.) — сопровождаются изменением числа электронов в плазме. В интеграл соударений для функции f_0 нужно поэтому добавить члены $-\nu_r(v)f_0+\int\limits_{\sqrt{\frac{2\hbar\omega_i}{m}}}^{\infty}\nu_{i0n}(v',v)f_0(v')v'^2\,dv'$, первый из которых описывает эффективную рекомбинацию, а второй — ионизацию. Здесь $\nu_r(v)$—полная частота рекомбинации, а $\nu_{i0n}(v',v)=N_m v'\int q_{i0n}(v',v,\theta)\,d\Omega$— частота ионизации, т. е. число ионизаций, производимых в 1 *сек* электроном, имеющим скорость v', и приводящих к появлению еще нового электрона, имеющего скорость v, $\hbar\omega_i$ — энергия ионизации. Эти члены обычно не оказывают значительного влияния на вид функции распределения (см.[9] § 47,[15] § 56); ими определяется, однако, концентрация электронов в плазме.

в) Соударения с ионами. Для описания упругих соударений электронов с ионами полностью применимы полученные выше общие выражения для интеграла упругих столкновений электрона с нейтральными частицами, так как при их выводе использовалось лишь то, что $m \ll M$. Необходимо только вычислить число соударений электрона с ионами $\nu_i(v)$. Для этого следует подставить в (2,11) формулу Резерфорда для дифференциального эффективного сечения рассеяния электрона на ионе. Тогда имеем

$$\nu_i(v)=2\pi N_i v\left(\frac{e^2}{2mv^2}\right)^2\int\limits_{\theta_{min}}^{\pi}\frac{1-\cos\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\sin\theta\,d\theta=2\pi N_i\frac{e^4}{m^2v^3}\ln\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\theta_{\min}}{2}\right),$$

где N_i — концентрация ионов, которые для простоты считаются однократными.

Если рассматривать рассеяние электрона на свободном ионе, то интегрировать нужно от 0 до π (т. е. $\theta_{\min}=0$) и частота соударений логарифмически расходится при малых θ. Однако в плазме ионы не совсем свободны: вследствие взаимодействия между ними и электронами поле каждого иона в равновесных условиях, как хорошо известно, является кулоновским лишь до расстояний порядка дебаевского радиуса D, где *)

$$D=\left[\frac{kTkT_e}{4\pi e^2N(kT+kT_e)}\right]^{1/2}.$$

На расстояниях, бо́льших D, кулоновское поле иона вследствие экранировки резко (экспоненциально) спадает (см., например,[15] § 56). Следовательно, D — это максимальное расстояние, при котором еще происходит существенное взаимодействие электрона с ионом, т. е. максимальный параметр удара. Через него может быть выражен минимальный угол рассеяния (см., например,[22] § 19): $\theta_{\min}=2\operatorname{arctg}\frac{e^2}{mv^2D}\simeq\frac{2e^2}{mv^2D}$. Поэтому

$$\nu_i(v)=2\pi N_i\frac{e^4}{m^2v^3}\ln\left(1+\frac{D^2m^2v^4}{e^4}\right). \tag{2,16}$$

Существенно, что $\frac{D^2(kT_e)^2}{e^4}\sim\left(\frac{kT_e}{e^2N^{\frac{1}{3}}}\right)^3$ в интересующих нас случаях всегда является большой величиной (см. сноску на стр. 214). Это означает, что второй член в логарифме всегда является главным. Следова-

*) Это выражение справедливо при $N_i=N$, как это имеет место в равновесии при отсутствии отрицательных ионов; в общем же случае нужно заменить N на концентрацию положительных ионов N_+.

тельно, основной вклад в число соударений электрона с ионами вносит слабое рассеяние — рассеяние на малые углы. При одном таком ударе не только энергия, но и импульс электрона меняются незначительно. В самом деле, доля энергии, теряемая электроном при рассеянии на угол θ, равна $\delta_k = \frac{2m}{M}(1-\cos\theta)$. Учитывая, что основную роль играют соударения, приводящие к рассеянию на малый угол порядка $\theta_{\min}$, находим, что $\delta_k \sim \delta_{k\,\min} = \theta_{\min}^2 \frac{m}{M} = \frac{m}{M}\left(\frac{e^2N^{\frac{1}{3}}}{kT_e}\right)^3 \ll 1$. Аналогично изменение импульса $\delta_p = |\mathbf{p}-\mathbf{p}_1| \,/\, |\mathbf{p}| \sim \delta_{p\,\min} = \left(\frac{e^2N^{\frac{1}{3}}}{kT_e}\right)^3 \ll 1$. Следует подчеркнуть, что хотя изменение импульса при одном ударе мало, но изменение энергии — значительно меньше: $\frac{\delta_k}{\delta_p} \sim \frac{m}{M}$.

Рассеяние на большие углы добавляет в число соударений лишь член порядка единицы, который мал в сравнении с основным логарифмическим членом. К такой же поправке в равновесной плазме приводит точное решение задачи о рассеянии в дебаевском поле, а также рассмотрение не учтенного в формуле (2,16) взаимодействия на расстояниях, бóльших дебаевского (так называемые коллективные эффекты; см., например, [28, 29]).

Следует также отметить, что выражение (2,16) получается в предположении о справедливости классической теории, т. е. при условии $\frac{e^2zZ}{hv} \gg 1$; при $Z=1$ это означает, что $v < 3\cdot 10^8$ *см/сек*, или $T_e = \frac{mv^2}{3k} \ll \ll 3\cdot 10^5\,°\mathrm{K}$. Квантовый расчет приводит, однако, только к изменению логарифмического члена, например, при $\frac{e^2}{hv} \ll 1$ (т. е. при $T_e \gg 3\cdot 10^5\,°\mathrm{K}$) в (2,16) нужно заменить под логарифмом $\frac{D^2m^2v^4}{e^4}$ на $\frac{4D^2m^2v^2}{h^2} = \frac{D^2m^2v^4}{e^4}\cdot\frac{4e^4}{h^2v^2}$. Несколько изменяется выражение под логарифмом также в переменном электрическом поле, частота которого больше, чем $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2N}{m}}$, так как в этом случае среднее время соударения $\Delta\tau \sim \frac{D}{\sqrt{\frac{kT_e}{m}}} \sim \frac{1}{\omega_0}$ больше, чем время $\frac{1}{\omega}$, в течение которого меняется поле (см. [15], §§ 59, 81, 82). Наконец, аналогичным образом в формулу (2,16) нужно ввести изменения, если $\omega_H > \omega_0$; в этом случае средний радиус кривизны $r_H \sim \sqrt{\frac{kT_e}{m}} \,/\, \omega_H$ меньше дебаевского радиуса $D \sim \sqrt{\frac{kT_e}{m}} \,/\, \omega_0$. Все эти изменения, если не говорить о предельных случаях ($\omega \gg \omega_0$ или $\omega_H \gg \omega_0$), практически малосущественны, так как изменяют эффективное число соударений лишь на проценты и лишь иногда на 10—20%.

Неупругие соударения электронов с ионами, приводящие к их возбуждению и к кратной ионизации, фактически ничем не отличаются от неупругих соударений с нейтральными частицами, рассматривавшихся выше. Однако в связи с большим значением максимального параметра упругого удара (D) роль неупругих соударений сильно понижается. Соударения, сопровождающиеся тормозным излучением электронов, существенные при высоких энергиях электронов, здесь рассматриваться не будут (см., например, [11]).

г) Междуэлектронные соударения. Основную роль при соударении электрона с ионами, как мы видели выше, играют дальние соударения, приводящие к слабому рассеянию. И энергия, и импульс электрона при одном таком ударе изменяются лишь незначительно. Это является следствием особенностей кулоновского взаимодействия и потому относится не только к соударениям электронов с ионами, но и к соударениям между самими электронами. Разница состоит лишь в том, что доля энергии и доля импульса, теряемые электроном при соударени с электроном одного порядка $\frac{\delta_k}{\delta_p} \sim 1$, в то время как при соударении с ионом $\frac{\delta_k}{\delta_p} \sim \frac{m}{M}$ (см. § 2.2в).

Таким образом, при рассмотрении интеграла междуэлектронных столкновений можно использовать приведенное выше дифференциальное выражение для S. Кроме того, в нем можно провести еще интегрирование по углам рассеяния $d\Omega$ (воспользовавшись тем, что $q(\theta, u)$ имеет острый максимум при $\theta \sim 0$). Тогда получается, что для интеграла столкновений между электронами справедливо выражение (2,8), где [21]

$$\mathbf{j}_\mathbf{v} = \frac{1}{2N} \int d\mathbf{v}_1 \nu(u) \{u^2 (f(\mathbf{v}) \operatorname{grad}_{\mathbf{v}_1} f(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}_1) \operatorname{grad}_\mathbf{v} f(\mathbf{v})) - \\ - \mathbf{u}[f(\mathbf{v})(\mathbf{u} \operatorname{grad}_{\mathbf{v}_1} f(\mathbf{v}_1)) - f(\mathbf{v}_1)(\mathbf{u} \operatorname{grad}_\mathbf{v} f(\mathbf{v})]\}. \quad (2,17)$$

Здесь $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$, $\nu(u)$ — число соударений (2,16), где нужно заменить v на u и N_i на $N_e \equiv N$; учтено также, что рассеивающие частицы являются электронами, т. е. что $F(\mathbf{v}_1) \equiv f(\mathbf{v}_1)$.

Рассмотрим теперь S_{0e} — интеграл междуэлектронных соударений для функции f_0. Заметим при этом, что вследствие нелинейности интеграла междуэлектронных соударений интегралы S_{ke} зависят, вообще говоря, уже не только от функции f_k. Однако интеграл S_{0e} зависит лишь от f_0, так как члены типа $f_0 \mathbf{f}_1$ выпадают при интегрировании по углам, а членами типа $\mathbf{f}_1^2$ можно пренебречь в сравнении с f_0^2 (поскольку, как ясно из (2,5), $\mathbf{f}_1^2 \leqslant \delta f_0^2$, а вся система уравнений (2,7) справедлива лишь с точностью до членов $O(\delta)$). Поэтому, полагая в (2,17) $f = f_0(v)$, нетрудно провести интегрирование по углам. Тогда

$$S_{0e} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \left[A_1(f_0) v f_0 + A_2(f_0) \frac{\partial f_0}{\partial v} \right] \right\}, \quad (2,18)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{N} \int d\mathbf{v}_1 v_1 \frac{\partial f_0}{\partial v_1} (1 - \cos^2 \theta_1) \nu(u) = \\ &= \frac{4\pi \nu(v)}{N} \int_0^v v_1^2 f_0(v_1)\, dv_1, \\ A_2 &= \frac{1}{N} \int v_1^2 f_0 (1 - \cos^2 \theta_1) \nu(u)\, d\mathbf{v}_1 = \\ &= \frac{4\pi \nu(v)}{3N} \left\{ \int_0^v v_1^4 f_0(v_1)\, dv_1 + v^3 \int_v^\infty v_1 f_0(v_1)\, dv_1 \right\}. \end{aligned}\right\} \quad (2,18\text{a})$$

Здесь θ_1 — угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$, $u = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|$; при интегрировании по углам изменением логарифмического члена в $\nu(u)$ пренебрегалось $\left(\text{в сравнении с изменением основного члена} \sim \frac{1}{u^3}\right)$[30, 12, 31]. Для быстрых электронов, скорость которых v много больше средней скорости электронов плазмы, коэффициенты A_1 и A_2 принимают простой вид: $A_1 = \nu(v)$;

$A_2 = \frac{2}{3m}\overline{K}\cdot\nu(v)$, где $\overline{K}$ — средняя энергия рассеивающих электронов $\left(\text{в случае максвелловского распределения электронов по скоростям } \frac{2}{3m}\overline{K} = \frac{kT_e}{m}\right)$.

Заметим, что если умножить выражение (2,18) для S_{0e} на v^2 или на v^4 и проинтегрировать его по всем скоростям v (от 0 до ∞), то соответствующий интеграл тождественно обращается в нуль, независимо от вида функции $f_0(v)$:

$$\int_0^\infty S_{0e}\cdot v^2\,dv = 0, \qquad \int_0^\infty S_{0e}v^4\,dv = 0. \tag{2,18б}$$

Эти соотношения отражают сохранение числа частиц и энергии при соударении между электронами. Для максвелловского распределения, разумеется, $S_{0e} = 0$.

Интеграл электронных столкновений для функции $\mathbf{f}_1$ зависит уже как от $\mathbf{f}_1$, так и от f_0. Выражение для S_{1e}, как ясно непосредственно из (2,3), имеет вид

$$S_{1e} = \frac{3}{4\pi}\int q_e(u,\theta)\,u\frac{\mathbf{v}}{v}\left\{\frac{\mathbf{v}\mathbf{f}_1(v)}{v}f_0(v_1) + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathbf{v}_1\mathbf{f}_1(v_1)}{v_1}f_0(v) - \frac{\mathbf{v}'\mathbf{f}_1(v')}{v'}f_0(\mathbf{v}_1) - \frac{\mathbf{v}_1'\mathbf{f}_1(v_1')}{v_1'}f_0(v')\right\}d\mathbf{v}_1\,d\Omega\,d\Omega_1. \tag{2,19}$$

Заметим, что выражение для интеграла S_{1e} можно получить и из (2,17) (где использован факт слабого рассеяния электрона при каждом соударении). В этом случае S_{1e} представляет собой довольно сложное интегро-дифференциальное выражение, линейное относительно $\mathbf{f}_1$ и содержащее большое количество членов. Поэтому мы здесь приводить его не будем, отсылая к соответствующим работам[32–34].

2.3. Решение кинетического уравнения. Сильно ионизированная плазма

Окончательно система уравнений для функции распределения электронов $f(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = f_0(v,\mathbf{r},t) + \frac{\mathbf{v}}{v}\mathbf{f}_1(v,\mathbf{r},t)$, т. е. для функций f_0 и $\mathbf{f}_1$, может быть представлена в виде

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3}\operatorname{div}_{\mathbf{r}}\mathbf{f}_1 + \frac{e}{3mv^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2\mathbf{E}\mathbf{f}_1) =$$
$$= \frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\delta_{yn}(\nu_m^y + \nu_i)\left[\frac{kT}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} + vf_0\right]\right\} +$$
$$+ S_{m0}^{Hy}(f_0) + \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\left[A_1(f_0)vf_0 + A_2(f_0)\frac{\partial f_0}{\partial v}\right]\right\}, \tag{2,20а}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v\operatorname{grad}_{\mathbf{r}} f_0 + \frac{e\mathbf{E}}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{e}{mc}[\mathbf{H}_0\mathbf{f}_1] = -\nu(v)\mathbf{f}_1 - S_{1e}(\mathbf{f}_1). \tag{2,20б}$$

Здесь $\delta_{yn} = \frac{2m}{M}$; ν_m^y и ν_i — число упругих соударений электрона с молекулами (2,12) и с ионами (2,16), $\nu(v) = \nu_m^y(v) + \nu_i(v) + \nu_m^{Hy}(v)$ — полное число соударений электрона, где

$$\nu_m^{Hy}(v) = \sum v\,(N_{mi}^0 + N_{mi}^b)\int q_{\omega_i}(v,\theta)(1-\cos\theta)\,d\Omega \tag{2,14а}$$

— число неупругих соударений электрона с молекулами*). Далее, $S_{m0}^{Hy}(f_0)$ — интеграл столкновений для функции f_0, описывающий неупругие соударения электронов с молекулами (выражения для $S_{m0}^{Hy}(f_0)$ в двух предельных случаях приведены в § 2.2б), $A_1(f_0)$, $A_2(f_0)$ и $S_{1e}(\mathbf{f}_1)$ — интегральные выражения (2,18а), (2,19), описывающие изменение функций $\mathbf{f}_0$ и $\mathbf{f}_1$ за счет соударений между электронами.

Переходя теперь к решению уравнений (2,20), остановимся прежде всего на одной их особенности, которая будет существенно использована в дальнейшем. Как уже отмечалось в § 1, время релаксации для энергии электронов $\tau^{(h)} = \frac{1}{\delta_{эфф}\nu_{эфф}}$ всегда много больше, чем время релаксации для их импульса $\tau = \frac{1}{\nu_{эфф}}$. В связи с этим время релаксации для функции f_0 много больше, чем для функции $\mathbf{f}_1$. В результате функция f_0 всегда изменяется во времени медленнее, чем функция $\mathbf{f}_1$; следовательно, при интегрировании уравнения (2,20б) для функции $\mathbf{f}_1$ функцию f_0 можно считать в первом приближении постоянной, не зависящей от времени. Благодаря этому существенно облегчается интегрирование уравнения (2,20б). Получаемое при этом простое приближенное выражение для $\mathbf{f}_1$, как показано в [35], справедливо с точностью до членов меньше или порядка $\delta_{эфф}$, т. е. с той же степенью точности, с которой справедливы и сами уравнения (2,7), (2,20). Задача сводится, таким образом, к интегрированию лишь одного уравнения для функции f_0.

В уравнении для функции f_0 последний член в правой части уравнения, обусловленный соударениями между электронами, имеет порядок $\nu_e f_0$, где ν_e — частота междуэлектронных соударений. Остальные члены, описывающие соударения электронов с тяжелыми частицами, имеют порядок $\delta\nu f_0$, где $\nu = \nu_m + \nu_i$. Ясно, что в зависимости от соотношения между ν_e и $\delta\nu$ вид функции f_0 определяется либо междуэлектронными соударениями, либо соударениями электронов с тяжелыми частицами. Поэтому ниже вначале будут рассмотрены отдельно оба эти существенные предельные случаи: случай «сильно ионизированной плазмы», когда $\nu_e \gg \delta\nu$, и случай «слабо ионизированной плазмы», когда $\nu_e \ll \delta\nu$ (в полностью ионизированной плазме всегда $\nu_e \gg \delta\nu = \delta\nu_i$, так как $\delta \ll 1$, а $\nu_e \sim \nu_i$; напротив, при очень малой степени ионизации, когда концентрация электронов достаточно мала, $\nu_e \ll \delta\nu = \delta\nu_m$; термины «сильно ионизированная» и «слабо ионизированная», разумеется, имеют условный характер). Решению задачи при любой концентрации

---

*) Выражение для S_{m1}^{Hy}, строго говоря, следовало бы записывать в виде

$$S_{m1}^{Hy} = v \sum_i (N_{mi}^0 + N_{mi}^b) \int q_{\omega_i}(v, \theta)\, d\Omega \cdot \mathbf{f}_1(v) - \\ - v \sum_i N_{mi}^0 \int q_{\omega_i}(v, \theta) \cos\theta \, d\Omega \mathbf{f}_1\left(\sqrt{v^2 + \frac{2\hbar\omega_i}{m}}\right) - \\ - v \sum_i N_{mi}^b \int q_{\omega_i}(v, \theta) \cos\theta \, d\Omega \mathbf{f}_1\left(\sqrt{v^2 - \frac{2\hbar\omega_i}{m}}\right).$$

Нетрудно видеть, однако, что в силу условия $\delta_{эфф} \ll 1$, выполнение которого необходимо для справедливости самих уравнений (2,20), выражение для S_{m1}^{Hy} можно приближенно представить в виде (2,14а). Допускаемая при этом ошибка в среднем не превосходит $\delta_{эфф}$.

электронов, т. е. при любом соотношении между ν_e и $\delta\nu$, посвящен § 2, 5а. Там же устанавливается критерий для применения формул, полученных в каждом из указанных выше предельных случаев.

а) Функция распределения (максвелловское распределение). В сильно ионизированной плазме, когда $\nu_e \gg \delta\nu$, вид функции f_0 определяется междуэлектронными соударениями. Решение уравнения (2,20а) в этом случае следует искать методом последовательных приближений $f_0 = f_{00} + f_{01} + \ldots$, учитывая в нулевом приближении, естественно, лишь соударения между электронами. В однородной плазме из (2,20а) мы получаем тогда следующую цепочку уравнений:

$$S_{0e}(f_{00}) = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\left[A_1(f_{00})\,vf_{00} + A_2(f_{00})\frac{\partial f_{00}}{\partial v}\right]\right\} = 0, \qquad (2{,}21а)$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\left[A_1(f_{01})\,vf_{00} + A_1(f_{00})\,vf_{01} + A_2(f_{01})\frac{\partial f_{00}}{\partial v} + A_2(f_{00})\frac{\partial f_{01}}{\partial v}\right]\right\} =$$
$$= \frac{\partial f_{00}}{\partial t} + \frac{e}{3mv^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2\mathbf{E}\mathbf{f}_{10}) - \frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\delta_{yk}(\nu_m^y + \nu_i)\left[\frac{kT}{m}\frac{\partial f_{00}}{\partial v} + vf_{00}\right]\right\} + S_{m0}^{Hy}(f_{00}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2{,}21б)$$

Из (2,21а) сразу видно, что функция нулевого приближения f_{00} — максвелловская:

$$f_{00} = N\left(\frac{m}{2\pi kT_e}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{mv^2}{2kT_e}\right\}, \qquad (2{,}22)$$

так как именно для максвелловского распределения интеграл междуэлектронных столкновений (2,18) обращается в нуль. Физически этот результат вполне понятен: за счет междуэлектронных соударений максвелловское распределение должно установиться за время $\frac{1}{\nu_e}$; при $\nu_e \gg \delta\nu$ этот процесс установления значительно быстрее процесса передачи энергии тяжелым частицам, а значит функция f_0 должна быть близка к максвелловской. При этом плотность электронов N и электронная температура T_e в (2,22) не должны обязательно быть постоянными, а являются некоторыми функциями времени. Они определяются из условия разрешимости уравнения (2,21б) для следующего (первого) приближения. В самом деле, как указывалось в § 2.2г (см. 2,18б), если умножить левую часть уравнения (2,21б) на v^2 или v^4 и проинтегрировать по скоростям, то соответствующий интеграл тождественно обращается в нуль (независимо от вида функции f_{01}). Следовательно, и правая часть уравнения (2,21б) также должна при этом обратиться в нуль. Это и приводит к уравнениям для плотности и температуры электронов. В самом деле, умножая уравнение (2,11б) на $4\pi v^2$ и интегрируя его по v, находим

$$\frac{d}{dt}\left(4\pi\int_0^\infty v^2 f_{00}\,dv\right) + \int_0^\infty 4\pi v^2 S_{m0}^{Hy}(f_{00})\,dv = 0,$$

или, учитывая (2,22),

$$\frac{dN_e}{dt} + (\nu_{rec} - \nu_{ion})N_e = 0, \qquad (2{,}23)$$

где

$$\nu_{ion} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT_e}\right)^{3/2}\int_0^\infty\int_{\sqrt{\frac{2\hbar\omega_i}{m}}}^\infty v^2 v'^2 \nu_{ion}(v, v')\exp\left\{\frac{-mv'^2}{2kT_e}\right\}dv\,dv'$$

— полная частота ионизации, а

$$\nu_{rec} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT_e}\right)^{3/2}\int\limits_0^\infty v^2 \exp\left\{\frac{-mv^2}{2kT_e}\right\}\nu_r(v)\,dv$$

— полная частота эффективной рекомбинации (см. § 2.2б). Уравнение (2,23) обычно называют уравнением баланса ионизации *).

Совершенно анелогично, умножая уравнение (2,21б) на $\frac{mv^2}{2}\cdot 4\pi v^2$ и интегрируя его по v, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(2\pi m\int\limits_0^\infty v^4 f_{00}\,dv\right) - \frac{4\pi e}{3}\mathbf{E}\int\limits_0^\infty v^3 \mathbf{f}_{10}\,dv + \delta_{yn} 2\pi m\int\limits_0^\infty v^3(\nu_m^y + \nu_i)\times$$
$$\times\left(v f_{00} + \frac{kT}{m}\frac{\partial f_{00}}{\partial v}\right)dv + 2\pi m\int\limits_0^\infty v^4 S_{m0}^{Hy}(f_{00})\,dv = 0.$$

Учитывая (2,22) и (2,23), переписываем это уравнение в виде

$$\frac{dT_e}{dt} + \delta_{\text{эфф}}(T_e)\,\nu_{\text{эфф}}(T_e)\,(T_e - T) = \frac{2e\mathbf{E}}{3kN_e}\,\mathbf{j}_t(T_e). \qquad (2,24)$$

Здесь через $\nu_{\text{эфф}}$ обозначен параметр, определяющийся соотношением

$$\nu_{\text{эфф}}(T_e) = \frac{4\pi m}{3N_e kT_e}\int\limits_0^\infty v^4 \nu(v) f_{00}\,dv =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{kT_e}\right)^{5/2}\int\limits_0^\infty \nu(v)\,v^4 \exp\left\{-\frac{mv^2}{2kT_e}\right\}dv, \qquad (2,25)$$

где $\nu(v) = \nu_m^y(v) + \nu_i(v) + \nu_m^{Hy}(v)$ — число соударений электрона с тяжелыми частицами; $\nu_{\text{эфф}}$ естественно называть эффективным числом или эффективной частотой соударений электрона. Далее $\delta_{\text{эфф}}$ — другой характерный параметр, имеющий смысл средней относительной доли энергии, передаваемой электроном тяжелым частицам за время $\frac{1}{\nu_{\text{эфф}}}$ (ср. § 1):

$$\delta_{\text{эфф}}(T_e) = \delta_{yn}\frac{\nu_{\text{эфф}}^y}{\nu_{\text{эфф}}} +$$
$$+ \frac{1}{\nu_{\text{эфф}}(T_e - T)}\left[\frac{4\pi m}{3N_e k}\int\limits_0^\infty v^4 S_{m0}^{Hy}(f_{00})\,dv + (\nu_{ion} - \nu_{rec})\,T_e\right]. \qquad (2,26)$$

Здесь $\delta_{yn} = \frac{2m}{M}$, $\nu_{\text{эфф}}^y$ — эффективное число упругих соударений (вычисляемое тоже по формуле (2,25), но с учетом в $\nu(v)$ лишь упругих соударений с молекулами $\nu_m^y(v)$ и с ионами $\nu_i(v)$). $S_{m0}^{Hy}(f_{00})$ — часть интеграла столкновений, описывающая неупругие соударения электронов, распределенных по Максвеллу с молекулами (выражения для $S_{m0}^{Hy}(f_{00})$ в двух предельных случаях приведены в § 2.2б). Наконец, $\mathbf{j}_t$ — это плотность полного электронного тока, определенная согласно формуле (2,1).

---

*) Если существенны еще и внешние ионизирующие факторы (как, например, фотоионизация солнечным ультрафиолетом в ионосфере), то их, разумеется, также следует учесть в уравнении (2,23).

Оценка функции первого приближения показывает, что $f_{01} \sim \frac{\delta\nu}{\nu_e} \cdot f_{00}$. Следовательно, в сильно ионизированной плазме для симметричной части функции распределения f_0 с точностью до членов порядка $\frac{\delta\nu}{\nu_e}$ можно ограничиться нулевым (максвелловским) приближением (подробнее см. § 2.5а).

б) Эффективное число соударений. В случае соударений с молекулами, как уже указывалось, при небольших энергиях электрона можно приближенно принять, что длина свободного пробега электрона не зависит от его скорости, т. е. что $\nu_m(v)$ определяется формулой (2,12). Подставляя ее в (2,25), имеем

$$\nu_{\text{эфф}} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{kT_e}{m}} \pi a^2 N_m = \nu^{(0)}_{\text{эфф}} \cdot \sqrt{\frac{T_e}{T}}, \qquad (2,27)$$

где $\nu^{(0)}_{\text{эфф}\, m}$ — эффективное число соударений электронов с молекулами в слабом поле, когда $T_e = T$.

В случае соударений с ионами, подставляя в (2,25) выражение (2,16) для $\nu_i(v)$, находим (подробнее см. [15] § 61)

$$\nu_{\text{эфф}\, i} = \frac{2}{3}\sqrt{8\pi} \frac{e^4 N_i}{\sqrt{m}\,(kT_e)^{3/2}} \ln\left(\frac{kT_e D}{e^2}\right) \approx \frac{5{,}5 N_i}{T_e^{3/2}} \ln\left(\frac{2\cdot 10^2 T_e}{N^{1/3}}\right), \qquad (2,28)$$

где N_i — концентрация ионов и $D = \frac{kTkT_e}{4\pi e^2 N (kT + kT_e)}$ — дебаевский радиус. Величина $\frac{kT_e D}{e^2}$, стоящая в (2,28) под знаком логарифма, всегда много больше единицы*). Вследствие этого даже при сравнительно больших изменениях электронной температуры логарифм меняется лишь незначительно; поэтому обычно можно принять, что

$$\nu_{\text{эфф}\, i} = \nu^{(0)}_{\text{эфф}\, i} \left(\frac{T}{T_e}\right)^{3/2}, \qquad (2,29)$$

где $\nu^{(0)}_{\text{эфф}\, i}$ — эффективное число соударений электронов с ионами в слабом поле, когда $T_e = T$.

Формулы (2,27) и (2,29) совпадают с выражениями (1,4) и (1,5), использованными в § 1.

В случае, когда в плазме имеются тяжелые частицы разных сортов, определенное выше эффективное число соударений электрона просто равно сумме эффективных чисел соударений электрона с частицами каждого сорта.

в) Относительная доля передаваемой энергии. В случае упругих соударений электронов с тяжелыми частицами — молекулами и ионами, как ясно из (2,26), $\delta_{\text{эфф}} = \delta_{уп} = \frac{2m}{M}$.

Чтобы иметь возможность вычислить $\delta_{\text{эфф}}$ и при наличии неупругих соударений, необходимо знать эффективные сечения всех неупругих процессов (см. формулу (2,26)). Достаточно полно они в настоящее время известны лишь для одноатомных, благородных газов. Соответ-

---

*) Это обстоятельство уже использовано при переходе к последнему выражению (2,28), где не обращалось внимания на множитель порядка единицы над логарифмом. По той же причине в (2,28) всегда можно считать, что $D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 N}}$ $\left(\text{при } T_e = T \quad D = \sqrt{\frac{kT}{8\pi e^2 N}}, \text{ а при } T_e \gg T \quad D = \sqrt{\frac{kT_e}{4\pi e^2 N}}\right)$.

ствующий расчет показывает, что относительная доля передаваемой энергии $\delta_{эфф}$ в этих случаях равна $\delta_{уп}$ до температур порядка 1 *эв*, а затем быстро (экспоненциально) растет с ростом электронной температуры (см. табл. I).

Таблица I

Значения $\delta_{эфф} \cdot 10^3$

T_e	He $\delta_{уп}=2,7\cdot10^{-4}$	H_2 $\delta_{уп}=5,4\cdot10^{-4}$	O_2 $\delta_{уп}=3,4\cdot10^{-5}$	N_2 $\delta_{уп}=3,9\cdot10^{-5}$	Воздух $\delta_{уп}=3,7\cdot10^{-5}$	Ионосфера 100 *км*	Ионосфера 200 *км*	Ионосфера 300 *км*
500°	—	2,3	—	—	—	—	—	—
1000°	0,27	2,5	3,7	0,47	0,89	0,86	0,08	0,06
2000°	0,27	2,2	6,7	0,36	1,2	1,2	0,12	0,06
3000°	0,27	2,2	8,6	0,33	1,6	1,5	0,16	0,06
4000°	0,27	2,5	9,0	0,32	1,7	1,6	0,18	0,06
5000°	0,27	3,0	8,7	0,34	1,7	1,6	0,22	0,06
6000°	0,27	3,4	8,2	0,38	1,7	1,6	0,26	0,07
7000°	0,27	3,9	7,7	0,45	1,7	1,6	0,32	0,07
8000°	0,27	4,4	7,2	0,60	1,7	1,6	0,43	0,08
9000°	0,27	4,8	6,8	0,82	1,8	1,7	0,60	0,09
10000°	0,27	5,3	6,6	1,15	2,0	2,0	0,85	0,11
12000°	0,27	6,1	7,7	2,40	3,2	3,1	1,8	0,23
15000°	0,27	7,2	21	9,8	11	10,6	7,7	1,13

В двухатомных газах (водород, кислород, азот) могут возбуждаться также колебательные и вращательные уровни. Об эффективных сечениях этих процессов в настоящее время известно еще очень мало (см.[23, 24]), что и не дает возможности рассчитать $\delta_{эфф}$. Экспериментально величина $\delta_{эфф}$ и ее зависимость от температуры изучалась в большом числе работ[23, 36–41]. Результаты этих измерений в водороде, кислороде, азоте и воздухе приведены в табл. I *). Как видно из таблицы, для всех этих газов характерно, что $\delta_{эфф}$ незначительно изменяется с ростом T_e от комнатных температур до температур порядка $(1 \div 2)$ *эв*; при более высоких значениях T_e $\delta_{эфф}$ резко возрастает.

Если газ представляет собой смесь нескольких газов, значение $\delta_{эфф}$ в нем легко найти по формуле

$$\delta_{эфф} = \frac{\sum\limits_k \delta_{эфф\,k} \cdot \nu_{эфф\,k}}{\sum\limits_k \nu_{эфф\,k}}, \qquad (2,26а)$$

где $\nu_{эфф\,k}$ и $\delta_{эфф\,k}$ — эффективное число соударений и доля передаваемой энергии для газа сорта «k», определенные формулами (2,25) и (2,26). Соответствующий расчет $\delta_{эфф}$ для воздуха (по данным для азота и кислорода) хорошо согласуется с результатами непосредственного измере-

*) Значения $\delta_{эфф}$ приведены здесь по данным последних работ[37–39]. Характер зависимости $\delta_{эфф}$ от T_e по этим данным в основном совпадает с зависимостью, полученной предыдущими авторами[23], хотя по абсолютной величине расхождение довольно значительно. Температура плазмы в эксперименте $T \sim 290°$, специальная проверка при меньших T не обнаружила какого-либо изменения $\delta_{эфф}$[40].

ния $\delta_{эфф}$ (см. [25]). Значения $\delta_{эфф}$ в ионосфере, приведенные в табл. I, также рассчитаны с помощью формулы (2,26а).

г) Электронный ток. Диэлектрическая проницаемость и проводимость плазмы. Чтобы найти величину электронного тока $\mathbf{j}_t$, нужно определить функцию $\mathbf{f}_1$, поскольку

$$\mathbf{j}_t = e\int \mathbf{v} f\, d\mathbf{v} = \frac{4\pi e}{3}\int\limits_0^\infty v^3 \mathbf{f}_1\, dv. \tag{2,30}$$

Необходимо, следовательно, решить уравнение (2,20б).

Подставляя в это уравнение функцию f_0 в виде f_{00}, учтем, что зависимостью f_{00} от времени t здесь можно пренебречь (см. начало § 2,3). Если к тому же междуэлектронные соударения в уравнении для $\mathbf{f}_1$ несущественны, уравнение (2,20б) в однородном случае становится фактически алгебраическим. Его решение в таком приближении, как легко убедиться прямой подстановкой, имеет вид

$$\mathbf{f}_{10} = -\mathbf{u}\frac{\partial f_{00}}{\partial v}, \tag{2,31}$$

где $\mathbf{u}$ — скорость направленного движения электрона, определяемая уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nu(v)\,\mathbf{u} = \frac{e\mathbf{E}}{m} + \frac{e}{mc}[\mathbf{u}\mathbf{H}_0]. \tag{2,32}$$

Заметим, что уравнение для $\mathbf{u}$ вполне аналогично уравнению (1,3) для направленной скорости в элементарной теории с той только разницей, что ν в (2,32), вообще говоря, зависит от скорости хаотического движения v, а следовательно, и $\mathbf{u} = \mathbf{u}(v, t)$.

Подставляя найденную функцию $\mathbf{f}_{10}$ в (2,30) и интегрируя по скорости v, найдем выражение для тока $\mathbf{j}_t$, а следовательно, и для проводимости и диэлектрической проницаемости плазмы, так как $\mathbf{j}_t = \left(\sigma + i\omega\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\right)\mathbf{E}$ (ср. § 1.1).

Получающиеся формулы для ε и σ можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2+\nu^2_{эфф})}\mathcal{K}_\varepsilon\left(\frac{\omega}{\nu_{эфф}}\right), \\ \sigma &= \frac{e^2 N \nu_{эфф}}{m(\omega^2+\nu^2_{эфф})}\mathcal{K}_\sigma\left(\frac{\omega}{\nu_{эфф}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2,33}$$

Здесь $\nu_{эфф}$ – эффективная частота соударений, определенная согласно (2,25), а $\mathcal{K}_\varepsilon(z)$ и $\mathcal{K}_\sigma(z)$ — некоторые функции, численные значения которых для соударений или с молекулами или с ионами приведены в табл. II и на рис. 4,5 (аналитические выражения для функций $\mathcal{K}_\varepsilon$ $\mathcal{K}_\sigma$ довольно сложны[20, 43]) *). Коэффициенты $\mathcal{K}_\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\sigma$ отражают диспер-

*) Заметим, что функции $\mathcal{K}_\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\sigma$ зависят от одного переменного $\frac{\omega}{\nu_{эфф}}$ только в случае степенной зависимости ν от v (т. е. при $\nu \sim v^\alpha$). При более сложной зависимости ν от v коэффициенты $\mathcal{K}_\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\sigma$ зависят уже от двух переменных: $\frac{\omega}{\nu_{эфф}}$ и T_e (см. [42]). Если существенны одновременно соударения электронов и с молекулами и с ионами, значения функций $\mathcal{K}_\varepsilon$, $\mathcal{K}_\sigma$ лежат между $\mathcal{K}_\varepsilon$, $\mathcal{K}_\sigma$ для ионов и $\mathcal{K}_\varepsilon$, $\mathcal{K}_\sigma$ для молекул; чтобы найти их, необходимо провести соответствующие вычисления (исключение составляет лишь случай высоких частот $\omega^2 \gg \nu^2_{эфф}$, когда $\mathcal{K}_\varepsilon = \mathcal{K}_\sigma = 1$).

сию частоты соударений электрона; они показывают, насколько значения σ и ε, вычисленные в кинетической теории, отличаются от соответ-

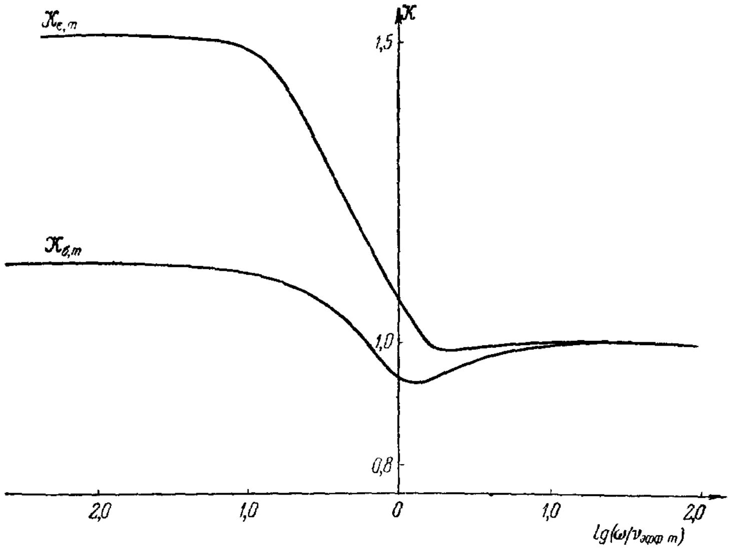

Рис. 4.

ствующих значений, получаемых с помощью элементарных формул (1,8). Из табл. II и рис. 4,5 видно, что в случае соударений с молекулами

Таблица II

$\frac{\omega}{\nu_{эфф}}$	Соударения с молекулами		Соударения с ионами			
	$\mathcal{K}_{\varepsilon,m}$	$\mathcal{K}_{\sigma,m}$	$\mathcal{K}_{\varepsilon,i}$ с учетом междуэлектронных соударений	$\mathcal{K}_{\varepsilon,i}$ без учета междуэлектронных соударений	$\mathcal{K}_{\sigma,i}$ с учетом междуэлектронных соударений	$\mathcal{K}_{\sigma,i}$ без учета междуэлектронных соударений
0	1,51	1,13	4,59	19,8	1,95	3,39
0,01	1,51	1,13	4,59	19,5	1,95	3,38
0,05	1,50	1,13	4,51	15,8	1,92	2,76
0,1	1,48	1,12	4,34	11,1	1,86	2,12
0,2	1,40	1,09	3,79	5,47	1,65	1,40
0,5	1,19	1,02	2,30	2,44	1,07	0,90
1,0	1,07	0,94	1,41	1,52	0,72	0,68
2,0	0,985	0,95	1,05	1,15	0,62	0,59
4,0	1,0	0,98	0,97	1,01	0,73	0,67
6,0	1,0	0,99	0,98	0,97	0,82	0,72
10,0	1,0	1,0	0,99	0,98	0,92	0,78
35,0	1,0	1,0	1,00	0,99	0,99	0,91
∞	1	1	1	1	1	1

коэффициенты $\mathcal{K}_\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\sigma$ близки к единице. Напротив, при соударениях с ионами $\mathcal{K}_\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\sigma$ могут значительно отличаться от единицы, особенно в области низких частот $\omega \leqslant \nu_{эфф}$.

Выше, при определении функции f_1, мы не учитывали междуэлектронных соударений. Это справедливо при соударениях с молекулами (когда $\nu_{эфф\,m} \gg \nu_{эфф\,i}$), а также при соударениях с ионами ($\nu_{эфф\,i} \gg \nu^{ee}_{эфф\,m}$), если только плазма многократно ионизирована или же в ней имеется большое количество отрицательных ионов (когда $N_i \gg N_e$). Если же плазма однократно ионизирована и отрицательные ионы отсутствуют, то междуэлектронные соударения могут играть существенную роль. Чтобы

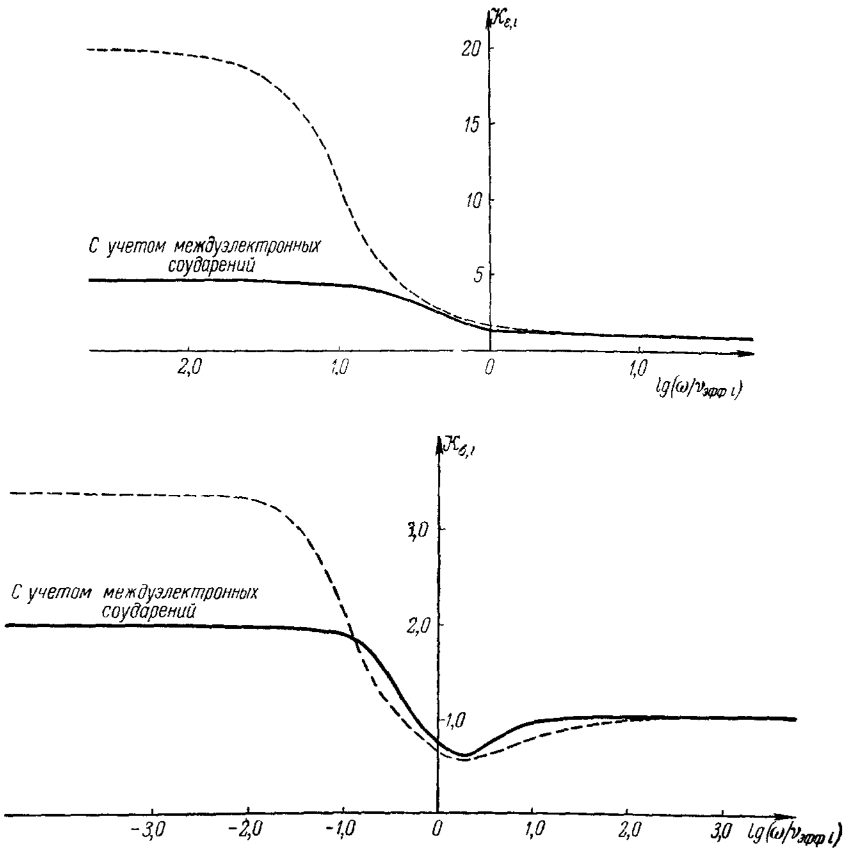

Рис. 5.

определить f_1 в этом случае, необходимо учесть интегральный член в уравнении (2,20б) и найти решение этого интегрального уравнения. Такое решение было получено в[44] (см. также[45,46]) для постоянного электрического поля путем разложения функции f_1 в ряд по полиномам Лагерра; в[13] это решение обобщено на случай переменного электрического поля. Те же задачи решались также в[32,33,47,48], где авторы использовали интегро-дифференциальное («диффузионное») выражение для интеграла соударений (см. § 2.2г); результаты этих работ совпали с результатами, полученными в[44], как это и должно быть.

Вычисление ε и σ при учете междуэлектронных соударений показывает, что эти величины можно по-прежнему представить в виде (2,33)[13]. Изменяются при этом лишь функции $\mathcal{K}_\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\sigma$; они также представлены в табл. II и на рис. 5 (сплошные кривые). Из рис. 5 видно, что учет соударений между электронами уменьшает значения функций $\mathcal{K}_\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\sigma$, но они все же остаются существенно отличающимися от единицы. Заметим также, что при высоких частотах ($\omega^2 \gg \nu^2_{эфф}$) функции $\mathcal{K}_\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\sigma$ и при учете междуэлектронных соударений близки к единице, т. е. влияние междуэлектронных соударений в случае высоких частот несущественно[49]. Задача о влиянии электронных соударений решена также для двукратно и трехкратно ионизированной плазмы[44].

С помощью тех же функций $\mathcal{K}_\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\sigma$ удается выразить компоненты тензоров ε_{ik} и σ_{ik} в анизотропной плазме, т. е. при наличии постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0$. При этом для компонент тензоров ε_{ik} и σ_{ik} в направлении, параллельном магнитному полю (ε_{zz}, σ_{zz}), по-прежнему справедливы выражения (2,33); в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{H}_0$ (плоскость xy), имеем[13]:

$$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=1-\frac{4\pi e^2 N}{m}\frac{1}{2\omega}\left\{\frac{(\omega-\omega_H)\,\mathcal{K}_\varepsilon\left(\frac{|\omega-\omega_H|}{\nu_{эфф}}\right)}{(\omega-\omega_H)^2+\nu^2_{эфф}}+\frac{(\omega+\omega_H)\,\mathcal{K}_\varepsilon\left(\frac{|\omega+\omega_H|}{\nu_{эфф}}\right)}{(\omega+\omega_H)^2+\nu^2_{эфф}}\right\}, \qquad (2,34)$$

$$\varepsilon_{yx}=-\varepsilon_{xy}=i\,\frac{4\pi e^2 N}{m}\frac{1}{2\omega}\left\{\frac{(\omega-\omega_H)\,\mathcal{K}_\varepsilon\left(\frac{|\omega-\omega_H|}{\nu_{эфф}}\right)}{(\omega-\omega_H)^2+\nu^2_{эфф}}-\frac{(\omega+\omega_H)\,\mathcal{K}_\varepsilon\left(\frac{|\omega+\omega_H|}{\nu_{эфф}}\right)}{(\omega+\omega_H)^2+\nu^2_{эфф}}\right\},$$

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\frac{e^2 N}{m}\frac{\nu_{эфф}}{2}\left\{\frac{\mathcal{K}_\sigma\left(\frac{|\omega-\omega_H|}{\nu_{эфф}}\right)}{(\omega-\omega_H)^2+\nu^2_{эфф}}+\frac{\mathcal{K}_\sigma\left(\frac{|\omega+\omega_H|}{\nu_{эфф}}\right)}{(\omega+\omega_H)^2+\nu^2_{эфф}}\right\},$$

$$-\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=i\,\frac{e^2 N}{m}\frac{\nu_{эфф}}{2}\left\{\frac{\mathcal{K}_\sigma\left(\frac{|\omega-\omega_H|}{\nu_{эфф}}\right)}{(\omega-\omega_H)^2+\nu^2_{эфф}}-\frac{\mathcal{K}_\sigma\left(\frac{|\omega+\omega_H|}{\nu_{эфф}}\right)}{(\omega+\omega_H)^2+\nu^2_{эфф}}\right\},$$

$$\omega_H=\frac{|e|\,H_0}{mc}.$$

Эти выражения для ε_{ik} и σ_{ik} лишь множителями $\mathcal{K}_\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\sigma$ отличаются от соответствующих выражений (1,10), полученных в элементарной теории. Поэтому, в частности, по-прежнему имеет место резонансное возрастание проводимости σ_{ik} вблизи гирочастоты (при $\omega \simeq \omega_H$). Значение $\mathcal{K}_\sigma$ сказывается при этом на высоте резонансной кривой; в частности, междуэлектронные соударения, уменьшая $\mathcal{K}_\sigma$ и $\mathcal{K}_\varepsilon$ (см. табл. II), понижают и высоту резонанса[47].

Приведенные здесь формулы справедливы, конечно, не только в сильном, но и в слабом электрическом поле. Более того, в слабом поле функция распределения f_0 является обычно максвелловской с $T_e=T$, независимо от степени ионизации плазмы. Полученные выражения для ε_{ik} и σ_{ik} могут быть, следовательно, использованы для расчета проводимости и диэлектрической проницаемости плазмы в слабом переменном электрическом поле любой частоты ω (это существенно, например, для задач, связанных с распространением радиоволн[15]).

д) Электронная температура. Подставляя найденные выражения для эффективной частоты соударений $\nu_{\text{эфф}}$ относительной доли передаваемой энергии $\delta_{\text{эфф}}$ и тока $\mathbf{j}_t$ в уравнение (2,24) и решая его, можно определить температуру электронов. Существенно, что получаемое при этом уравнение для T_e близко к уравнению элементарной теории (1,11). Поэтому и решение его вполне аналогично решению уравнения (1,11), рассмотренному в § 1. Например, в быстропеременном электрическом поле (при $\omega \gg \delta\nu_{\text{эфф}}$) температура электронов по-прежнему постоянна; она определена уравнением

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \left(\frac{E_0}{E_p}\right)^2 \frac{\delta_{\text{эфф}}(T)}{\delta_{\text{эфф}}(T_e)} \frac{\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^{(0)2}}{\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^2} \mathscr{K}_\sigma\left(\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\right). \qquad (2,35)$$

Здесь E_p — по-прежнему характерное «плазменное поле»:

$$E_p = \sqrt{3kT\frac{m}{e^2}\delta_{\text{эфф}}(T)\left(\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^{(0)2}\right)}.$$

Отсюда видно, что уравнение (2,35) отличается от соответствующего уравнения (1,16) элементарной теории лишь коэффициентом $\mathscr{K}_\sigma$, а также тем, что остававшееся несколько неопределенным число соударений $\nu_{\text{эфф}}$ теперь точно фиксировано формулой (2,25); кроме того, в (1,16) величина $\delta = \delta_{\text{эфф}}$ считалась не зависящей от T_e. В случае соударений с молекулами коэффициент $\mathscr{K}_\sigma$ близок к единице; поэтому полностью остается в силе проведенный в § 1 анализ этого случая. То же относится и к соударениям с ионами при высоких частотах ($\omega^2 \gg \nu_{\text{эфф}}^2$). Заметно повлиять на температуру электронов множитель $\mathscr{K}_\sigma$ может лишь в случае соударений с ионами при низких частотах, а также в области гирорезонанса.

2.4. Слабо ионизированная плазма

В слабо ионизированной плазме в уравнении для функции f_0 междуэлектронные соударения малосущественны (так как $\nu_e \ll \delta\nu$) и их в первом приближении можно не учитывать. Еще менее существенны они в уравнении для функции $\mathbf{f}_1$, так как $\nu_e \ll \delta\nu \ll \nu$. Поэтому функция $\mathbf{f}_1$ в однородной слабо ионизированной плазме с точностью до членов порядка δ всегда дается выражением (2,31) $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{u}\frac{\partial f_0}{\partial v}$, где скорость $\mathbf{u} = \mathbf{u}(v, t)$ определена уравнением (2,32). Подставляя такое значение $\mathbf{f}_1$ в (2,20а), приходим окончательно к следующему уравнению для функции f_0:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\left[\left(\delta_{yn}(\nu_m^y + \nu_i)\frac{kT}{m} + \frac{2e\mathbf{E}\mathbf{u}}{3m}\right)\frac{\partial f_0}{\partial v} + \delta_{yn} v(\nu_m^y + \nu_i) f_0\right]\right\} + S_{m0}^{Hy}(f_0) = 0. \qquad (2,36)$$

В зависимости от соотношения между временем, в течение которого существенно изменяется электрическое поле $\frac{1}{\omega}$, и временем релаксации для функции f_0 $(\tau) \sim \frac{1}{\delta\nu}$ здесь можно выделить случаи медленно ($\omega \ll \delta\nu$) и быстро ($\omega \gg \delta\nu$) изменяющихся полей (так же, как и при анализе электронной температуры в элементарной теории или в сильно ионизированной плазме). В первом случае, являющемся квазистационарным, зависимость f_0 от времени в уравнении (2,36) можно не учитывать; в частности, это имеет, конечно, место в случае постоянного электрического поля. С другой стороны, для быстропеременного электрического поля $\omega \gg \delta\nu$ функция f_0 не успевает меняться так же быстро, как меняется поле; поэтому она устанавливается на некотором среднем, не зависящем от времени уровне, переменные отклонения от которого малы — имеют амплитуду порядка $\frac{\delta\nu}{\omega}$ (так же, как колебания электронной температуры в элементарной теории). Благодаря этому в обоих этих случаях в первом приближении можно пренебречь членом $\frac{\partial f_0}{\partial t}$ в уравнении (2,36) и тем самым фактически избавиться от временной переменной. Это позволяет найти аналитическое решение уравнения (2,36) для ряда существенных случаев: при упругих соударениях, в инертных газах и в молекулярной плазме. К анализу этих решений мы и переходим.

а) Случай упругих соударений. Если все соударения являются упругими, то в (2,36) $S_{m0}^{Hy}=0$. Тогда в постоянном электрическом поле $\mathbf{E}$ при $\mathbf{H}_0=0$ согласно (2,32) $\mathbf{u}=\frac{e\mathbf{E}}{m\nu}$ и уравнение (2,36) записывается в виде

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\left[\left(\delta_{yn}\nu\frac{kT}{m}+\frac{2e^2E^2}{3m^2\nu}\right)\frac{\partial f_0}{\partial v}+\delta_{yn}\cdot\nu v f_0\right]\right\}=\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\{v^2 j_v\}=0. \quad (2,37)$$

(Здесь $\nu=\nu(v)=\nu_m^y+\nu_i$.) Умножая это уравнение на v^2 и интегрируя его от нуля до v, убеждаемся, что $j_v=0$, поскольку в отсутствие источника электронов $[v^2 j_v]_{v=0}=0$. Интегрируя теперь по скоростям уравнение $j_v=0$, получаем

$$f_0=C\exp\left\{-\int_0^v\frac{mv\,dv}{kT+\frac{2e^2E^2}{3m\delta_{yn}\nu^2}}\right\}. \quad (2,38)$$

В слабом поле отсюда получается максвелловское распределение, но в сильном поле функция распределения f_0 может существенно отличаться от максвелловской, поскольку ν зависит от v. Например, в сильном электрическом поле при соударениях с молекулами — твердыми шариками — функция f_0 определяется известной формулой Дрювестейна [50]

$$f_0=C\exp\left\{-\frac{3m^2\delta_{yn}}{8e^2E^2l^2}v^4\right\}, \quad (2,39)$$

где $l=\frac{v}{\nu(v)}=\frac{1}{\pi a^2N_m}$ — длина свободного пробега электрона, C — константа, определяемая условием нормировки (2,1а), и в (2,38) пренебрежено членом kT, что возможно как раз для сильного поля.

Распределение Дрювестейна при больших скоростях электронов сильно отличается от максвелловского: оно спадает значительно быстрее максвелловского. Вычисление функции f_0 с учетом точной зависимости частоты соударений от скорости для различных инертных газов проведено в [51, 63]. Влияние постоянного магнитного поля учтено в [4] (магнитное поле изменяет скорость $\mathbf{u}(v)$, в соответствии с чем меняется и f_0).

Мы рассмотрели выше лишь случай постоянного или квазистационарного ($\omega \ll \delta\nu$) электрического поля. Вполне аналогично задача решается и в быстропеременном ($\omega \gg \delta\nu$) электрическом поле, так как и в этом случае в первом приближении можно пренебречь производной $\frac{\partial f_0}{\partial t}$. Функция f_0 при этом принимает вид[52-55]

$$f_0 = C \exp\left\{-\int_0^v \frac{mv\,dv}{kT + \left(\frac{e^2E_0^2}{3m\delta_{yn}}\right)\varphi(v)}\right\}. \tag{2,40}$$

Здесь функция $\varphi(v)$ без магнитного поля равна $(\omega^2+\nu(v)^2)^{-1}$, а при наличии магнитного поля

$$\varphi(v) = \frac{\cos^2\beta}{\omega^2+\nu^2(v)} + \frac{\sin^2\beta}{2[(\omega-\omega_H)^2+\nu^2(v)]} + \frac{\sin^2\beta}{2[(\omega+\omega_H)^2+\nu^2(v)]}, \tag{2,41}$$

где β — угол между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, ω_H — гиромагнитная частота, E_0 — амплитуда и ω — частота переменного электрического поля.

Функция распределения (2,40) при низких частотах $(\omega+\omega_H \ll \nu)$ совпадает с распределением (2,38) для постоянного электрического поля (только соответствующее постоянное поле оказывается при этом, естественно, эквивалентным эффективному полю $E_{\text{эфф}} = E_0/\sqrt{2}$).

Периодически меняющиеся во времени поправки к функции f_0 вычислялись в работах[56, 57], посвященных нелинейным эффектам в ионосфере.

Реализуется случай упругих соударений в одноатомных (инертных) газах при невысокой средней энергии электронов (до 1 *эв*).

б) Молекулярная плазма. Будем называть молекулярной плазму, образованную в двухатомных или многоатомных газах. В такой плазме могут возбуждаться не только оптические, но также вращательные и колебательные уровни, энергия которых невысока ($\hbar\omega \sim 10^{-2} \div 10^{-4}$ *эв* для вращательных и $\hbar\omega \sim 0{,}1 \div 0{,}5$ *эв* для колебательных уровней). Поэтому неупругие соударения в такой плазме существенны уже при энергиях электронов порядка 10^{-2} *эв*, т. е. при комнатных температурах.

В плазме в двухатомных газах (водороде, кислороде, азоте, воздухе) при невысокой средней энергии электронов (меньшей или порядка 1 *эв*) основную роль играют потери на возбуждение вращательных уровней, энергия которых, естественно, мала в сравнении со средней энергией электронов (на это указывают данные как расчета[58, 59], так и эксперимента[39, 60]). Следовательно, основную роль в этих случаях играют такие неупругие соударения электронов, при которых теряется лишь небольшая часть энергии. Интеграл неупругих столкновений для функции f_0 может быть поэтому представлен в виде

$$S_{m0}^{Hy}(f_0) = -\frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2R_H(v)\left[\frac{kT}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} + vf_0\right]\right\}, \tag{2,14б}$$

где $R_H(v) = \sum_i r_{\omega_i}$ — суммарная функция, описывающая потери энергии электрона при неупругих соударениях (см. § 2.2б) *). Подставляя это выражение для S_{m0}^{Hy} в уравнение (2,36), убеждаемся в том, что оно фактически совпадает с рассматривавшимся выше уравнением для случая упругих соударений электрона; необходимо только заменить $\delta_{yn} = \frac{2m}{M}$ на

$$\delta(v) = \frac{\delta_{yn}(\nu_m^y+\nu_i)+R_H(v)}{\nu(v)} = \frac{R(v)}{\nu(v)}. \tag{2,42}$$

*) Здесь принято, что температура тяжелых частиц также выше, чем средняя энергия вращательных квантов, как это обычно и бывает (энергия вращательных квантов $\hbar\omega \sim (2 \div 100)°$).

Соответственно и решение этого уравнения в молекулярной плазме совпадает с решениями, рассматривавшимися выше: достаточно опять-таки заменить δ_{yn} на $\delta(v)$. Например, в сильном постоянном электрическом поле вместо распределения Дрювестейна (2,39) в молекулярной плазме имеем

$$f_0 = C \exp\left\{-\frac{3m^2}{2e^2E^2l^2}\int\limits_0^v v^3\delta(v)\,dv\right\}. \qquad (2,43)$$

Чтобы найти окончательно вид функции распределения в молекулярной плазме, необходимо еще рассчитать функцию $\delta(v) = \frac{R(v)}{\nu(v)}$, что можно было бы сделать, используя для $R(v)$ выражение (2,14б). Однако для этого расчета необходимо знать сечения всех неупругих процессов, которые в настоящее время неизвестны (см. [23, 24]). В [25] поэтому предложен другой метод для определения суммарной функции потерь $R(v)$. В самом деле, доля энергии, теряемой электроном $\delta_{эфф}$ в сильно ионизированной молекулярной плазме, как ясно из (2,26), связана с функцией $R(v)$ соотношением

$$\int\limits_0^\infty R(v)\,v^4 \exp\left\{-\frac{mv^2}{2kT_e}\right\}dv = \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\left(\frac{kT_e}{m}\right)^{5/2}\delta_{эфф}(T_e)\,\nu_{эфф}(T_e). \qquad (2,44)$$

Это соотношение можно рассматривать как интегральное уравнение относительно $R(v)$, так как правая его часть известна из эксперимента. Таким образом, из (2,44) можно, в принципе, найти $R(v)$, а следовательно, и $\delta(v)$. Результат соответствующего расчета для водорода, кислорода, азота и воздуха приведен на рис. 6.

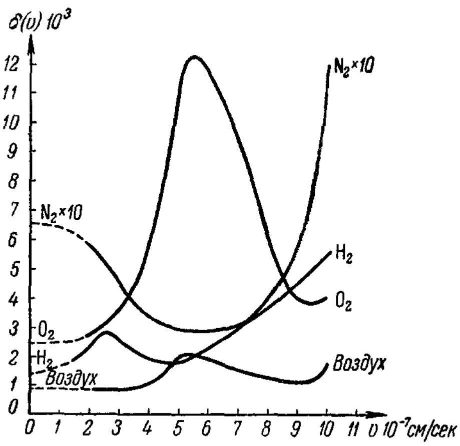

Рис. 6.

Подставляя найденную функцию $\delta(v)$ в выражения (2,38), (2,40) и т. д., можно рассчитать функцию распределения электронов в молекулярной плазме. Результаты такого расчета для электронов в водороде в высокочастотном электрическом поле приведены на рис. 7. По оси ординат на рис. 7 отложен — $\ln f_0$, по оси абсцисс — $\frac{v^2}{\bar{v}^2}$, где $\bar{v}^2 = \frac{2\bar{K}}{m}$ — средняя квадратичная скорость электрона. Пунктирная прямая отвечает максвелловской функции распределения (распределение получилось бы максвелловским, если бы δ не зависело от v, как это имеет место, например, в случае упругих соударений (см. (2,40)). Из рисунка видно, что в рассматриваемом случае отклонения функции распределения от максвелловской не очень велики; они возрастают с ростом средней энергии электронов.

в) Инертные газы. В инертных газах при невысокой средней энергии электронов (до 1 *эв*) основную роль играют упругие соударения электронов с атомами газа. При более высоких энергиях становятся, однако, существенными потери, обусловленные быстрыми электронами, которые способны возбуждать оптические уровни или ионизировать атомы.

При этом, если средняя энергия электронов невелика — ниже, чем минимальная энергия возбуждения $\hbar\omega$ (порядка 10 *эв*), то основные неупругие потери, очевидно, обусловлены электронами, энергия которых лишь незначительно превосходит $\hbar\omega$ (так как число электронов, имеющих большую энергию и способных, следовательно, к неупругим соударениям при $K > \hbar\omega$, резко падает с ростом K). В этом случае для интеграла неупругих столкновений для функции f_0 можно считать хорошо применимой предельную формулу $S_{m0}^{Hy} = \nu_\omega(v)\cdot f_0$ (см. (2,15)). Поэтому в посто-

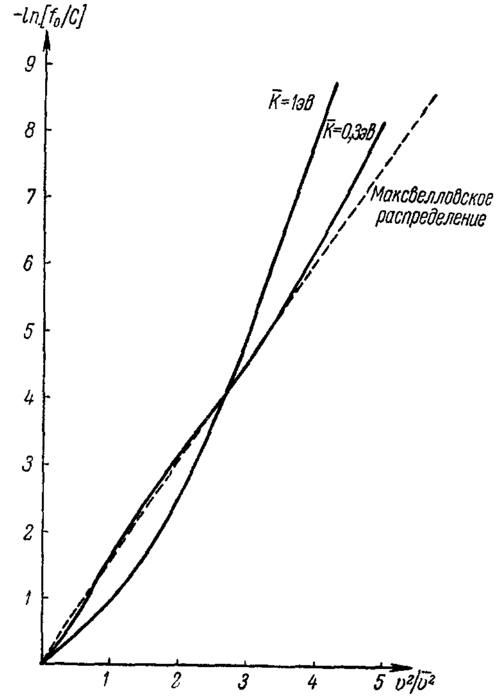

Рис. 7.

янном электрическом поле уравнение для функции f_0 в инертных газах с учетом неупругих соударений электронов принимает вид

$$-\frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\left[\left(\delta_{un}\nu_m^y\frac{kT}{m}+\frac{2e^2E^2}{3m^2(\nu_m^y+\nu_\omega)}\right)\frac{\partial f_0}{\partial v}+\nu_m^y v f_0\right]\right\}+\nu_\omega(v)f_0=0. \tag{2,45}$$

Кроме того, необходимо добавить еще при $v=0$ источник электронов $Q = \frac{dN}{dt} = 4\pi\int\limits_{\hbar\omega}^{\infty}\nu_\omega(v)\,v^2 f_0\,dv$ (см. § 2.2б). Сечение для неупругого соударения равно нулю при энергиях электрона, меньших энергий возбуждения $\hbar\omega$, а при $K > \hbar\omega$ можно приближенно принять, что оно растет линейно с ростом энергии электрона, т. е. $\nu_\omega(v) = \frac{v}{l_H}\left(\frac{mv^2}{2\hbar\omega}-1\right)$, где l_H — эффективная длина свободного пробега электрона между двумя неупругими соударениями.

При решении уравнения (2,45) удобно выделить области: $\frac{mv^2}{2} \leq \hbar\omega$ и $\frac{mv^2}{2} > \hbar\omega$. В первой области функция распределения по-прежнему определяется уравнением (2,37), так как неупругих соударений здесь нет. Однако при решении его следует учитывать наличие источника Q при $v=0$; вследствие этого поток j_v в этой области теперь не равен нулю: $j_v=\frac{C_1}{v^2}$, где C_1 — константа интегрирования. Решение уравнения (2,37) в первой области приводит, таким образом, к функции распределения, отличающейся от распределения Дрювестейна наличием дополнительного множителя [61]. Во второй области, как нетрудно видеть [26]:

$$f_0=C\sqrt{\frac{mv^2}{2\hbar\omega}-1}\,iH_{1/3}\left\{i\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\hbar\omega}{eE\sqrt{ll_H}}\left(\frac{mv^2}{2\hbar\omega}-1\right)\right\}. \qquad (2,46)$$

Здесь $H_{1/3}$ — функция Ганкеля порядка $1/3$ и $l=\frac{v}{\nu_m^y+\nu_\omega}$ — не зависящая от скорости длина пробега электрона. Оба эти распределения сшиваются при $K=\hbar\omega$, и отсюда определяются константы C и C_1. Функция распределения (2,46) падает с ростом скорости электрона значительно резче, чем дрювестейновская функция распределения, т. е. «хвост» функции распределения в области $K>\hbar\omega$ как бы обрезается вследствие неупругих соударений, как это и должно быть. В [61] исследовался также случай произвольной зависимости длины пробега l и сечения возбуждения от скорости v.

Заметим, что обычно может возбуждаться не один, а несколько уровней, и потому зависимость $\nu_\omega(v)$ имеет, вообще говоря, более сложный вид. Соответствующий расчет для гелия и водорода с учетом всех возбуждающихся уровней проведен в [27,27a]. Вполне аналогично задача решается и для переменного электрического поля [62].

г) Электронный ток и средняя энергия электронов. Воспользовавшись полученными выше выражениями для функции распределения, нетрудно найти электронный ток и среднюю энергию электронов в слабо ионизированной плазме:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon &= 1+\frac{(4\pi e)^2}{3}\int_0^\infty \frac{v^3}{\omega^2+\nu^2}\frac{\partial f_0}{\partial v}\,dv,\\
\sigma &= -\frac{4\pi e^2}{3}\int_0^\infty \frac{\nu v^3}{\omega^2+\nu^2}\frac{\partial f_0}{\partial v}\,dv,\\
\overline{K} &= \frac{2\pi m}{N}\int_0^\infty v^4 f_0\,dv,
\end{aligned}\right\} \qquad (2,47)$$

где $\nu=\nu(v)$ — полное число соударений электрона.

Эти выражения для случая упругих соударений в постоянном электрическом поле обсуждались в [50, 4], в переменном поле — в [52, 43], а при наличии еще и магнитного поля — в [43, 54]; случай молекулярной плазмы рассмотрен в [25], а для плазмы в инертных газах расчеты проведены в [27]. Для различных предельных случаев получены простые формулы; в общем же случае они, естественно, сложны; часто значения ε, σ и $\overline{K}$ находятся лишь с помощью численного интегрирования.

Существенно подчеркнуть, что результаты расчета ε, σ и $\overline{K}$ для слабо ионизированной плазмы по формуле (2,47) почти всегда лишь незначительно (до 10 ÷ 15%) отличаются от результатов расчета тех же величин по приведенным выше более простым формулам для сильно ионизированной плазмы (имеются, конечно, в виду сравнения результатов при той же напряженности поля, тех же значениях l и δ_{yn} и т. п.).

Например, в сильном постоянном электрическом поле в случае упругих соударений с молекулами для слабо ионизированной плазмы $\overline{K} \simeq 0{,}604 \frac{eEl}{\sqrt{\delta_{yn}}}$, а для сильно ионизированной плазмы

$$\frac{3}{2} kT_e = \overline{K} \simeq 0{,}613 \frac{eEl}{\sqrt{\delta_{yn}}}.$$

2.5. Произвольная степень ионизации. Об элементарной теории

а) Переход от сильно к слабо ионизированной плазме. Выше были рассмотрены предельные случаи слабо ионизированной плазмы, когда междуэлектронные соударения не существенны, и сильно ионизированной плазмы, когда, наоборот, вид функции f_0 определяется именно междуэлектронными соударениями. Рассмотрим теперь промежуточный случай, когда на вид функции f_0 существенно влияют и междуэлектронные соударения и соударения электронов с тяжелыми частицами [31]. В уравнении для функции $\mathbf{f}_1$ при этом междуэлектронными соударениями можно пренебречь, поскольку $\nu_e \sim \delta\nu \ll \nu$. Поэтому функция $\mathbf{f}_1$ по-прежнему записывается в виде $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{u}\frac{\partial f_0}{\partial v}$ (см. (2,31)).

Задача сводится, таким образом, к анализу одного уравнения для функции f_0

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\left(\left[\delta_{yn}(\nu_m^y + \nu_i)\frac{kT}{m} + \frac{2e\mathbf{Eu}}{3m} + 2A_2(f_0)\right]\frac{\partial f_0}{\partial v} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + [\delta_{yn}(\nu_m^y + \nu_i) + 2A_1(f_0)]\, v f_0\right)\right\} + S_{m0}^{Hy}(f_0) = 0, \qquad (2,48)$$

где коэффициенты A_1 и A_2 — интегралы, зависящие от функции f_0 (2,18).

В стационарных условиях (постоянное или быстропеременное электрическое поле) первым членом в уравнении (2,48) можно пренебречь. Решение оставшегося нелинейного интегро-дифференциального уравнения может быть найдено методом итераций. Этот метод дает хорошую сходимость, поскольку изменение функции f_0 при переходе от слабо ионизированной к сильно ионизированной плазме вызывает лишь небольшое изменение интегральных коэффициентов $A_1(f_0)$ и $A_2(f_0)$ (ср. § 2.4г).

Выбирая в качестве нулевого приближения $f_0^{(0)}$ максвелловскую функцию распределения с температурой электронов, которую нужно найти из уравнения (2,24), убеждаемся в том, что в следующем приближении

$$f_0^{(1)} = C\exp\left\{-\int_0^v \frac{v\,dv\,[\delta_{yn}\nu + 2A_1^{(0)}]}{\frac{kT}{m}\delta_{yn}\nu + \frac{2e\mathbf{Eu}}{3m} + 2A_2^{(0)}}\right\}, \qquad (2,49)$$

Здесь для простоты учтены лишь упругие соударения электронов и

$$A_2^{(0)} = A_2(f_0^{(0)}) = \frac{kT_e}{m}A_1^{(0)} = \frac{kT_e\nu_e}{m}\left[\Phi(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}x\exp\{-x^2\}\right],$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp\{-z^2\}\,dz$ — интеграл вероятностей, $x = \frac{v}{\sqrt{\frac{2kT_e}{m}}}$,

а $\nu_e = \nu_e(v)$ — частота соударений между электронами (она дается формулой (2,16) с заменой N_i на N). В сильно ионизированной плазме основную роль в выражении (2,49) играют коэффициенты $A_1^{(0)}$ и $A_2^{(0)}$, так что функция $f_0^{(1)}$ в этом случае — максвелловская; в слабо ионизированной плазме, напротив, коэффициентами $A_1^{(0)}$ и $A_2^{(0)}$ можно пренебречь и функция $f_0^{(1)}$ в сильном поле — дрювестейновская, как это и должно быть. На рис. 8 показан переход от максвелловского распределения к

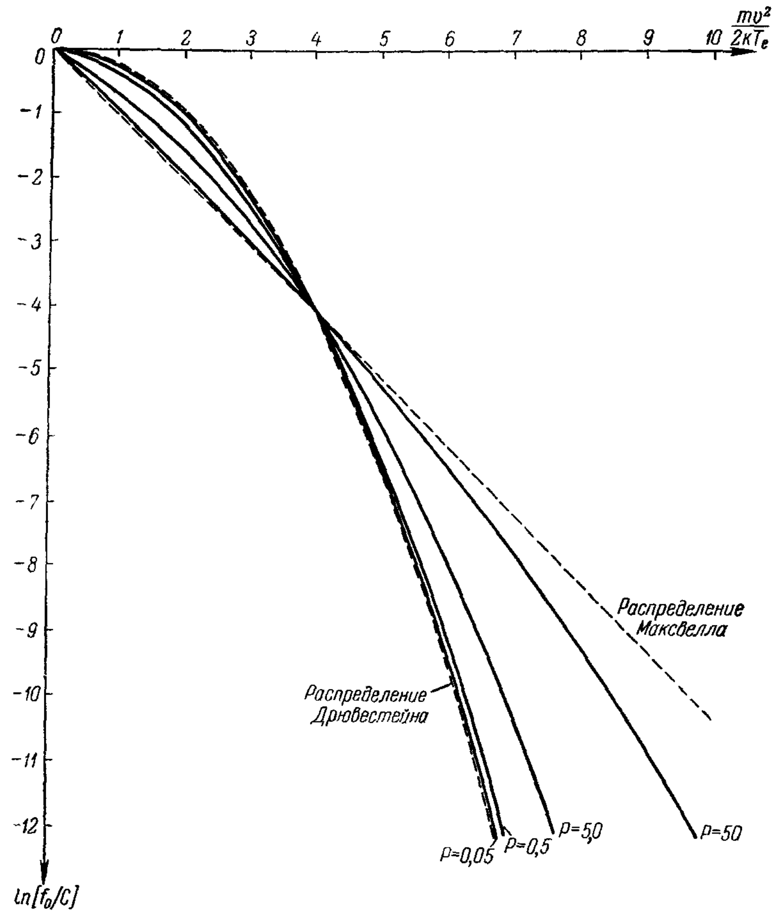

Рис. 8.

распределению Дрювестейна в зависимости от степени ионизации плазмы, точнее, в зависимости от параметра

$$p=\frac{\nu_e(v_0)}{\delta\nu_m(v_0)}=\frac{N_e}{N_m}\frac{\pi e^4\ln\left(\frac{kT_eD}{e^2}\right)}{\delta(kT_e)^2\pi a^2}\approx 6\cdot 10^7\frac{N_e}{N_m}\left(\frac{1\ \textit{эв}}{kT_e}\right)^2\left(\frac{10^{-16}\ \textit{см}^2}{\pi a^2}\right)\left(\frac{10^{-4}}{\delta}\right). \tag{2,50}$$

$\left(\text{Здесь } v_0=\sqrt{\frac{2kT_e}{m}},\ T_e=\frac{eEl}{\sqrt{6\delta}} \text{ — температура электронов.}\right)$ Из рисунка видно, что примерно в середине между максвелловской и дрювестейновской лежит кривая, отвечающая значению $p=5$. Следовательно, при $p\gg 5$ распределение — максвелловское и плазму можно считать «сильно ионизированной», т. е. использовать формулы, полученные в § 2.3; при $p\ll 5$ плазма «слабо ионизирована». Следует отметить, что область перехода растянута, причем особенно сильно при больших скоростях, т. е.

в «хвосте» функции распределения: из рисунка видно, например, что в «хвосте» отклонения от распределения Максвелла значительны даже при $p=50$. Вообще максвелловское распределение в «хвосте» (т. е. при больших v) можно считать имеющим место только тогда, когда p больше, чем $\left(\frac{mv^2}{2kT_e}\right)^2$.

б) Условия применимости элементарной теории. Выше уже отмечалось, что выражения для диэлектрической проницаемости, проводимости и средней энергии электронов в плазме в общем случае довольно сложны. Мы видели также, что для тех же величин в элементарной теории получены весьма простые, удобные для расчета формулы. Существенно поэтому выяснить, когда же для расчета средних величин, таких, как ε, σ и $\overline{K}$, можно пользоваться элементарной теорией и когда для этого необходимо использование кинетической теории.

Существенное качественное различие между элементарным и кинетическим рассмотрением проявляется лишь в некоторых случаях при анализе нестационарных эффектов [14, 42]. Для стационарных эффектов, рассматриваемых в настоящей статье, элементарная и кинетическая теории приводят всегда к качественно одинаковым результатам. Поэтому при анализе вопроса о применимости элементарной теории речь здесь может идти лишь о величине количественной ошибки, допускаемой при элементарном расчете *).

Рассмотрим вначале простейший случай, когда частота соударений электрона ν и доля энергии δ не зависят от его скорости [64—68, 25]. Решение кинетического уравнения (2,20) имеет в этом случае следующий вид:

$$f_0=N\left(\frac{m}{2\pi kT_e}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{mv^2}{2kT_e}\right\},\qquad \mathbf{f}_1=-\mathbf{u}\frac{\partial f_0}{\partial v},\tag{2,51}$$

где температура T_e и средняя направленная скорость электронов определены уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dT_e}{dt}+\delta\nu\,(T_e-T)=\frac{2}{3k}e\mathbf{E}\mathbf{u},\\&\frac{d\mathbf{u}}{dt}+\nu\mathbf{u}=\frac{e}{m}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{u}\mathbf{H}]\right).\end{aligned}\right\}\tag{2,52}$$

Эти уравнения для $\mathbf{u}$ и T_e тождественны уравнениям элементарной теории (1,3), (1,11) при постоянных $\delta_{эфф}\equiv\delta$ и $\nu_{эфф}\equiv\nu$. Другими словами, элементарная теория фактически отвечает предположению, что ν и δ не зависят от v. Ясно поэтому, что и в тех случаях, когда ν и δ не слишком сильно зависят от v, ошибка, допускаемая при элементарном расчете, должна быть небольшой (вместо $\nu(v)$ и $\delta(v)$ в элементарной теории, т. е. в уравнениях (2,52), естественно при этом использовать значения $\nu_{эфф}(T_e)$ и $\delta_{эфф}(T_e)$, определенные согласно (2,25), (2,26)).

Соответствующий анализ, проводившийся в [20, 25], показывает, что в сильно ионизированной плазме (т. е. для максвелловского распределения) расхождение результатов элементарного и кинетического расчетов $\mathbf{j}$ и $\overline{K}$ незначительно, если выполнено условие

$$\frac{D_\nu}{\omega^2+\nu^2_{эфф}}=\frac{1}{\omega^2+\nu^2_{эфф}}\,\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{kT_e}\right)^{5/2}\int\limits_0^\infty(\nu(v)-\nu_{эфф})^2v^4\exp\left\{-\frac{mv^2}{2kT_e}\right\}dv\ll 1.\tag{2,53}$$

*) Сказанное относится, разумеется, к вычислению *средних* величин ($\overline{K}$, $\mathbf{j}$). Очевидно, что для нахождения распределения электронов по скоростям использование кинетической теории в той или иной ее форме неизбежно.

Здесь D_ν — величина, характеризующая отклонение числа соударений электрона от его среднего (эффективного) значения; иначе говоря, D_ν характеризует зависимость ν от v. Если, например, $\nu = \mathrm{const}$, то $D_\nu = 0$; при $\nu = A\cdot v$, т. е. при $\nu_{\text{эфф}} \sim \sqrt{T_e}$, $\frac{D_\nu}{\nu^2_{\text{эфф}}} \simeq 0{,}1$; при $\nu = \frac{A}{v}$ (при $\nu_{\text{эфф}} \sim T_e^{-1}$ [2]) $\frac{D_\nu}{\nu^2_{\text{эфф}}} = 0{,}1$; при $\nu = Av^2$ (при $\nu_{\text{эфф}} \sim T_e$) $\frac{D_\nu}{\nu^2_{\text{эфф}}} = 0{,}4$. В реальной плазме при соударениях с молекулами число соударений обычно пропорционально T_e^α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}8$ (см. [23, 24]); критерий (2,53) при этом всегда выполняется, так что ошибка, совершаемая при расчете σ, ε, $\overline{K}$ по формулам элементарной теории, относительно невелика. Например, в случае, когда $\nu_{\text{эфф}} \sim T_e^{0,5}$, как видно из табл. II и рис. 4, максимальная ошибка, имеющая место при $\omega = 0$, для σ равна 13%, а для ε равна 51%. При высоких частотах $\omega^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}$ элементарный расчет оказывается вообще точным, что является следствием выбора эффективной частоты соударений в элементарной теории в виде (2,25). Число соударений с ионами сильно зависит от скорости электрона (2,16); отношение $\frac{D_\nu}{\nu^2_{\text{эфф}\,i}}$ оказывается в этом случае весьма большой величиной

$$\frac{D_\nu}{\nu^2_{\text{эфф}\,i}} \simeq 6\,\frac{\left(\frac{kT_e}{e^2N^{1/3}}\right)^{3/4}}{\ln^2\left(\frac{kT_e}{e^2\Lambda^{1/3}}\right)} \gg 1.$$

Вследствие этого при соударениях с ионами условие (2,53) выполнено лишь для высокочастотного электрического поля при $\omega \gg \sqrt{D_\nu} \sim (10 \div 100)\,\nu_{\text{эфф}\,i}$. Если же $\omega \leqslant \sqrt{D_\nu}$, то при расчете σ и ε нужно, вообще говоря, пользоваться результатами кинетической теории, т. е. учитывать поправочные коэффициенты $\mathscr{K}_\sigma$ и $\mathscr{K}_\varepsilon$, приведенные в табл. II и на рис. 5. Максимальное отличие элементарных формул от кинетических имеет место в постоянном поле ($\omega = 0$), когда *) $\mathscr{K}_\sigma = 1{,}95$ и $\mathscr{K}_\varepsilon = 4{,}59$ (напомним, что элементарной теории отвечают значения $\mathscr{K}_\sigma = \mathscr{K}_\varepsilon = 1$).

В слабо ионизированной плазме функция распределения может быть существенно немаксвелловской. Для справедливости элементарного расчета в этом случае необходимо, чтобы, кроме (2,53), выполнялись также условия:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{T_e}{\nu_{\text{эфф}}}\frac{d\nu_{\text{эфф}}}{dT_e}\frac{\gamma(T_e-T)}{\gamma(T_e-T)+T_e} \ll 1,\\ &\frac{1}{2}\frac{T_e}{\delta_{\text{эфф}}}\frac{d\delta_{\text{эфф}}}{dT_e}\frac{\gamma(T_e-T)}{\gamma(T_e-T)+T_e} \ll 1,\end{aligned}\right\} \qquad (2{,}54)$$

где $\gamma = \frac{T_e}{\delta_{\text{эфф}}}\cdot\frac{d\delta_{\text{эфф}}}{dT_e} + \frac{2\nu^2_{\text{эфф}}}{\omega^2+\nu^2_{\text{эфф}}}\frac{d\nu_{\text{эфф}}}{dT_e}\frac{T_e}{\nu_{\text{эфф}}}$. Для выполнения условий (2,54) необходимо, чтобы при низкой частоте $\omega^2 \leqslant \nu^2_{\text{эфф}}$ и $\nu_{\text{эфф}}$ и $\delta_{\text{эфф}}$ слабо зависели от T_e (если $\nu_{\text{эфф}}$ и $\delta_{\text{эфф}}$ пропорциональны T_e^α, то критерий (2,54) выполнен, только если $-0{,}25 \leqslant \alpha \leqslant 1$). При высокой частоте $\omega^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}$ необходимо, чтобы лишь $\delta_{\text{эфф}}$ слабо зависело от T_e. Существенно, что ошибка элементарной теории резко растет в области, где $\nu_{\text{эфф}}$ и $\delta_{\text{эфф}}$ убывают с ростом T_e. В плазме, образованной как в одноатомных, так и в молекулярных газах, условия (2,53), (2,54) обычно выполнены (кроме

---

*) Речь идет о полностью ионизированной плазме с однократными ионами

области больших энергий $kT_e \gtrsim 2$ *эв*, где $\delta_{эфф}$ энергично растет с ростом T_e, а также области эффекта Рамзауэра в тяжелых инертных газах). Поэтому ошибка, допускаемая при расчете σ и $\overline{K}$ по формулам элементарной теории и в случае слабо ионизированной плазмы, обычно невелика (до 40%); ошибка при вычислении ε в низкочастотном электрическом поле может быть больше (до 100%).

(*Окончание статьи и цитированной литературы—в следующем выпуске.*)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, В. П. Шабанский, Кинетическая температура электронов в металлах и аномальная электронная эмиссия, ДАН СССР **100**, 445, 1955.
2. В. П. Шабанский, Процессы переноса в проводниках с учетом нелинейных эффектов, ЖЭТФ **31**, 657, 1956; ФММ 5, 193, 1957.
3. М. И. Каганов, И. М. Лифшиц, Л. В. Танатаров, Релаксация между электронами и решеткой, ЖЭТФ **31**, 232, 1956.
4. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ 7, 1069, 1937.
5. R. Stratton, The influence of interelectronic collisions on conduction and breakdown in polar crystals and in covalent semiconductor, Proc. Roy. Soc **A242**, 355, 1957; **246**, 406, 1958.
6. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ 37, 713, 1959.
7. H. J. Zeiger, C. J. Rauch, M. E. Behrndt, Observation of microwave cyclotron resonance by cross modulation, Phys. Rev. Letter **1**, 59, 1958.
8. Л. Леб, Основные процессы электрических разрядов в газах., Гостехиздат, М.—Л., 1950.
9. В. Л. Грановский, Электрический ток в вакууме и в газах, т. 1, Гостехиздат, М.—Л. 1952.
10. В. Е. Голант, Газовый разряд на сверхвысоких частотах, УФН 65, 39, 1958.
11. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, Сборник работ изд. АН СССР, М., 1958.
12. W. M. MacDonald, M. N. Rosenbluth, W. Chuck, Relaxation of a System of Particles with Coulomb Interactions, Phys. Rev. **107**, 350, 1957.
13. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **35**, 392, 1958.
14. H. Drecier, On the theory of run-away electrons. Proc. of Geneva conference. 1958, Phys. Rev. **115**, 238, 1959.
15. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М.—Л., 1953.
16. А. Зоммерфельд, Термодинамика и статистическая физика, ИЛ, М., 1955.
17. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
18. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ **6**, 463, 1936.
19. H. Margenau, L. M. Hartman, Theory of High-Frequency Discharges. Harmonic components of the Distribution Function, Phys. Rev. **73**, 309, 1948.
20. А. В. Гуревич, Некоторые вопросы теории распространения сильных радиоволн в плазме, Диссертация, ФИАН, М., 1957.
21. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 7, 203, 1937.
22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, Гостехиздат, М.—Л., 1958.
23. R. H. Healy, J. W. Reed, The behaviour of slow electrons in gases, Sydney, **1941**.
24. Г. Месси, Е. Бархоп, Электронные и ионные столкновения, ИЛ, М., 1958.
25. А. В. Гуревич, Распределение по скоростям электронов в молекулярной плазме (ионосфера), Радиофизика (Изв. вузов) **2**, 355, 1959.
26. M. J. Druyvestein, Calculation of Townsends α for Ne, Physica **3**, 65, 1936.
27. J. A. Smit, Berechungen der Geschwindigkeitswerteilung der Elektronen by Gasenladungen in Helium, Physica 3, 543. 1936.

27a. T. I. Lewis, Electron energy distribution in uniform electric fields and Townsend ionization coefficient, Proc. Roy. Soc. **A244**, 166, 1958,

28. D. Bohm, D. Pines, Phys. Rev. **82**, 625, 1951; 85, 338, 1952.
29. Б. И. Давыдов, О влиянии колебаний плазмы на ее электропроводность и теплопроводность. Сборник «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», изд. АН СССР, М., 1958, т. 1. стр. 77.
30. S. Chandrasekhar, Stochastic problems in Physics and Astronomy, Revs. Mod. Phys. **15**. 1, 1943.
31. А. В. Гуревич, Влияние соударений между электронами на их распределение по скоростям в газах и в полупроводниках, ЖЭТФ **37**, 304, 1959.
32. R. S. Cohen, L. Spitzer, P. Routly, Electrical conductivity in an ionized gas, Phys. Rev. **30**, 230, 1950.

33. L. Spitzer, R. Harm, Transport phonomenon in a completely ionized gas, Phys. Rev. 89, 977, 1953.
34. M. N. Rosenbuth, W. M. MacDonald, D. L. Judd, Fokker—Plank Equation for an Inverse Square Force, Phys. Rev. 107, 1, 1957.
35. А. В. Гуревич, ЖЭТФ 32, 1237, 1957.
36. L. G. H. Huxley, A. Zaazou, Experimental and theoretical studies of the behaviour of electrons in air, Proc. Roy. Soc. A196, 402, 427, 1949.
37. R. W. Crompton, L. G. H. Huxley, D. J. Sutton, Experimental studies of the motions of slow electrons in air with application to the ionosphere, Proc. Roy. Soc. A218, 507, 1953.
38. R. W. Crompton, D. J. Sutton, Experimental investigation of the diffusion of slow electrons in nitrogen and hudrogen, Proc. Roy. Soc. A215, 467, 1952.
39. B. I. H. Hall, The diffusion of slow electrons in deuterium, Austral. Journ. Phys. 8, 468, 1955.
40. B. I. H. Hall, The diffusion of electrons in a gas at low temperatures, Austral. J. Phys. 8, 551, 1955.
41. G. Bekefi, S. C. Brown, Collisional cross section and energy loss of slow electrons in hydrogen, Phys. Rev. 112, 199, 1958.
42. А. В. Гуревич, ЖЭТФ 36, 624, 1959.
43. А. В. Гуревич, ЖЭТФ 30, 1112, 1956.
44. R. Landshoff, Transport phenomena in a completely inoized gas in presence of a magnetic field, Phys. Rev. 76, 904, 1949; 82, 442, 1951.
45. Е. С. Фрадкин, К теории процессов переноса в плазме. находящейся в магнитном поле, ЖЭТФ 32, 1176, 1957.
46. С. И. Брагинский, ЖЭТФ 33, 459, 1957.
47. R. C. Hwa, Effects of Electron—Electron interactions on Cyclotron Resonances in Gaseous Plasmas, Phys. Rev. 110, 307, 1958.
48. M. S. Sodha, V. P. Varshni, Transport phenomena in a completely ionized gas, Phys. Rev. 111, 1203, 1958.
49. В. Л. Гинзбург, О *влиянии междуэлектронных соударений на поглощение* волн в F-слое и в солнечной короне, ЖТФ 21, 943, 1951.
50. M. J. Druyvestein, De invoed der Energieverliezen by elsstische Botsingen in de Theorie der elektronendiffusie, Physica 10, 69, 1930.
51. H. W. Allen, Electron Temperatures and Mobilities in the Rare Gases, Phys. Rev. 52, 707, 1937.
52. H. Margenau, Conduction and Dispersion of Ionized Gases at High Frequences, Phys. Rev. 69, 508, 1946; 73, 297, 1948.
53. R. Jancel, T. Kahan, Mecanique statique des plasmas électroniques Lorentzienne et ses applications a l'ionosphere, Proc. Conf. on Phys. of Ionosphere, Cambridge, 1954, стр. 365; Comp. Rend. 238, 995, 1954; J. Phys. et Rad. 16, 136, 1955.
54. В. М. Файн, Распределение электронов по скоростям в присутствии переменного электрического и постоянного магнитного поля, ЖЭТФ 28, 422, 1955.
55. А. В. Гуревич, ДАН СССР 104, 201, 1955.
56. В. Л. Гинзбург, К теории люксембург-горьковского эффекта, ИАН СССР, серия физич., 12, 293, 1948.
57. И. М. Виленский, ЖЭТФ 22, 544, 1952.
58. E. Gerjuoy, S. Stein, Rotational Excitation by slow Electrons, Phys. Rev. 97, 1671, 1955.
58a. H. S. W. Massey, The exitation of Molecular Vibration and Rotation by impact of slow electrons, Phil. Mag. 4, 336, 1959.
59. L. G. H. Huxley, Formulae for the mean losses of energy in collisions of slow electrons moving in diatomic gases, Austr. Journ. Phys. 9, 44, 1956.
60. W. Bennett, L. Thomas, Mobilities in some free electron gases, Phys. Rev. 62, 41, 1942.
61. Л. М. Коврижных, ЖЭТФ 37, 490, 1959.
62. L. M. Hartman, Theory of High Frequency Discharges. High Frequency Breakdown, Phys. Rev. 73, 316, 1948.
63. P. M. Morse, W. P. Allis, E. S. Lamar, Velocity Distribution for Elastically Colliding Electrons, Phys. Rev. 48, 412, 1935.
64. Г. А. Лорентц, Теория электронов, Гостехиздат, М.—Л., 1934, 1953.
65. W. Allis, Motions of ions and electrons, Handbuch der Physik 21, 383, 1956.
66. J. Cahn, Electrostatic Interaction in d. c. Discharges in Gases, Phys. Rev. 75, 346, 1949.
67. Г. В. Спивак, Е. А. Вайнриб, ЖЭТФ 18, 539, 1948.
68. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ 21, 1284, 1951.