

ПАРАДОКС ЧАСОВ И ФИЗИКА РАЗРЫВНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ *)**К. Лефферт и Т. Донайе****1. ВВЕДЕНИЕ**

Любопытно, что несмотря на большой интерес к парадоксу часов, возникшему в специальной теории относительности со времени ее появления, только недавно был опубликован количественный анализ этой проблемы. Последнее было сделано Мёллером¹. Предшествующие же работы на эту тему²⁻⁵ носили качественный или, в лучшем случае, полуквантитативный характер. Анализ, проведенный в¹, основан на использовании преобразования координат от инерциальной системы отсчета к системе, движущейся с произвольными ускорениями. С помощью этих преобразований явным образом определяется координатная система ускоряемых часов и протекшее собственное время обоих рассматриваемых часов вычисляется в неинерциальной системе координат так же, как в инерциальной. В настоящей статье используется метод, предложенный в¹, причем обращено особое внимание на некоторые довольно любопытные особенности движения часов, покоящихся в инерциальной системе, при их рассмотрении с точки зрения неинерциальной системы отсчета.

В неинерциальной системе отсчета движение часов, чья собственная система отсчета инерциальна, является свободным падением в искусственном гравитационном поле, которое включается и выключается три раза. Как будет показано, в тот момент, когда для изменения движения часов включается поле, эти часы ведут себя так, словно получают импульс в направлении, противоположном направлению поля. Скорость часов внезапно возрастает и только после этого скачка начинает медленно падать. Этот и подобный ему эффекты имеют место в точках разрыва метрического тензора в криволинейной системе координат, соответствующей неинерциальной системе отсчета. Вместе с тем, этим эффектам, имеющим место для предельного случая разрывов, в плавно меняющемся гравитационном поле отвечают не менее любопытные явления.

2. РАССМОТРЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ЧАСОВ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

При предшествующих обсуждениях парадокса часов, в частности в¹, эти аномалии прошли незамеченными, так как оказалось возможным вычислять искомые собственные интервалы времени без детального рассмотрения зависимости скорости и положения каждого часа от времени.

*) C. V. Leffert and T. M. Donahue, Amer. Journ. of Phys. 26, 515 (1958). Перевод К. А. Барсукова.

Лучше всего это показать, остановившись кратко на изложении полученных в¹ результатов. Эксперимент с часами в¹ рассмотрен так, как это показано при помощи мировых линий на рис. 1. Стандартные часы C_1 покоятся в начале координат O_1 инерциальной системы отсчета S_1 с координатами (X, Y, Z, T) . При $T=0$ идентичные стандартные часы C_2 с помощью постоянной силы F ускоряются вдоль положительной оси X и приобретают скорость v в точке $X=A$. От $X=A$ часы движутся с постоянной скоростью v , пока не достигают точки B , где они подвергаются действию постоянной силы величины F , направленной теперь к началу координат. Эта сила заставляет их остановиться в точке C и ускоряет их до скорости $-v$ при втором прохождении точки $X=B$. Далее часы продолжают двигаться с постоянной скоростью $-v$ до точки $X=A$, где они подвергаются действию постоянной силы F , направленной вдоль положительной оси X . Эта сила в конце концов опять заставляет часы остановиться в начале координат O_1 .

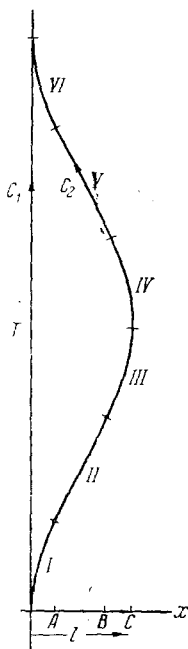


Рис. 1. Мировые линии для эксперимента с часами в случае постепенного ускорения часов.

2.1. Инерциальная система координат

Уравнение движения для часов C_2 в периоды их ускорения имеет вид

$$g = \frac{F}{m_0} = \frac{d}{dT} \left(\frac{u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right), \quad (1)$$

где F — постоянная сила, m_0 — масса покоя и

$$u = \frac{dX}{dT}.$$

Для первого периода ускорения (I на рис. 1), когда начальные условия суть $X_0=0$, $u_0=0$ при $T=0$, решение уравнения (1) имеет вид

$$X = \frac{c^2}{g} \left\{ \left[1 + \left(\frac{gT}{c} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\} \quad (2)$$

и

$$u = \frac{gT}{\left[1 + \left(\frac{gT}{c} \right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (3)$$

Таким образом, скорость, приобретенная часами за время $\Delta'T$, равна

$$v = \frac{g \Delta'T}{\left[1 + \left(\frac{g \Delta'T}{c} \right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (4)$$

Если предположить, что ход стандартных часов, движущихся в инерциальной системе координат, зависит только от их скорости, но не от ускорения, то изменение собственного времени $\Delta'\tau_2$ часов C_2 для периода ускорения I получается из соотношения

$$\Delta'\tau_2 = \int_0^{\Delta'T} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{1/2} dT. \quad (5)$$

В (5), учитывая (3), может быть проведено интегрирование, которое дает

$$\Delta\tau_2 = \frac{c}{g} \ln \left[\frac{g\Delta'T}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{g\Delta'T}{c} \right)^2} \right]. \quad (6)$$

В силу симметрии задачи это выражение будет также собственным временем, прошедшим в течение каждого из периодов ускорения *I*, *III*, *IV* и *VI*.

Эти временные интервалы стремятся к нулю при постоянном *v* и $g \rightarrow \infty$.

Суммарное собственное время, прошедшее на часах C_2 , стремится ко времени равномерного движения часов $\Delta\tau_2$:

$$\Delta\tau_2 = (1 - \beta^2)^{1/2} \Delta\tau_1, \quad (7)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$ и $\Delta\tau_1$ есть промежуток собственного времени для часов C_1 .

2.2. Ускоренная система координат

В ускоренной системе отсчета S_2 отвечающие этой системе координаты (*x*, *y*, *z*, *t*) связываются с координатами в S_1 для периодов равномерного движения посредством обычных преобразований Лоренца. Для периодов ускорения *I*, *III*, *IV* и *VI* уравнения преобразования выводятся из бесконечно малых преобразований Лоренца без вращения пространственных осей. В системе координат, связанной с S_1 посредством подобных преобразований, любое событие имеет такие же координаты, как и в инерциальной системе отсчета, в которой в данный момент часы C_2 покоятся в начале координат и $t = \tau_2$. Такими уравнениями преобразования для периодов ускорения, указанных на рис. 1, являются следующие уравнения (движение начала координат не учитывается):

$$X = \frac{c^2}{g} \left(\operatorname{ch} \frac{gt}{c} - 1 \right) + x \operatorname{ch} \frac{gt}{c}, \quad Y = y, \quad Z = z, \quad T = \frac{c}{g} \operatorname{sh} \frac{gt}{c} + \frac{x}{c} \operatorname{sh} \frac{gt}{c}. \quad (8)$$

Элемент длины приобретает форму

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \left(1 + \frac{gx}{c^2} \right)^2. \quad (9)$$

В системе отсчета S_2 следует учесть тот факт, что ускоренное движение часов C_1 представляет собой свободное падение в гравитационном поле с скалярным потенциалом*)

$$\chi = \pm |g|x \left(1 \pm \frac{|g|x}{2c^2} \right). \quad (10)$$

В таком поле ход часов C_1 и C_2 получается из общего выражения для хода движущихся стандартных часов в поле с гравитационным скалярным потенциалом χ :

$$d\tau = \left(1 + \frac{2\chi}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} \right)^{1/2} dt. \quad (11)$$

В продолжение периода ускорения часы C_2 удерживаются в начале координат O_2 посредством приложенной силы величины F . Так как потенциал (10) в этой точке исчезает и часы C_2 находятся в покое,

*) Это поле является по необходимости решением уравнений поля $R_{ki} = 0$, так как R_{ki} является тензором и его компоненты исчезают, конечно, в инерциальной системе координат.

ход часов C_2 является точно таким же, как и ход координатных часов, т. е. $d\tau_2 = dt$. Но часы C_1 , как свободная частица, движутся по геодезической линии, уравнение которой есть

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{ik} \frac{dx^k}{d\tau} \right) = \frac{1}{2} g_{kl, i} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau}, \quad (12)$$

где $-c^2 d\tau^2 = ds^2$. Этой геодезической линии со значениями g_{ik} , взятыми из (9), отвечает уравнение движения для часов C_1 в неинерциальной системе отсчета S_2

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2 \frac{g}{c^2}}{1 + \frac{gx}{c^2}} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + g \left(1 + \frac{gx}{c^2} \right) = 0, \quad (13)$$

где связь между dt и $d\tau$ определяется уравнением (11). Из этого дифференциального уравнения с начальными условиями $x = x_0$ и $\frac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0$ следует, что

$$x = \frac{c^2}{g} \left[\left(1 + \frac{gx_0}{c^2} \right) \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{gt}{c}} - 1 \right] \quad (14)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = c \left(1 + \frac{gx_0}{c^2} \right) \frac{\operatorname{sh} \frac{gt}{c}}{\operatorname{ch}^2 \frac{gt}{c}}. \quad (15)$$

Раз известны координата x , потенциал χ и скорость u как функции t , то с помощью выражения (11) путем интегрирования может быть найдено собственное время τ часов C_1 как функция координатного времени t :

$$\tau = \left(\frac{c}{g} + \frac{x_0}{c} \right) \operatorname{th} \frac{gt}{c}. \quad (16)$$

С точки зрения наблюдателя 2, время $\Delta'\tau_1$, прошедшее в C_1 в продолжение периода начального ускорения, вычисляется с помощью формулы (16) при $x_0 = 0$:

$$\Delta'\tau_1 = \frac{c}{g} \operatorname{th} \frac{g\Delta't}{c}. \quad (17)$$

По соображениям симметрии такое же время протечет на часах C_1 в период конечного ускорения. В выражении (17) $\Delta't$ может быть заменено на $\Delta'\tau_2$, так как по определению $t = \tau_2$. Кроме того, так как в этом случае оба наблюдателя сойдутся на значении $\Delta'\tau_2$, можно написать соотношение

$$\operatorname{th} \frac{g\Delta'\tau_2}{c} = \frac{v}{c}, \quad (18)$$

которое получается в системе координат 1 с помощью соотношений (6) и (4). Другими словами, в системе координат 2 наблюдатель 2 получит для $\Delta'\tau_1$ значение

$$\Delta'\tau_1 = \frac{c}{|g|} \frac{v}{c} = \frac{v}{|g|}, \quad (19)$$

где v и $|g|$ измерены в системе 1. В пределе при $|g| \rightarrow \infty$ $\Delta'\tau_1$ исчезает ($v = \text{const}$).

В продолжение интервалов II и V часы C_1 должны двигаться с постоянной скоростью v в пространстве, свободном от поля, так что

$$\Delta''\tau_1 = (1 - \beta^2)^{1/2} \Delta''\tau_2. \quad (20)$$

Этот результат следует из специальной теории относительности ввиду постоянства скорости v часов C_2 в S_1^*).

Окончательно в конце движения, полагая в (16) $x_0 = -L$, $|g| = -g$, $t = \Delta''\tau_2 = \Delta'\tau_2$, получаем

$$\Delta''\tau_1 = \left(\frac{c}{|g|} + \frac{L}{c} \right) \frac{v}{c}, \quad (21)$$

где опять оказывается полезным соотношение (18).

Этот промежуток времени в пределе при $|g| \rightarrow \infty$ (см. рис. 2) равен

$$\Delta''\tau_1 = \frac{Lv}{c^2}. \quad (22)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta\tau_1 &= 2 \left[(1 - \beta^2)^{1/2} \Delta''\tau_2 + \frac{Lv}{c^2} \right] = \\ &= \left[(1 - \beta^2)^{1/2} \Delta\tau_2 + 2 \frac{Lv}{c^2} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Если теперь значение L , которое должно получаться одинаковым для обоих наблюдателей, определить из соотношения

$$L = \frac{v \Delta\tau_1}{2}, \quad (24)$$

которое получает наблюдатель 1 в пределе при $|g| \rightarrow \infty$, то выражение (23) сводится к следующему:

$$\Delta\tau_2 = (1 - \beta^2)^{1/2} \Delta\tau_1. \quad (25)$$

Этот результат согласуется с выражением (7), полученным наблюдателем 1.

2.3. Скачки (разрывы) скорости часов

Поскольку все проведенное рассмотрение не требует знания координат и скорости часов C_1 в продолжение всего их движения, остаются скрытыми некоторые любопытные свойства движения этих часов. Соответствующие аномалии сразу выявляются, если только сделать простейший расчет скорости, приобретаемой часами C_1 в продолжение начального периода ускорения. Дело в том, что эта скорость оказывается отличной от $-v$, т. е. скорости, которую C_1 должны иметь в момент выключения поля.

Скорость часов C_1 в системе S_2 , как функция t , дается уравнением (15). При $t = \Delta'\tau_2$ для $g = \pm |g|$ оно дает

$$\frac{dx}{dt} = \mp v \left(1 \pm \frac{|g|x_0}{c^2} \right) (1 - \beta^2)^{1/2}, \quad (26)$$

где используется фундаментальное соотношение (18) между $\Delta'\tau_2$ и v . В продолжение фазы движения, о которой идет речь, $g = +|g|$ и $x=0$, так что в конце периода начального ускорения

$$\frac{dx}{dt} = -v(1 - \beta^2)^{1/2} \neq -v. \quad (27)$$

*) Как будет показано ниже, для того чтобы определить в S_2 величину постоянной скорости, полученной в результате предшествующего ускорения, требуются добавочные сведения о поведении зависящих от времени гравитационных полей.

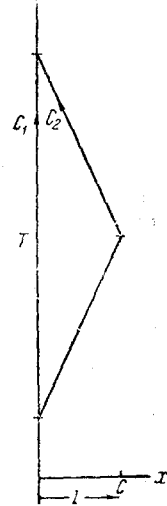


Рис. 2. Мировые линии для эксперимента с часами для предельного случая, когда $|g| \rightarrow \infty$.

Следовательно, как отсюда вытекает, в тот самый момент, когда исчезает гравитационное поле, в системе S_2 у часов C_1 будет измерен скачок скорости. Можно показать, что всякий раз, когда гравитационное поле внезапно меняется, в системе S_2 наблюдается подобный скачок в скорости.

Сразу же возникает вопрос, имеют ли подобные скачки скорости какое-либо значение для физически осуществимых ускоренных систем. Отсчета или они являются результатом свойств выбранных преобразований, которые делают эти преобразования неприемлемыми в теории. Этот вопрос является наиболее уместным, когда из преобразований Лоренца и уравнений преобразования (8) становится очевидным, что точки в четырехмерном пространстве, отвечающие этим событиям разрыва скорости, лежат на пространственно-временных границах, где используемые преобразования являются недифференцируемыми.

В сущности, преобразования с такими особенностями в литературе часто классифицируются как запрещенные*). Однако в настоящем случае, когда интуитивно кажется, что используемые преобразования представляют приемлемую идеализацию опыта, необходимо было бы исследовать законность такого запрещения и рассмотреть более внимательно упомянутые разрывы. Для того чтобы ясно и в деталях выявить все особенности движения часов с точки зрения двух координатных систем того типа, которые использованы в ¹, мы сначала опишем метод измерения положения и времени в этих двух системах координат. Этот метод позволит нам шаг за шагом проанализировать данные, получаемые наблюдателями в инерциальной и неинерциальной системах координат.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

3.1. Видоизменение опыта с часами

Вообразим, что системы S_1 и S_2 , в которых находятся часы C_1 и C_2 , снабжены жесткими стержнями, лежащими в направлении движения и служащими для определения пространственных координат; на концах стержней помещены вспомогательные (координатные) часы. Во время движения данных стандартных часов делаются отметки отвечающих им положений и координатного времени в системе отсчета, связанной с другими стандартными часами. Эти сведения посылаются с помощью электромагнитных сигналов к другим часам, где сигналы регистрируются вместе с показаниями этих часов в момент прибытия сигнала. На рис. 3 показаны мировые линии двух стандартных часов и некоторых координатных часов для выбранных значений параметров g , v , ΔT . Здесь опыт с часами несколько упрощен в том отношении, что исключены периоды ускорения I и VI (рис. 1), так что при первой встрече часы C_2 проходят мимо C_1 с постоянной скоростью v и в одинаковый нулевой момент собственного времени. Пространственно-временная траектория C_2 от этого события до второй встречи с C_1 подобна траектории для периодов движения II , III , IV и V (рис. 1), за исключением того, что после второй встречи часы C_2 продолжают двигаться мимо C_1 с постоянной скоростью $-v$.

Мировая линия для часов C_2 в продолжение периода ускорения получается из решения уравнения (1) для начальных условий $X=X_0$ и $u=c$ при $T=T_0$. Мировые линии для ряда электромагнитных сигналов, пере-

*) См. ⁵, стр. 236, и ⁶.

дающих сведения относительно пространственных координат и показаний координатных часов от одних стандартных часов к другим, показаны как прямые линии (с равным единиче тангенсом угла) между мировыми линиями обоих часов. Поскольку уравнения (8) соответствуют преобразованию к системе отсчета, идентичной с мгновенной сопутствующей инерциальной системой отсчета часов C_2 , причем C_2 находится в начале координат при $t = \tau_2$, мгновенная ось x в продолжение периода ускорения переносится из положения ab в положение ac на рис. 3.

Можно заметить, между прочим, что для пространственно-временной области на рис. 3 слева от a между продолжением пунктирных линий ab и ac преобразования, используемые в $1'$, полностью неприменимы (в этой области обратное преобразование трехзначно).

Сведения, получаемые с помощью электромагнитных сигналов часами C_1 , изображаются на рис. 4 относительно показаний τ_2 часов C_2 . Описание опыта для наблюдателя 2 получается, конечно, из рис. 4 перестройкой графика относительно откладываемого по абсциссе координатного времени t , как это показано на рис. 5. На кривой, изображающей траекторию часов C_1 , непосредственно становится видимым упомянутый ранее скачок [в скорости часов C_1 .

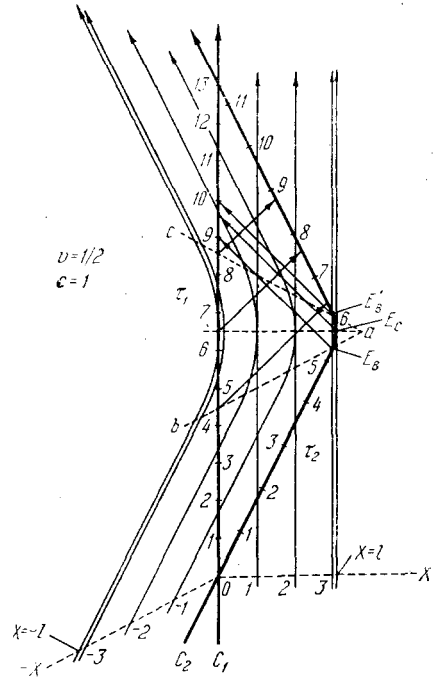


Рис. 3. Мировые линии для измененного эксперимента с часами в случае постепенного ускорения часов.

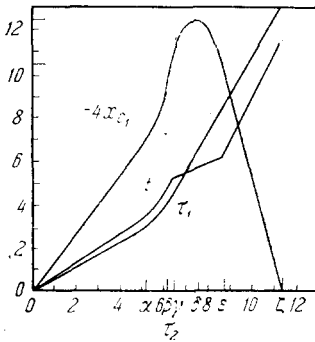


Рис. 4. Измерения сигналов для часов C_2 в измененном опыте в случае постепенного ускорения.

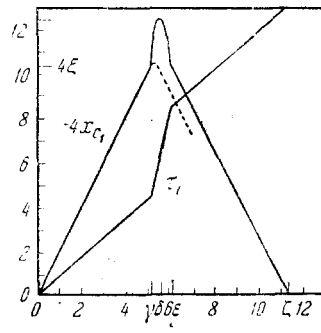


Рис. 5. Анализ движения часов C_1 для измененного опыта при постепенном ускорении часов.

Скачок в скорости часов C_1 при $t = \gamma$ на рис. 5, несомненно, является необъяснимым классически, так как при $t = \gamma$ внезапное введение постоянного силового поля вдоль положительного направления оси x вызывает

мгновенное ускорение часов против поля и только с этого времени часы действительно начинают медленно падать.

Величина скачка скорости при $t=\varepsilon$ на рис. 5 согласуется с величиной вычисленной из уравнения (26), где $x_0 = -L$ и $g = -|g|$. Движение часов C_1 для $\gamma < t < \varepsilon$ на рис. 5 является решением уравнения (13), полученного в ¹. Однако, если уравнение (13) решено, как это могло бы быть в классике, с использованием начальных условий, соответствующих положению и скорости часов C_1 , точно предшествующих включению гравитационного поля в S_2 , тогда движению отвечает пунктирная кривая на рис. 5. Отсюда ясно, что движение в этой области будет требовать специального рассмотрения.

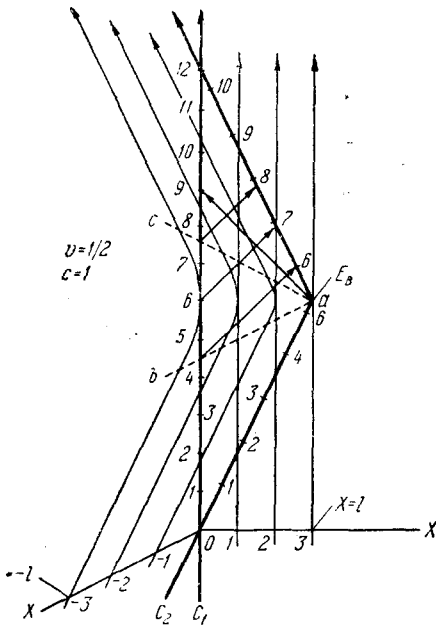


Рис. 6. Мировые линии для измененного опыта с часами в предельном случае, когда $|g| \rightarrow \infty$.

В предельном случае, когда $|g| \rightarrow \infty$ и скорость в период ускорения меняется на постоянную величину, опыт с часами рис. 3 приближается к опыту, показанному на рис. 6, а описание движения на рис. 4 и 5 приближается к описанию, показанному на рис. 7 и 8 соответственно.

На рис. 6 мгновенная ось x мгновенно (ab) перемещается из положения ac через промежуточный пространственно-временной район в положение ac . Это значит, что все события в пространственно-временной области между ab и ac происходят в ускоренной системе координат в одно и то же время. Это изменение в положении координатных часов в S_2 также отражено в кривых рис. 7 и 8.

В этом предельном случае, который был рассмотрен в ¹, собственное время часов C_1 совершает внезапный скачок в момент ускорения $t=\gamma$ на рис. 8. Это явление является основным для решения парадокса (см. также скачок в τ_1 , определяемый соотношением (22)).

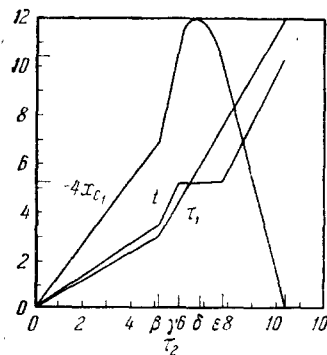


Рис. 7. Измерения сигналов для часов C_2 в предельном случае, когда $|g| \rightarrow \infty$.

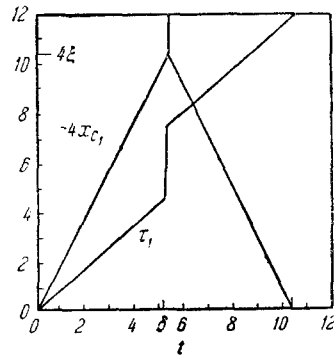


Рис. 8. Анализ движения часов C_1 в предельном случае, когда $|g| \rightarrow \infty$.

В этом предельном случае, который был рассмотрен в ¹, собственное время часов C_1 совершает внезапный скачок в момент ускорения $t=\gamma$ на рис. 8. Это явление является основным для решения парадокса (см. также скачок в τ_1 , определяемый соотношением (22)).

3.2. Особые точки для метрического тензора

Из проведенного анализа эксперимента с часами совершенно очевидно, что скачок скорости и внезапное изменение хода часов, наблюдаемые в S_2 (в период ускорения), играют важную роль в решении парадокса часов. Остается вопрос о том, дает ли этот анализ удовлетворительное решение проблемы, поскольку скачки имеют место тогда, когда пространственно-временное преобразование от декартовой системы S_1 к покоящейся системе S_2 является недифференцируемым. На рис. 3 это происходит вдоль линий ab и ac —мгновенных осей x в моменты приложения и снятия силы. Эта особенность преобразования приводит к разрывному метрическому тензору в преобразованной координатной системе и, следовательно, к прерывности движения. Разрывы метрического тензора являются очевидными, поскольку в пространственно-временной области вне клина, определяемого прямыми ab и ac на рис. 3, мы имеем

$$g_{ik} = \delta_{ik} \text{ (кроме компоненты } g_{44}), \quad g_{44} = -1, \quad (28)$$

в то время как внутри упомянутой области

$$g_{ik} = \delta_{ik} \text{ (кроме компоненты } g_{44}), \quad g_{44} = -\left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^2. \quad (29)$$

Только при $x=0$ компонента g_{44} на этих пространственно-временных границах действительно становится непрерывной.

4. ДЕЙСТВИЕ ПЛАВНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ СИЛЫ

Чтобы выяснить, являются ли все эти аномалии или только некоторые из них следствиями разрыва в g_{44} , необходимо рассмотреть несколько более общий эксперимент, в котором полная сила, приложенная к часам C_2 , включается не внезапно. Другими словами, предположим, что сила плавно возрастает от нуля до ее конечной величины и затем постепенно уменьшается.

Таким образом, примем, что

$$g = g(t) \begin{cases} = 0 & \text{при } t=0, \\ = g_f & \text{при } t=t_f \end{cases}$$

и

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0 \text{ при } t=0 \text{ и } t=t_f. \quad (30)$$

В этом случае преобразования уравнений к ускоренной системе отсчета в продолжение периода ускорения, если не говорить о переносе начала координат, таковы:

$$\left. \begin{aligned} X &= c \int_0^t \text{sh } G \, d\theta + x \text{ch } G, \\ T &= \int_0^t \text{ch } G \, d\theta + \frac{x}{c} \text{sh } G, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

где

$$G = G(\theta) = \frac{1}{c} \int_0^\theta g(a) \, da. \quad (32)$$

При этом

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(1 + \frac{g(t)x}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2. \quad (33)$$

Таким образом,

$$g_{ik} = \delta_{ik} \text{ (кроме компоненты } g_{44}), \quad g_{44} = -\left(1 + \frac{g(t)x}{c^2}\right)^2, \quad (34)$$

и производные равны

$$g_{ik,1} = 0,$$

за исключением

$$g_{44,1} = -2 \frac{\dot{g}(t)}{c^2} \left(1 + \frac{g(t)x}{c^2}\right)$$

и

$$g_{44,4} = -2 \frac{x}{c^3} \left(1 + \frac{g(t)x}{c^2}\right) \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (35)$$

Так как $g \rightarrow 0$ и $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$ при $t = 0$, g_{44} достигнет своего декартового значения и все $g_{ik,1} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Аналогично, поскольку $\frac{\partial g}{\partial t}$ опять исчезает при $g = g_f$, компоненты метрического тензора и его первые производные все являются непрерывными при $t = t_f$, т. е. при $t \rightarrow t_f$

$$g_{44,1} \rightarrow -\frac{2g_f}{c^2} \left(1 + \frac{g_f x}{c^2}\right)$$

и

$$g_{44,4} \rightarrow 0. \quad (36)$$

Для того чтобы получить уравнение движения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f\left(x, t, \frac{dx}{dt}, g_f, t_f\right) \quad (37)$$

для свободной частицы в системе S_2 , необходимо теперь использовать уравнение геодезической линии (12) и соотношение

$$d\tau = dt \left[\left(1 + \frac{g(t)x}{c^2}\right)^2 - \frac{u^2}{c^2} \right]^{1/2}. \quad (38)$$

Соответствующее дифференциальное уравнение должно сводиться к $\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$ при $t = 0$ и к уравнению (13) при $t = t_f$.

Функция $g(t)$, которая удовлетворяет всем этим условиям, такова:

$$g(t) = \frac{g_f}{2} (1 + \sin a), \quad (39)$$

где

$$a = \frac{t - \frac{t_f}{2}}{t_f}. \quad (40)$$

Процедура, описанная ранее в общих чертах, приводит в этом случае к следующему уравнению движения в системе S_2 :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{g_f}{2} \frac{1 + \sin a}{1 + \left(\frac{g_f x}{2c^2}\right)(1 + \sin a)} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{g_f x}{t_f c^2} \frac{\pi}{2} \frac{\cos a}{1 + \left(\frac{g_f x}{2c^2}\right)(1 + \sin a)} \frac{dx}{dt} + \frac{g_f}{2} (1 + \sin a) \left[1 + \frac{g_f x}{2c^2} (1 + \sin a)\right] = 0. \quad (41)$$

Ясно, что это уравнение позволяет производной принимать правильные значения при $t=0$ и при $t=t_f$. Член с $\frac{dx}{dt}$, в частности, исчезает на обеих границах. Но в течение периода изменения гравитационного поля существует третий член, знак которого зависит от знака $\frac{dx}{dt}$, причем этот член может быть большим, если t_f мало. В сущности, этот член точно обеспечивает изменение импульса, необходимое для непрерывности скорости часов C_1 при $t \rightarrow 0$. При $t=\tau_2$ в точке E_B на рис. 3 ускорение в переходной области при $t_f \rightarrow 0$ стремится к минус бесконечности, что обеспечивает необходимое изменение импульса вдоль отрицательной оси x при $t=\gamma$ на рис. 5.

Таким образом, в течение периода изменения гравитационного поля частица будет ускоряться совершенно необъяснимым классически образом.

Существует сильно зависящая от скорости часть ускорения, которая может быть направлена противоположно силе в зависимости от значений координаты и скорости. Это ускорение становится импульсным по мере того, как период изменения становится короче, и может вызвать внезапное изменение в скорости частицы в момент приложения поля, как, например, это имеет место в ¹ (см. выше, раздел 2).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В силу принципа эквивалентности из приведенного анализа следует, что даже если пространство не является плоским и существует «реальное гравитационное поле», уравнение движения частицы в системе отсчета, где это поле (т. е. g_{ik}) изменяется со временем, вполне может иметь члены, подобные присутствующим в уравнении (41). Таким образом, в общей теории относительности могут быть найдены такие же странные эффекты, как описанные в этой статье, когда переменное гравитационное поле может ускорять частицы в направлении, противоположном полю; при этом, конечно, предполагается, что может быть создано гравитационное поле, зависящее от скорости.

Эти рассуждения, помимо того, показывают, что применение сингулярных преобразований, ведущих к довольно странному поведению свободных часов при анализе их движения из неинерциальной системы отсчета, не делает непригодным рассмотрение проблемы часов, проведенное в ¹. Вопрос о законности соответствующего расчета, кратко воспроизведенного выше, в разделе 2, 2, полностью сводится к тому, является ли законным использованный Мёллером способ преобразования координат.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С. Мёллер, *The Theory of Relativity* (Oxford University Press, London, 1952), стр. 258.
2. R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology* (Oxford University Press, London, 1934), стр. 166.
3. J. W. Campbell, *Phil. Mag.* 15, 48 (1933).
4. J. W. Campbell, *Phil. Mag.* 16, 529 (1933).
5. E. L. Hill, *Phys. Rev.* 72, 236 (1947).
6. P. G. Bergman, *Introduction to the Theory of Relativity* (Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1942), стр. 158 (есть русский перевод: Бергман П. Г., Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Winterberg F., «Релятивистское замедление ритма времени» *Astronaut. Acta* 2 (1), 25, 1956.
2. Heiman R., «Эксперимент, предлагаемый для определения релятивистского сжатия времени», *Nature* 178 (4535), 685, 1956.
3. Dingle H., а) «Проблема часов в теории относительности», *Proc. Phys. Soc.* A69, (12), 925, 1956; б) «Разрешение парадокса с часами», *Austr. J. Phys.* 10(3), 418, 1957; в) «Теория относительности и путешествие в пространство», *Nature* 177 (4513), 782, 1957; г) «Парадокс с часами в теории относительности», *Nature* 179 (4565), 865, 1957; д) «Парадокс с часами в теории относительности», *Nature* 179 (4572), 1242, 1957; е) «Теория относительности и путешествие в пространстве», *Nature* 180 (4584), 499, 1957; ж) «Парадокс с часами в теории относительности», *Nature* 180 (4597), 1275, 1957.
4. McCrea W., а) «Проблема часов в теории относительности» *Proc. Phys. Soc.* A. 69 (12), 935, 1956; б) «Теория относительности и путешествие в пространство», *Nature* 178 (4535), 680, 1957; в) «Релятивистское сокращение времени», *Nature* 179 (4549), 35, 1957; г) «Путешествия в пространстве и сокращение времени», *Discovery* 18(2), 56, 1957.
5. Møller C., «О возможности опытной проверки общей теории относительности в земных условиях», *Nuovo Cimento* 6, Suppl. 1, 381, 1957.
6. Cochran W., «Предлагаемый эксперимент по парадоксу часов». а) *Nature* 179 (4567), 977, 1957; б) *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 53 (3), 643, 1957.
7. Singer S., «Теория относительности и путешествия в пространстве», *Nature* 179 (4567), 977, 1957.
8. Crawford F., а) «Экспериментальная проверка парадокса с часами в теории относительности», *Nature* 179, (4549), 35, 1957; б) «Парадокс с часами в теории относительности», *Nature* 179 (4569), 1071, 1957.
9. Iseatt G., «Парадокс с часами и общая теория относительности», *Austr. J. Phys.* 10(1), 207, 1957.
10. Builder C., а) «Разрешение парадокса с часами» *Austr. J. Phys.* 10 (2), 246, 1957; б) «Проблема запаздывания часов», *Austr. J. Phys.* 10 (3), 424, 1957.
11. Robinson J., Feenberg E., «Замедление времени и эффект Доплера», *Am. J. Phys.* 25 (7), 490, 1957.
12. Golaу M., «Замечание о релятивистском эксперименте с часами», *Am. J. Phys.* 25(7), 494, 1957.
13. Frye R., Brigham V., «Парадокс с близнецами», *Am. J. Phys.* 25(8), 553, 1957.
14. McMillan E., «Парадокс с часами и путешествия в пространстве», *Science* 126 (3270), 381, 1957.
15. Fischer R., «Путешествия в пространстве и сокращение времени», *Discovery* 18 (2), 56, 1957.
16. Essen Z., «Парадокс с часами в теории относительности», *Nature* 180 (4594), 1061, 1957.
17. Darwin C., «Парадокс с часами в теории относительности» *Nature* 180 (4593), 976, 1957.
18. Fremlin J., «Теория относительности и путешествие в пространстве» *Nature* 180 (4584), 499, 1957.
19. Bergmann O., «Несколько замечаний к парадоксу с часами», *Acta Phys. Aust.* 11(3), 377, 1957.
20. Jaynes E., «Релятивистский эксперимент с часами», *Am. J. Phys.* 26 (3), 197, 1958.
21. Vascon R., «О парадоксе с близнецами», *Am. J. Phys.* 26 (7), 502, 1958.
22. Wenzel A., «Парадокс относительности времени в теории относительности», *Forsch. und Fortschr.* 32 (8), 225, 1958.
23. В. Л. Гинзбург а) Возможно ли путешествие во времени, «Наука и жизнь», № 7, стр. 77, 1958; б) «Экспериментальная проверка теории относительности», УФН LXIII (1), 149, 1957.