

**ОПТИКА ИСТОЧНИКОВ СВЕТА, ДВИЖУЩИХСЯ  
В ПРЕЛОМЛЯЮЩИХ СРЕДАХ \*)****И. М. Франк****§ 1. ОСОБЕННОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДЕ**

В течение ряда лет эффект Вавилова—Черенкова представлялся только своеобразным и притом трудно наблюдаемым оптическим явлением. Для получения свечения пользовались радиоактивными препаратами, а его наблюдение производилось визуально<sup>1</sup>. Слабость свечения казалось бы, исключала всякую возможность применений этого явления в физике, а тем более в технике.

С момента появления теории эффекта Вавилова—Черенкова<sup>2,8</sup> это явление можно было рассматривать как пример оптики сверхсветовых скоростей. Это был единичный пример из этой области и притом, казалось бы, обособленный от всех известных физических явлений. Было очевидно, что в принципе возможны и другие проявления оптики сверхсветовых скоростей, однако их наблюдение представлялось крайне сложным. Так, уже первые расчеты показали, что излучение Вавилова—Черенкова, создаваемое не электрическим зарядом, а, например, магнитным моментом электрона, настолько слабо, что лежит вне возможностей экспериментального обнаружения<sup>3</sup>. Было также очевидно, что трудно создать условия для наблюдения атома, летящего со сверхсветовой скоростью<sup>4</sup>.

Теоретическое рассмотрение всех этих вопросов в течение ряда лет представляло интерес в основном лишь с принципиальной точки зрения.

Развитие ядерной физики и усовершенствование экспериментальной техники привело в последние годы к тому, что эффект Вавилова—Черенкова нашел многочисленные применения в физике частиц высокой энергии. Выяснилась также связь этого явления со многими другими проблемами, например, с физикой плазмы, астрофизикой, проблемой генерации радиоволн, проблемой ускорения частиц и т. д.

Сейчас становится не только законным, но и по существу необходимым более широкий подход к трактовке явлений, связанных с эффектом Вавилова—Черенкова.

Естественно поставить вопрос об особенностях излучения, которое может создаваться не только электрическим зарядом, но и любым источником света, движущимся в преломляющей среде<sup>5</sup>. Такая общая постановка вопроса, охватывающая, в частности, и эффект Вавилова—Черенкова, теперь представляется интересной не только с принципиальной точки зрения. Можно надеяться, что уже в ближайшем будущем некоторые из этого круга явлений станут предметом экспериментального изучения.

---

\*) Лекция, прочитанная при вручении Нобелевской премии 11 декабря 1958 г. в Стокгольме.

Наши представления о механизме взаимодействия быстро движущейся частицы со средой претерпели со времени открытия эффекта Вавилова—Черенкова значительные изменения.

Ранее казалось очевидным, что излучение, возникающее при электромагнитном взаимодействии частиц высокой энергии со средой,—это всегда один из видов тормозного излучения. Основую энергию в таком излучении несут фотоны большой энергии. Для испускания и распространения таких фотонов оптические свойства среды не существенны. Считалось также, что процессы ионизации и возбуждения быстрыми частицами можно рассматривать как сумму независимых взаимодействий этих частиц с отдельными атомами и молекулами. Отсюда следовал вывод, что и вообще для взаимодействия частиц высокой энергии с веществом не существенны его макроскопические свойства.

Открытие и объяснение эффекта Вавилова—Черенкова, а затем обнаруженная Ферми<sup>6</sup> связь этого явления с ионизационными потерями заставили пересмотреть эту точку зрения.

Теперь очевидно, что для процессов излучения света быстро движущимися частицами макроскопические свойства среды имеют существенное значение. Весьма важной величиной, от которой зависит излучение, является отношение скорости излучателя к скорости света. В вакууме скорость света постоянна и всегда больше скорости излучателя. Она входит в формулы, определяющие излучение, как универсальная константа. Поэтому в вакууме излучение определяется только природой излучателя и законом его движения. Иначе обстоит дело в преломляющей среде. Фазовая и групповая скорости света здесь иные, чем в пустоте. Они зависят от свойств среды и частоты света. В оптически анизотропных средах они являются при этом функцией направления распространения волн и их поляризации. В средах ограниченных размеров имеет значение и изменение скорости света при переходе через границу сред. Таким образом, в преломляющей среде отношение скорости излучателя к скорости распространения волн существенно зависит от скорости света в среде и ее изменений. В отличие от вакуума это отношение может быть, в частности, и больше единицы. В результате от особенностей распространения света в среде зависят не только свойства излучения, а иногда даже сам факт его возникновения. Примером этого является эффект Вавилова—Черенкова.

Излучение в среде, разумеется, в сильнейшей степени зависит и от природы излучателя. Теория дает возможность предсказать свойства излучения Вавилова—Черенкова не только для движущегося электрического заряда, но и для других случаев. Так, например, аналогично электрическому заряду излучение Вавилова—Черенкова должен был бы создавать и магнитный заряд, если бы оказалось, что он существует<sup>7</sup>.

Если вопрос об излучении магнитного заряда и сейчас следует рассматривать лишь как теоретически возможный, то теперь вполне реальным является вопрос об эффекте Вавилова—Черенкова для магнитных и электрических диполей и мультиполей.

В самом деле, рассмотрение излучения движущейся системы частиц может оказаться необходимым при решении многочисленных задач, связанных с процессами в плазме и с проблемами ускорения частиц. Очевидно, что система частиц может быть, в частности, квазинейтральной, но иметь электрический и особенно магнитный момент, обусловленный движущимися кольцевыми токами.

Система частиц может не только двигаться как целое, но может также иметь собственные частоты колебаний. Тем более это относится к таким системам, как движущийся атом, ион или атомное ядро. Собственную частоту следует приписать и движущемуся в магнитном поле электрону

(ларморова частота обращения вокруг линий поля). Поэтому, кроме обобщений теории эффекта Вавилова—Черенкова, необходимо и рассмотрение общего случая излучения систем, обладающих собственными частотами колебаний<sup>5</sup>.

Это общее рассмотрение включает в себя и эффект Вавилова—Черенкова. Он соответствует предельному случаю собственной частоты, равной нулю.

Из того, что теория излучения заряда при сверхсветовой скорости за последние двадцать лет не претерпела какого-либо пересмотра, вовсе не следует, что теория этого эффекта полностью завершена. Это видно из следующего примера. Впервые Л. И. Мандельштам указал, что для излучения заряда при сверхсветовой скорости нет необходимости, чтобы он двигался в сплошной среде\*). Излучение остается таким же, если заряд движется по оси полого цилиндрического канала внутри этой среды. Необходимо только, чтобы диаметр канала был мал по сравнению с излучаемой длиной волны. Практически это очень существенно, так как можно получать излучение в среде в условиях, когда излучатель не испытывает непосредственных соударений с атомами среды, которые могут его деформировать или разрушить. Казалось, что это применимо и к излучению диполя в среде.

Однако, как показали в последнее время В. Л. Гинзбург с сотрудниками, этот вопрос вовсе не так прост, как казалось ранее<sup>10</sup>. Свойства среды, непосредственно прилегающей к диполю, могут быть существенны, и поэтому наличием канала при любом, даже сколь угодно малом, его диаметре пренебрегать нельзя. Это обстоятельство заставило критически рассмотреть и ранее полученные данные. Так, для излучения магнитного диполя двумя различными методами были получены противоречащие друг другу результаты<sup>4,7</sup>. Теперь можно думать, что дело здесь не в ошибочности одного из использованных методов, а в том, что они по-разному учитывают влияние среды, прилегающей к движущемуся диполю. Возможно, что оба результата правильны, но относятся к различным физическим случаям. Этот вопрос, однако, требует дополнительного рассмотрения.

Затронутый в этой лекции круг явлений, несмотря на их многообразие, охватывает лишь простейший случай излучения в среде, а именно излучение, при котором поступательное движение системы можно рассматривать как равномерное и прямолинейное.

## § 2. ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Характерным примером излучения в среде и притом при равномерном движении электрического заряда является так называемое переходное излучение. Утверждение, что при прямолинейном и равномерном движении электрического заряда со скоростью, меньшей фазовой скорости света, не происходит излучения, правильно только при условии, что скорость света вдоль пути частицы должна оставаться неизменной. Если например, равномерно движущаяся заряженная частица пересекает границу двух сред с разными показателями преломления, то возникает переходное излучение. Излучение появляется потому, что скачок, который испытывает величина фазовой скорости света на границе двух сред, в некоторой степени равносильна скачку в величине скорости частицы. Аналогия с торможением становится полной в предельном случае, когда частица движется из вакуума в металл, в котором свет поглощается на длине, малой по сравнению с длиной волны света. Интенсивность переходного излучения в этом

\*) См. статью В. Л. Гинзбурга и И. М. Франка<sup>9</sup>.

случае максимальная. При этом в оптической области спектра, в которой только и имеет место переходное излучение, оно тождественно с тем излучением, которое создали бы электрический заряд и движущийся навстречу ему заряд противоположного знака (его электрическое изображение в металле), мгновенно останавливающиеся в точке встречи.

Интенсивность переходного излучения при малых скоростях пропорциональна кинетической энергии частицы, а в релятивистской области скоростей возрастает как логарифм полной энергии. Подобно тормозному излучению, оно становится в этом случае резко направленным. Высказывались предположения, что переходное излучение может быть полезно для определения энергии ультрарелятивистских частиц. Это существенно поскольку для ультрарелятивистских частиц эффект Вавилова—Черенкова использовать для этой цели очень трудно. Как известно, угол, под которым направлено излучение Вавилова—Черенкова, и его интенсивность достигают в этом случае практически постоянного значения.

Применение переходного излучения затруднено, однако, тем, что его интенсивность очень мала. Вероятность испускания фотона порядка постоянной тонкой структуры, т. е. порядка сотой. Если не удастся суммировать переходное излучение от многих пластинок, то наблюдение отдельной частицы по переходному излучению может проводиться лишь с очень малой эффективностью. В связи с этим отметим особенности переходного излучения для ультрарелятивистской скорости. В отличие от частиц с небольшой скоростью переходное излучение при падении такой частицы из вакуума в прозрачный диэлектрик почти такое же, как при падении на металл. Это легко понять по аналогии с тормозным излучением. Действительно, изменение скорости света эквивалентно небольшому изменению скорости частицы. Однако даже небольшое изменение скорости ультрарелятивистской частицы означает большое изменение ее энергии, т. е. сильное торможение частицы. Эта особенность, возможно, позволит суммировать переходное излучение от поверхностей многих параллельно расположенных в вакууме прозрачных пластинок.

Вторая особенность состоит в том, что в вакууме при ультрарелятивистских скоростях равновесное поле, увлекаемое частицей, формируется на значительном пути. Поэтому для того, чтобы интенсивность излучения не оказалась сниженной, вакуумные прослойки между пластинками не должны быть меньше некоторой заданной величины. Так, для протона с энергией  $10^{11}$  электронвольт это минимальное расстояние порядка 1 мм, что допустимо, но для протона с энергией  $10^{14}$  электронвольт оно возрастет до неразумных размеров порядка километра.

Я остановился на вопросе о переходном излучении, чтобы отметить своеобразие оптических явлений для источников излучения, движущихся в преломляющих средах, связанное с особенностями распространения света в веществе.

Следует отметить, что хотя теория переходного излучения была развита Гинзбургом и автором этой статьи<sup>11</sup> свыше десяти лет назад и после того рассматривалась в ряде работ\*), оно экспериментально не изучено. Положение здесь почти такое же, как с излучением Вавилова—Черенкова до появления работ этих авторов. Несомненно, что переходное излучение также неоднократно наблюдалось и притом разными физиками, так как свечение поверхностей электродов под действием бомбардирующих частиц хорошо известно. Однако и сейчас не выяснен вклад, который вносят в это свечение люминесценция, тормозное излучение и переходное излучение. Наиболее надежные данные о переходном излучении получены недавно

\*) См., например, работы<sup>12</sup> и литературу, приведенную в них.

А. Е. Чудаковым (не опубликовано). Он наблюдал методом совпадений фотоны, испускаемые с поверхности металлической фольги при падении на нее быстрых электронов от радиофосфора. Найденная интенсивность излучения оказалась совпадающей с расчетной для переходного излучения по крайней мере по порядку величины \*).

Следует отметить также, что практически всегда при наблюдении радиации Вавилова — Черенкова в силу ограниченности толщины радиатора в это излучение как составная и неотделимая часть входит и переходное излучение. При очень малых толщинах радиатора, как показал В. Е. Пафомов, это обстоятельство следует учитывать <sup>6</sup>.

### § 3. СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ И КВАНТОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЯВЛЕНИЯ

Излучение заряженной частицы, равномерно движущейся со сверхсветовой скоростью, может быть, как известно, целиком описано методами классической электродинамики. Квантовая теория этого явления была впервые развита Гинзбургом <sup>3</sup>, а затем рядом других авторов \*\*). Гинзбург показал, что классическая формула, определяющая косинус угла, под которым происходит излучение, правильна с точностью до очень малой поправки, равной по порядку величины отношению энергии излучаемого фотона к полной энергии движущегося излучателя (даже для электрона это отношение меньше, чем  $10^{-5}$ ). Если отбросить эту малую квантовую поправку, содержащуюся в точной формуле, то получим как классическим, так и квантовым методом тождественные соотношения, связывающие частоту излучаемого света с направлением его излучения. Напишем их в квантовой форме и сразу для системы, обладающей собственной частотой <sup>14,5</sup> $\omega_0$  ( $\omega_0$  — частота измерения в лабораторной системе координат, т. е.  $\omega_0 = \omega'_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ ). При этом нет необходимости полагать, что  $\omega_0$  является единственной собственной частотой, которой обладает система. Можно считать ее одной из компонент сложного спектра частот и допустимо рассматривать излучение, с ней связанное.

Если импульс фотона, который в среде следует принять равным  $\frac{n\hbar\omega}{c}$ , очень мал по сравнению с импульсом излучателя, то закон сохранения импульса при излучении можно написать так:

$$\frac{n\hbar\omega}{c} \cos \theta = \frac{\Delta E}{v}. \quad (1)$$

Здесь  $\Delta E$  — изменение кинетической энергии излучателя, а  $v$  — его скорость. Их отношение дает величину изменения импульса системы.

Изменение кинетической энергии определяется, очевидно, энергией излученного фотона  $\hbar\omega$  и изменением внутренней энергии системы  $\hbar\omega_0$ :

$$\Delta E = \hbar\omega \pm \hbar\omega_0. \quad (2)$$

Величину  $\hbar\omega_0$  следует взять со знаком минус, если при излучении фотона система переходит из энергетически более высокого состояния в более низкое, т. е. энергия излученного фотона покрывается, по крайней мере частично, за счет энергии возбуждения. Знак плюс должен

\*) В книге Джелли <sup>18</sup> «Радиация Черенкова», с которой я имел возможность ознакомиться уже после написания этой лекции, содержится указание, что ее автор вместе с Эллотом и Гольдсмитом наблюдали в 1958 г. излучение от протонов с энергией 1,5 Мэв, бомбардирующих алюминиевую мишень с полированной поверхностью. На основании данных об интенсивности и поляризации авторы считают это свечение переходным излучением.

\*\*) См., например, обзор <sup>8</sup>.

быть взят, если при излучении происходит возбуждение системы, т. е. кинетическая энергия затрачивается и на излучение, и на возбуждение.

Соединяя уравнения (1) и (2), мы получаем

$$\frac{n\omega}{c} \cos \theta = \frac{\omega \pm \omega_0}{v}. \quad (3)$$

Множитель  $\hbar$  сократился и действительно это уравнение не содержит ничего специфически квантового. Тот же результат получается и из классического волнового рассмотрения.

В уравнении (3) следует различать три случая:

1. Допустим, что

$$\frac{n\omega}{c} \cos \theta = 1. \quad (4)$$

Тогда уравнение (3) удовлетворяется лишь при условии  $\omega_0 = 0$ . Это как раз случай излучения Вавилова — Черенкова, а (4) — хорошо известная формула, определяющая направление испускания света для этого излучения. Собственная частота  $\omega_0 = 0$ , необходимая для выполнения уравнения (4), означает, что движущаяся система такова, что содержит в себе источник постоянного во времени электромагнитного поля (электрический заряд, постоянный дипольный момент и т. д.). Следовательно, для того чтобы излучение Вавилова — Черенкова имело место, необходимо, чтобы такая постоянная компонента поля была отлична от нуля. При этом уравнение (4) дает связь между углом  $\theta$  и излучаемой частотой, поскольку показатель преломления  $n(\omega)$  есть функция частоты.

2. Допустим теперь, что в уравнении (4) слева стоит величина меньшая единицы, тогда (3) может быть удовлетворено только в случае знака минус при  $\omega_0$ , т. е.

$$\frac{n\omega}{c} \cos \theta = \frac{\omega - \omega_0}{v}, \quad \frac{vn}{c} \cos \theta < 1. \quad (5)$$

Это не что иное, как условие Допплера для источника света, движущегося в среде. Оно было получено еще Лоренцем при рассмотрении оптики движущихся сред. Уравнение (5) может быть, очевидно, записано в следующем обычном виде:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{vn}{c} \cos \theta}. \quad (5a)$$

Оно определяет частоту в случае, когда составляющая скорости вдоль луча  $v \cos \theta$  меньше фазовой скорости света  $\frac{c}{n}$  для частоты  $\omega$ .

От обычного условия Допплера для источника света, движущегося в вакууме, уравнение (5) или (5a) отличается лишь тем, что скорость света в пустоте заменена в нем на фазовую скорость  $\frac{c}{n}$ . Если  $v$  мало по сравнению с фазовой скоростью света, а в области частот, близких к  $\omega_0$ , дисперсия света не велика, то это не приводит к чему-либо принципиально новому. Меняется только абсолютная величина доплеровского смещения. Оно получается таким, как было бы в вакууме для скорости, равной  $vn$ , т. е. в  $n$  раз большей. Существенные особенности возникают, если дисперсия света в среде велика. Нельзя пренебрегать наличием дисперсии и при скоростях движения, сравнимых с фазовой скоростью света. Действительно, при  $n = \text{const}$  и для угла  $\theta = 0$  величина  $\frac{vn}{c} \cos \theta$  при увеличении  $v$  приближалась бы к единице, а  $\omega$ , как видно из (5a),

стремилась бы к бесконечности. При еще больших скоростях знак неравенства в (5) не выполнялся бы и, следовательно, (5) не имело бы решений. В действительности, если частота возрастает, то при достаточно больших  $\omega$  показатель преломления любой среды становится практически равным единице. Следовательно, доплеровская частота в этом случае получается такой же, как в вакууме, т. е. заведомо конечной. Иными словами, при любой скорости  $v$  и любом  $\theta$  уравнение (5) обязательно имеет решение. Более того, как будет видно из дальнейшего, этих решений может быть не одно, а несколько <sup>4, 5</sup> (сложный эффект Доплера).

3. Третий случай имеет место, когда в левой части уравнения (4) стоит величина, большая единицы. Тогда в (3) обязательно должен быть знак плюс перед  $\omega_0$ , таким образом

$$\frac{n\omega}{c} \cos \theta = \frac{\omega + \omega_0}{v}, \quad \frac{vn}{c} \cos \theta > 1. \quad (6)$$

Это — обобщение формулы Доплера на случай, когда скорость излучателя превышает фазовую скорость света для излучаемой частоты <sup>4, 14 \*</sup>). Оно определяет «сверхсветовые» доплеровские частоты. Подобно эффекту Завилова—Черенкова, сверхсветовые доплеровские частоты появляются при скорости выше некоторой пороговой. Они излучаются наряду с обычными, только при достаточно больших скоростях и в некотором интервале острых углов  $\theta$ .

Из нашего квантового рассмотрения видно, что знак плюс при  $\omega_0$  в (2) и соответственно в (6) означает возбуждение системы. Таким образом, излучение сверхсветовых фотонов происходит не при переходе из верхнего, т. е. возбужденного состояния в нижнее, как в обычном случае, а наоборот, — из нижнего в верхнее, причем энергия заимствуется из кинетической энергии поступательного движения системы <sup>14</sup>. Такое излучение с возбуждением системы должно происходить спонтанно, если система находится в нижнем энергетическом состоянии. Это столь же возможно, как спонтанный переход системы из верхнего энергетического состояния в нижнее с испусканием фотонов с частотой, удовлетворяющей (5). В самом деле, в обоих случаях переход происходит между теми же энергетическими состояниями и вопрос о том, какой из них происходит спонтанно, целиком определяется начальным состоянием и требованиями законов сохранения. При этом уравнения (5) и (6) в равной мере являются их следствиями.

Вопрос об эффекте Доплера в преломляющей среде может быть рассмотрен и в рамках классической физики. С точки зрения классической физики эти результаты интерпретируются так. Колебания с собственной частотой  $\omega_0$  вызывают появление излучения с частотами, зависящими от направления распространения. Оно образует спектр доплеровских частот, который может быть двух типов. Всегда имеется излучение с частотами, удовлетворяющими (5), реакция которого на излучатель вызывает его затухание. При некоторых условиях дополнительно к первому появляется второй спектр с частотами, удовлетворяющими (6). Реакция излучения этих частот стремится вызвать раскачку колебаний. Если затухание превалирует над раскачкой, то в системе, для которой уравнения классики правильны, колебания сами собой не возникнут, а если они имелись в начале, то будут затухать.

\*) Очевидно уравнение (6) может быть записано в форме, аналогичной (5а). Различие состоит лишь в том, что в знаменателе правой части (5а) должен быть изменен знак на обратный.

В квантовой системе положение принципиально иное. Процессы излучения квантов для спектров обоих типов следует рассматривать отдельно. Поэтому, если возможен процесс, соответствующий уравнению (6), то он обязательно будет иметь место, т. е. система будет возбуждаться за счет своей кинетической энергии, излучая свет, а затем обычным образом переходить в нижнее состояние. В принципе возможен и двухфотонный механизм с излучением сразу фотонов обоих типов. Таким образом, так же как в эффекте Вавилова—Черенкова, система, обладающая собственной частотой колебаний, при сверхсветовой скорости будет затрачивать свою кинетическую энергию на излучение<sup>14, 15</sup>.

Это можно формулировать следующим образом: известно, что движение со скоростью, большей скорости света, в пустоте невозможно. В среде оно оказывается осуществимым, но природа не полностью снимает свой запрет. Любая система, способная взаимодействовать с радиацией, будет при сверхсветовой скорости тормозить себя, излучая свет.

#### § 4. О ПОРОГАХ ИЗЛУЧЕНИЯ

Из проведенного рассмотрения очевидно, что спектр излучения определяется скоростью движения системы  $v$  ее собственной частотой  $\omega_0$  и величиной фазовой скорости света  $\frac{c}{n(\omega)}$  в среде, в которой происходит излучение. Как эффект Вавилова—Черенкова, так и сверхсветовой эффект Доплера возможны, как видно из (4) и (6), если  $\frac{vn(\omega)}{c} > 1$ . Это очевидное условие для порога их возникновения означает, что скорость движения должна превышать фазовую скорость света.

Это утверждение, правильное для изотропной среды, определяет порог излучения света данной частоты  $\omega$ , для которой показатель преломления равен  $n(\omega)$ . Так как показатель преломления зависит от частоты, то для другого  $\omega$  порог будет иной. Отсюда законна и другая постановка вопроса: при каком условии вообще становятся возможными эффект Вавилова—Черенкова и сверхсветовой эффект Доплера в данной среде? \*)

При излучении в среде имеется и еще одна особенность, которая также появляется при определенных пороговых условиях. Она состоит в следующем. Уравнение (3) и, его следствия (4), (5), (6) не являются линейными относительно  $\omega$ . Действительно, они содержат показатель преломления  $n/\omega$ , который есть функция излучаемой частоты. В результате для данных  $0, v$  и  $\omega_0$  в некоторых случаях возможно не одно, а несколько значений  $\omega$ , удовлетворяющих (3). Это значит, что в данном направлении может излучаться одновременно несколько компонент различной частоты. Появление таких дополнительных частот, т. е. так называемых сложных эффектов излучения, возможно только при определенных условиях. Они могут возникать не только в сверхсветовом эффекте Доплера и в излучении Вавилова—Черенкова, но и при обычном эффекте Доплера, подчиняющемся уравнению (5).

Впервые Л. И. Мандельштам обратил внимание на тот факт, что условие возникновения сложного эффекта Доплера<sup>4</sup> связано с величиной груп-

\*) Для излучения Вавилова—Черенкова в изотропной среде этот вопрос о пороге элементарен, так как порог определяется просто максимальным значением, которое принимает показатель преломления в данной среде. Отметим существенное для дальнейшего обстоятельство, а именно, что для частоты, соответствующей  $n_{\text{макс}}$ , фазовая и групповая скорости одинаковы (см. уравнение (10), причем для  $n_{\text{макс}}$ , очевидно, величина  $\frac{dn}{d\omega} = 0$ ). Таким образом, равенство пороговой скорости движения величине фазовой скорости означает ее равенство и величине групповой скорости света.



пловой скорости света. Как выяснилось, это утверждение имеет общий характер<sup>3</sup>.

Если рассматривать излучение в направлении движения, то во всех перечисленных случаях условием порога возникновения излучения или его новых компонент является равенство скорости излучателя групповой скорости света для частоты, которая может излучаться (т. е. удовлетворяет условию (3)). Эта пороговая частота, в зависимости от того, какой из видов излучения рассматривается, должна, очевидно, удовлетворять уравнениям (4), (5) и (6).

Известно, что в преломляющей среде перенос энергии излучения происходит не с фазовой, а как раз с групповой скоростью. Не удивительно, что групповая скорость света существенна для процессов излучения в среде.

Связь порога излучения именно с групповой скоростью света можно пояснить с помощью простых качественных соображений. Допустим, что условия возникновения излучения выполнены. Излучение возникает и уносит энергию от излучателя. Предположим теперь, что скорость движения меняется, приближаясь к пороговой. При достижении порога излучение должно исчезнуть, т. е. унос энергии от излучения прекратился. При равенстве скорости движения групповой скорости света это действительно будет иметь место, так как будет происходить просто перенос энергии вместе с излучателем.

Условие возникновения сложных эффектов легко определить с помощью рассмотрения графика рис. 1. Кривая на рис. 1 представляет зависимость величины волнового вектора  $k(\omega) = \frac{\omega n(\omega)}{c}$  от частоты для какой-то мыслимой среды. Кроме кривой, на рис. 1 имеются три прямые, уравнения которых имеют вид:

$$a_0 = \frac{\omega}{v \cos \theta}, \quad (7)$$

$$a_1 = \frac{\omega - \omega_0}{v \cos \theta}, \quad (8)$$

$$a_2 = \frac{\omega + \omega_0}{v \cos \theta}. \quad (9)$$

Точки пересечения этих прямых с кривой  $k(\omega)$ , как сразу очевидно, определяют частоты, удовлетворяющие соответственно уравнениям (4), (5) и (6).

Тангенс угла наклона прямых  $a_0, a_1, a_2$  к оси  $\omega$  равен, очевидно,  $\frac{1}{v \cos \theta}$ . Мы будем предполагать в соответствии с рис. 1, что  $\cos \theta > 0$ , т. е.  $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Характер пересечения прямых  $a$  с кривой  $k(\omega)$  может быть различен. Если двигаться вдоль прямой в направлении увеличения  $\omega$ , то в

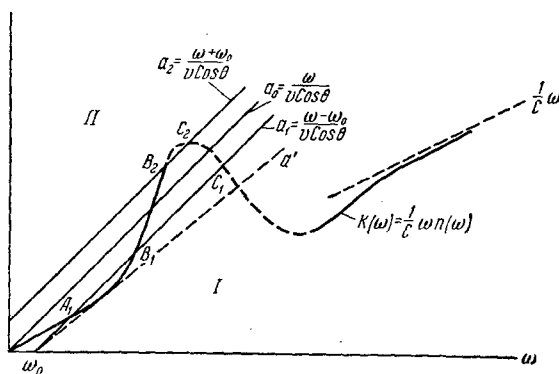


Рис. 1.

точке пересечения прямая может переходить из области, лежащей под кривой (область  $I$ ), в область, лежащую над кривой (область  $II$ ). Это будет иметь место, если наклон касательной к кривой  $k(\omega)$ , т. е.  $\frac{dk}{d\omega}$ , меньше, чем  $\gamma = \frac{1}{v \cos \theta}$  (см., например, точку  $A_1$  на прямой  $a_1$ ). Наоборот, если  $\frac{dk}{d\omega} > \frac{1}{v \cos \theta}$ , то в точке пересечения происходит переход из области  $II$  в область  $I$ . Наконец,  $\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{v \cos \theta}$  имеет место в точке касания.

Наклон касательной к кривой  $k(\omega)$  равен, как нетрудно убедиться, обратной величине групповой скорости света. Действительно, величина групповой скорости  $W$ , как известно, подчиняется соотношению

$$\frac{1}{W} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega} (\omega n) = \frac{1}{c} \left( n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right). \quad (10)$$

Таким образом, групповая скорость света для частот, которые могут излучаться, связана со скоростью движения  $v$  и  $\cos \theta$  соотношениями \*):

$$\frac{v \cos \theta}{W(\omega)} < 1 \quad \text{переход из } I \text{ в } II, \quad (11)$$

$$\frac{v \cos \theta}{W(\omega)} > 1 \quad \text{переход из } II \text{ в } I, \quad (12)$$

$$\frac{v \cos \theta}{W(\omega)} = 1 \quad \text{касание.} \quad (13)$$

При достаточно больших  $\omega$  величина  $W$  становится равной  $c$ . В самом деле, показатель преломления стремится к единице и, значит, кривая  $k(\omega) = \frac{\omega n}{c}$  приближается к прямой с угловым коэффициентом  $\frac{1}{c}$ . Прямые  $a$  поднимаются более круто, поскольку  $v < c$  и, значит,

$$\frac{1}{v \cos \theta} > \frac{1}{c}.$$

Следовательно, все три прямые  $a$  при больших  $\omega$  лежат в области  $II$ .

Отсюда вытекает ряд следствий. Прежде всего очевидно, что прямая  $a_1$  обязательно пересекает кривую  $k(\omega)$ , т. е. уравнение (5), как уже отмечалось, всегда должно иметь решение. В самом деле, прямая  $a_1$  проходит через точку  $\omega = \omega_0$ , лежащую на оси абсцисс, и значит, прямая где-то должна перейти из области  $I$  в область  $II$ . Более того, это означает, что во всяком случае излучается частота, для которой выполняется неравенство (11), соответствующее переходу из области  $I$  в  $II$ .

Что касается прямых  $a_0$  и  $a_2$ , то они, как и следовало ожидать, не всегда имеют пересечение с кривой  $k(\omega)$ . Для этого необходимо, чтобы их наклон к оси абсцисс был достаточно мал. Это значит, что скорость должна быть велика, а угол  $\theta$  не должен быть большим.

\*) Величина, определяемая соотношением (10), имеет смысл групповой скорости света только при отсутствии сильного поглощения, т. е. в тех частях спектра, для которых среда прозрачна. Часть кривой  $k(\omega)$ , соответствующая области аномальной дисперсии, в которой поглощение заведомо имеется, показана на рис. 1 пунктиром. Особенности излучения для частот, попадающих в эту область, требуют специального рассмотрения.

При больших  $\omega$  обе эти прямые также оказываются в области II. Отсюда следует, что если пересечения имеются, то, по крайней мере, последнее из них, определяющее наибольшую из излучаемых частот, соответствует переходу из области I в область II. Таким образом вновь получаем, что в излучении имеется частота, для которой выполняется неравенство (11). Для излучения вперед, т. е.  $\theta = 0$ , это означает, что имеется компонента, для которой  $v < W$  и, следовательно, по крайней мере для части излучения, энергия распространяется со скоростью большей, чем скорость источника света<sup>5</sup>.

Из сказанного следует также, что если имеется частота, удовлетворяющая условию (12) (например, соответствующая точке  $B_1$  на прямой  $a_1$ ), то состав излучения обязательно сложный, так как должна быть частота или частоты, удовлетворяющие условию (11). (В общем случае число возможных пересечений для прямой  $a_1$  всегда нечетное, а для прямой  $a_2$  всегда четное.)

Границей появления излучения или новых компонент излучения является, очевидно, случай, когда соответствующая прямая  $a$  начинает касаться кривой  $k(\omega)$ . Это означает выполнение равенства (13). При  $\theta = 0$ , в согласии со сказанным, для пороговой частоты получаем  $v = W$ .

Порогу возникновения сложного состава излучения для обычного эффекта Допплера соответствует на рис. 1 пунктирная прямая. Из рисунка видно, что частота начинает расщепляться при увеличении наклона прямой  $a_1$  по сравнению с пунктирной. Это значит, что сложный эффект Допплера возникает в этом случае не при увеличении скорости по сравнению с пороговой, а наоборот, при уменьшении ее или при увеличении угла (напомним, что тангенс наклона прямой  $a_1$  равен  $\frac{1}{v \cos \theta}$ ). Это объясняется тем, что здесь сложный эффект Допплера имеет место только в некотором интервале скоростей или углов и пунктирная прямая соответствует не нижнему, а верхнему порогу этого эффекта.

До сих пор предполагалось, что угол  $\theta$  острый, т. е., что произведение  $v \cos \theta$  положительно. Можно обобщить сказанное о сложном эффекте Допплера и на случай тупых углов  $\theta$ , однако при этом придется ввести в рассмотрение отрицательную групповую скорость. Оказывается, что порог для возникновения сложного эффекта Допплера и при  $\theta > \frac{\pi}{2}$  определяется уравнением (13). Величина  $\cos \theta$  в этом случае отрицательна, поэтому равенство (13) может быть выполнено только при  $W$  меньше нуля. Вопрос об отрицательной групповой скорости применительно к эффекту Вавилова—Черенкова впервые был рассмотрен Пафомовым<sup>16, 126</sup> и им было показано, что в анизотропных средах этот случай реален \*): Он очень интересен. Мы привыкли к тому, что излучение Вавилова—Черенкова направлено вперед под острым углом. Однако это правильно только, если групповая скорость положительна. Если она отрицательна, то картина иная.

На рисунке 2, а схематически представлен обычный случай излучения Вавилова—Черенкова. Фазовая скорость для излучаемого света  $u = \frac{c}{n}$  образует при этом острый угол  $\theta$  с направлением скорости  $v$ . Уравнение электродинамики допускает также и решение, схематически представленное на рис. 2, б. Направление фазовой скорости, т. е. направление распространения волн, и в этом случае образует тот же острый угол  $\theta$  с вектором

\*) Это связано с тем, что в анизотропной среде направление групповой скорости не совпадает с направлением фазовой скорости. Этот вопрос рассмотрен в следующем разделе лекции.

скорости. Однако волны идут не от излучателя, а к нему. Первый случай интерпретируют как излучение волн, а второй как их поглощение. Если нет источника энергии, питающего волны, идущие к излучателю, то случай рис. 2, б не осуществляется и решение, соответствующее ему, отбрасывают. Однако это правильно только, если групповая скорость положительна, т. е. ее направление совпадает с направлением фазовой скорости

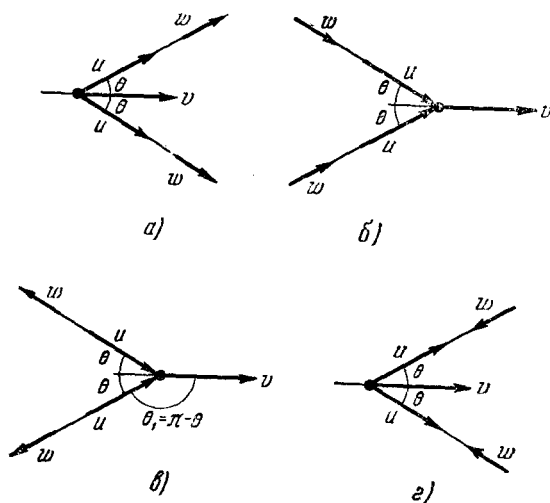


Рис. 2.

(см. вектор  $W$  на рис. 2, а и 2, б). Направление потока энергии совпадает при этом с направлением фазовой скорости и, следовательно, 2, а действительно соответствует излучению волн, а 2, б их поглощению. В среде с отрицательной групповой скоростью вектор  $W$  направлен навстречу вектору  $u$  (среда считается оптически изотропной и, следовательно, векторы  $u$  и  $W$  могут быть только параллельны или антипараллельны). Поэтому при  $W < 0$  рис. 2, в соответствует излучению энергии, а 2, г ее поглощению. Таким образом, если групповая скорость отрицательна, то направление по-

тока энергии излучения Вавилова—Черенкова образует тупой угол  $\theta_1 = \pi - \theta$  с направлением скорости, а движение волн направлено не от частицы, а наоборот, к ней \*). Нетрудно провести аналогичное рассмотрение и для излучателя с собственной частотой  $\omega_0$ , движущегося в среде с отрицательной групповой скоростью <sup>5,126</sup>.

Из сказанного видно, что ряд существенных особенностей излучения в преломляющей среде действительно связан не только с величиной фазовой скорости света, но также и с групповой скоростью света. Можно ожидать, что роль групповой скорости света проявится особенно отчетливо в анизотропных средах, в которых направления  $u$  и  $W$  образуют между собой некоторый угол.

## § 5. ИЗЛУЧЕНИЕ В ОПТИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Излучение источника света, движущегося в кристалле, должно иметь ряд особенностей по сравнению с излучением в изотропных средах. Интерес к этому кругу вопросов в последнее время усилился в связи с изучением процессов в плазме \*\*). В отношении распространения волн плазма, помещенная в магнитное поле, аналогична одноосному гиротропному кристаллу.

Эффект Вавилова—Черенкова в кристаллах впервые был теоретически рассмотрен В. Л. Гинзбургом<sup>13</sup>, а затем другими авторами (см., например, обзор<sup>8</sup>). Экспериментально, однако, он не изучен и до сих пор.

\*) Рассмотрение, проведенное на рис. 2, во многом аналогично рассмотренному в лекциях Л. И. Мандельштама примеру преломления света средой с отрицательной групповой скоростью (Л. И. М а н д е л ь ш т а м, Собрание сочинений, т. 5, стр. 463).

\*\*) Некоторые из вопросов, связанных с плазмой, рассмотрены в нобелевской лекции И. Е. Тамма (стр. 387 этого выпуска).

Уравнение, определяющее излучаемую частоту  $\omega$ , остается тем же, как и в изотропной среде, т. е.  $\omega$  подчиняется уравнению (4). Однако величина показателя преломления  $n$  в случае анизотропной среды зависит не только от частоты света, но также от угла и поляризации. Это приводит к тому, что для излучения Вавилова—Черенкова конус нормалей к волновым поверхностям не круговой, как в изотропной среде, а может иметь весьма причудливую форму. При этом направление скорости вовсе не является осью конуса, а в некоторых случаях может даже лежать вне него<sup>16</sup>.

Вторая особенность связана с поляризацией света. Излучение Вавилова—Черенкова всегда поляризовано. Обычно на поляризацию света в этом явлении не обращают внимания, так как в современных практических приложениях этого излучения она пока не используется. Однако с точки зрения механизма явления поляризация весьма существенна. Отметим, например, что излучение магнитного заряда, если окажется, что он существует, можно сразу отличить от излучения электрического заряда, как как в этом случае магнитный и электрический векторы меняются местами. Вопрос о поляризации света имеет значение и для вполне реального, хотя еще не изученного на опыте, случая излучения диполей и мультиполей.

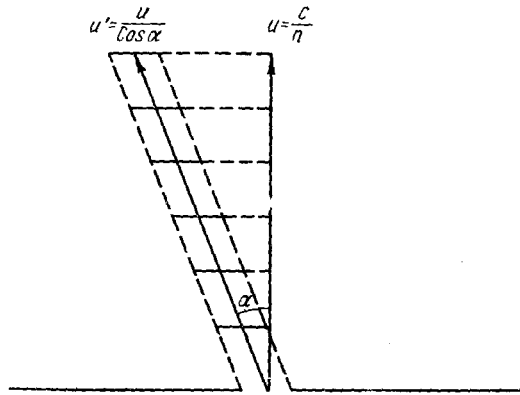


Рис. 3.

В анизотропной среде роль поляризации проявляется особенно отчетливо. Прежде всего здесь, в зависимости от поляризации излучаемого света, может получиться не один, а два конуса волновых нормалей, соответствующих в одноосном кристалле так называемым обыкновенным и необыкновенным лучам. Более того, распределение интенсивности излучения является сложной функцией углов и связано с поляризацией света. Для наличия излучения недостаточно выполнения условия (4), так как интенсивность волн данной поляризации может оказаться равной нулю. Так, например, если частица движется в направлении оси одноосного кристалла, то в излучении должен исчезнуть конус обыкновенных лучей<sup>8</sup>.

Третья особенность связана с тем, что в анизотропной среде направление луча, т. е. направление узкого пучка света, вообще говоря, не совпадает с нормалью к волновой поверхности. В кристалле существуют такие направления лучей, для которых нормаль к волновой поверхности образует с лучом некоторый угол  $\alpha$  (рис. 3).

Скорость, с которой распространяется фаза волны в направлении луча, как видно из рис. 3, в  $\frac{1}{\cos \alpha}$  раз больше, чем фазовая скорость, т. е.  $u' = \frac{u}{\cos \alpha} = \frac{c}{n \cos \alpha}$ . Мы будем называть  $u'$  скоростью волн вдоль луча. Ее не следует путать с групповой скоростью света, т. е. со скоростью переноса световой энергии, которая также, разумеется, направлена по лучу. Групповая скорость равняется скорости  $u'$  только при условии, что дисперсия света в среде отсутствует. В самом деле, при этом скорость волн вдоль луча не зависит от частоты и, значит, группа волн движется с той же скоростью  $u'$ .

Скорость волн вдоль луча  $u'$  существенна для излучения в анизотропных средах. Рассмотрим в связи с этим вопрос о пороговой скорости для возникновения эффекта Вавилова—Черенкова. Утверждение, что излучение Вавилова—Черенкова для света частоты  $\omega$  возникает при скорости, большей фазовой скорости света для этой частоты, по существу предполагает, что среда изотропна. Если считать его применимым к анизотропным средам, а это, как мы увидим, допустимо не всегда, то во всяком случае необходимо указать, с каким направлением фазовой скорости следует сравнить скорость движения.

Уравнение (4), т. е.  $\frac{vn}{c} \cos \theta = 1$ , правильно и для анизотропных сред, причем в этом случае  $\frac{c}{n} = u$  есть фазовая скорость для данного направления волновой нормали, образующей с вектором  $v$  угол  $\theta$ . Как известно, в изотропной среде при приближении скорости к пороговой угол  $\theta$  уменьшается до нуля, т. е. конус волновых нормалей сжимается к направлению  $v$ . В кристалле конус волновых нормалей в этом случае также сжимается к некоторой оси, однако, как правило, не совпадающей с  $v$ . Если этой осью является направление скорости, то пороговое  $\theta = 0$  и тогда из уравнения (4) получим, что  $v = \frac{c}{n}$ , где  $\frac{c}{n}$  берется для направления  $u = \frac{c}{n}$ , совпадающего с  $v$ . Таким образом,  $v = u$ . Для обычно рассматриваемых случаев движения в одноосном кристалле параллельно или перпендикулярно к оптической оси это соотношение для граничной скорости действительно оказывается правильным. Однако не было обращено внимания на то, что оно применимо не всегда.

Можно показать, что общее условие для появления излучения Вавилова—Черенкова частоты  $\omega$  следует формулировать так: пороговая скорость источника света должна равняться скорости волн вдоль луча, направленного по движению, т. е. пороговая скорость  $v = u'$ . У порога появления излучения с вектором скорости  $v$  совпадает направление луча, а не нормаль к волне, которая образует с  $v$  угол  $\alpha$ . Таким образом, в общем случае пороговая величина  $\theta = \alpha$ .

В частном случае, когда в анизотропной среде направление луча совпадает с волновой нормалью, т. е.  $\alpha = 0$ , тогда  $u' = u$ , и для граничной скорости имеем  $v = u$ . Наконец, в изотропной среде, где фазовая скорость света  $u$  одинакова для всех направлений, можно от векторов перейти к скалярным величинам и, значит,  $v = u$ . Таким образом, общеизвестное утверждение, что пороговой скоростью является скорость, равная фазовой скорости света, имеет ограниченную область применения. Оно является частным случаем более общего условия.

Сказанное нетрудно пояснить, если воспользоваться принципом Гюйгенса для построения волновой поверхности излучения. Таким построением и сейчас обычно пользуются при элементарном описании эффекта Вавилова—Черенкова, а в свое время оно послужило одной из руководящих идей для создания его теории. Нетрудно обобщить такое построение на случай анизотропной среды.

В кристаллооптике часто пользуются принципом Гюйгенса, чтобы пояснить особенности поведения так называемого необыкновенного луча при преломлении света. Волновую поверхность по принципу Гюйгенса находят как огибающую волн, испущенных из отдельных точек. Однако, если в изотропной среде вокруг каждой точки строится сфера радиуса  $r = \frac{c}{n} t$ , где  $t$  — время перемещения волн, то в кристалле следует поступать иначе. Существенным является расстояние, на которое волна пере-

местится из данной точки в данном направлении луча. Это расстояние равно скорости волн вдоль луча, умноженной на время  $t$ , т. е.  $u't$ . Поэтому ищется огибающая так называемых поверхностей лучей, построенных вокруг каждого источника волн и определяемых уравнением  $r = u't$ .

Применим принцип Гюйгенса для случая излучения Вавилова—Черенкова в одноосном кристалле. Скорость обыкновенного и необыкновенного лучей здесь не одинакова и поэтому, вообще говоря, получаются

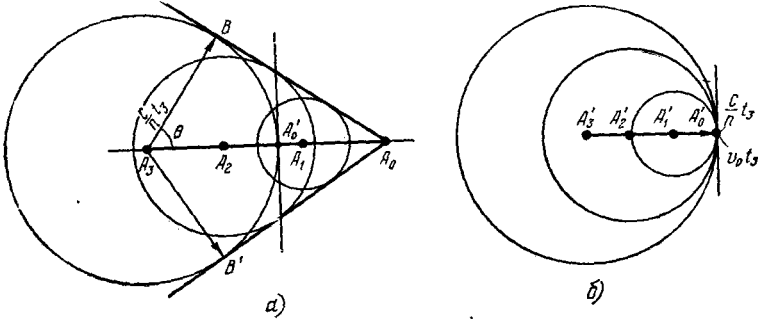


Рис. 4.

два конуса волн. Чтобы не загромождать чертеж, они показаны на отдельных рисунках 4 и 5. Все точки траектории частицы мы должны считать источником волн. При этом фаза волн задается моментом прохождения частицы через данную точку. Допустим, что излучатель в момент  $t = -t_3$  находился в точке  $A_3$ , в момент  $t = -t_2$  в  $A_2$ , в  $t = -t_1$  в  $A_1$  и, наконец, в момент наблюдения  $t = 0$  в точке  $A_0$ .

Для обыкновенных лучей скорость волн вдоль луча, так же как в изотропной среде, равна фазовой скорости света  $\frac{c}{n}$  и не зависит от

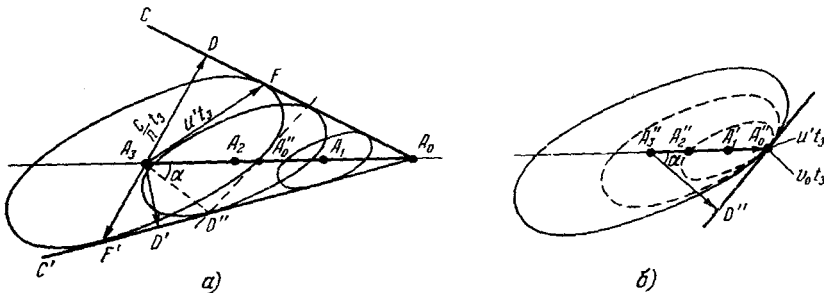


Рис. 5.

направления. Поверхности лучей — просто сферы, радиус которых для точек  $A_3$ ,  $A_2$ ,  $A_1$  и  $A_0$  соответственно  $\frac{c}{n} t_3$ ,  $\frac{c}{n} t_2$ ,  $\frac{c}{n} t_1$  и 0 (см. рис. 4). Огибающая этих сфер — это, очевидно, конус кругового сечения с вершиной в  $A_0$  \*). Образующие его, лежащие в плоскости чертежа,  $A_0B$  и  $A_0B'$ .

\*) При таком рассмотрении, строго говоря, предполагается, что происходит суперпозиция монохроматических волн. Каждую точку траектории следует поэтому считать источником таких волн, испускаемых бесконечно долго. В действительности лишь сложение волн различной частоты создает световой импульс, возникающий в момент прохождения через данную точку частицы. Поэтому существует, конечно, не одна, а неограниченно много волновых поверхностей для волн данной частоты. Та, которая обычно строится, выделена лишь тем, что она проходит через точку мгновенного положения частицы (будем называть ее волновым конусом).

Направления лучей по принципу Гюйгенса дают радиусы-векторы, проведенные из какого-либо центра волн в точки касания с огибающей поверхностью. На рисунке 4 это, например,  $A_3B$  или  $A_3B'$ , совпадающие для обыкновенных лучей с образующими конуса волновых нормалей. Конус излучения получается таким образом для обыкновенных лучей так же, как в эффекте Вавилова—Черенкова в изотропной среде. Существенное различие от изотропной среды связано с поляризацией света и зависящим от нее распределением интенсивности. При таком построении это не учитывается.

Нетрудно из рисунка 4 определить величину пороговой скорости. При уменьшении скорости расстояния между точками  $A$  уменьшаются. Пороговым является случай, когда точка  $A_0$  займет положение  $A'_0$  на поверхности сферы. (Этот случай представлен отдельно на рис. 4, а.) При меньших скоростях сферы будут полностью лежать одна внутри другой и не будут иметь общей огибающей. В пороговом случае они имеют только общую точку касания  $A'_0$ . При этом, очевидно,  $\frac{c}{n} t_3 = v_0 t_3$ ,

т. е.  $v_0 = \frac{c}{n}$ . Конус волновых нормалей сжимается к направлению скорости  $v$ , а волновой конус превращается в плоскость, перпендикулярную к оси движения в точке  $A'_0$  (см. рис. 4, а).

Аналогичным образом применяется принцип Гюйгенса и для получения волнового конуса необыкновенных лучей (см. рис. 5). Различие состоит в том, что вокруг точек  $A_3$ ,  $A_2$  и  $A_1$  вместо сфер строятся поверхности лучей  $u't_3$ ,  $u't_2$  и  $u't_1$ . Конус, огибающий эти поверхности с вершиной в  $A_0$ , в случае, представленном на рис. 5, не является круговым. В плоскости чертежа лежат образующие этого волнового конуса  $A_0C$  и  $A_0C'$ . Перпендикуляры, опущенные на них, например  $A_3D$  и  $A_3D'$ , определяют волновые нормали, а их длина пропорциональна фазовым скоростям. Векторы, проведенные из  $A_3$  в точки касания  $A_3F$  и  $A_3F'$ , дают соответствующие им направления лучей, которые, как видно из рис. 5, не совпадают с волновыми нормальями. Из рисунка видно также, что направление необыкновенного луча для излучения Вавилова—Черенкова в кристалле может даже составлять тупой угол с направлением скорости (направление  $A_3F'$  на рис. 5).

Нетрудно определить величину пороговой скорости для появления в излучении Вавилова—Черенкова необыкновенных лучей, которая, вообще говоря, отлична от пороговой скорости для обыкновенных лучей. Пороговый случай будет иметь место, когда скорость уменьшится настолько, что точка  $A_0$  совместится с точкой  $A''_0$ . При этом все поверхности лучей лежат одна внутри другой и имеют общую точку касания  $A''_0$ . Из рисунка 5 или 5, а, на котором изображен пороговый случай, видно, что пороговое  $v = v_0 = u'$ . Волновой конус превращается при этом в плоскость  $A''_0D''$ , а волновая нормаль образует с направлением  $v$  угол  $\alpha$ . Если проследить, что происходит с конусом волновых нормалей (на рис. 5 его образующие —  $A_3D$  и  $A_3D'$ ) при уменьшении скорости, т. е. при приближении точки  $A_0$  к  $A''_0$ , то нетрудно убедиться, что он сжимается не к направлению  $v$ , а к направлению  $A_3D''$ . Таким образом, в пороговом случае в уравнении (4) надо полагать не  $\theta = 0$ , а  $\theta = \alpha$ . Тогда уравнение (4) дает  $\frac{vn}{c} \cos \alpha = 1$ , т. е. действительно  $v = \frac{c}{n \cos \alpha} = u'$ .

Напомним, что с помощью рисунков 4 и 5 мы определили порог появления света некоторой данной частоты  $\omega$ . Скорость, при которой



вообще появляется излучение, определяется минимальной в данной среде величиной скорости волн вдоль луча  $u' = u'_{\min}$  для луча, направленного по движению. Для частоты  $\omega'$ , для которой  $u' = u'_{\min}$ , скорость волн вдоль луча не зависит от частоты и, значит, равна групповой скорости. Таким образом, снова приходим к выводу, что порог связан с групповой скоростью.

Рассмотрение излучения системы, обладающей собственной частотой колебаний  $\omega_0$ , также может быть распространено на случай оптически-анизотропной среды. Здесь проявляются те же особенности, о которых говорилось в связи с излучением Вавилова — Черенкова. Связь между  $\omega$ ,  $\theta$ ,  $v$  и  $\omega_0$ , по-прежнему, определяется уравнениями (5) и (6), как и в изотропной среде, но под величиной  $n$  надо понимать его значение для направления волновой нормали под углом  $\theta$  к скорости.

Зависимость  $n$  от направления приводит к тому, что связь между  $\theta$  и частотой излучения  $\omega$  при заданных собственной частоте  $\omega_0$  и скорости  $v$  не является элементарной. Для нахождения  $\theta$  можно воспользоваться графическим методом, предложенным В. Е. Пафомовым<sup>16</sup> при рассмотрении эффекта Вавилова — Черенкова в кристаллах, обобщив его на случай произвольного  $\omega_0$ . На рис. 6 представлено сечение поверхности волновых векторов  $\mathbf{k}(\omega) = \frac{\omega \mathbf{n}}{c}$  для данного  $\omega$  в случае необыкновенных лучей в одноосном кристалле. Эта поверхность, дающая зависимость векторов  $\mathbf{k}$  от направления (они ориентированы по нормали к волне), отличается от поверхности показателей преломления только постоянным множителем  $\frac{\omega}{c}$  (величину  $\omega$  считаем заданной). Таким образом, для одноосного кристалла эта поверхность есть эллипсоид вращения. Допустим, что ось  $v$  есть направление движения излучателя. Отложим на оси  $v$  отрезок  $OA$  длины  $b$ , равной  $b_0$ ,  $b_1$  или  $b_2$  в зависимости от того, рассматривается ли эффект Вавилова — Черенкова, обычный эффект Доплера или сверхсветовой эффект Доплера. При этом

$$b_0 = \frac{\omega}{v}, \quad (14)$$

$$b_1 = \frac{\omega - \omega_0}{v}, \quad (15)$$

$$b_2 = \frac{\omega + \omega_0}{v}. \quad (16)$$

В точке  $A$ , являющейся концом отрезка  $b$ , построим плоскость  $a$ , перпендикулярную к оси  $v$ . Кривую пересечения этой плоскости с поверхностью  $k(\omega)$  будем рассматривать как сечение некоторого конуса с вершиной в  $O$ . В плоскости рисунка лежат образующие этого конуса  $OC$  и  $OC'$ . Этот конус определяет величину и направление векторов  $\mathbf{k}$  для света частоты  $\omega$ , возникающего в рассматриваемом случае, т. е. для данного вида излучения при заданных  $\omega_0$  и  $v$ .

В самом деле, из рис. 6 видно, что  $OA$  есть проекция вектора  $OC$  или  $OC'$ , т. е. вектора  $k = \frac{\omega n(\omega, \theta)}{c}$ , таким образом

$$\frac{\omega n(\omega, \theta)}{c} \cos \theta = b. \quad (17)$$

Подставляя вместо  $b$  его значения из (14), (15) или (16), получаем тождественно уравнения (4), (5) или (6).

Из рис. 6 видно, что конус волновых нормалей действительно может быть не только асимметричным, но даже, как об этом уже упоминалось, ось  $v$  может лежать вне конуса.

Не всегда плоскость  $a$  пересекается с поверхностью  $k(\omega)$ . Это соответствует тому очевидному факту, что не всякая частота излучается при данных  $v$  и  $\omega_0$ . Если  $b = b' = OA'$  (см. рис. 6), то плоскость касается поверхности  $k$ , следовательно,  $b' = OA'$  является граничной для появления в спектре данной частоты  $\omega$ . Вектор  $k$ , т. е. нормаль к волне, совпадает при этом с  $OB$ . Нетрудно показать, что она образует угол  $\alpha$  с направлением скорости, причем с направлением движения совпадает направление луча. Если положить в соответствии с этим в уравнении (3) угол  $\theta = \alpha$ , то для скорости  $v_0$ , необходимой для появления частоты  $\omega$ , получим такое общее условие:

$$\frac{\omega}{u'} = \frac{\omega \pm \omega_0}{v_0}, \quad (18)$$

где  $u'$  — скорость волн вдоль оси  $v$  (положительная или отрицательная, т. е. направленная по  $v$  или против нее). В частном случае излучения Вавилова—Черенкова  $\omega_0 = 0$ .

Излучение системы, имеющей собственную частоту колебаний и движущейся в оптически-анизотропной среде, впервые было рассмотрено в работе К. А. Барсукова и А. А. Коломенского<sup>17</sup>. Ими выяснен ряд

особенностей излучения, связанных с наличием обыкновенных и необыкновенных лучей и существенной ролью поляризации волн.

Весьма интересно, что именно этот, казалось бы, более сложный, случай, по-видимому, уже сейчас интересен с экспериментальной точки зрения. Барсуковым и Коломенским специально рассмотрен вопрос об излучении радиоволн в ионосфере, которая под действием магнитного поля Земли ведет себя как оптически-анизотропная среда. Существенно, что в некоторой области частот эта среда обладает сильной дисперсией и в ней возможен сложный эффект Допплера. Коломенский и Барсуков пришли к выводу, что сложный эффект Допплера возможен для радиоволн подходящей частоты, испускаемых искусственным спутником Земли, движущимся в ионосфере. По оценке этих авторов, доплеровское смещение может составлять от десяти до ста герц и сопровождаться в этом случае расщеплением излучаемой частоты на компоненты, отстоящие друг от друга на несколько сотых герца. По-видимому, при хорошо стабилизированной частоте передатчика такое расщепление может быть обнаружено.

\* \* \*

Я стремился показать в своей лекции, что имеется широкий круг вопросов, связанных с излучением источников света, движущихся в преломляющих средах. Излучение электрического заряда, движущегося со сверхсветовой скоростью в изотропной среде, т. е. экспериментально изученный случай эффекта Вавилова—Черенкова, по существу, является лишь частным, хотя и очень интересным примером этой области явлений.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. П. А. Черенков, ДАН 2, 451 (1934); С. И. Вавилов, ДАН 2, 457 (1934); П. А. Черенков, Труды Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР 2, № 4 (1944).
  2. П. Е. Тамм и П. М. Франк, ДАН 14, 107 (1937).
  3. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 10, 589 (1940); J. Phys. 2, 441 (1940).
  4. П. М. Франк, Известия АН СССР, сер. физ., 6, 3 (1942); J. Phys. 7, 49 (1943).
  5. П. М. Франк, ЖЭТФ (1959) 36, 823, Объединенный институт ядерных исследований Р-237 (1958).
  6. E. Fermi, Phys. Rev. 57, 485 (1940).
  7. П. М. Франк, Сборник «Памяти С. И. Вавилова», Изд. АН СССР, М., 1952.
  8. Б. М. Болотовский, УФН 62, 201 (1957).
  9. В. Л. Гинзбург и П. М. Франк, ДАН 56, 699 (1947).
  10. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйрман, ЖЭТФ 35, 1509 (1958); Л. С. Богданкевич, ЖТФ (в печати).
  11. В. Л. Гинзбург и П. М. Франк, ЖЭТФ 16, 15 (1946).
  12. а) Г. М. Гарибян, ЖЭТФ 33, 1403 (1957); б) В. Е. Пафомов, ЖЭТФ 37, вып. 6 (1959).
  13. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 10, 608 (1940); J. Phys. 3, 101 (1940).
  14. В. Л. Гинзбург и П. М. Франк, ДАН 56, 583 (1947).
  15. П. М. Франк, УФН 30, 149 (1946).
  16. В. Е. Пафомов, Диссертация, ФИАН, М., 1957; ЖЭТФ 32, 366 (1957); 37, № 6 (1959).
  17. К. А. Барсуков и А. А. Коломенский, ЖТФ (в печати).
  18. J. V. Jellety, Cerenkov Radiation and its Applications, Pergamon Press, 1958.
-