

# УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

## ПРИНЦИПЫ ИНВАРИАНТНОСТИ В ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ\*)

Г. Вук

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение ядерных реакций, уровней энергии и процессов, происходящих между элементарными частицами при высоких энергиях, представляют собой широкую и плодотворную область применения принципов инвариантности и симметрии. Классические группы симметрии (вращение и т. д.), которые играли такую большую роль в применениях квантовой механики к оптической спектроскопии, здесь имеют совершенно аналогичное значение. Однако, в отличие от спектроскопии, ядерная физика не заимствовала целиком свои принципы симметрии у классической физики, а ввела новые принципы инвариантности, чтобы удовлетворить новым закономерностям и скрытым симметриям, которые, очевидно, существуют, но не проявляют себя при обычных макроскопических масштабах явлений. Такими симметриями являются, например, зарядовое сопряжение (или симметрия между веществом и антивеществом) и инвариантность по изотопическому спину. В то же время некоторые из старых и наиболее надежных принципов, как, например, симметрия между левым и правым, оказались несправедливыми при определенных условиях.

Эта статья представляет собой попытку подвести итог существующим в настоящее время взглядам на те принципы, относительно которых ядерная физика может сказать что-то новое. Поэтому группа вращений и соответствующая группа Лоренца только упоминаются. Из «классических» групп обсуждаются (см. разделы 2 и 3) только пространственная инверсия « $P$ » и обращение времени « $T$ ». Зарядовое сопряжение (« $C$ ») обсуждается в разделе 4, а некоторые смешанные операции, получаемые как комбинация  $P$ ,  $T$ , и  $C$ , обсуждаются в разделе 5.

Везде основное ударение делается на главных идеях, а не на специальных применениях; последние упоминаются постольку, поскольку они иллюстрируют эти идеи. Кроме того, невозможно изложить идеи с таким фундаментальным математическим происхождением без определенного количества формальных операций. Автор провел систематическое использование идей квантования поля, но, с другой стороны, избежал сложных вычислений.

В разделе 6 проводится обсуждение изотопической инвариантности зарядовой независимости и других связанных с ними операций. Наконец, в седьмом разделе рассматривается применение этих идей к тяжелым

\*) Annual Review of Nuclear Science 8 (1958). Перевод Ю. П. Кумекина.

нестабильным частицам и связанное с ними понятие «странности». Во всей статье автор предполагает, что читатель знаком с такими идеями, как различие между «сильным», «электромагнитным» и «слабым» взаимодействиями. Объяснение обозначений приводится в приложении А.

## 2. ЧЕТНОСТЬ

### 2. 1. Инверсия пространства и оператор четности

Первым объектом обсуждения будет инвариантность относительно «инверсии пространства» и связанное с ней понятие четности, которое играет фундаментальную роль в атомной и ядерной спектроскопии, так же как и в теории соударений, ядерных реакций и т. д. Эти классические примеры применения понятия четности, как будет показано ниже, не пострадали серьезно от недавнего открытия нарушения инвариантности при инверсии пространства в  $\beta$ -распаде и других слабых взаимодействиях.

Четность является весьма тонким понятием и ее невозможно понять до конца, не обратив внимания на некоторые непривычные черты общей квантовой механики частиц и полей. Мы начнем с наиболее элементарных проявлений понятия четности. При вычислении хорошо известных энергетических состояний электрона в центральном поле получается, что все уровни могут быть разбиты на четные и нечетные, т. е. уровни, у которых функция Шредингера является либо четной, либо нечетной функцией радиуса-вектора  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Такое же разбиение можно сделать элементарным путем для уровней  $n$  электронов в фиксированном центральном поле или для свободного атома или молекулы, состоящей из произвольного числа электронов и ядер. В последнем случае нужно рассматривать только ту часть волновой функции, которая описывает «относительное» движение.

В спектроскопии хорошо известно положение (правило Лапорта), которое разрешает оптические переходы только между состояниями с разной четностью. Это утверждение можно назвать «законом изменения четности».

В этих простых примерах привлекательно то, что они так или иначе связаны с более сложными положениями, встречающимися в физике ядра и высоких энергий. Путь к более общей формулировке открывается, если заметить, что все вышеупомянутые теоремы являются следствием инвариантности уравнения Шредингера по отношению к преобразованию координат

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x} \quad (1)$$

или  $x'_i = -x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), т. е. по отношению к одновременной инверсии или отражению всех трех координатных осей, что проще всего преобразует правую систему координат в левую. Особая простота этого преобразования заключается в том, что оно коммутирует со всеми вращениями. В случае внешнего центрального поля центр инверсии должен, конечно, быть выбран в центре поля, но в случае свободного атома или молекулы любая точка пространства может служить центром инверсии. Таким образом используется принцип симметрии законов природы относительно правой и левой системы координат. Мы сначала обсудим содержание вопроса в целом, прежде чем переходить к каким-либо формальным деталям.

Предполагаемая симметрия между правым и левым позволяет нам утверждать, что для каждого состояния системы можно определить «зеркальное состояние», которое связано с первым так же, какой любой объект связан со своим изображением после отражения относительно центра координат согласно преобразованию (1).

Затем доказывается, что должно существовать преобразование, называемое «оператором четности»  $P$ , связывающее волновую функцию  $\psi$  с ее зеркальным изображением  $\psi'$ :

$$\psi' = P\psi. \quad (2)$$

Далее доказывается, что этот оператор является линейным, унитарным\*) и удовлетворяет условию

$$P = P^{-1}, \quad \text{т. е.} \quad P^2 = 1, \quad (3)$$

которое математически выражает взаимность связи между состоянием и его зеркальным изображением.

В простейшем случае нерелятивистского уравнения Шредингера для систем взаимодействующих частиц волновая функция является просто функцией  $\psi(q)$  от координат всех частиц, обозначенных одним символом  $q$ . Легко видеть, что в этом случае оператор  $P$  определяется уравнением

$$\psi'(q) = \psi(-q), \quad (2')$$

где, конечно, знак минус относится одновременно ко всем координатам. В состоянии  $\psi'$  координаты всех частиц и их импульсы инвертированы относительно состояния  $\psi$  в том смысле, что «вероятность» найти определенную частицу в точке  $x$  (или с импульсом  $p$ ) в состоянии  $\psi'$  равна вероятности найти ее в точке  $-x$  (с импульсом  $-p$ ) в состоянии  $\psi$ . Это ясно видно из уравнения (2') и должно быть наиболее общим свойством оператора  $P$  согласно его определению.

Далее доказывается, что если  $\psi$  является собственным состоянием оператора энергии  $H$ , то им же является и  $P\psi$ , причем с тем же собственным значением (что снова можно легко проверить в простейшем случае, но является весьма общим следствием предполагаемого принципа инвариантности). Обычные доводы показывают, что  $P$  и  $H$  коммутируют:

$$PH = HP. \quad (4)$$

Следовательно, согласно хорошо известной теореме, эрмитов оператор  $H$  и унитарный оператор  $P$  можно одновременно привести к диагональному виду, т. е. можно дать полный набор энергетических состояний, которые одновременно являются собственными состояниями  $P$ . Если же при этом попытаться привести к диагональному виду полный импульс  $p$ , то придется ограничиться случаем  $p=0$  (покоящаяся система), так как в других случаях  $\psi$  и  $P\psi$  должны иметь различные значения  $p$ . Возвращаясь назад, к уравнению (3) мы видим, что все собственные значения  $P$  суть или  $+1$ , или  $-1$ , что приводит к классификации на четные и нечетные состояния, для которых

$$P\psi = \pm \psi. \quad (5)$$

Теперь видно, что все изложенные утверждения являются чрезвычайно общими и должны быть применимы ко всем системам, для которых справедлива лево-правая симметрия.

Подобным образом может быть обобщено правило Лапорта, но особенно интересным оно становится как частный случай «закона сохранения четности». Это сразу становится очевидным, если включить в гамильтониан в уравнении (4) энергию поля излучения и взаимодействия этого поля с атомом, а в оператор  $P$  — инверсию пространства для состояний поля излучения. Тогда уравнение (4) выражает тот факт, что  $P$  является постоян-

\*) См. также 2.3. Более глубокое обсуждение этого вопроса можно найти в книге Вигнера<sup>1</sup>, особенно в приложениях к гл. XX.

ной движения. Теперь волновая функция  $\psi$  «всей системы» является функцией координат  $q_A$  частиц атома и бесконечного числа координат  $q_R$ , относящихся к различным модам осциллирующего поля излучения. Для того чтобы «отразить» состояние  $\psi$ , нужно подействовать на координаты частиц  $q_A$  согласно уравнению (2'), и соответствующим образом подействовать на координаты  $q_R$ . Полный оператор  $P$  является, таким образом, «произведением» двух операторов

$$P = P_A P_R, \quad (6)$$

один из которых действует на состояния атома ( $P_A$ ), а другой на состояния поля излучения ( $P_R$ ). В процессе испускания или поглощения света при обычно существующих для спектроскопических линий условиях (т. е. когда испускается или поглощается электрическое дипольное излучение), величина  $P_R$  изменяет знак при переходе. Для того чтобы общая четность  $P$  сохранилась, четность атомного уровня  $P_A$  должна измениться, что и является правилом Лапорта.

Аналогичным образом можно получить, как частные случаи общего закона сохранения четности, правила отбора для электрического квадрупольного, магнитного дипольного и других переходов \*).

## 2.2. Применения и границы справедливости четности в ядерной физике низких энергий

В ядерных реакциях при низких энергиях, за исключением  $\beta$ -распада, никакие частицы, кроме фотонов, не создаются и не уничтожаются. Таким образом, элементарное рассмотрение, основанное на уравнении (2'), плюс знание четности мультипольных состояний фотона охватывают большую часть интересных случаев. Оболочечная модель, когда она справедлива, позволяет написать а priori собственное значение четности для основного состояния ядра. Четность низших возбужденных состояний часто может быть предсказана оболочечной моделью, а в других случаях — теорией Бора — Моттельсона и т. д. Четность начального состояния (в системе центра масс, как обычно) в такой реакции, как



может быть вычислена, если заметить, что инверсию координат всех протонов и нейтронов можно совершить в два приема, т. е. сделать а) — инверсию нуклонов в  $\text{Be}^7$  по отношению к центру масс  $\text{Be}^7$  (плюс аналогичная инверсия другого соударяющегося ядра, если оно сложное) и б) — инверсию относительных координат двух центров масс соударяющихся ядер. Общая четность, следовательно, есть

$$P = p_1 p_2 (-1)^l, \quad (8)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — четности основных состояний двух соударяющихся ядер, а  $l$  — орбитальный момент соударения. Аналогичное выражение можно написать для конечного состояния. Случай (7) представляет особенный

\*) Нужно отметить здесь, что хотя квантовое число четности  $+1$  или  $-1$  приписывается каждому отдельному состоянию системы, в действительности всегда нужно знать четность одного состояния относительно четности другого, т. е. имеют ли они одинаковые или различные четности. Это не удивительно, так как  $P$  и  $-P$  удовлетворяют одинаковому уравнению, из которого они определяются (ср. с разделом 2.3.), и, следовательно, любой из них может быть использован в качестве «правильного» оператора четности. Поэтому неопределенный выбор  $P$  всегда основан на некотором (явном или неявном) предположении, например, что  $P = +1$  для «состояния вакуума» (ср. с концом раздела 2.4 или уравнением (B.9) в приложении).

интерес, так как в конечном состоянии четность есть просто  $(-1)^{l'}$ , где  $l'$  — относительный угловой момент ядер гелия, который может принимать только четные значения  $l' = 0, 2, 4, \dots$  (статистика Бозе—Эйнштейна). Отсюда следует правило отбора: реакция (7) может иметь место, если только начальное значение  $P$  (уравнение (8)) равно  $+1$ . Но медленные нейтроны, вызывающие реакцию, имеют  $l=0$ . Таким образом, в уравнении (7) начальная четность есть  $-1$  ( $\text{Be}^7$  состоит из двух  $(1s)$ -нейтронов и протонов, двух  $(2p)$ -протонов и одного  $(2p)$ -нейтрона) и, следовательно, реакция запрещена для медленных нейтронов.

Недавно были предприняты тщательные поиски таких реакций, запрещенных по четности, давшие отрицательный результат <sup>2, 2a, b</sup>. Идея состоит в том, что если в законе ядерных сил имеются малые отклонения от право-левой симметрии, то волновая функция ядерного уровня будет в общем случае содержать малую примесь  $F$ -компоненты с «неправильной четностью» и, таким образом, запрещенные реакции могут иметь место. Эксперименты на сегодняшний день дают верхнюю границу для  $F$  порядка

$$F^2 \leq 10^{-7}. \quad (9)$$

Это значение сравнимо с тем, что получается при изучении «запрещенных» спектральных линий в качестве верхней границы возможного нарушения четности во взаимодействиях электронов из внешних оболочек атомов.

Другим аргументом, который часто приводится в поддержку сохранения  $P$ , является отсутствие статических дипольных моментов в основных состояниях атомов и молекул. Это следует из сохранения  $P$ . Допустим, что нет никаких «случайных» вырождений состояний, т. е. нет других вырождений, кроме тех, что соответствуют  $2J+1$  возможным ориентациям углового момента  $J$ . Хорошо известная теорема утверждает, что дипольный момент  $D$  должен быть параллелен  $J$ :

$$D = kJ, \quad (10)$$

где  $k$  не зависит от направления  $J$ . Но при  $P$ -преобразовании  $D$ , как полярный вектор, меняет знак, а  $J$  не меняет, что показывает, что  $k$  в уравнении (10) должно быть нулем.

Год назад было указано <sup>3, 3a</sup>, что нейтрон является особенно удобным объектом для обнаружения малого электрического дипольного момента. Эксперимент <sup>4</sup> дал очень малую верхнюю границу

$$\left| \frac{D}{e} \right| \leq 10^{-20} \text{ см.}$$

Однако недавно было указано, что выводы, которые делаются из этого результата относительно сохранения четности, ограничены тем фактом, что отсутствие дипольного момента является также следствием инвариантности относительно обращения времени ( $T$ ). Действительно, при этом преобразовании  $J$  меняет знак, а  $D$  — не меняет. Роли  $J$  и  $D$  теперь переменились, но тот вывод, что  $k=0$ , очевидно, остался тем же. Таким образом, только теория, которая одновременно нарушает  $P$ - и  $T$ -инвариантность, может дать неисчезающий статический дипольный момент.

### 2.3. Оператор четности. Формальная теория

Явный вид линейного унитарного оператора  $P$  может быть довольно легко найден в любом частном случае. В случае динамики нерелятивистских частиц это утверждение немедленно следует из явного выражения оператора в уравнении (2'). В других случаях более легко и красиво

явный вид и свойства оператора  $P$  находятся косвенным путем — через свойства преобразования квантовомеханических операторов или матриц.

Если предположить, что квантовомеханические законы системы инвариантны относительно преобразования из правой системы координат в левую (уравнение (1)), то можно установить связь между операторами, представляющими физические переменные в обеих координатных системах, таким образом, что правила коммутации и уравнения движения будут иметь в точности одинаковый вид в обеих системах.

Для того чтобы разъяснить метод, пересмотрим с этой точки зрения случай нерелятивистского электрона со спином, находящегося в центральном поле. Допустим, что оператор Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + V(r) + \mathbf{s} \times \mathbf{p} V_{1A}(r), \quad (11)$$

где  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$  является векторным оператором, представляющим спин. Правила коммутации здесь таковы:

$$\left. \begin{aligned} [x_j, x_k] &= [p_j, p_k] = [x_j, s_k] = [p_j, s_k] = 0, \\ [x_j, p_k] &= i\delta_{jk}; \quad [s_j, s_k] = i s_l, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $j, k = 1, 2, 3$ , а  $j, k, l = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$ . Уравнения движения получаются из общего закона,

$$\frac{dQ}{dt} = i[H, Q] \quad (13)$$

и из правил коммутации.

Теперь легко видеть, что зависимость  $H$  от канонических переменных  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{s}$  не изменяется при преобразовании

$$\mathbf{x} = -\mathbf{x}', \quad \mathbf{p} = -\mathbf{p}', \quad \mathbf{s} = +\mathbf{s}'. \quad (14)$$

Это преобразование является «каноническим», т. е. оно не изменяет правила коммутации в уравнении (12), причем в формуле преобразования вектора спина существен знак «плюс». Теперь сделаем основное допущение, что уравнения (14) выражают связь между операторами, представляющими переменные в двух координатных системах. Заметим, в частности, что вектор спина ведет себя как «аксиальный» вектор, каким он и является.

Согласно общим теоремам теории преобразования должен существовать унитарный оператор  $P$ , который преобразует матрицы  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{p}'$ ,  $\mathbf{s}'$  в матрицы  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{s}$  или наоборот:

$$P^{-1} \mathbf{x} P = \mathbf{x}' = -\mathbf{x}, \quad (15a)$$

$$P^{-1} \mathbf{p} P = \mathbf{p}' = -\mathbf{p}, \quad (15b)$$

$$P^{-1} \mathbf{s} P = \mathbf{s}' = +\mathbf{s}, \quad (15c)$$

причем легко видеть, что это именно тот оператор, который определяется уравнением (2) или (2'). Конечно, эти уравнения написаны для бесспиновых частиц, и теперь мы должны рассмотреть «двухкомпонентную»  $\psi$ . Однако уравнение (15c) показывает, что  $P$  не влияет на спиновое состояние, так что уравнение (2) справедливо для каждой из двух компонент независимо. Уравнения (15a) и (15b) теперь означают то, что матрицы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{p}$ , вычисленные по отношению к любому полному ортонормированному набору функций  $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$ , изменяют свой знак, если мы преобразуем их к другому ортонормированному набору  $v_1(x), \dots$ , где  $v_n = P u_n$ , доказательство чего может быть предоставлено читателю.

## 2.4. Оператор четности в электродинамике

Теперь мы можем рассмотреть более сложную систему. Рассматривая, например, электромагнитное поле, можно спросить, что является аналогом канонического преобразования (14)? Динамическими переменными теперь являются электрические и магнитные компоненты поля  $E_k(\mathbf{x})$  и  $H_k(\mathbf{x})$  ( $k=1, 2, 3$ ). Координаты  $\mathbf{x}$  не являются теперь динамическими переменными, они просто являются индексами компонент поля. Из классической электродинамики известно, что для того, чтобы уравнения Максвелла были инвариантны относительно преобразования координат (1), мы должны допустить следующий закон преобразования:

$$\left. \begin{aligned} E'_k(\mathbf{x}') &= -E_k(\mathbf{x}); \\ H'_k(\mathbf{x}') &= +H_k(\mathbf{x}), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где  $\mathbf{x}' (= -\mathbf{x})$  представляет «ту же самую точку пространства» слева, какую  $\mathbf{x}$  представляет справа. Так как уравнения должны быть справедливы для любого значения  $\mathbf{x}$ , то мы можем записать их в такой эквивалентной форме:

$$\left. \begin{aligned} E'_k(\mathbf{x}) &= -E_k(-\mathbf{x}); \\ H'_k(\mathbf{x}) &= +H_k(-\mathbf{x}). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Можно сказать, что  $\mathbf{E}$  преобразуется как «полярный» вектор, а  $\mathbf{H}$  — как «аксиальный». Чтобы почувствовать это, нужно допустить, что заряды частиц, создающие электромагнитное поле, ведут себя как скалярные величины, т. е. имеют одинаковые значения в обеих системах. Тогда наше утверждение эквивалентно тому, что четырехмерный вектор тока  $\rho, j_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) преобразуется по формулам

$$\left. \begin{aligned} \rho'(\mathbf{x}') &= +\rho(\mathbf{x}), \\ j'_k(\mathbf{x}') &= -j_k(\mathbf{x}). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Так как ток является произведением зарядов на их скорости, то он меняет знак.

В квантовой теории  $E_k(\mathbf{x})$  и  $H_k(\mathbf{x})$  выражаются «операторами», подчиняющимися определенным правилам коммутации:

$$\left. \begin{aligned} [\mathcal{E}_j(\mathbf{x}), \mathcal{E}_k(\mathbf{y})] &= [\mathcal{H}_j(\mathbf{x}), \mathcal{H}_k(\mathbf{y})] = 0, \\ [\mathcal{E}_i(\mathbf{x}), \mathcal{H}_j(\mathbf{y})] &= -i \frac{\partial}{\partial x_h} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Мы использовали здесь рукописные буквы для того, чтобы отличить операторы от соответствующих классических величин;  $i, j, k$  являются циклической перестановкой 1, 2, 3. По аналогии с тем, что мы делали раньше, естественно интерпретировать (16) и (17) как связь между «операторами», изображающими поля в наших двух системах. Действительно, можно снова проверить, что это преобразование является каноническим, т. е.  $\mathcal{E}'_j(\mathbf{x})$  и  $\mathcal{H}'_k(\mathbf{x})$  являются операторными функциями от  $\mathbf{x}$ , подчиняющимися тем же правилам коммутации, что и нештрихованные операторы функции, и следовательно, должно существовать унитарное линейное преобразование:

$$\left. \begin{aligned} P^{-1} \mathcal{E}_j(\mathbf{x}) P &= \mathcal{E}'_j(\mathbf{x}) \equiv -\mathcal{E}_j(-\mathbf{x}), \\ P^{-1} \mathcal{H}_j(\mathbf{x}) P &= \mathcal{H}'_j(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{H}_j(-\mathbf{x}), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где  $P$  называется оператором четности электромагнитного поля. Если

$\phi$  является некоторым состоянием поля, то значение магнитного поля  $\mathbf{H}$  в состоянии  $\phi$  и в точке  $\mathbf{x}$  равно значению  $\mathbf{H}$  в «зеркальном состоянии»  $P\phi$  в точке  $-\mathbf{x}$ ; соответствующие значения электрического поля  $\mathbf{E}$  равны по величине, но противоположны по знаку \*).

Оператор Гамильтона для свободного максвелловского поля есть, конечно,

$$H = \frac{1}{2} \int [\mathcal{E}^2(\mathbf{x}) + \mathcal{H}^2(\mathbf{x})] d^3x \quad (21)$$

и не изменяется при замене  $\mathcal{E}(\mathbf{x}) \rightarrow -\mathcal{E}(-\mathbf{x})$ ;  $\mathcal{H}(\mathbf{x}) \rightarrow +\mathcal{H}(-\mathbf{x})$ ; следовательно,

$$PH P^{-1} = H, \quad (4)$$

как и в предыдущем простейшем случае уравнения (4).

Не представляет трудности найти явный вид оператора  $P$ . Рассмотрим, для простоты, только поперечную часть поля, которая соответствует свободным фотонам. Разложим, как обычно, поле на нормированные моды, используя в качестве их хорошо известные  $TM$ - и  $TE$ -сферические волны. Разложение принимает вид <sup>5</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{x}) &= -\sum_n p_n \mathbf{E}_n(\mathbf{x}), \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}) &= \sum_n q_n \mathbf{H}_n(\mathbf{x}), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где  $n$  — индекс  $n$ -й моды, а  $q_n$ ,  $p_n$  — соответствующие канонические переменные; уравнения Максвелла принимают вид уравнений осциллятора:

$$\dot{p}_n = \dot{q}_n, \quad \ddot{p}_n = -\omega_n^2 q_n.$$

Моды естественным образом подразделяют на электрические и магнитные  $2^l$ -мультипольные волны. Компоненты  $\mathbf{H}_n(\mathbf{x})$  являются четными функциями от  $\mathbf{x}$  для электрических  $2^l$ -мультиполей с «четными»  $l$  (квадруполь, шестнадцатиполь, и т. д.) и для магнитных  $2^l$ -мультиполей с «нечетными»  $l$  (диполь, октуполь, и т. д.). Эти компоненты называются «четными» модами. Для этих мод компоненты  $\mathbf{E}_n(\mathbf{x})$  являются нечетными функциями  $\mathbf{x}$ . Таким образом, осцилляторные переменные  $q_1, p_1, q_2, p_2, \dots$  естественным образом разделяются на две группы: «четные» переменные  $q_{\text{ч}}, p_{\text{ч}}$  и нечетные переменные  $q_{\text{нч}}, p_{\text{нч}}$ . В качестве волновой функции системы может быть взята функция  $\psi(q_{\text{ч}}, q_{\text{нч}})$  от пространственных переменных. Теперь становится очевидным, что каноническое преобразование поля (уравнения (17) или (20)) соответствует изменению знака у «нечетных» динамических переменных  $q_{\text{нч}}, p_{\text{нч}}$ . «Четные» переменные остаются неизменными. Поведение нечетных переменных полностью соответствует уравнениям (15а) и (15б), откуда следует определение оператора четности  $\psi' = P\psi$ :

$$\psi'(q_{\text{ч}}, q_{\text{нч}}) = \psi(q_{\text{ч}}, -q_{\text{нч}}). \quad (23)$$

Конечно, уравнение  $\psi' = -\psi(q_{\text{ч}}, -q_{\text{нч}})$  также будет справедливо. Теперь легко вывести правила отбора для мультипольных излучений. Когда атом (для простоты считаем, что он имеет бесконечно тяжелое ядро в центре координат) испускает или поглощает квант света, одна из мод поля изменяет свое квантовое число с  $N$  до  $N \pm 1$ . Волновая функция поля

\*) В общем случае эти утверждения нужно понимать в том же вероятностном смысле, что и аналогичные утверждения из раздела 2.1.



может быть взята в виде произведения волновых функций осцилляторов, соответствующих различным модам. Известно, что волновые функции осцилляторов для  $N=0, 1, 2, \dots$ , являются попеременно четными и нечетными относительно осцилляторных координат  $q$ . Уравнение (23) показывает, что четность состояния поля есть  $(-1)^{\sum N}$ , где сумма берется «только по нечетным модам». Следовательно, испускание (или поглощение) нечетной моды (например, электрического диполя) изменяет четность поля. Испускание четной моды не влияет на четность. Отсюда следуют все частные правила отбора для испускания или поглощения света. Результат справедлив также для излучения свободных атомов, молекул или ядер, хотя приведенное здесь доказательство не является строгим для этих случаев.

Отметим, что волновая функция «вакуума» (состояния поля, в котором отсутствуют фотоны) является произведением волновых функций для основного состояния осцилляторов, которое является «четным» по всем координатам. Следовательно, четность вакуума есть  $+1$ . Это, конечно, является результатом произвольного выбора, который можно сделать между уравнением (23) и другим возможным знаком оператора  $P$ , и показывает, почему был сделан такой выбор.

Действительно, на практике всегда можно допустить, что нет других фотонов, кроме тех, которые испускаются или поглощаются. Теперь нужно знать только четность однофотонного состояния (четность вакуума берется  $+1$ ). Это может быть сделано при помощи «волнового уравнения» для фотона и соответствующего оператора четности для фотонной волновой функции. Читатель может попрактиковаться сам, применяя метод приложения В к настоящему случаю.

## 2.5. Четность бесспиновых частиц

В  $\pi$ -мезонной физике возникает вопрос, меняется ли четность системы соударяющихся нуклонов, когда  $\pi$ -мезоны испускаются (поглощаются) или нет. Ясно, что этот вопрос аналогичен тому, что обсуждался в предыдущем разделе; основная разница состоит в том, что спин  $\pi$ -мезона равен нулю. Все возможные состояния испускаемого мезона можно классифицировать как состояние  $s, p, d, \dots$ , т. е. состояния с орбитальным моментом  $l=0, 1, 2, \dots$ . Небольшое усложнение возникает из-за того, что нужно рассматривать относительное движение, но автор пока будет продолжать определять угловой момент обычным путем, по отношению к фиксированному центру.

Четность состояний мезона с  $l=0, 2, 4, \dots$ , очевидно, противоположна четности состояний с  $l=1, 3, 5, \dots$ , и так же, как и в случае испускания фотона, требуется сравнение четностей состояний с одним мезоном и всем без мезонов. Можно, конечно, принять обычное условие, что одномезонное состояние имеет четность  $+(-1)^l$ , но тогда еще остаются взаимоисключающиеся возможности приписать безмезонному состоянию четность  $+1$  или  $-1$ . Можно, наоборот, и это более естественно, приписать безмезонному состоянию четность  $+1$ , и далее рассматривать две альтернативные возможности

$$+(-1)^l \quad \text{или} \quad -(-1)^l \quad (24)$$

для одномезонных состояний.

С точки зрения теории поля вопрос выглядит следующим образом. В методе вторичного квантования система тождественных бесспиновых бозонов описывается оператором поля с единственной компонентой  $\varphi(\mathbf{x})$ , которая ведет себя как скаляр при вращении системы координат. Однако

по отношению к инверсии (уравнение (1))  $\varphi$  может вести себя как скаляр

$$\varphi'(-x) = +\varphi(x), \quad (25)$$

или как псевдоскаляр

$$\varphi'(-x) = -\varphi(x). \quad (25')$$

Очень важно понять, что разница между уравнением (25) и (25') весьма существенна, и этим отличается от  $\pm$  неопределенности оператора  $P$ .  $\varphi(x)$  является «оператором» (а не «волновой функцией»!), который может появиться в гамильтониане в виде взаимодействия. Например, поле, представляющее  $\pi^0$ -мезоны, может взаимодействовать с электромагнитным полем и давать член вида

$$g \int \varphi(x) \{E^2(x) - H^2(x)\} d^3x \quad (26)$$

или вида

$$g \int \varphi(x) E(x) H(x) d^3x, \quad (26')$$

где  $g$  — константа пропорциональности. Имея в виду закон преобразования для электромагнитного поля, мы видим, что (26) инвариантно при условии (25), а (26') — при условии (25'), но не наоборот. Таким образом, если четность сохраняется, то эти два допущения дают разные физические следствия: например, и (26) и (26') имеют матричные элементы, соответствующие распаду  $\pi^0$ -мезона на два фотона, но моды этих распадов, различных в конечном счете, могут быть разделены при эксперименте.

Если проинтерпретировать (25) и (25') как уравнения между операторами \*), то можно снова ввести линейный унитарный оператор  $P$ , такой, что

$$P^{-1}\varphi(x)P = \varphi(-x) \quad (27)$$

или соответственно

$$P^{-1}\varphi(x)P = -\varphi(-x). \quad (27')$$

Далее можно применить метод, развитый в предыдущем разделе для квантов света. Оператор  $\varphi(x)$  можно разложить на «нормированные» моды, характеризующиеся орбитальным и магнитным квантовыми числами  $l$ ,  $m$ , и третьим квантовым числом, определяющим длины волн. Опущая для простоты  $m$  и длину волны, можно написать

$$\varphi(x) = \sum_l q_l Y_l(x) f_l(r), \quad (28)$$

где  $Y_l$  — сферическая гармоника, а  $f_l$  — радиальная функция  $l$ -й моды. Далее, так же как и в предыдущем разделе, видно, что существуют «четные» и «нечетные» моды, для которых  $q_l' = \pm q_l$  соответственно, причем при условии (25) четными модами являются те, у которых четные  $l$ , а при условии (25') четные моды имеют нечетные  $l$ . Понятно, что для четности это дает две возможности (24).

Все данные, существующие на сегодняшний день, указывают на псевдоскалярный характер  $\pi$ -мезонного поля, т. е. на то, что справед-

\*) Практически здесь нужно еще написать аналогичное уравнение для канонически сопряженного поля, введя производную по времени от  $\varphi$ . Другим обстоятельством является то, что операторы  $P$ , определяемые (27) и (27'), совершенно различны, что снова подчеркивает разницу между знаком  $\pm$  в этих уравнениях и общую  $\pm$  неопределенность  $P$ .

ливы уравнения (25') и (27') и вторая возможность в уравнении (24). Самое сильное подтверждение этого дается правилами отбора для  $\pi^-$ -захвата в дейтерии. Здесь хорошо показано<sup>6</sup>, что мезоны перед захватом сначала садятся на  $K$ -орбиту. Экспериментально найдено, что имеет место переход, в котором  $\pi$ -мезон с  $K$ -орбиты ( $l=0$ ) поглощается, а ядро дейтерия распадается на два нейтрона (и ни на что больше). Из-за сохранения углового момента и действия принципа Паули эти два нейтрона могут быть только в состоянии  ${}^3P_1$ . Таким образом, нуклонная система совершает переход из «четного» ( ${}^3S$ ) состояния в нечетное ( ${}^3P$ ) состояние\*), что совместимо с сохранением четности только при условии, что  $\pi$ -мезон псевдоскалярен.

## 2.6. Четность дираковских частиц

Рассмотрим кратко оператор четности для нерелятивистских частиц со спином  $1/2$ . Если рассмотреть, какое нужно преобразование для дираковской волновой функции, чтобы сохранить вид уравнения Дирака при преобразовании координат (1), то получается правило

$$\varphi'(x) = \varepsilon \beta \psi(-x), \quad (29)$$

где  $\varepsilon$  — произвольная постоянная, а  $\beta$  — четвертая матрица Дирака ( $=\gamma_4$ ); объяснение используемых обозначений см. в приложении А. В обычной схеме умножение  $\psi$  на  $\beta$  означает умножение больших (малых) компонент  $\psi$  на  $+1$  ( $-1$ ). Поведение «больших» компонент (т. е. компонент, которые велики в нерелятивистском состоянии с положительной энергией) в точности соответствует тому, что сказано о «двухкомпонентной» функции Паули  $\psi$  (см. написанное вслед за уравнением (15)).

Матрица  $\beta$ , размерами  $4 \times 4$ , унитарна, т. е.  $\beta = \beta^+$  и  $\beta^2 = 1$ . Легко видеть, что в одночастичном представлении уравнения Дирака (представление  $c$ -чисел) уравнение (29) определяет унитарный оператор  $P$ , при условии, что  $|\varepsilon| = 1$ . Если мы еще потребуем  $P^2 = 1$  (см. уравнение (3)), то получим

$$\varepsilon = \pm 1, \quad (29')$$

что, конечно, является обычной  $\pm$  неопределенностью оператора  $P$ . Выбор  $\varepsilon = +1$  приводит к обычному определению, что  $s, d, g, \dots$ -состояния имеют четность  $P = +1$ , а  $p, f, \dots$ -состояния — четность  $P = -1$ . Действительно, например, в  $s, d, \dots$ -состояниях «большие» компоненты, для которых  $\beta = +1$ , являются четными функциями  $x$ , тогда как «малые» компоненты для которых  $\beta = -1$ , являются нечетными функциями  $x$ . В результате  $\psi' = +\psi$  (и наоборот для других состояний).

Для того чтобы обсуждать проблемы, в которых дираковские частицы создаются или уничтожаются, мы перейдем к теории вторичного квантования, или теории  $q$ -чисел. Здесь четыре компоненты спинора  $\psi$  рассматриваются как операторы поля, подчиняющиеся антикоммутационным соотношениям:

$$\{\psi_\rho(x), \psi_\sigma(y)\} = 0; \quad \{\psi_\rho(x), \psi_\sigma^+(y)\} = \delta_{\rho\sigma} \delta(x-y), \quad (30)$$

где  $\rho, \sigma$  ( $= 1, \dots, 4$ ) — спинорные индексы. Здесь теория берется в том

\*) Это верно, несмотря на то, что переход также включает преобразование протона в нейтрон. Предполагается, что оно не влияет на четность. Об этом см. абзац, следующий за уравнением (35') в разделе 2.6.

виде, в котором она применима для частиц, отличающихся от своих античастиц (см. раздел 4), так что  $\psi$  и  $\psi^+$  независимы.

В теории вторичного квантования уравнение (29) определяет преобразование оператора поля\*), и нужно указать, что при условии  $|\varepsilon| = 1$  уравнение (29) не только сохраняет вид уравнения Дирака при преобразовании (1), но сохраняет также и антикоммутационные соотношения (30). Отсюда обычным образом вытекает существование унитарного оператора  $P$ , такого, что

$$P^{-1}\psi(x)P = \psi'(x) = \varepsilon\beta\psi(-x). \quad (31)$$

Эрмитово сопряжение этого соотношения дает нам (так как  $P^{-1} = P^*$ ):

$$P^{-1}\psi^+(x)P = -\varepsilon^*\beta\psi^+(-x) = \varepsilon^*\psi^+(-x)\beta \quad (32)$$

(ибо  $\beta^* = -\beta$ ; мы использовали здесь представление Майорана, см. приложение А). Когда «большой» оператор  $P$ , определяемый уравнениями (31) и (32), действует на одночастичные состояния, он эквивалентен (как это объясняется в приложении В) «малому» оператору  $P$ , определяемому непосредственно из уравнения (29) в теории  $s$ -чисел; другими словами, оба оператора дают одни и те же возможности для относительной четности одночастичных состояний\*\*).

Очевидно, однако, что «большой» оператор  $P$  охватывает гораздо больший диапазон состояний и содержит больше информации. Рассмотрим, например, следуя методу приложения В, четность состояний позитрония, которые являются типичными примерами состояний, содержащих частицы и античастицы. Простому произведению волновых функций  $u_r(x)u_s(y)$  электрона в состоянии  $r$  и позитрона в состоянии  $s$  (заметим, что оба состояния  $u_r$  и  $u_s$  должны быть состояниями с положительной энергией) соответствует кэт  $|r, \bar{s}\rangle = a_r^+ \bar{a}_s^+ | \rangle$ . Более общее состояние  $\zeta$  может быть описано волновой функцией  $f_\zeta(x, y)$ , которая является суперпозицией произведений волновых функций. Так как соответствующий кэт также является аналогичной суперпозицией, то аналогично (В.6), (В.6') и (В.8), (В.8') имеем:

$$|\zeta\rangle = \int \psi^+(x)\psi(y)f(x, y)dx dy | \rangle, \quad (33)$$

$$f_\zeta(x, y) = \langle | \psi^+(y)\psi(x) | \zeta \rangle, \quad (34)$$

причем нужно отметить, что  $f$  имеет два спинорных индекса, равные спинорным индексам у  $\psi(x)$  и  $\psi^+(y)$  в написанных выше уравнениях. Если состояние имеет нулевой полный момент, то  $f_\zeta$  является функцией только  $x - y$ . Если применить оператор  $P$  и использовать уравнения (31), (32) и (В.8), то получается волновая функция состояния  $P|\zeta\rangle$ :

$$\begin{aligned} f'_\zeta(x, y) &= \langle | \psi^+(y)\psi(x) P | \zeta \rangle = \langle | P^{-1}\psi^+(y) P P^{-1}\psi(x) P | \zeta \rangle = \\ &= -\varepsilon\varepsilon^* \langle | \beta_y \psi^+(-y) \beta_x \psi(-x) | \zeta \rangle = -\beta_y \beta_x f_\zeta(-x, -y), \end{aligned} \quad (35)$$

где  $x$  и  $y$  добавлены для того, чтобы показать, что матрицы  $\beta$  действуют на

\*) Не требуется повторять здесь более детальные объяснения из разделов 2.3 и 2.4, касающиеся значения таких утверждений.

\*\*) Тривиальным, но необходимым замечанием является то, что  $\varepsilon$  из уравнения (31) нельзя смешивать с общим фазовым фактором оператора  $P$ . Легко видеть, что действие  $\varepsilon$  заключается в умножении четностей одночастичных состояний (относительно вакуума) на  $\varepsilon$ , четностей двухчастичных состояний на  $\varepsilon^2$  и вообще четностей состояний с  $n$  частицами и  $m$  античастицами на  $\varepsilon^{n-m}$ .

два различных спинорных индекса, которые изменяются с  $x$  и  $y$  соответственно. Уравнение (35) теперь может рассматриваться как определение для  $P$  в субпространстве позитронных состояний. Напомним, что обычно четность этих состояний определена относительно четности вакуума  $P = +1$ , уравнение (B.9).

Уравнение (35) можно преобразовать снова, к представлению, в котором  $\beta_x = 1$ ,  $\beta_y = 1$  для «больших» компонент. Для этих компонент четность определяется из

$$f_z''(x-y) = -f_z(-x+y), \quad (35')$$

что означает, что  $s$ ,  $d$ ,  $g$ , ...-состояния нечетны! Так, например, существует правило отбора, что если позитроний в основном ( $^1S$  или  $^3S$ ) состоянии распадается (на два или три фотона), то он может распадаться только в нечетное состояние. (О четности двухфотонных состояний см.  $^7, ^{7a}$ .) Фактор  $-1$  перед уравнением (35') является фактором, «присущим» четности, который, как показывают расчеты, совершенно не зависит от величины  $\varepsilon$  в уравнении (31). Это очень важное замечание, так как в случае электрон-позитронного поля (или других заряженных полей) общее требование калибровочной инвариантности электродинамических взаимодействий приводит, в частности, к тому, что умножение  $\psi$  на фазовый фактор  $\varepsilon$  лишено какого-либо физического смысла; следовательно, невозможно однозначное определение  $\varepsilon$  в уравнении (31). Однако это не означает, что каждое дираковское поле  $\psi_n$  имеет совершенно произвольную константу  $\varepsilon_n$ , независимую от поведения других полей. Ясно, что обсуждение возможных связей между значениями  $\varepsilon$  для различных полей должно зависеть от взаимодействий между этими полями (см. также следующий раздел).

Попытки ограничить при помощи более формальных схем возможные значения  $\varepsilon$  по необходимости в какой-то мере произвольны. Например, уравнение (3) или более общее требование, чтобы ненаблюдаемое преобразование  $P^2$  было кратно единичной матрице, которая коммутирует с любым оператором, дает

$$\psi(x) = P^{-2} \psi(x) P^2 = \varepsilon^2 \psi(x) \quad (36)$$

и, следовательно,  $\varepsilon = \pm 1$ . Но это требование игнорирует, однако, тот факт, что теория Дирака имеет другие ненаблюдаемые преобразования, которые не выражаются операторами, коммутирующими с  $\psi$ , именно, вращение на  $360^\circ$  вокруг произвольной оси в пространстве, обращение времени, повторенное дважды (см. раздел 3). Такая ситуация была объяснена Вигнером на основе концепции «правила суперотбора» (см. Вик, Вайтман и Вигнер<sup>8</sup>). Основным положением здесь является то, что измеримость операторов в квантовой теории поля в общем случае подвержена ограничениям такого рода, какие обычно не встречаются при простом рассмотрении общих принципов квантовой механики. В случае дираковской  $\psi$ -функции существует ограничение, так как физически измеримые величины могут быть скалярами, векторами, но никогда не могут быть спинорами. Кроме того, могут существовать, как мы увидим ниже, дальнейшие ограничения, связанные с ограничениями, налагаемыми на существующие в природе возможные типы взаимодействий.

## 2.7. Оператор четности для взаимодействующих полей

Рассмотрим сначала взаимодействие между заряженными частицами и электромагнитным полем, которое выражается хорошо известным способом путем введения члена, соответствующего взаимодействию, в

обобщенную функцию Лагранжа или Гамильтона для электромагнитного поля и поля (или полей), описывающего заряженные частицы. Этот добавочный член приводит к появлению описывающих взаимодействия членов в уравнениях поля, т. е. членов с зарядами и плотностью тока в уравнениях Максвелла. Теперь весьма существенным является то, что хорошо известный вид взаимодействия в гамильтониане, получаемый из других соображений, автоматически удовлетворяет закону инвариантности (4), если трансформационные свойства различных полей взяты из уравнений (20), (27) или (27'), (31) и (32) для невзаимодействующих полей. Оператор для такого рода объединенной системы взаимодействующих полей может быть получен, конечно, путем перемножения ранее определенных операторов  $P$ , каждый из которых действует только на переменные своего поля. Мы дадим здесь только один пример такой инвариантности, показав, что обычное выражение для заряда и плотности тока в теории Дирака

$$\rho(x) = e\psi^+(x)\psi(x); \quad j_k(x) = e\psi^+(x)\alpha_k\psi(x) \quad (37)$$

преобразуется согласно уравнению (18). Действительно, начав с  $\rho$ , мы получим

$$\rho'(x) \equiv P^{-1}\rho(x)P = eP^{-1}\psi^+(x)PP^{-1}\psi(x)P = e\epsilon\epsilon^*\psi^+(-x)\beta\beta\psi(-x) = \rho(-x),$$

где мы вставили  $PP^{-1}=1$  и использовали соотношение Дирака  $\beta^2=1$ . Аналогично получается, что  $j'(\alpha)$  согласуется с уравнением (18), если использовать соотношение Дирака  $\beta\alpha_k\beta = -\alpha_k$ . Теперь ясно, что поскольку законы преобразования электромагнитного поля (уравнения (16) и (20) выбраны так, чтобы удовлетворялась инвариантность уравнений Максвелла при преобразовании (18), постольку сделан основной шаг на пути доказательства требований инвариантности. Дальнейшее доказательство для случая четырехмерного вектора тока бесспиновых частиц (скалярные или псевдоскалярные поля) проводится по аналогии с рассмотренными случаями и не будет повторяться здесь.

В качестве другого примера рассмотрим взаимодействие между нуклонным и мезонным полями. Следуя общей идее Юкавы, это взаимодействие описывается по возможно близкой аналогии с взаимодействием между электронным и максвелловским полями, причем роль фотонов теперь играют мезоны. Таким образом, если  $\psi$  есть дираковское поле, которое описывает нуклоны, то для описания взаимодействия нужно «к правой стороне» уравнения для своего свободного мезонного поля добавить функцию источника, которая подобно четырехмерному электродинамическому вектору тока (уравнение (37)) билинейна по  $\psi^+$  и  $\psi$ . Существенную разницу между этими двумя случаями создают а) конечная масса мезонов  $\mu$ , б) псевдоскалярность мезонного поля и векторный характер максвелловского поля и в) существование нуклонов, двух сортов ( $n$  и  $p$ ) и мезонов трех сортов ( $\pi^\pm$  и  $\pi^0$ ). Пренебрежем пока последними обстоятельствами и рассмотрим, например, только взаимодействие  $\pi^0$ -мезонов с протонами. Тогда мы имеем одно псевдоскалярное мезонное поле  $\varphi$  и одно дираковское поле  $\psi$ . Функция источника  $j$  в уравнении мезонного поля

$$(\square - \mu^2)\varphi = j \quad (38)$$

должна быть псевдоскаляром, билинейным по  $\psi^+$  и  $\psi$ , и если допустить для простоты, что в него не входят производные, то существует только один возможный вид

$$j = ig\psi^+\gamma_5\psi \equiv g\psi^+\rho_2\psi, \quad (39)$$

где  $g$  — константа пропорциональности. Можно легко проверить, что уравнение (39) инвариантно относительно обычных вращений и соответствующим

щих лоренцовых преобразований. Мы рассмотрим только поведение (39) при  $P$ -преобразованиях. Используя уравнения (34) и (32), получаем, что

$$P^{-1} j(x) P = g_1^{\dagger}(-x) \beta \rho_2 \beta \psi(-x) = -j(-x), \quad (40)$$

т. е.  $j(x)$  — псевдоскаляр. Соответственно, уравнение (38) остается инвариантным, если  $\varphi$  удовлетворяет (27'). Присутствующий в гамильтониане член, который описывает взаимодействие и приводит к появлению источника  $j$  в уравнении (38), имеет вид

$$H' = \int j(x) \varphi(x) d^3x \quad (41)$$

и коммутирует, следовательно, с  $P$ . Такая же, в сущности, ситуация получается при полном изучении проблемы (см. раздел 6.4) при условии, что протонное и нейтронное поля преобразуются в точности одинаковым образом (уравнение (31)) или, другими словами, при условии, что нейтрон и протон имеют одинаковую четность\*).

## 2.8. Нарушение четности при $\beta$ -распаде и аналогичных процессах

Выше были упомянуты весьма чувствительные опыты по проверке сохранения четности  $P$ , но  $\beta$ -распад и подобные ему явления дают гораздо более чувствительную проверку, так как у них константа связи составляет около  $10^{-7}$  в естественных единицах ( $\hbar$ ,  $c$ , и, скажем, масса  $\pi$ -мезона). Хорошо известно, что многие эксперименты по  $\beta$ -распаду,  $\pi$ - $\mu$ - $e$ -распаду и  $\Lambda$ -распаду обнаруживают асимметрии, которые позволяют очевидным образом сделать выбор между правым и левым направлениями. Это различие становится неопределенным только в том случае, если ввести антивещество в рассмотрение процесса (см. раздел 5). Однако оператор  $P$ , по определению, не заменяет вещество на антивещество и наоборот, так что эти эксперименты указывают на явное нарушение  $P$ -инвариантности.

Ввиду этого можно задать законный вопрос, имеется ли какой-нибудь смысл вообще говорить о четности. Действительно, оператор четности определяется из того факта, что существует симметрия. Следовательно, строго говоря, нужно сказать, что изображение  $\mu^-$ -мезона не существует, так как согласно нашему определению это должен быть снова  $\mu^-$ -мезон, а вероятность его распада в разных направлениях относительно направления спина не согласуется с вероятностью, наблюдаемой на опыте.

Однако нет нужды принимать такую крайнюю точку зрения. Так как взаимодействие в  $\beta$ -распаде очень малó, то на время можно допустить, что его не существует вовсе. Четность тогда становится приближенным понятием, которое справедливо с чрезвычайно высокой степенью точности. Формально это означает, что оператор  $P$  для различных полей должен быть определен так, чтобы удовлетворить требованиям инвариантности для «сильных» электромагнитных взаимодействий. Экспериментально это означает, что только «сильные» реакции и электромагнитные процессы могут быть использованы для определения внутренней четности частиц.

Очевидно, что эти ограничения налагают соответствующие ограничения на нашу возможность определить  $P$ . Можно сказать, что они увеличивают число возможных неопределенностей, которые, как мы уже видели, и так существуют. Рассмотрим, например, более детально  $\beta$ -распад. Давно

\*) Это утверждение, конечно, означает, что если приписать одинаковое  $\varepsilon$  для  $\psi_p$  и  $\psi_n$ , то аналогичная константа для мезонного поля должна быть равной  $-1$ . Это является примером связи констант  $\varepsilon$  для различных полей (раздел 2.6).

известно, что формально внутри обычной схемы можно написать взаимодействие с несохраняющейся четностью. Обозначим через  $p$ ,  $n$ ,  $e$  и  $\nu$  дираковские поля, описывающие соответственно протоны, нейтроны, электроны и нейтрино. Напишем, например, так называемое векторное взаимодействие,

$$V = C_v \int (p^* \beta \gamma_\mu n) (e^* \beta \gamma_\mu \nu) d^3x, \quad (42)$$

где все функции  $p$ ,  $n$ ,  $e$  и  $\nu$  взяты в одной и той же точке поля  $x$ , а  $C_v$  — константа связи. Это взаимодействие не инвариантно не только относительно соответствующего преобразования Лоренца, которое здесь не обсуждается, но и относительно  $P$ , если преобразование  $P$  определено для всех четырех полей посредством уравнений (31) и (32) с одним и тем же  $\varepsilon$ , скажем  $\varepsilon=1$ . Это легко проверить, используя соотношения  $(\beta(\beta \gamma_\mu)) \beta = \pm \beta \gamma_\mu$  (плюс для  $\mu=4$ , минус для  $\mu=1, 2, 3$ ).

Но это, однако, никоим образом не обязательно. Можно допустить, например, что нейтринное поле имеет  $\varepsilon=-1$ , т. е. противоположную четность. В этом случае уравнение (42) не является инвариантом, но инвариантом будет взаимодействие:

$$V' = C'_v \int (p^* \beta \gamma_\mu n) (\nu^* \beta \gamma_\mu \gamma_5 \nu) d^3x. \quad (43)$$

Если, однако, предположить существование комбинации обоих взаимодействий  $H=V+V'$ , то допущение, что  $P$ -преобразование всех четырех полей сохраняет инвариантность  $H$ , не имеет места. Именно, используя комбинации, подобные этой, Ли и Янг<sup>9</sup> впервые предсказали асимметрии, которые позже наблюдались с  $\text{Co}^{60}$  и т. д.

Ввиду этого становится ясным, что не существует способа определить, какое  $P$  является правильным для нейтринного поля, так как нейтрино появляется только в слабых взаимодействиях. Аналогичная неопределенность четности существует у «странных» частиц благодаря несохранению четности в процессах их распада.

### 3. ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ

#### 3.1. Обращение времени

Классические уравнения движения динамической системы обладают свойством инвариантности относительно обращения времени, свойством, которое в прошлом играло значительную роль при рассмотрении основных принципов статистической механики и термодинамики.

То, что уравнение квантовой механики обладает аналогичным свойством, можно наиболее просто показать в случае нерелятивистского уравнения Шредингера, зависящего от времени. Здесь легко можно проверить, что если  $\psi(x, t)$  является решением, то  $\psi'(x, t) = \psi^*(x, -t)$  также является решением, представляющим в общем случае волновой пакет, плотность распределения которого совершает обращенное во времени движение по сравнению с плотностью распределения волнового пакета  $\psi$ .

Рассматривая преобразование «в данный момент времени», например  $t=0$ , можно сказать, что

$$\psi'(x) = \psi^*(x) \quad (44)$$

представляет обращенное во времени состояние по отношению к  $\psi$ .



По аналогии с уравнением (2'), можно ожидать, что в самом общем случае существует некоторый оператор  $T$ , который преобразует состояние  $\psi$  в «обращенное во времени состояние»

$$\psi' = T\psi. \quad (45)$$

Это обращенное во времени состояние должно обладать тем свойством, что в нем изменены знаки импульсов и угловых моментов, тогда как координаты остались теми же. Это может быть понято в том же самом духе, что и аналогичные утверждения, сделанные для  $P$ .

Теперь важно отметить, что даже в таком элементарном случае, какой приведен выше,  $T$  получилось так просто путем комплексного сопряжения только благодаря конкретно использованному представлению. Если, например, рассмотреть преобразование Фурье (волновые функции в импульсном пространстве),  $\varphi(p)$  и  $\varphi'(p)$ , от соответствующих  $\psi$  и  $\psi'$ , то получим:

$$\varphi'(p) = \varphi^*(-p), \quad (46)$$

где к комплексному сопряжению добавляется преобразование  $\varphi(p) \rightarrow \varphi(-p)$ .

Обобщение, необходимое для того, чтобы охватить все случаи, было сделано Вигнером<sup>1</sup>. Нетрудно заметить, что в отличие от операторов других преобразований, обычно встречающихся в квантовой механике, преобразования  $T$  (уравнения (44) и (46)) нелинейны. Они, однако, обладают свойством, очень близким к линейности, именно, если  $T$  применить к линейной комбинации двух состояний  $\psi_1$  и  $\psi_2$  с коэффициентами  $c_1$  и  $c_2$ , то получится

$$T(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1^*T\psi_1 + c_2^*T\psi_2. \quad (47)$$

Говорят, что  $T$  — это «антилинейный» оператор. Для сравнения напомним уравнение для линейного оператора  $U$ :

$$U(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1U\psi_1 + c_2U\psi_2. \quad (48)$$

В то же самое время (44) или (46) сохраняет нормировку  $\psi$ , т. е.

$$(T\psi, T\psi) = (\psi, \psi). \quad (49)$$

Позже мы увидим, что для всех систем, обратимых во времени, существует оператор со свойствами (47) и (49). Такой оператор называется антилинейным унитарным или, более кратко, антиунитарным. Легко видеть, что такой оператор преобразует скалярное произведение двух векторов следующим образом\*):

$$(T\psi_1, T\psi_2) = (\psi_2, \psi_1) = (\psi_1, \psi_2)^*. \quad (50)$$

Из уравнений (48), (49) и (50) легко вывести, что оператор  $T$  должен иметь вид

$$T = UK, \quad (51)$$

где  $U$  и  $K$  определяются ниже. Разложив  $\psi$  по полному набору ортонормированных состояний  $\psi = \sum_n c_n \psi_n$ , мы можем сказать, как обычно, что  $\psi$  — это вектор с компонентами  $c_1, c_2, \dots$ , и символически записать

\*) Для доказательства уравнения (50) нужно применить условия унитарности последовательно к  $\psi = \psi_1 + \psi_2$  и  $\psi = \psi_1 + i\psi_2$  при условии уравнения (47). Более общее и строгое доказательство антилинейного характера оператора  $T$  можно найти в работе Вигнера<sup>1</sup>.

это так:

$$\psi = (c_1, c_2, c_3, \dots). \quad (52)$$

Затем мы можем определить комплексно сопряженный вектор  $K\psi$ , как вектор с комплексно сопряженными компонентами,

$$K\psi = (c_1^*, c_2^*, c_3^*, \dots). \quad (53)$$

Далее, благодаря (47) мы имеем

$$T\psi = \sum_n c_n^* T\psi_n, \quad (54)$$

где состояния  $T\psi_1, T\psi_2, \dots$ , вследствие (49) и (50) так же образуют ортонормированную систему. Можно доказать, что преобразование  $T$  должно иметь себе обратное  $T^{-1}$  (которое, как позже увидим, в сущности есть само  $T$ ), так что набор  $T\psi_1, T\psi_2, \dots$  должен быть полным и, следовательно, связан с исходным набором  $\psi_1, \psi_2, \dots$  посредством преобразования

$$T\psi_n = U\psi_n \equiv \sum_m \psi_m u_{mn}, \quad (55)$$

где матрица  $U$  унитарна:

$$UU^* = U^*U = 1. \quad (56)$$

Этим заканчивается определение  $U$  и  $K$ . Уравнение (54) теперь можно записать в виде

$$T\psi = \sum_n c_n^* U\psi_n = U \left( \sum_n c_n^* \psi_n \right) = UK\psi,$$

что является доказательством (51). Читатель может заметить, что определение (53) комплексно сопряженного состояния для  $\psi$  связано с конкретно выбранным представлением. Это, однако, неизбежно. Может показаться, что более естественным определением будет  $\psi^* = \sum c_n^* \psi_n^*$ , но это представляет собой порочный круг, так как теперь нужно определить, что значит  $\psi_n^*$ . Если изменить представление, т. е. взять новый ортонормированный набор  $\psi'_1, \psi'_2, \dots$ , то уравнение (53) определит новый оператор  $K'$ , который в общем случае будет отличен от  $K$ , причем  $K' = VK$ , где  $V$  — унитарное преобразование. Но оно не повлияет на  $T$ , так как  $V$  можно «включить» в фактор  $U$ .

### 3.2. Применения и справедливость $T$ -инвариантности

Инвариантность относительно обращения времени имеет многочисленные применения в ядерной физике, которые мы не можем здесь рассмотреть. Примером такого применения является теорема о статических дипольных моментах, упомянутых в конце раздела 2.2. Следствия  $T$ -инвариантности обычно проявляются в виде связей между прямыми и обратными процессами и фазовых соотношений между матричными элементами или амплитудами излучения.

Предположим, что мы имеем матричный элемент  $\langle A | \mathcal{Q} | B \rangle$  некоторого оператора  $\mathcal{Q}$ , который может быть, например, малым возмущением в гамильтониане, вызывающим переход из  $B$  в  $A$ . Очень часто обращенный во времени оператор  $\mathcal{Q}' = T^{-1}\mathcal{Q}T$  связан с  $\mathcal{Q}$  каким-либо простым образом, например,  $\mathcal{Q}' = \pm \mathcal{Q}$ . Аналогично, обращенные во времени состояния  $|A'\rangle = T|A\rangle$  и  $|B'\rangle = T|B\rangle$  связаны с исходными состояниями каким-нибудь простым образом. Например, если  $A$  принадлежит к набору состояний, описывающих свободные частицы с раз-

личными импульсами, то  $A'$  будет состоянием из того же набора, но с противоположным по знаку импульсом. Несколько более сложный пример будет рассмотрен ниже.

Рассмотрим матричный элемент оператора  $\Omega$ , вычисленный относительно двух обращенных во времени состояний  $\langle A' | \Omega | B' \rangle$ . Применяя теорему (50) к состояниям  $\psi_1 = |A\rangle$  и  $\psi_2 = T^{-1}\Omega|B'\rangle$ , мы получаем

$$\begin{aligned} \langle A' | \Omega | B' \rangle^* &\equiv \langle A' | TT^{-1}\Omega | B' \rangle^* = \langle A | T^{-1}\Omega | B' \rangle = \\ &= \langle A | T^{-1}\Omega T | B \rangle = \langle A | \Omega' | B \rangle, \end{aligned} \quad (57)$$

что связывает комплексно сопряженный матричный элемент от  $\Omega$  с матричным элементом от  $\Omega'$ . В некоторых случаях  $|A\rangle$  и  $|B\rangle$  являются собственными состояниями для  $T$  (в частности, дискретные стационарные состояния с  $J_z = 0$  принадлежат к этой категории), например,  $|A'\rangle = |A\rangle$ ;  $|B'\rangle = |B\rangle$ . Тогда благодаря соотношению  $\Omega' = \pm \Omega$  можно доказать посредством уравнения (57), что матричный элемент  $\langle A | \Omega | B \rangle$  действительный или, наоборот, чисто мнимый. Такие ограничения комплексности имеют место, например, при смешанных электромагнитных переходах<sup>10</sup>.

В других случаях уравнение (57) используется для того, чтобы доказать равенство вероятностей прямых и обратных процессов. Особенно простая формулировка получается при помощи матрицы рассеяния  $S$ . Здесь имеем

$$S' = T^{-1}ST = S^{-1} = S^*. \quad (57')$$

Отсюда следуют различные теоремы для рассеяния<sup>11, 11a, b, c</sup>.

Все эти различные следствия зависят, конечно, от предположения, что справедлива  $T$ -инвариантность. Доказательство этого по отношению к сильным взаимодействиям было недавно пересмотрено Хенли и Якобсоном<sup>12</sup>. Были предложены различные опыты по проверке  $T$ -инвариантности в слабых взаимодействиях<sup>13, 13a, b, c</sup>, но никакого нарушения  $T$  до сих пор не найдено<sup>14, 14a, b</sup>.

### 3.3. Оператор обращения времени; формальная теория

Если обратимость во времени есть инвариантность законов системы относительно преобразования из четырехмерной системы координат  $x, t$  в систему  $x', t'$ , которая определяется посредством соотношений

$$x' = x, \quad t' = -t, \quad (58)$$

то обсуждение вопроса может быть проведено по аналогии с уже рассмотренной  $P$ -инвариантностью. В этом случае наблюдатель  $O'$  использует те же самые координатные оси, но часы у него идут назад! Тогда можно определить обращенное во времени состояние, как состояние, описываемое наблюдателем  $O'$  в точности таким же способом, как исходное состояние описывается наблюдателем  $O$ .

Рассмотрим снова в качестве примера гамильтониан уравнения (11). Классическая связь между переменными в обеих системах, очевидно, есть

$$x = x', \quad p = -p', \quad s = -s', \quad (59)$$

где переменные  $x, p, s$  являются функциями от  $t$ , а  $x', p', s'$  — функциями от  $t' = -t$ . Теперь можно заметить, что подстановка (59) не изменяет вид гамильтониана (11), что и нужно. Кроме того, можно заметить, что преобразование времени (58) не изменяет вида уравнений

движения, например,

$$\frac{dx'}{dt'} = -\frac{dx'}{dt} = -\frac{dx}{dt} = -\frac{p}{m} = \frac{p'}{m} \quad \text{и т. д.}$$

Однако можно видеть, что преобразование (59) является «антиканоническим», т. е. если оно дает связь между операторами, или матрицами, выражающими  $x, \dots, s'$ , то правила коммутации (12) для стрихованных переменных получаются с другим знаком!

На первый взгляд может показаться, что это обстоятельство ломает наше доказательство инвариантности, но в действительности оно является лишь другим проявлением нечетной природы (т. е. антилинейности!) оператора обращения времени. Обычно два набора матриц считаются «эквивалентными», если они получаются один из другого по схеме

$$x \rightarrow U^{-1}xU, \quad (60)$$

где  $U$  — унитарная матрица. Введем теперь «антиунитарное» преобразование

$$x \rightarrow T^{-1}xT, \quad (61)$$

где  $T$  — оператор вида (51). Читатель может легко убедиться сам, что вполне законно рассматривать символ  $K$  как обычный оператор, действующий на вектор состояния, и писать, например,  $T^{-1} = K^{-1}U^{-1}$ . Оператор, обратный оператору (53), идентичен с самим  $K$ , т. е.

$$K = K^{-1} \text{ или } K^2 = 1. \quad (62)$$

Если читателю труден этот символизм, то он может рассматривать  $n$ -мерный комплексный вектор  $\psi = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  как  $2n$ -мерный действительный вектор  $\psi(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n)$ , где каждая компонента  $c_n = a_n + ib_n$  заменена своей действительной и мнимой частями. Вся матричная схема, конечно, может быть описана в этом действительном  $2n$ -мерном обозначении.  $K$  теперь является линейным ортогональным преобразованием  $\psi \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n; -b_1, -b_2, \dots, -b_n)$  и обозначения, подобные (62), становятся вполне понятными.

Теперь преобразование (61) может быть выполнено в два приема: сначала производим

$$x \rightarrow KxK^{-1}, \quad (63)$$

а затем производим преобразование «обычного» типа (60). Поэтому можно ограничиться рассмотрением того, что происходит с обычной для квантовой механики матричной схемой при преобразовании (63). Но все действия преобразования (63) сводятся к тому, что каждый матричный элемент заменяется на свою комплексно сопряженную величину. Очевидно, что все коммутаторы в уравнении (12) изменят при этом знак. Применяя (63) к основному закону движения (уравнение (13)), получаем:

$$\frac{dQ}{dt} = -i[H, Q]. \quad (64)$$

Эта замена вместе с изменением знака у коммутаторов означает, что уравнения движения Гамильтона остаются неизменными! Все это сводится к довольно тривиальному утверждению, что если во всех основных уравнениях квантовой механики заменить мнимую единицу  $i$  на  $-i$ , то никакие физические результаты при этом не изменятся.

Но именно это нужно для доказательства, что преобразования (59), рассматриваемые как операторные равенства, определяют две эквивалентные схемы в наших двух системах. По аналогии с тем, что было сделано при рассмотрении  $P$ , можно доказать, что так как (63) преобразует  $x$ ,  $p$  и  $s$  в матрицы, подчиняющиеся тем же правилам коммутации, что и  $x'$ ,  $p'$ ,  $s'$ , то должна существовать унитарная матрица  $U$ , которая, объединившись с  $K$ , согласно (51) даст преобразование:

$$\left. \begin{aligned} T^{-1}xT &= x' = x, \\ T^{-1}pT &= p' = -p, \\ T^{-1}sT &= s' = -s. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Теперь предположим, что мы работаем в обычном представлении Паули, т. е.  $\psi$  является двухкомпонентной волновой функцией в конфигурационном пространстве. Тогда  $K$  одна удовлетворяет первым двум соотношениям в уравнении (65). Следовательно, матрица  $U$  должна действовать только на спинные индексы, т. е. должна быть матрицей размерами  $2 \times 2$ , удовлетворяющей соотношению

$$U^{-1}sU = -s^*, \quad (66)$$

где компонентами  $s_k = (1/2)\sigma_k$  являются обычные матрицы Паули. Легко видеть, что матрица

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_y \quad (67)$$

и только эта матрица (с точностью до произвольного постоянного множителя) удовлетворяет уравнению (66). Связь ее с  $\sigma_y$ , конечно, чисто случайна; легко видеть, что  $U$  не зависит от конкретного представления, используемого для спинных матриц Паули.

Итак, операция обращения времени, примененная к двухкомпонентной волновой функции Паули, дает нам

$$T \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Операция (68) может стать более ясной, если понять следующее. Во-первых, знак комплексного сопряжения изменяет знак импульса: во-вторых, так как  $|\psi_1|^2$  и  $|\psi_2|^2$  суть вероятности того, что спин направлен вверх или вниз соответственно и так как обращение времени переставляет эти две ситуации, то  $T$  должна включать в себя перестановку  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Наконец, одна из двух компонент должна изменить знак, так как  $T$  должна также переставить вероятности того, что спин параллелен или антипараллелен  $X$ -оси, что выражается через  $1/2|\psi_1 \pm \psi_2|^2$ , или того, что он направлен вдоль или против  $Y$ -оси, что выражается через  $1/2|\psi_1 \mp i\psi_2|^2$ .

Прежде чем переходить к другим примерам, отметим важное свойство оператора  $T$ . Двойное обращение времени должно привести назад к исходной системе. Следовательно,  $T^2\psi = c\psi$ , где  $c$  — постоянный множитель. Если эта константа различна для двух разных состояний  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , то  $T^2(\psi_1 + \psi_2) = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$  не будет кратным  $\psi_1 + \psi_2$ ; следовательно,  $c$  не должна зависеть от  $\psi$ , т. е.  $T^2 = c \cdot 1$  кратно единичной матрице. Теперь из уравнения (51)  $T^2 = UKUK = UU^* = c1$  или  $U = cU^{*-1}$ . Но  $U$  унитарна, так что  $U^{*-1} = U^T$  (транспонированная матрица  $U$ ). Поэтому, наконец  $U = cU^T$ , или, транспонируя это равенство,  $U^T = cU = c^2U^T$ ,

откуда  $c^2 = 1$ . Таким образом, для  $T^2$  возможны только два значения:

$$T^2 = 1, \quad (69)$$

что удовлетворяет уравнению (44) для бесспиновых частиц, и

$$T^2 = -1, \quad (70)$$

что удовлетворяет уравнению (68) для частицы со спином  $1/2$ , а в более общем случае, как показал Вигнер, — для системы нечетного числа частиц со спинами  $1/2$ , например, для ядер с нечетным  $A$ . Читатель должен отметить тот факт, что умножение матрицы  $U$  на фазовый фактор  $e^{i\theta}$  не изменяет величины  $UU^* = T^2$ . Разница между (69) и (70) является внутренним свойством оператора обращения времени.

### 3.4. $T$ для электромагнитного поля

Рассмотрение может быть проведено так же, как и в разделе 2.4. Для того чтобы уравнения Максвелла не изменились при обращении времени и сохранении знака электрических зарядов, нужно оставить то же значение  $\mathcal{E}$  и изменить знак у  $\mathcal{H}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} T^{-1} \mathcal{E}_j(\mathbf{x}) T &= \mathcal{E}'_j(\mathbf{x}) = \mathcal{E}_j(\mathbf{x}), \\ T^{-1} \mathcal{H}_j(\mathbf{x}) T &= \mathcal{H}'_j(\mathbf{x}) = -\mathcal{H}_j(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (71)$$

что, конечно, не изменяет гамильтониан. Применяя методы, аналогичные изложенным в приложении В, легко увидеть, что  $T$  преобразует однофотонное состояние в однофотонное состояние с противоположным импульсом, без перестановки правой и левой круговых поляризаций.

### 3.5 $T$ для дираковских частиц

Мы рассмотрим этот случай, не затрагивая вначале теории  $q$ -чисел. Представляют интерес несколько новых особенностей. Прежде всего, правила антикоммутации (30) не содержат мнимой единицы  $i$ ; следовательно, они не говорят нам, линейно  $T$  или антилинейно. По уже упомянутой причине мы начнем с предположения, что  $T$  антилинейно, как и в других случаях.

Уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле имеет вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\alpha} \nabla + im\beta \right) \psi = ie(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A} - V) \psi, \quad (72)$$

где  $V$  — скалярный, а  $\mathbf{A}$  — векторный потенциалы поля. Предполагается, что дираковское поле  $\psi'$  в обращенной во времени координатной системе связано с  $\psi$  «соответствующим» линейным соотношением  $\psi' = u\psi$ , которое выбрано так, чтобы волновое уравнение Дирака и соответствующее уравнение для  $\psi'$  имели «эквивалентную» форму. Здесь мы должны сказать — эквивалентную, а не «ту же самую», так как уравнения содержат мнимую единицу, которая должна изменить знак при переходе от одной системы к другой! Именно,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t'} + \boldsymbol{\alpha}^* \nabla' - im\beta^* \right) \psi' = ie(\boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{A}' - V') \psi'$$

Однако благодаря уравнению (71) нужно написать  $V' = V$  и  $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$  (конечно, для  $t' = -t$ ). Далее задача упрощается, если использовать представление Майорана  $\alpha^* = \alpha$ ;  $\beta^* = -\beta$ . Наконец, так как  $t' = -t$ ,

$\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ , то имеем уравнение

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\alpha} \nabla + im\beta\right) \psi' = ie(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A} + V) \psi', \quad (73)$$

которое отличается от (72) только знаками членов, не содержащих  $\alpha$  или  $\beta$ . Можно доказать, что матрица  $U$  должна антикоммутировать с  $\alpha$  и  $\beta$ . Единственной такой матрицей (с точностью до множителя) является  $\rho_2 = i\gamma_4\gamma_5$  (см. приложение А). Следовательно, мы можем написать (для  $t=0$ )

$$T^{-1} \psi(\mathbf{x}) T = \psi'(\mathbf{x}) = \rho_2 \psi(\mathbf{x}). \quad (74)$$

Эрмитово сопряжение этого уравнения (ср. с уравнением (32)) дает:

$$T^{-1} \psi^+(\mathbf{x}) T = \rho_2^* \psi^+(\mathbf{x}) = \psi^+(\mathbf{x}) \rho_2. \quad (75)$$

Используя  $\rho_2^2 = 1$ , находим, что правила антикоммутации (30) не изменились. Из уравнения (37) получаем ожидаемые соотношения:

$$T^{-1} \rho T \equiv \rho' = e \psi^+ \rho_2^2 \psi = \rho, \quad (76)$$

$$T j_k T^{-1} \equiv j'_k = e \psi^+ \rho_2 \alpha_k^* \rho_2 \psi = -j_k \quad (77)$$

(использовано  $\alpha_k^* = \alpha_k$ ), хорошо согласующиеся с (71).

Интересным является гамильтониан. Напишем для простоты только часть, связанную со свободным полем,

$$H = -i \int \psi^+ (\boldsymbol{\alpha} \nabla + im\beta) \psi d^3x. \quad (78)$$

Отметьте  $i$ , стоящее впереди! «Эквивалентный» гамильтониан, следовательно, будет иметь противоположный знак:

$$T^{-1} H T = +i \int \psi'^+ (\boldsymbol{\alpha} \nabla + im\beta) \psi' d^3x. \quad (79)$$

Однако, учитывая (74) и (75) и используя  $\rho_2 \alpha \rho_2 = -\alpha$ ,  $\rho_2 \beta \rho_2 = -\beta$ , получаем:

$$T H T^{-1} = H, \quad (80)$$

что доказывает инвариантность гамильтониана.

В заключение рассмотрим, как и в случае четности, связь между «большим»  $T$ , т. е. оператором для всего диапазона  $q$ -чисел теории Дирака, и «малым»  $T$ , т. е. оператором обращения времени, который связывает обычные волновые функции (« $s$ -числа») исходного состояния и состояния, обращенного во времени. Пусть  $|\alpha\rangle$  является одночастичным состоянием, как и в приложении В. Соответствующая волновая функция Дирака в момент времени  $t=0$  есть

$$f_\alpha(\mathbf{x}, 0) = \langle \psi(\mathbf{x}) | \alpha \rangle. \quad (81)$$

Волновая функция обращенного во времени состояния может быть записана в такой же форме, как матричный элемент от  $\psi(\mathbf{x})$ , определенный для обращенных во времени состояний  $T|\alpha\rangle$  и  $T|\rangle = |\rangle$  [последнее обозначение является обычным, ср. уравнение (В. 9) и т. д.]. Отсюда по теореме (57)

$$f'_\alpha(\mathbf{x}) = \langle \psi'(\mathbf{x}) | \alpha \rangle^* = [\rho_2 f_\alpha(\mathbf{x})]^* = -\rho_2 f_\alpha^*(\mathbf{x}). \quad (82)$$

Причиной того, что, в отличие от теоремы приложения В, в случае обращения времени закон преобразования для волновой функции, выраженной  $s$ -числами, несколько отличается от преобразования (74) для волновой функции, выраженной  $q$ -числами, является, конечно, знак комплексного сопряжения в (82); этот знак необходим из-за антили-

нейного характера  $T$ , если волновая функция Дирака рассматривается как вектор состояния!

Читатель должен хорошо помнить, что многие из написанных уравнений справедливы (без изменения) только в представлении Майорана. Уравнение (82) является таким примером; оно показывает отсутствие сколько-нибудь заметной связи между ними и законом преобразования для двухкомпонентной волновой функции Паули (уравнение (68)). В приложении А показано, однако, что (82) точно означает преобразование (68) для «больших» компонент. Таким образом, можно сказать, что (82) изменяет знак импульса и направление спина частицы, как оно и должно быть. Другим способом проверки этого является рассмотрение состояния с определенной «спиральностью» т. е.  $f_a$  такие, что

$$p\sigma f_a \equiv -i\sigma \nabla f_a = \varepsilon f_a,$$

где  $\varepsilon = \pm |p|$ . Далее, так как  $\sigma$  и  $p_2$  коммутируют, а  $i\sigma$  является действительной матрицей, то

$$p\sigma f'_a = -p_2(-i\sigma \nabla f_a)^* = \varepsilon f'_a.$$

Таким образом, обращенное во времени состояние имеет ту же спиральность, что и следовало ожидать.

### 3.6. Взаимодействующие поля

Инвариантность других схем, включающих взаимодействующие поля, может быть рассмотрена посредством законов преобразования (71), (74) и т. д., по аналогии с тем, что сделано в разделе 2.7. Нужно только помнить, что комплексное сопряжение, вызываемое  $T$ , заменяет каждый коэффициент на его комплексно сопряженную величину, и нужно пользоваться таблицей из приложения А для определения мнимости или действительности матриц Дирака. Таким способом можно показать, например, что взаимодействия  $\beta$ -распада (уравнения (42) и (43)) инвариантны относительно  $T$ -преобразования, если  $C_\nu$  и  $C'_\nu$  (а в более общем случае обычные десять констант) действительны. Если масса нейтрино строго равна нулю, что довольно правдоподобно, то дальнейшие свойства инвариантности теории <sup>15, 15a, b, c</sup>, которые не будут обсуждаться здесь, позволяют показать, что инвариантность теории  $\beta$ -распада относительно обращения времени может быть сформулирована в несколько менее строгой форме <sup>16</sup>.

## 4. ЗАРЯДОВОЕ СОПРЯЖЕНИЕ

### 4.1. История

В недалеком прошлом считалось, что существует фундаментальная разница, или асимметрия, между двумя сортами электричества, положительным и отрицательным, которая, конечно, не проявляет себя в известных законах электромагнетизма, но лежит глубже в еще не открытых законах, определяющих структуру и свойства элементарных частиц.

Это предположение было отвергнуто открытием позитрона. Позитрон появился не только как точный двойник отрицательного электричества; он доказал правильность одного из самых смелых предсказаний в теории Дирака для электрона и, таким образом, существенно увеличил значимость аргументов, на которых основывалось это предсказание.



Этим аргументом была симметрия теории Дирака относительно зарядового сопряжения, которая позже была более точно сформулирована Майораном, Гейзенбергом и Крамерсом. Когда вскоре после этого такая симметрия была найдена в других теориях поля (например, в скалярной теории Паули—Вайскопфа) и была подтверждена открытием  $\mu^\pm$  и  $\pi^\pm$  зарядово-сопряженных пар, а совсем недавно — открытием антипротона, она стала одним из основных канонов теории элементарных частиц. Мы увидим, однако, что самые последние открытия указывают на более сложную ситуацию.

#### 4.2. Зарядовое сопряжение в теории электрона Дирака

Рассмотрим сначала уравнение Дирака (72) как теорию  $c$ -чисел для электрона во внешнем поле. Зарядовая симметрия уравнения может быть наиболее просто показана (но не обязательно только так) при использовании представления Майорана для матриц  $\alpha$  и  $\beta$  (см. приложение А). Заметив, что  $\alpha$  и  $i\beta$  действительны, мы получаем, что комплексно сопряженная по отношению к  $\psi$  функция  $\psi' = \psi^*$  подчиняется уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \nabla + im\beta \right) \psi' = -ie(\alpha \mathbf{A} - V) \psi', \quad (83)$$

которое совпадает с (72), за исключением обратного знака перед  $e$ . Решения уравнений (72) и (83) связаны правилом  $\psi' = \psi^*$  и называются «зарядово-сопряженными решениями», причем важно заметить, что если  $\psi$  есть решение для положительной энергии ( $\psi \sim e^{-iEt}$ ,  $E > 0$ ), то  $\psi'$  есть решение для отрицательной энергии, и наоборот.

Эти замечания, как известно, играют важную роль в дираковской теории дырок, где они используются для того, чтобы показать, что «дырка» в «фоне» нормально занятых состояний с отрицательной энергией ведет себя как частица с зарядом— $e$  в состоянии с положительной энергией. Теория определенно предсказывает, что такие «дырки» будут создаваться при соответствующих условиях, но то, что дырки должны иметь ту же массу, что и электроны, вовсе не очевидно \*). Кроме того, дираковская теория дырок на первый взгляд является совершенно несимметричной по отношению к этим двум частицам; можно удивляться тому, что эффекты взаимодействия электрона с бесконечным «фоном» электронов в состояниях с отрицательной энергией, а последних—между собой, не влияют на массы электрона и дырки, делая их совсем различными.

Мы теперь покажем, что теория в действительности совершенно симметрична, так что, например, те же самые результаты получаются, если считать основной частицей позитрон, а электрон—дыркой в бесконечном фоне позитронов с отрицательной энергией.

Чтобы сделать это, вернемся назад, к методу вторичного квантования. Предположим теперь, что отсутствует внешнее поле, но учтем электромагнитное поле, которое создается зарядом и плотностью тока в дираковском поле (уравнение (37)), допустив, что в уравнении (72)  $V$  и  $\mathbf{A}$  являются операторами—решениями уравнений Максвелла, представляющих это поле. Уравнение (83) опять является следствием (72), но так как  $\psi$  теперь оператор, мы должны написать  $\psi' = \psi^\dagger$ .

Прежде чем написать выражения (37) с «правой стороны» уравнения Максвелла, нужно, согласно хорошо известному приему Дирака,

\*) Одно время Дирак даже думал, что «дырки» можно отождествить с протонами!

вычесть из  $\rho(x)$  бесконечную отрицательную константу  $\rho_0$ , представляющую физически бессмысленную бесконечную плотность заряда в отрицательном фоне. Подсчитывая число состояний с отрицательной энергией в единице объема, мы легко получаем выражение для  $\rho_0$  в виде интеграла в пространстве импульсов:

$$\rho_0 = \frac{e}{4\pi^3} \int d^3p.$$

Легко видеть, что такой же интеграл входит в величину второго антикоммутатора (уравнение (30)) для  $x=y$ , который также получается путем подсчета состояний в пространстве импульсов; действительно, можно показать, что

$$e^{-1} \rho_0 = \frac{1}{2} \sum_p \lim_{x=y} \{\psi_p(x) \psi_p^+(y) + \psi_p^+(y) \psi_p(x)\} = \frac{1}{2} \{\psi(x) \psi^+(x) + \psi^+(x) \psi(x)\}.$$

Следовательно, после вычитания  $\rho_0$  получаем выражение для плотности заряда

$$\rho(x) = \frac{1}{2} e [\psi^+(x) \psi(x) - \psi(x) \psi^+(x)]. \quad (84)$$

В случае плотности тока можно показать, что соответствующая бесконечная константа обращается в нуль из-за соображений симметрии (все направления в пространстве эквивалентны), но тем не менее желательно провести «антисимметризацию» аналогично (84), вычитая из  $j_k$  величину

$$\frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} (\alpha_k)_{\rho\sigma} (\psi_\rho \psi_\sigma^* + \psi_\sigma^* \psi_\rho) = \frac{1}{2} \delta(0) \sum_p (\alpha_k)_{pp} \equiv 0$$

(вспомним, что  $\text{Tr } \alpha_k = 0$ ). Получаем

$$j_k(x) = \frac{1}{2} e [\psi^+(x) \alpha_k \psi(x) - \psi(x) \alpha_k \psi^+(x)], \quad (85)$$

где использован тот факт, что  $\alpha_k$  симметрична (см. приложение А).

Теперь видно, что теория стала совершенно симметричной для поля  $\psi$  и «антиполя»  $\psi' \equiv \psi^+$ . Можно так же исходить из уравнения (83), рассматривая его как уравнение для частиц с зарядом  $-e$ , и написать соответствующее выражение для плотности заряда  $-e\psi'^*\psi'$ , добавляя вместо вычитания бесконечную константу  $\rho_0$ . Результат будет эквивалентен уравнению (84). Можно показать, что такая же симметрия существует для гамильтониана, полного импульса и т. д. (что здесь не будет детально обсуждаться), так что становится очевидной полная симметрия теории по отношению к частицам (электронам) и античастицам (позитронам).

Теперь можно предположить, что существует оператор  $C$ , который преобразует некоторое состояние, содержащее  $m$  электронов и  $n$  позитронов, так, что каждый электрон (позитрон) заменяется на позитрон (электрон) без изменения своих координат, импульса или спина, и без изменения полной энергии, импульса и т. д. всей системы. Такой оператор должен существовать для других дираковских полей: протон-антипротонного поля,  $\mu$ -мезонного поля и т. д.

То, что это действительно имеет место, следует из того факта, что  $\psi$  и  $\psi'$  подчиняются одним и тем же правилам антикоммутации. Из этого следует существование линейного унитарного оператора  $C$  такого что (в представлении Майорана)

$$C^{-1} \psi(x) C = \psi'(x) \equiv \psi^+(x), \quad (86)$$

причем это уравнение справедливо для каждой компоненты  $\psi$  отдельно. Эрмитово сопряжение уравнения (86) дает нам

$$C^{-1}\psi^+(\mathbf{x})C = \psi(\mathbf{x}). \quad (87)$$

Теперь, путем обычных вычислений  $C^{-1}\psi\psi^+C = C^{-1}\psi^+CC^{-1}\psi C$  и т. д. сразу получаем, что  $C$  изменяет знак заряда (84) и плотности тока (85):

$$\left. \begin{aligned} C^{-1}\rho(\mathbf{x})C &= -\rho(\mathbf{x}), \\ C^{-1}j_k(\mathbf{x})C &= -j_k(\mathbf{x}). \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

При доказательстве последнего соотношения нужно использовать то, что матрица  $\alpha_k$  «симметрична». Из-за изменения знака заряда и тока должен измениться знак электромагнитного поля:

$$C^{-1}V(\mathbf{x})C = -V(\mathbf{x}); \quad C^{-1}A_k(\mathbf{x})C = -A_k(\mathbf{x}). \quad (89)$$

Далее можно показать, что полная энергия инвариантна

$$C^{-1}HC \equiv H, \quad (90)$$

так что  $C$  является константой движения!

### 4.3. Зарядовое сопряжение в других теориях

Изложенные выше идеи могут быть применены и к другим теориям. Например, для бесспиновых заряженных частиц, описываемых скалярным или псевдоскалярным комплексным полем  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ , получается, что  $C$  должно преобразовывать  $\varphi$  в  $\varphi^+ = \varphi_1 - i\varphi_2$ , т. е.

$$C^{-1}\varphi_1C = \varphi_1; \quad C^{-1}\varphi_2C = -\varphi_2; \quad (91)$$

можно показать, что это преобразование изменяет знак четырехмерного вектора тока, аналогично уравнению (88). Эти уравнения применяются, например, для поля заряженных  $\pi$ -мезонов.

Теперь очень важно понять, что оператор зарядового сопряжения может быть применен и к нейтральным частицам. Если  $C$  вообще существует, то можно спросить, например, что получится, если  $C$  применить к одонейтронному состоянию. В результате должна получиться частица с той же массой, импульсом, спином и т. д. Для согласия с уравнением (88) и (89) нужно, однако, допустить, что магнитный момент при этом меняет знак. Частица, следовательно, будет отлична от нейтрона; поле, описывающее этот «антинейтрон», будет связано с нейтронным полем формулой, в точности аналогичной (86).

С другой стороны, нейтральная бесспиновая частица, такая как  $\pi^0$ , не нуждается в античастице. В настоящее время нет соображений, противоречащих тому, что  $\pi^0$  зарядово-сопряжен сам с собой. Можно предположить, что соответствующее поле  $\varphi_0$  эрмитово и преобразуется по формуле

$$C\varphi_0C^{-1} = \varphi_0, \quad (92)$$

т. е. аналогично  $\varphi_1$ . Другая возможность заключается в том, что  $\varphi_0$  преобразуется как  $\varphi_2$ . Преобразование (92) выбрано потому, что гамильтониан зарядово-независимого взаимодействия из раздела 6.4 остается инвариантным при преобразовании (91) и (92).

4.4. Собственные состояния  $C$ 

Пользуясь теми же соображениями, что и для  $P$ , можно предположить, что

$$C^2 = 1. \quad (93)$$

Следовательно, если состояние  $|\alpha\rangle$  есть собственное состояние для  $C$ , то соответствующее собственное значение  $C$  должно быть  $\pm 1$ :

$$C|\alpha\rangle = \pm |\alpha\rangle. \quad (94)$$

Ясно, что система может находиться в таком состоянии только при условии, что она нейтральна. Более того, состояние, которое преобразуется под действием  $C$  само в себя, должно содержать равное число электронов и позитронов, протонов и антипротонов и т. д. Такие системы встречаются не часто. Интересными примерами являются позитроний и аналогичная система, состоящая из протона и антипротона, и наконец, системы, состоящие только из фотонов и  $\pi^0$ -мезонов, которые являются самосопряженными частицами. Когда такие системы, имеющие определенное значение  $\pm 1$  для  $C$ , совершают переходы,  $C$  не может изменяться (см. уравнение (90)). Правила отбора, возникающие из сохранения  $C$ , были исследованы различными авторами<sup>17, 17a, b</sup>.

Метод определения того, какое значение  $C$  принадлежит конкретному состоянию такой системы, например, состоянию  $|\zeta\rangle$  у позитрония, вырисовывается при изучении свойств симметрии волновой функции  $f_{\zeta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  (уравнение (34)). Состояние можно, конечно, классифицировать как  $1S, {}^3S, 1P, {}^3P, \dots$  и т. д. посредством орбитального квантового числа  $l=0, 1, 2, \dots$  и полного спина  $S=0, 1$ . Симметрия или антисимметрия  $f_{\zeta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  по отношению к перестановке спиновых и пространственных координат определяется фактором  $(-1)^{l+S+1}$ . Рассмотрим теперь состояние  $|\zeta'\rangle = C|\zeta\rangle$ ; соответствующая волновая функция с выписанными спиновыми индексами есть

$$f'_{\zeta}(\mathbf{x}_p; \mathbf{y}_e) = \langle \zeta | \psi_e^{\dagger}(\mathbf{y}) \psi_p(\mathbf{x}) C | \zeta \rangle,$$

где можно, как обычно, заменить  $\langle |$  на  $\langle | C^{-1}$  и вставить  $CC^{-1}$  между  $\psi^{\dagger}$  и  $\psi$ , так что \*)

$$\begin{aligned} f'_{\zeta}(\mathbf{x}_p; \mathbf{y}_e) &= \langle | \psi_e(\mathbf{y}) \psi_p^{\dagger}(\mathbf{x}) | \zeta \rangle = \partial_{p\sigma} \partial_e(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle | \zeta \rangle - \langle | \psi_e^{\dagger}(\mathbf{x}) \psi_e(\mathbf{y}) | \rangle = \\ &= -f_{\zeta}(\mathbf{y}_e, \mathbf{x}_p) = (-1)^{l+S} f_{\zeta}(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_e). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$C = (-1)^{l+S}. \quad (95)$$

Такой же результат можно получить, если рассматривать электрон и позитрон как два состояния одной и той же частицы, отличающиеся одно от другого добавочным индексом, принимающим два значения («зарядовая» переменная  $k=\pm 1$ ) аналогично спиновому индексу. Действительно, формально можно рассмотреть  $\psi$  и  $\psi^{\dagger}$  как две компоненты поля  $\psi_k$ , и обобщить определение (34) на волновую функцию системы, антисимметричную по отношению к одновременной перестановке пространственных, спиновых и зарядовых переменных двух частиц. Далее можно сказать, что волновая функция должна быть произведением или симметричной функции от пространственных и спиновых переменных на антисимметричную функцию от зарядовых переменных, или наоборот. Такие соображения нам уже встречались.  $C$  представляет значения зарядовых координат двух частиц и ясно,

\*) Член  $\langle \zeta \rangle$  в уравнении равен «нулю», так как позитроний и вакуум являются взаимно ортогональными состояниями.

что  $C = +1$  для «зарядово-симметричного» и  $C = -1$  для «зарядово-антисимметричного» состояния. Конечно, мы снова получили уравнение (95).

Аналогичным способом можно легко найти значение  $C$  для одно- и двухфотонных состояний. Однофотонное состояние можно, например, получить, действуя оператором электрического или магнитного поля на состояние вакуума, т. е.  $\mathcal{E}_k(\mathbf{x})| \rangle$ . В самом общем случае получится фотон в точке  $\mathbf{x}$  с поляризацией  $\mathbf{k}$ . Далее берется суперпозиция таких состояний с весом  $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ , где  $\alpha$  — индекс, означающий однофотонное состояние:

$$|\alpha\rangle = \sum_k \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d^3x \mathcal{E}_k(\mathbf{x})| \rangle. \quad (96)$$

Теперь благодаря (89) сразу получаем, что

$$C|\alpha\rangle = - \sum_k \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d^3x \mathcal{E}_k(\mathbf{x})| \rangle = -|\alpha\rangle.$$

В более общем случае для состояния с  $n$  фотонами потребуется  $n$  факторов поля перед состоянием вакуума. Каждый из них изменяет знак под действием  $C$ , так что

$$C = (-1)^n \quad (97)$$

для такого состояния. Из таких соображений, например, следует, что  $^1S$ -состояние позитрония имеет, согласно уравнению (95),  $C = +1$ , и может распадаться на два, но не на три фотона, тогда как  $^3S$ -состояние может распадаться на три, но не на два фотона\*). Выведено много правил отбора такого рода.

#### 4.5. Н а р у ш е н и я $C$ -и н в а р и а н т н о с т и

Как хорошо известно, опыты по  $\beta$ -распаду показывают, что не соблюдается не только  $P$ -, но также и  $C$ -инвариантность. Прямым указанием на это является, например, тот факт, что положительные и отрицательные электроны, испущенные соответственно при  $\mu^+$ - и  $\mu^-$ -распадах, имеют противоположную продольную поляризацию. Указания на несохранение  $C$ , вытекающие из  $\beta$ -распада, основываются на более легких и более точных экспериментах, но являются несколько менее прямыми. Зарядово-сопряженным объектом для обычного ядра, испытывающего  $\beta^-$ -распад, является антиядро, испытывающее  $\beta^+$ -распад, но его не легко получить.

Можно, конечно, воспользоваться разумным доводом, что если  $C$  строго сохраняется, то сохраняется также и  $TP$  (см. ниже  $CPT$ -теорему); это автоматически становится верным, если допустить, что  $\beta$ -распад правильно описывается линейной комбинацией десяти обычных инвариантных взаимодействий  $S_1 P_1 \dots S'_1 P'_1 \dots$ , для которых (42) и (43) являются двумя примерами. Так как преобразование  $TP$  не включает в себя замены нуклонов на антинуклоны, то инвариантность относительно него может быть проверена при  $\beta$ -распаде обычных ядер. Теорема Ли, Янга и Оме<sup>18</sup> показывает, что если пренебречь влиянием кулоновского поля на испускаемую электронную волну, то  $TP$ -сохранения достаточно для того, чтобы не дать заметить нарушения четности в экспериментах, подобных  $\beta$ -распаду поляризованных ядер или продольной поляризации  $\beta$ -лучей. Более прямые вычисления<sup>9</sup> показывают, что наблюдаемые эффекты слишком велики, чтобы их можно было отнести к кулоновским эффектам и что, таким образом, они ясно указывают на нарушение  $C$ -инвариантности.

\*) Распад  $^3S$ -состояния на два фотона запрещен также сохранением углового момента (см. Я н г или Л а н д а у<sup>7,9a</sup>).

## 5. CPT-ТЕОРЕМА. CP-ИНВАРИАНТНОСТЬ

Объединяя вместе операторы  $C$ ,  $T$  и  $P$ , мы получаем оператор, который изменяет одновременно знак всех четырех пространственно-временных координат и заменяет каждую частицу на ее античастицу. Такой оператор имеет особенную простоту, так как он коммутирует с любым однородным лоренцовским преобразованием.

Людерс<sup>19</sup>.<sup>19 а, б, с</sup> первый заметил, что если в рамках обычных схем релятивистских теорий поля можно легко написать взаимодействия, которые нарушают либо  $C$ -, либо  $P$ - или  $T$ -инвариантность, или такие двойные комбинации, как  $CP$ , то невозможно это сделать для произведения всех трех преобразований  $CPT$ . Теорема не утверждает, что совершенно невозможно релятивистски-инвариантная теория, нарушающая  $CPT$ -инвариантность, но это была бы теория совершенно отличная от любой из существующих сейчас схем<sup>20</sup>. Если принимается  $CPT$ -инвариантность, что в настоящее время кажется очень разумным допущением, то она становится очень полезным орудием для исследования таких процессов, как  $K$ -,  $\Lambda$ - или  $\Sigma$ -распад, о которых мало что известно, а priori<sup>18, 18а, б, 22</sup>. По всем вопросам, касающимся «странных» частиц, см.<sup>21, 21а</sup>. Немедленным следствием теоремы является то, что можно сделать много утверждений относительно частиц и античастиц, которые в действительности не зависят от строгого сохранения  $C$ -инвариантности. Например, применяя  $CPT$ -теорему к состоянию частицы с точно определенным четырехмерным импульсом  $p$ , мы получаем античастицу с тем же самым четырехмерным импульсом  $p$ . Следовательно, частицы и античастицы имеют одинаковую массу; правда, при этом с самого начала предполагается что «частица» имеет строго определенную массу. Другим аналогичным свойством, также подверженным некоторым ограничениям, является то, что нестабильная частица должна иметь такое же время распада, как и ее античастица<sup>18, 21</sup>.

Следствием  $CPT$ -теоремы является и то, что инвариантность относительно какого-либо из трех операторов означает инвариантность по отношению к произведению двух других. Это уже упоминалось при обсуждении несохранения  $C$ . В качестве другого примера укажем, что  $T$ -инвариантность имеет своим следствием  $CP$ -инвариантность, что было детально рассмотрено Фейнбергом<sup>23</sup>.

## 6. ИЗОТОПИЧЕСКИЙ СПИН

## 6.1. Зарядовая симметрия и зарядовая независимость

Уже поверхностное изучение систематики изотопов указывает на существование фундаментальной симметрии между нейтронами и протонами, которая сильно проявляется в начале периодической системы и становится менее существенной при увеличении атомного числа. С количественной точки зрения особенно важно изучение легких «зеркальных ядер», таких как  $H^3$  и  $He^3$ ,  $Li^7$  и  $Be^7$  и т. д. Оказывается, что разница между энергиями связи основных состояний двух зеркальных ядер целиком обязана наличию в гамильтониане «члена, представляющего кулоновскую энергию», которым нейтроны отличаются от протонов. Наиболее естественным объяснением этих фактов является предположение, что короткодействующее взаимодействие между двумя нуклонами, которое остается, если опустить кулоновские силы и другие меньшие электромагнитные эффекты, целиком инвариантно относительно перестановки нейтронов и протонов. Это означает не только то, что  $n$ - $n$ -силы равны  $p$ - $p$ -силам, но также и то,

что  $n$ — $p$ -силы симметричны по отношению к одновременной перестановке координат, спинов и скоростей двух частиц. Наиболее чувствительной проверкой такой гипотезы «зарядовой симметрии» является, пожалуй, не сравнение уровней зеркальных ядер, а эксперименты по обнаружению реакций, которые нарушают правила отбора, вытекающие из этой гипотезы<sup>24, 24a</sup>.

Наиболее далеко идущая гипотеза такой симметрии известна как «зарядовая независимость». Свое происхождение она берет в измерении ядерного фазового сдвига для  $^1S$ -состояния при  $p$ — $p$ -рассеянии при энергиях от 0,1  $Mэв$  до нескольких  $Mэв$ . Замечательно, что этот фазовый сдвиг после учета незначительных эффектов, обязанных кулоновскому взаимодействию, оказывается в точности равным  $^1S$ -фазовому сдвигу при  $n$ — $p$ -рассеянии.

Когда этот факт стал известен, было предположено существование более общего закона<sup>25, 25a, b</sup>), который наиболее просто, но несколько неопределенно можно сформулировать, сказав, что короткодействующее взаимодействие между двумя кулонами должно «не зависеть от их заряда». Чтобы полностью оценить значение этого утверждения, нужно вспомнить, что для того, чтобы представить все известные экспериментальные факты, требуется рассмотреть потенциалы взаимодействия весьма широкого класса, включающие зависимость не только от расстояния  $r_{12}$  между двумя нуклонами, но также зависимость от их спиновых матриц  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , от обменных операторов (например, обмен пространственными или спиновыми координатами, или обеими сразу), и от членов, зависящих от скорости ( $1$ - $s$ -члены, например). Теперь гипотезу зарядовой независимости можно сформулировать более точно, сказав, что если гамильтониан определенного выше типа найден для двух частиц  $1$  и  $2$  так, что он правильно дает  $n$ — $p$ -силы во всех возможных состояниях ( $^1S, ^1P, ^1D, \dots, ^3S, ^3P, ^3D, \dots$ ), то этот же гамильтониан должен правильно давать  $p$ — $p$ - и  $n$ — $n$ -силы в состояниях  $^1S, ^3P, ^1D, \dots$ , которые разрешены принципом запрета<sup>\*</sup>).

Довольно очевидно, что зарядовая независимость означает равенство уровней изобар (а не просто зеркальных ядер!). Грубо говоря, можно сказать, что если ядро  $A_Z$  (с  $Z$  протонами и  $A-Z$  нейтронами) имеет состояние с определенной энергией, и если конфигурация этого состояния (более точно, симметрия волновой функции) такова, что можно заменить один из нейтронов на протон, не нарушая при этом принцип запрета Паули, то должно получиться состояние с той же энергией для изобарного ядра  $A_{(Z+1)}$ . Если эта операция может быть повторена, то получится уровень ядра  $A_{(Z+2)}$  и так далее. Таким образом, изобарные ядра связываются в мультиплеты. Например, основные состояния  $C^{14}$  и  $O^{14}$  и возбужденный уровень  $N^{14}$  с энергией 2,3  $Mэв$  образуют «изотопический триплет».

Теперь эти соображения нужно сформулировать более точно. Пусть частицы  $1$  и  $2$  суть соответственно протон и нейтрон, а  $V(1,2)$ —их взаимодействие. Рассмотрим ортонормированный набор

$$u_1, u_2, u_3, \dots \quad (98)$$

состояний одной частицы и произведения состояний  $f=(nm)$ ,  $i=(rs)$  для  $n$ — $p$ -системы. Гамильтониан взаимодействия имеет матричные элементы

$$\langle f | H | i \rangle = V_{nm, rs} = \int u_n^*(1) u_m^*(2) V(1, 2) u_r(1) u_s(2), \quad (99)$$

где знак интеграла означает интегрирование по пространственным и

<sup>\*</sup>) Это, в частности, означает, что гамильтониан симметричен относительно двух частиц, что требуется более слабым допущением зарядовой симметрии.

суммирование по спиновым переменным частиц 1 и 2. Так как  $V(1,2)$  симметрично по 1 и 2, то имеем

$$V_{nm, sr} = V_{nm, rs}. \quad (100)$$

Пусть теперь 1 и 2 суть два протона (или два нейтрона). Зарядово-независимое взаимодействие может быть представлено той же функцией  $V(1,2)$ . Волновая функция для состояния  $i = (rs)$  теперь может быть записана \*) как

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \{u_r(1) u_s(2) - u_s(1) u_r(2)\} \quad (101)$$

и аналогично для  $f = (nm)$ . Тогда

$$\langle f | H | i \rangle = V_{nm, rs} - V_{nm, sr}, \quad (102)$$

где результат упрощен при помощи уравнения (100).

Опишем протоны и нейтроны двумя полями  $\psi_p(x)$  и  $\psi_n(x)$  соответственно. Каждое из этих полей должно подчиняться обычным правилам антикоммутации (см. уравнение (30)); более того, можно предположить, что они антикоммутируют друг с другом:

$$\left. \begin{aligned} \psi_p(x) \psi_n(y) + \psi_n(y) \psi_p(x) &= 0, \\ \psi_p(x) \psi_n^\dagger(y) + \psi_n^\dagger(y) \psi_p(x) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

и т. д. Часть поля  $\psi_p$  (или соответственно  $\psi_n$ ) с положительной энергией может быть разложена по состояниям набора (98); коэффициентами разложения будут операторы  $a_r(b_r)$  уничтожения протонов (нейтронов). Пока не будем рассматривать часть поля с отрицательной энергией, которая содержит операторы рождения антинуклонов. Теперь гамильтониан, имеющий матричные элементы (99) для  $n$ - $p$ -системы, может быть записан в виде

$$H_{np} = \sum V_{nm, rs} a_n^\dagger a_r b_m^\dagger b_s = - \sum V_{nm, rs} a_n^\dagger b_m^\dagger a_r b_s, \quad (104)$$

где суммирование производится по всем значениям индексов  $n, m, r, s$ .

Заметим, что (104) является четырехлинейной формой от двух полей  $\psi_p, \psi_n$  и их эрмитовых сопряжений, что символически можно записать как

$$H_{np} = \{\psi_p^\dagger \psi_n^\dagger \psi_p \psi_n\}.$$

Вспоминая уравнение (100) и тождество  $a_n^\dagger b_m^\dagger a_r b_s = b_m^\dagger a_n^\dagger b_s a_r$ , замечаем, что четырехлинейная форма симметрична по отношению к одновременной перестановке первых и последних двух полей:

$$\{\psi_p^\dagger \psi_n^\dagger \psi_p \psi_n\} = \{\psi_n^\dagger \psi_p^\dagger \psi_n \psi_p\} = - \sum V_{nm, rs} b_n^\dagger a_m^\dagger b_r a_s. \quad (105)$$

Хорошо известно<sup>29</sup>, что взаимодействие тождественных частиц с матричным элементом (100) может быть записано в виде \*\*)

$$H_{pp} = - \frac{1}{2} \sum V_{nm, rs} a_n^\dagger a_m^\dagger a_r a_s = \frac{1}{2} \{\psi_p^\dagger \psi_p^\dagger \psi_p \psi_p\} \quad (106)$$

\*) Необходимо условиться о знаках; например, уравнение (101) справедливо при  $r < s$ , а уравнение (102) при  $n < m, r < s$ .

\*\*) Например, если  $n < m, r < s$ , то легко проверить, что

$$\langle f | a_n^\dagger a_m^\dagger a_r a_s | i \rangle = - \langle f | a_n^\dagger a_m^\dagger a_s a_r | i \rangle = -1$$

и т. д.



и аналогично  $H_{nn}$ . Теперь, собирая вместе взаимодействия  $H_{np}$ ,  $H_{pp}$  и  $H_{nn}$ , мы видим, что гамильтониан имеет вид четырехлинейной формы:

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \{\psi_i^\dagger \psi_i^\dagger \psi_i \psi_i\}, \quad (107)$$

где  $i$  и  $j$  — индексы, принимающие два значения ( $i, j = p$  или  $n$ ).

## 6.2. Изотопический спин

Написанное выше выражение в явном виде обнаруживает замечательное свойство инвариантности. По аналогии с тем, что выражения  $\sum_i a_i^* b_i$  и  $\sum_{i,j} a_i^* b_j^* c_i d_j$  инвариантны относительно одновременного линейного унитарного преобразования векторов  $a, b, c, d$ , мы видим, что если в уравнении (107)  $\psi_i$  ( $i = p$  или  $n$ ) рассматривать как вектор с двумя компонентами, то  $H$  является инвариантом относительно линейного унитарного преобразования  $u$  этих двух компонент. Легко видеть, что такое преобразование не изменяет правила антикоммутирования (30) и (103) и, следовательно, производится линейным оператором  $U$ , по обычной  $U^{-1}\psi U$  схеме. Унитарная матрица размерами  $2 \times 2$  в наиболее общем случае может быть записана в виде

$$u = e^{i\delta} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Фактор  $e^{i\delta}$ , стоящий впереди, отражает тот факт, что (107) содержит одинаковое число  $\psi$ -полей и  $\psi^\dagger$ -полей, и, следовательно, не изменяется, если все  $\psi$  умножить на одинаковое  $e^{i\delta}$ . Эта инвариантность может рассматриваться как формальное выражение принципа «сохранения нуклонов», не проливающее, впрочем, сколько-нибудь света на сам принцип. Далее мы будем считать  $\delta = 0$ . Преобразование (108) имеет теперь единичный детерминант. В заключение отметим, что для любых двух комплексных констант  $\alpha$  и  $\beta$ , таких, что

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (109)$$

существует унитарный оператор  $U$ , действующий на одно из двух связанных полей  $\psi_p$  и  $\psi_n$  так, что

$$\left. \begin{aligned} U^{-1}\psi_p U &= \alpha\psi_p + \beta\psi_n, \\ U^{-1}\psi_n U &= -\beta^*\psi_p + \alpha^*\psi_n. \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Это преобразование оставляет инвариантным не только уравнение (107), но так же и «свободную» часть гамильтониана для двух полей при условии, что можно пренебречь малой разницей масс нейтрона и протона. Таким образом,  $U$  коммутирует со всем гамильтонианом. Наоборот, легко можно видеть, что если четырехлинейные формы, описывающие  $H_{np}$ ,  $H_{pp}$  и  $H_{nn}$ , таковы, что их сумма инвариантна относительно (110), то они удовлетворяют зарядовой независимости. Следовательно, принцип зарядовой независимости эквивалентен инвариантности относительно двухмерной унитарной группы (110).

Из теории спина электрона хорошо известно, что двухмерная унитарная матрица с единичным модулем образует группу, которая определенным образом связана с трехмерными действительными вращениями. Эту связь можно наиболее просто показать при помощи трех компонент «плотности изотопического спина»  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Если

$\tau_1, \tau_2, \tau_3$  — три матрицы, аналогичные матрицам Паули  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  и действующие на двухкомпонентный вектор  $(\psi_p, \psi_n)$ , то

$$Q_i = \frac{1}{2} \psi^\dagger \tau_i \psi,$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2} (\psi_p^\dagger \psi_n + \psi_n^\dagger \psi_p), \\ Q_2 &= \frac{i}{2} (\psi_p^\dagger \psi_n - \psi_n^\dagger \psi_p), \\ Q_3 &= \frac{1}{2} (\psi_p^\dagger \psi_p - \psi_n^\dagger \psi_n). \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Теперь видно, что (110) производит ортогональное преобразование (вращение)

$$U^{-1} Q_i U = \sum_{j=1}^3 a_{ij} Q_j \quad (112)$$

трехмерного вектора  $(Q_1, Q_2, Q_3)$ . Коэффициенты  $a_{ij}$  действительны и легко могут быть вычислены.

Рассмотрим, с другой стороны, бесконечно малые преобразования

$$U_k = 1 - i\theta T_k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (113)$$

группы (110), определяемые следующим образом. Если  $U$  из уравнения (110) обозначить через  $U(\alpha, \beta)$ , а  $\theta$  — бесконечный малый параметр, то

$$U_1 = U\left(1, -\frac{i}{2}\theta\right); \quad U_2 = U\left(1, -\frac{1}{2}\theta\right); \quad U_3 = U\left(1 - \frac{i}{2}\theta, 0\right). \quad (114)$$

Далее, пренебрегая членами порядка  $\theta^2$ , из (113) получаем, что

$$U_k^{-1} \psi U_k = \psi + i\theta [T_k, \psi], \quad (115)$$

а после легких вычислений —

$$[\psi, T_k] = \tau_k \psi. \quad (116)$$

Уравнения (116) должны быть справедливы для  $\psi = \psi(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}$  — любая точка пространства. При помощи (30) и (103) можно проверить, что  $T_k$ , определяемое как

$$T_k = \int Q_k(\mathbf{x}) d^3x, \quad (117)$$

удовлетворяет уравнению (116). Далее легко видеть, что

$$[T_j, T_k] = iT_l, \quad (118)$$

где  $j, k, l$  — циклическая перестановка 1, 2, 3.

Мы получили те же правила коммутации, что и для компонент углового момента; это снова устанавливает связь с обычной группой вращения.

Теперь можно написать все существенные формулы, относящиеся к группе изотопического спина. Например, из  $U^{-1} H U = H$  следует

$$[T_k, H] = 0, \quad (119)$$

т. е. три эрмитовых оператора  $T_k$  являются постоянными движениями так же, как и «квадрат вектора полного изотопического спина»:

$$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = T(T+1). \quad (120)$$

По аналогии с доказательством для случая углового момента получаем, что возможными значениями квантового числа  $T$  могут быть только целые или полуцелые числа. Для данного значения  $T$  возможны  $(2T+1)$  собственных значений  $T_z$ :

$$T_z = T, T-1, \dots, -T. \quad (121)$$

### 6.3. Применения и справедливость зарядовой независимости

Уравнения (119), (120) и (121) представляют собой исходную точку для рассмотрения мультиплетной структуры ядерных уровней. В легких ядрах, где кулоновские взаимодействия мало искажают волновую функцию ядра, можно в общем случае однозначно определить значение  $T$  для каждого уровня. При столкновениях ядер  $T$ -векторы соударяющихся частиц должны складываться согласно обычным правилам, и сохранение полного  $T$ -вектора приводит к соответствующим правилам отбора.

Справедливость зарядовой независимости можно проверить, сравнивая энергии состояний, принадлежащих одинаковым  $T$ -мультиплетам, или наблюдая нарушения правил отбора. Самые последние работы по этому вопросу изложены в статьях Вилкинсона и др.<sup>26</sup> См. также конец следующего раздела.

### 6.4. Изотопический спин для антинуклонов и $\pi$ -мезонов

Если ядерные силы вызываются обменом мезонами, то симметрия, которая проявляет себя в зарядовой независимости нуклон-нуклонного взаимодействия, должна вести свое происхождение из симметрии взаимодействия между нуклонным и мезонным полями. То же самое можно сказать так: трудно понять, почему такая величина, как  $T_1$ , сохраняется в нуклон-нуклонных соударениях, если считать, что процессы испускания и поглощения виртуальных мезонов, которые образуют невидимый фундамент соударения, не подчиняются соответствующему закону сохранения.

Аналогичным образом можно показать, что так как образование нуклон-антинуклонных пар, вероятно, имеет место в ядерных силах на коротких расстояниях, то симметрия, выраженная группой (110), должна быть справедливой для антинуклонов. Действительно, хотя антинуклоны лишь едва упоминались в предшествующем рассмотрении, такое предположение подразумевается при написании уравнения (110), так как минимальная математическая последовательность заставляет нас считать, что уравнения справедливы для всего оператора  $\psi$ , т. е. для части, создающей антинуклоны, и для части, уничтожающей нуклоны! Таким образом, написанные выше формулы автоматически включают в себя определение изотопического спина для антинуклонов.

Для того чтобы более ясно показать это, введем наряду с  $a_r$  и  $b_r$  соответствующие операторы  $\bar{a}_r$  и  $\bar{b}_r$ , которые уничтожают антипротоны и антинейтроны (черта не означает комплексного сопряжения!). Используя представление Майорана (см. приложение А), можно разложить  $\psi_p$  и  $\psi_n$  аналогично уравнению (А. 10). Посредством соотношений ортогональности (А. 8) и (А. 9) далее получаем:

$$\int \psi_p^\dagger(x) \psi_p(x) d^3x = \sum_r (a_r^\dagger a_r + \bar{a}_r \bar{a}_r^\dagger) = \sum_r (a_r^\dagger a_r - \bar{a}_r^\dagger \bar{a}_r + 1),$$

что с точностью до бесконечной аддитивной константы равно полному заряду

$$Q = N(p) - N(\bar{p}), \quad (122)$$

где  $N(p)$  и  $N(\bar{p})$  — полное число протонов и антипротонов соответственно. Обозначим через  $N$  «нуклонное число», т. е. число нуклонов минус число антинуклонов:

$$N = N(p) + N(n) - N(\bar{p}) - N(\bar{n}). \quad (123)$$

При вычислении  $T_3$  происходит уничтожение бесконечной константы и получается

$$T_3 = \frac{1}{2} \{N(p) - N(n) - N(\bar{p}) + N(\bar{n})\} = Q - \frac{1}{2} N. \quad (124)$$

Например, для обычных ядер  $T_3 = Z - \frac{1}{2} A$ , что показывает, что  $T_3$  — елое (получелое) для ядер с четным (нечетным)  $A$ .

Уравнения также показывают, что антипротон и антинейтрон имеют противоположные значения  $T_3$ , чем для протона и нейтрона. Рассмотрим более тщательно два однонуклонных состояния  $|\bar{p}\rangle$  и  $|n\rangle$  или два одноантинуклонных состояния  $|\bar{p}\rangle$  и  $|\bar{n}\rangle$ , причем две частицы пусть

Таблица I

$T_3$	Нуклонное состояние	Соответствующее антинуклонное состояние
$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$ p\rangle$ $ n\rangle$	$ \bar{n}\rangle$ $- \bar{p}\rangle$

находятся в любом случае в одинаковом состоянии по орбитальному моменту и обычному спину (т. е. предполагается, что они имеют такую волновую функцию, какая определена в приложении В). Эти два состояния образуют изотопический спиновый дублет в том смысле, что они линейно преобразу-

ются друг от друга посредством  $U$ . Более того, закон преобразования будет одинаковым для двух дублетов, если только выбирать соответствующие состояния согласно табл. I.

Это видно, если заметить, что  $|\bar{p}\rangle$  и  $|\bar{n}\rangle$  относятся к операторам  $\phi_p^+$  и  $\phi_n^+$  так же, как  $|p\rangle$  и  $|n\rangle$  к операторам  $\phi_p$  и  $\phi_n$  и, кроме того,

$$\left. \begin{aligned} U^{-1} \phi_n^+ U &= \alpha \phi_n^+ + \beta (-\phi_p^+), \\ U^{-1} (-\phi_p^+) U &= -\beta^* \phi_n^+ + \alpha^* (-\phi_p^+), \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

так что  $\phi_n^+$  и  $-\phi_p^+$  преобразуются как  $\phi_p$  и  $\phi_n$ .

Это же можно сделать другим способом. Если посредством уравнения (116) вычислить матричные элементы бесконечно малых операторов  $T_1 T_2 T_3$  для двух нуклонных состояний, то получаются матрицы  $\frac{1}{2} \tau_k$ . Те же матрицы получаются для двух антинуклонных состояний, выбранных согласно табл. I. При этих вычислениях используется то, что состояние вакуума инвариантно относительно преобразования или, другими словами,

$$|T_k\rangle = 0. \quad (126)$$

Теперь, возвращаясь назад к взаимодействию между нуклонным и  $\pi$ -мезонным полями, рассмотрим более тщательно уравнение мезонного поля (38). Структура билинейной формы  $j(x)$  по отношению

к спинорным индексам Дирака для нуклонных полей  $\psi^+$  и  $\psi$  уже известна, нужно принять во внимание двухкомпонентный характер  $\psi$  ( $\psi_p, \psi_n$ ). Подставляя матрицу  $\rho_2 = i\beta\gamma_5$  в уравнение (111), мы получаем три аналогичные величины,

$$j_\alpha(x) = g\psi^\dagger \rho_2 \tau_\alpha \psi \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (127)$$

которые под действием  $U$  преобразуются (уравнение (112)) как  $Q_1 Q_2 Q_3$ .

Кроме того, существует четвертая билинейная форма  $j_0 = \psi^\dagger \rho_2 \psi$  или, в явном виде,

$$j_0 = \psi_p^\dagger \rho_2 \psi_p + \psi_n^\dagger \rho_2 \psi_n, \quad (128)$$

инвариантная относительно  $U$ . Не существует других независимых псевдоскалярных билинейных форм. Имеются, следовательно, две возможности: либо рассматривать «изотопически синглетный» мезон, описываемый единственным полем  $\varphi_0$ , инвариантным относительно  $U$  и имеющим  $j_0$  в качестве функции источника, либо рассматривать «изотопический триплет», описываемый тремя полями  $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$  и писать уравнения поля

$$(\square - \mu^2) \varphi_\alpha = j_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (129)$$

Инвариантность этой схемы относительно группы преобразований  $U$  будет обеспечена, если: а) для  $\alpha = 1, 2, 3$  будут одинаковые массы  $\mu$ , б) поля  $\varphi_\alpha$  будут преобразовываться согласно соотношению

$$U^{-1} \varphi_\alpha U = \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta} \varphi_\beta. \quad (130)$$

Например, рассматривая бесконечно малые преобразования, легко получаем

$$[\varphi_\alpha, T_k] = \sum_{\beta=1}^3 (t_k)_{\alpha\beta} \varphi_\beta, \quad (131)$$

где матрицы  $t_k$  имеют элементы  $(t_1)_{23} = -(t_1)_{32} = -i$  и т. д. (с циклической перестановкой), а все остальные элементы равны нулю. Эти матрицы дают хорошо известное представление спиновых матриц частицы со спином единица.

До сих пор экспериментально не обнаружено существование изотопически синглетного мезона, тогда как три мезона  $\pi^\pm$  и  $\pi^0$  (за исключением небольшой разницы в их массах) хорошо согласуются со схемой уравнений (130) и (131).

Совершенно аналогично уравнению (124) можно показать, что  $\varphi_3$  создает и уничтожает частицы с  $T_3 = 0$ , тогда как комплексное поле  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$  создает частицы с  $T_3 = -1$  и уничтожает частицы, имеющие  $T_3 = +1$ . Гамильтониан взаимодействия, который дает поле уравнения (124), может быть записан в ином виде

$$H = \sum_{\alpha=1}^3 j_\alpha \varphi_\alpha = g \{ \sqrt{2} \psi_p^\dagger \rho_2 \psi_n \varphi + \sqrt{2} \psi_n^\dagger \rho_2 \psi_p \varphi^* + (\psi_p^\dagger \psi_p - \psi_n^\dagger \psi_n) \varphi_3 \}. \quad (132)$$

Здесь можно сразу проверить, что  $T_3$  сохраняется; например, первый член заставляет нуклон совершить переход из  $T_3 = -\frac{1}{2}$  в  $T_3 = +\frac{1}{2}$  состояние, если мезон с  $T_3 = +1$  ( $-1$ ) уничтожается (создается).

Инвариантность относительно группы изотопического спина имеет много важных следствий. Гайтлер, например, первый показал, что в мезон-нуклонном рассеянии начальное и конечное состояния могут быть классифицированы по собственным состояниям  $T^2$  и  $T_3$ . Анализ рассеяния при этом значительно упрощается из-за того, что три компоненты  $T$  сохраняются (см. 2.7). В экспериментах, которыми мы располагаем, не обнаружено каких-либо серьезных расхождений между  $\pi$ -мезонными явлениями и зарядовой независимостью.

### 6.5. Изотопическая четность ( $G$ )

Изотопический спин и зарядовое сопряжение не коммутируют; например, зарядовое сопряжение для протона  $T_3 = \frac{1}{2}$  дает антипротон  $T_3 = -\frac{1}{2}$ ; следовательно, представляет интерес совместное рассмотрение этих двух преобразований. Различными авторами<sup>28, 28a, 6</sup> выведены правила отбора для протон-антипротонной аннигиляции и других процессов, вытекающих из одновременной справедливости двух допущений.

В качестве примера такого рассмотрения заменим  $C$  на оператор  $G$ , который получается при последовательном применении  $C$  и вращении изотопического спина. Рассмотрим уравнение (110) с параметрами  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ . Соответствующее преобразование  $Q$ -величин в уравнении (111) или, что то же самое, мезонных полей  $\varphi_\alpha$  дает нам  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \rightarrow (-\varphi_1, \varphi_2, -\varphi_3)$ . Это есть, следовательно, вращение на  $180^\circ$  вокруг «второй» оси:  $U = e^{i\pi T_2}$ . Написав

$$G = C e^{i\pi T_2}, \quad (133)$$

мы из уравнений (86), (91) и (92) получим:

$$G\psi_p G^{-1} = \psi_n^+; \quad G\psi_n G^{-1} = -\psi_p^+; \quad G\varphi_\alpha G^{-1} = -\varphi_\alpha. \quad (134)$$

Первые два уравнения дают перестановку  $p \rightarrow \bar{n}$ ,  $n \rightarrow -\bar{p}$ , что нужно сравнить с нуклон-антинуклонным дублетом (уравнение (125)). Третье уравнение показывает, что в трехмерном пространстве компонент мезонного поля  $G$  действует аналогично тому, как  $P$  действует в обычном пространстве (отсюда название «изотопическая четность»). Три уравнения показывают, что  $G$  коммутирует со всеми тремя компонентами изотопического спина, что является основным преимуществом  $G$  по сравнению с  $C$ .

### 7. БАРИОННЫЕ И ЛЕПТОННЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. СТРАННОСТЬ

Ради полноты мы кратко рассмотрим здесь другие законы сохранения, которые наблюдаются на опыте и, возможно, являются проявлением более глубоких, но еще мало понятных симметрий<sup>21, 21a</sup>.

Наиболее фундаментальным из этих законов является, по-видимому, закон сохранения числа барионов. Он является обобщением закона сохранения числа нуклонов, который давно считается одним из наиболее удивительных проявлений стабильности обычной материи. Сохраняющаяся величина есть число нуклонов минус число антинуклонов, или, в более общем случае, барионы минус антибарионы. Все наблюдаемые до сих пор элементарные частицы, более тяжелые, чем нуклоны (все гипероны), являются барионами, т. е. должны считаться ими при применении этого закона сохранения. Антинуклоны наблюдались непосредственно на опыте, более тяжелые антибарионы не наблюдались. Однако существование

последних, по-видимому, не вызывает никаких сомнений. Можно рассматривать «барионное число» как своего рода «заряд» (аналогичный электрическому заряду), свойственный каждой частице. Барионы имеют заряд  $+1$ , антибарионы — заряд  $-1$ , все частицы более легкие, чем нуклоны, имеют нулевой заряд. Насколько известно, все барионы являются «фермионами», т. е. частицами с полуцелым спином.

Кроме нуклонов, существуют тяжелые бозоны, т. е.  $K$ -мезоны, спин которых почти безусловно равен нулю, и  $\pi$ -мезоны со спином нуль. Не наблюдается закона сохранения для числа этих бозонов; они могут свободно создаваться и уничтожаться.

Лептонами по определению являются  $\mu$ -мезоны, электроны и нейтрино; спин у всех этих частиц равен  $\frac{1}{2}$ . Закон сохранения лептонов выдвигался и раньше, а теперь он имеет хорошую экспериментальную поддержку. Снова можно положить, что «лептонный заряд» равен  $+1$  для  $e^-$ ,  $\mu^-$  и  $\nu$  (по определению  $\nu$  есть та частица, которая испускается при  $\beta^+$ -распаде) и  $-1$  для  $e^+$ ,  $\mu^+$  и  $\bar{\nu}$  ( $\bar{\nu}$  испускается при  $\beta^-$ -распаде). Такое определение основывается на детальном обсуждении<sup>21a</sup> следствий предположения, что во всех процессах, связанных с рождением или уничтожением лептонов ( $\beta$ -распад,  $\pi$ - $\mu$ -распад и т. д.), полный лептонный заряд сохраняется. Насколько известно, сохранение числа барионов и лептонов является точным законом природы.

Третий закон сохранения, который подобно четности не является строгим и нарушается в «слабых» взаимодействиях, проистекает из систематики Гелл-Мана и Нисидзими для «странных» частиц, которая представляет собой удачную попытку понять правило совместного рождения Пайса и другие правила отбора, имеющие место при рождении и распаде «странных» частиц, в терминах обобщенного принципа изотопической инвариантности. Основным допущением является то, что понятия квантовых чисел изотопического спина  $T$  и  $T_3$ , изотопических мультиплетов и т. д. применимы ко всем сильно взаимодействующим частицам (т. е., насколько известно, ко всем частицам, за исключением фотонов и лептонов), и то, что  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  являются в общем случае константами движения постольку, поскольку можно пренебречь электромагнитными и «слабыми» взаимодействиями. Легко проверить, что в уже рассмотренном случае нуклонов и  $\pi$ -мезонов  $T_3$  строго сохраняется при электромагнитных взаимодействиях \*). Действительно, в этом случае имеем

$$T_3 = Q - \frac{1}{2} N, \quad (135)$$

где  $N$  — число нуклонов, а  $Q$  — полный электрический заряд (деленный на  $e$ ), так что сохранение  $T_3$  следует из «точных» законов сохранения для  $Q$  и  $N$ .

Основной идеей теперь является то, что можно собрать «странные» частицы в изотопические мультиплеты и приписать им изотопические спины так, чтобы «сильные» процессы рождения, например,

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0, \quad \Sigma^0 + K^0, \quad \Sigma^- + K^+, \quad (136)$$

были «разрешены», тогда как «слабые» процессы распада, например

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \text{ или } K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (137)$$

и т. д., были «запрещены». Это получается, если приписать целый изотопический спин гиперонам  $\Lambda^0$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^\pm$  (которые имеют полуцелый

\*) Это относит  $T_3$  к совершенно другой категории, чем  $T_1$  и  $T_2$ , так как электромагнитные взаимодействия на много порядков сильнее «слабых» взаимодействий.

обычный спин) и полупелый изотопический спин  $K$ -мезонам (которые имеют целый спин). Читатель может легко проверить, что в (137)  $T$  или  $T_3$  обязательно является целым числом с левой стороны и полупелым с правой стороны уравнения, или наоборот. Действительно, более точное рассмотрение<sup>21</sup> дает для этих распадов

$$\Delta T_3 = \pm \frac{1}{2}. \quad (138)$$

Это, конечно, не является «объяснением», но вносит значительный порядок в изучение вопроса и приводит к удивительно правильным предсказаниям.

Гелл-Манн предположил, что в мультиплетах  $Q$  линейно изменяется с  $T_3$ , аналогично уравнению (135), но вышеупомянутое рассмотрение не позволяет обобщить уравнения (135), сказав, что  $N$  есть число барионов. В данном случае  $T_3$  связано с двумя точно сохраняющимися величинами, а вообще успех схемы Гелл-Манна и Нисидзими заключается в идее, что  $T_3$  лишь «почти точно» сохраняется и определяет различие между процессами, сохраняющими  $T_3$  (разрешенными и изменяющими  $T_3$  (очень слабыми)).

Для обобщения уравнения (135) нужно заметить, что для  $(n, p)$ - и  $(\bar{p}, \bar{n})$ -дублетов и  $(\pi^\pm, \pi^0)$ -триплетов, для которых справедливо (135), член  $\frac{1}{2}N$  выражает изменяющийся сдвиг  $Q$  ( $N = +1, -1$ , и  $0$  для трех вышеупомянутых мультиплетов) относительно  $T_3$ . В общем случае напомним (заимствуя обозначение у Швингера) для мультиплетов соотношение

$$T_3 = Q - \frac{1}{2}Y, \quad (139)$$

где  $Y$  — сдвиг, характерный для мультиплета. В системе частиц сумма отдельных значений  $Y$  дает полный «гиперзаряд»  $Y$ , который аналогично  $T_3$  является приблизительно константой движения. Как уже сказано,  $Y$  отличается от  $N$ . В обозначениях Гелл-Манна

$$Y = N + S, \quad (140)$$

где  $S$  — новое квантовое число или «странность». Например, синглет  $\Lambda$  и триплет  $\Sigma$ -гиперона имеют  $Y = 0$  и, следовательно,  $S = -1$ ; дублет  $(K^+, K^0)$  имеет  $Y = 1$ ,  $N = 0$  и, следовательно,  $S = +1$ .  $S$  определена так, что «обычные» частицы (под ними подразумеваются  $\pi$ -мезоны и нуклоны) имеют нулевую «странность». Для лептонов не найдено полезного применения изотопического спина, и понятие «странности» к ним не применяется.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ А

##### ОБОЗНАЧЕНИЯ; УРАВНЕНИЕ ДИРАКА; ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАЙОРАНА

Ниже объясняются использованные выше обозначения. Крест (+) везде используется для обозначения эрмитова сопряжения (матрицы или оператора), тогда как звездочка (\*) обозначает простое комплексное сопряжение (т. е. в случае матрицы\* обозначает комплексное сопряжение без транспонирования рядов и столбцов).

Четыре компоненты  $\psi_r$  ( $r = 1, \dots, 4$ ) спинора Дирака умножаются на четырехрядные матрицы Дирака символическим образом (как обычно); например,  $\beta\psi$  означает спинор с компонентами  $(\beta\psi)_r = \sum_s \beta_{rs}\psi_s$ . Часто используется суммирование по двум одинаковым индексам; например, опуская знак суммы можно написать просто  $\beta_{rs}\psi_s$ . Удобно использовать



умножение  $\psi$  (или  $\psi^*$ ) на матрицу, стоящую с правой стороны. При этом подразумевается суммирование по смежным индексам, так,  $\psi^*\beta$  означает  $(\psi^*\beta)_p = \psi^*_s \beta_{sp}$ . Если матрица эрмитова ( $\beta = \beta^*$ ), то умножение на  $\beta$  справа эквивалентно умножению на  $\beta^*$  слева:  $\beta\psi^* = \psi^*\beta$ .

Коммутаторы обозначаются:  $[A, B] = AB - BA$ , а антикоммутаторы:  $\{A, B\} = AB + BA$ . Все правила коммутации и антикоммутации в этом обзоре написаны для операторов, действующих «одновременно», или для «шредингеровских операторов».

Свободное уравнение Дирака есть

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \nabla + im\beta \right) \psi = 0, \quad (\text{A.1})$$

три матрицы  $\sigma$  —

$$\sigma_x = -i\alpha_2\alpha_3, \quad \sigma_y = -i\alpha_3\alpha_1, \quad \sigma_z = -i\alpha_1\alpha_2, \quad (\text{A.2})$$

а три матрицы  $\rho$  —

$$\rho_1 = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad \rho_3 = \beta, \quad \rho_2 = -i\rho_3\rho_1. \quad (\text{A.3})$$

Остальные символы определяются ниже в табл. II.

В этом обзоре автор иногда использует обычное (дираковское) представление, в котором  $\beta$  диагонально, а иногда представление Майорана, в котором матрицы  $\alpha$  эрмитовы и симметричны (и, следовательно, действительны), а  $\beta$  — эрмитова и антисимметрична (и, следовательно, чисто мнимая). Благодаря этому все коэффициенты в уравнении (A.1) действительны.

Представление Майорана может быть получено из обычного представления, в котором  $\alpha_1, \alpha_3$  и  $\beta$  действительны, а  $\alpha_2$  мнимая, если применить к каждой матрице Дирака  $\Gamma$  унитарное преобразование

$$\Gamma' = u\Gamma u^{-1}, \quad (\text{A.4})$$

где

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \beta\alpha_2), \quad u^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \beta\alpha_2). \quad (\text{A.5})$$

Оно не изменяет  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  и заменяет  $\alpha_2$  и  $\beta$  на  $-\beta$  и  $\alpha_2$  соответственно. Соответствующее преобразование волновой функции  $\psi$  Дирака в функцию  $\varphi$  Майорана есть  $\varphi = u\psi$ ,  $\psi = u^{-1}\varphi$ , т. е.

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 - i\varphi_4), & \psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_2 + i\varphi_3), \\ \psi_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (i\varphi_2 + \varphi_3), & \psi_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-i\varphi_1 + \varphi_4). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Оно полезно, например, при вычислении влияния обращения времени (уравнение (82)) на «большие» компоненты  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Легко видеть, что (A.5) не изменяет вид  $\rho_2$ . Следовательно, преобразование  $\varphi' = -\rho_2\varphi^*$  волновой функции Майорана означает  $\varphi' = i(\varphi_3^* + \varphi_4^*, -\varphi_1^*, -\varphi_2^*)$ . Видно, что большие компоненты  $\psi_1, \psi_2$  преобразуются (с точностью до абсолютного знака) согласно схеме (68). В представлении Майорана все матрицы  $\rho$  и  $\sigma$  мнимы и антисимметричны (что легко получается из антикоммутационных соотношений). Матрицы  $\rho$  коммутируют с матрицами  $\sigma$ , следовательно, девять произведений  $\rho_i\sigma_j$  дают действительные,

эрмитовы и поэтому симметричные матрицы. Вместе с некоторыми обычными обозначениями эти выводы собраны в следующей таблице:

Таблица II

Симметрия матриц Дирака в представлении Майорана

Мнимые антисимметричные и также	$\sigma_k, \rho_k \quad (k=1, 2, 3)$
Действительные симметричные	$\beta = \gamma_4 = \rho_3, \quad \gamma_5 = -\rho_1, \quad -i\gamma_5\gamma_4 = \rho_2$ $\alpha_k = \rho_1\sigma_k, \quad \gamma_k = -i\beta\alpha_k = \rho_2\sigma_k - i\gamma_5\gamma_k = -\rho_3\sigma_k$

Рассмотрим кратко уравнение (A.1) в представлении Майорана. Благодаря «действительной» форме уравнения получаем, что если  $\psi$  есть решение, то  $\psi^*$  также является решением. Его часто называют «зарядово-сопряженным» решением. Если  $\psi$  — стационарное решение

$$\psi = e^{-iEt} u(x)$$

с положительной энергией  $E > 0$ , то  $\psi^*$  — решение с отрицательной энергией. В более общем случае решением с положительной энергией называется суперпозиция решений написанного выше вида. Уравнение, очевидно, имеет «действительные» решения вида  $\psi + \psi^*$ , где  $\psi$  — решение для положительной энергии, а  $\psi^*$  — решение для отрицательной энергии.

Часто приходится иметь дело с полным ортонормированным набором решений для положительной энергии  $u_1, u_2, \dots$ , и набором решений для отрицательной энергии  $v_1, v_2, \dots$ . Предполагается, что решения для отрицательной энергии суть зарядовые сопряжения решений для положительной энергии. Тогда полный набор есть

$$\dots, u_r^*, \dots, u_2^*, u_1^*; u_1, u_2, \dots, u_r, \dots \quad (\text{A.7})$$

Имеем соотношения ортогональности:

$$\int u_r^* u_s d^3x = \delta_{rs}, \quad (\text{A.8})$$

$$\int u_r u_s d^3x = 0. \quad (\text{A.9})$$

В теории  $q$ -чисел  $\psi$  и  $\psi^+$  — операторы, которые можно разложить так:

$$\psi(x) = \sum_r \{a_r u_r(x) + \bar{a}_r^* u_r^*(x)\}, \quad (\text{A.10})$$

$$\psi^+(x) = \sum_r \{a_r^* u_r^*(x) + \bar{a}_r u_r(x)\}, \quad (\text{A.11})$$

где  $a_r$  и  $\bar{a}_r$  — операторы уничтожения частиц и античастиц соответственно. Из (A.8) и (A.9) имеем

$$a_r = \int u_r^*(x) \psi(x) d^3x, \quad a_r^+ = \int \psi^+(x) u_r(x) d^3x \quad (\text{A.12})$$

и аналогично для  $\bar{a}_r, \bar{a}_r^+$ .

#### ПРИЛОЖЕНИЕ В

##### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ В ТЕОРИИ ДИРАКА

В этом разделе рассматривается связь между преобразованием волновой функции Дирака  $\psi$  (соответствующим данному преобразованию координат), когда  $\psi$  рассматривается как функция Шредингера для частицы, и соответствующим преобразованием вектора одночастичного

состояния  $|\alpha\rangle$  в теории вторичного квантования. Так как оба формализма описывают одно и то же, то желательно проверить теорему, которая утверждает, что оба преобразования эквивалентны.

Рассмотрим преобразование Лоренца

$$x_i = \sum_{k=1}^4 a_{ik} x'_k, \quad (\text{B.1})$$

которое можно записать в виде  $x = ax'$  или  $x' = a^{-1}x$ . В тексте используется только специальный случай этого преобразования, но доказательство теоремы для общего случая не требует дополнительных усилий.

Если  $\psi(x)$  — решение свободного уравнения Дирака (A.1), то  $\psi(x') \equiv \psi(a^{-1}x)$  в общем случае не является решением, но может быть преобразовано в него<sup>29</sup> при помощи умножения на соответствующую матрицу  $u$ , являющуюся функцией параметров преобразования Лоренца. Таким образом, можно написать

$$\psi'(x) = u\psi(a^{-1}x). \quad (\text{B.2})$$

В «теории  $s$ -чисел»  $\psi$  является обычной комплексной функцией от  $x$  и рассматривается как вектор состояния частицы. (B.2) теперь является преобразованием состояния, «вызванным» преобразованием Лоренца (B.1). Можно показать, что матрица  $u$  может быть нормирована таким образом, что определяемое ею преобразование вектора состояния (B.2) будет унитарным. Ее можно назвать «малым» оператором  $U$ , определенным только для одночастичного состояния.

В «теории  $q$ -чисел»  $\psi$  — оператор поля, а  $\psi'$  — другой оператор поля, который «подчиняется тем же самым уравнениям поля» и (можно показать) «тем же самым правилам антикоммутации» (что в тексте доказано для рассматриваемого специального случая). Теперь, как обычно, можно доказать, что должен существовать «большой» линейный унитарный оператор  $U$  такой, что

$$U^{-1}\psi(x)U = \psi'(x) \equiv u\psi(a^{-1}x). \quad (\text{B.3})$$

Имеет смысл отметить, что в этой формуле  $u$  не является оператором, а просто преобразованием компонент оператора  $\psi$ ; поэтому  $u$  может свободно коммутировать с «большим»  $U$ . Заметим также, что если в (B.3)  $a$ ,  $u$ ,  $U$  заменить на  $a^{-1}$ ,  $u^{-1}$ ,  $U^{-1}$  соответственно, то получится аналогичная формула

$$U\psi(x)U^{-1} = u^{-1}\psi(ax), \quad (\text{B.4})$$

что можно получить непосредственно из (B.3), перенося члены с одной стороны уравнения на другую. Если  $|\rangle$  есть нормированный кэт, представляющий вакуум, то одночастичное состояние может быть получено путем применения оператора рождения  $a_r^+$  к  $|\rangle$ . Связь между  $a_r^+$  и волновой функцией  $u_r$  теории  $s$ -чисел дается в (A.12).

В более общем случае можно рассматривать любое решение уравнения (A.1)  $f(x)$  для положительной энергии (мы будем пользоваться обозначением  $f$ , чтобы избежать путаницы со вторично-квантованным  $\psi$ ) и определять соответствующий оператор рождения  $a_f^+$  посредством

$$a_f^+ = \int \psi^+(x) f(x) d^3x. \quad (\text{B.5})$$

Соответствующий одночастичный кэт  $|\alpha\rangle$  есть

$$|\alpha\rangle = a_f^+ |\rangle = \int \psi^+(x) f(x) d^3x |\rangle, \quad (\text{B.6})$$

где время  $t$  в  $x = (x, t)$  может быть выбрано произвольно, так как интеграл не зависит от  $t$ . Наоборот, если кэт  $|\alpha\rangle$  известен, то можно найти соответствующую  $f(x)$  следующим образом. Сначала заметим, что для любого состояния  $|\zeta\rangle$  имеем тождественно

$$\langle | a_f^\dagger | \zeta \rangle = 0. \quad (\text{B.7})$$

Действительно, состояние  $a_f^\dagger |\zeta\rangle$  содержит по крайней мере одну частицу, и, следовательно, ортогонально состоянию вакуума. Теперь, действуя оператором  $\psi(y)$  на (B.6) (где  $y$  действует одновременно с  $x$ ) и используя уравнение (30) и нормировку вакуума, получаем

$$\langle | \psi(y) | \alpha \rangle = \langle | \psi(y) a_f^\dagger | \rangle = \langle | \int \delta(x-y) f(x) d^3x - a_f^\dagger \psi(y) | \rangle,$$

где последний член благодаря (B.7) равен нулю. Окончательно,

$$f(x) = \langle | \psi(x) | \alpha \rangle. \quad (\text{B.8})$$

Соответствующее уравнение для состояния античастицы  $|\bar{\alpha}\rangle$  в представлении Майорана есть

$$|\bar{\alpha}\rangle = \int \psi(x) d^3x f(x) | \rangle \quad (\text{B.6'})$$

и

$$f(x) = \langle | \psi^+(x) | \bar{\alpha} \rangle. \quad (\text{B.8'})$$

Теперь  $U$  является оператором, преобразующим все состояния поля; например, он должен преобразовать состояние вакуума само в себя (так как вакуум является единственным состоянием, четырехмерный импульс которого равен нулю). При соответствующей нормировке  $U$  мы можем считать

$$U | \rangle = | \rangle, \quad \langle | U^{-1} = \langle |. \quad (\text{B.9})$$

Это уравнение применяется для операторов, изображающих четность, обращение времени и т. д. Теперь можно изучить преобразование одночастичных состояний, если применить  $U$  к  $|\alpha\rangle$  и посмотреть, что произойдет с уравнением (B.6) или (B.8). Например, используя (B.8), мы получаем, что волновая функция  $f'(x)$  преобразованного состояния есть

$$f'(x) = \langle | \psi(x) U | \alpha \rangle = \langle | U^{-1} \psi(x) U | \alpha \rangle = u \langle | \psi(a^{-1}x) | \alpha \rangle = u f(a^{-1}x), \quad (\text{B.10})$$

причем мы использовали уравнения (B.3) и (B.9) и получили точно такое же уравнение, что и (B.2). Отсюда следует теорема: преобразование (B.2) в теории  $s$ -чисел и оператор  $U$  из уравнения (B.3) эквивалентны, если  $U$  действует на одночастичные состояния\*).

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА\*\*)

1. E. Wigner, Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren. Английский перевод с добавлениями, включающими обсуждение обращения времени, находится в печати. Первая статья Вигнера об обращении времени опубликована в Göttinger Nachr., 546 (1932).
2. N. Tanner, Phys. Rev. 107, 1203 (1957).
- 2a. R. E. Segel, J. V. Kane and D. H. Wilkinson, Phil. Mag. 3, 204 (1958).
- 2b. D. H. Wilkinson, Phys. Rev. 109, 1603, 1610, 1614 (1958).
3. E. M. Purcell and N. F. Ramsay, Phys. Rev. 78, 807 (1950).

\*) См. в разделе 3.5 несколько отличающийся результат для случая обращения времени.

\*\*) Обзор литературы, относящейся к данной статье, был составлен в апреле 1958 г.

- 3a. N. F. Ramsay, Phys. Rev. **109**, 225 (1958).
4. J. H. Smith, E. M. Purcell and N. F. Ramsay, Phys. Rev. **108**, 120 (1957).
5. Дж. Блатт и В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, Москва, 1954.
6. K. Brueckner, R. Serber and K. Watson, Phys. Rev. **81**, 575 (1951).
7. Л. Д. Ландау, ДАН **60**, 207 (1948).
- 7a. C. N. Yang, Phys. Rev. **77**, 242 (1950).
8. G. C. Wick, A. S. Wightman and E. P. Wigner, Phys. Rev. **88**, 101 (1952).
9. T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. **104**, 254 (1956); **105**, 1671 (1957).
10. S. P. Lloyd, Phys. Rev. **81**, 161 (1951).
11. L. Wolfenstein and J. Ashkin, Phys. Rev. **85**, 947 (1952).
- 11a. R. H. Dalitz, Proc. Phys. Soc. A **65**, 175 (1952).
- 11b. E. P. Wigner and L. Eisenbud, Phys. Rev. **72**, 29 (1947).
- 11c. F. Coester, Phys. Rev. **84**, 1259 (1951); **89**, 619 (1953).
12. E. M. Henley and B. A. Jacobson, Phys. Rev. **108**, 502 (1957).
13. J. D. Jackson, S. B. Treiman and H. W. Wyld, Phys. Rev. **106**, 517 (1957).
- 13a. R. B. Curtis and R. R. Lewis, Phys. Rev. **107**, 1381 (1957).
- 13b. M. Morita and R. S. Morita, Phys. Rev. **107**, 1316 (1957).
- 13c. H. W. Wyld and S. B. Treiman, Phys. Rev. **106**, 169 (1957).
14. E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes and R. P. Hudson, Phys. Rev. **108**, 503 (1957); **110**, 787 (1958).
- 14a. M. T. Burgy, V. E. Krohn, T. B. Novoy, G. R. Ringo and V. L. Telegdi, Phys. Rev. **110**, 1214 (1958).
- 14b. F. Bochn and A. H. Wapstra, Phys. Rev. **109**, 456 (1958).
15. L. Landau, Nuclear Phys. **3**, 127 (1957).
- 15a. A. Salam, Nuovo Cimento **5**, 299 (1957).
- 15b. B. F. Touschek, Nuovo Cimento **5**, 1281 (1957).
- 15c. E. C. G. Sudarshan and R. E. Marshak, Phys. Rev. (в печати).
16. D. L. Pursey, Nuovo Cimento **6**, 266 (1957).
17. A. Pais and R. Jost, Phys. Rev. **87**, 871 (1952).
- 17a. L. Wolfenstein and D. G. Ravenhall, Phys. Rev. **88**, 279 (1952).
- 17b. L. Michel, Nuovo Cimento **10**, 319 (1953). См. также <sup>28</sup>.
18. T. D. Lee, C. N. Yang and R. Oehme, Phys. Rev. **106**, 340 (1957).
- 18a. T. D. Lee, J. Steinberger, G. Feinberg, P. K. Kabir and C. N. Yang, Phys. Rev. **106**, 1367 (1957).
- 18b. R. Gatto, Phys. Rev. **108**, 1103 (1957).
19. G. Lüders, Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat. fys. Medd. **28**, 5 (1954).
- 19a. G. Lüders and B. Zumino, Phys. Rev. **106**, 385 (1957), примечание 2.
- 19b. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 914 (1951); **91**, 713 (1953).
- 19c. W. Pauli, in Niels Bohr and the Development of Physics, 30 (Pergamon Press, London, England (1955)).
20. R. Jost, Helv. Phys. Acta **30**, 409 (1957).
21. M. Gell-Mann and A. H. Rosenfeld, Ann. Rev. Nuclear Sci. **7**, 407 (1951).
- 21a. R. H. Dalitz, Repts. Progr. in Phys. **20**, 163 (1957).
22. R. Gatto, Phys. Rev. **106**, 168 (1957).
23. G. Feinberg, Phys. Rev. **108**, 878 (1957).
24. N. M. Kroll and L. L. Foldy, Phys. Rev. **88**, 1177 (1952).
- 24a. R. K. Adair, Phys. Rev. **87**, 1044 (1952).
25. G. Breit, E. U. Condon and R. D. Present, Phys. Rev. **50**, 825 (1936).
- 25a. B. Cassen and E. U. Condon, Phys. Rev. **50**, 846 (1936).
- 25b. G. Breit and E. Feenberg, Phys. Rev. **50**, 850 (1936).
26. D. H. Wilkinson, Phil. Mag. **44**, 1019 (1953); **1**, 379, 1031 (1956); **2**, 83 (1957); A. B. Clegg and D. H. Wilkinson, Phil. Mag. **44**, 1269, 1322 (1953); **1**, 291 (1956); G. A. Jones and D. H. Wilkinson, Phil. Mag. **44**, 542 (1953); **45**, 703 (1954); S. D. Bloom, B. J. Toppet and D. H. Wilkinson, Phil. Mag. **2**, 57, 61 (1957); S. D. Bloom and D. H. Wilkinson, Phil. Mag. **2**, 63 (1957).
27. E. Fermi, Nuovo Cimento **2**, Suppl. **1**, 17 (1955).
28. T. D. Lee and C. N. Yang, Nuovo Cimento **3**, 749 (1956).
- 28a. H. A. Bethe and J. Hamilton, Nuovo Cimento **4**, 1 (1956).
- 28b. C. Goebel, Phys. Rev. **103**, 258 (1956). См. также (17, 17a, в).
29. P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics (Oxford University Press, London, England (1947)).