

КАСКАДНАЯ ТЕОРИЯ ЛИВНЕЙ*)

С. З. Беленький и И. П. Иваненко

СОДЕРЖАНИЕ

I. Основные уравнения теории	591
1. Основные уравнения теории	591
2. Вероятности основных процессов	593
II. Решение основных уравнений теории. Метод функциональных преобразований	597
3. Решение методом двойных функциональных преобразований	597
4. Метод С. З. Беленького	599
5. Метод Скотта, Снайдера, Баба и Чакрабартти	606
6. Метод Чакрабартти и Гупта	614
7. Решение обобщенных уравнений теории	617
8. Другие способы решения	620
9. Каскадная теория для тяжелых веществ	621
III. Решение основных уравнений теории. Метод моментов	624
10. О вычислении моментов функции распределения лавинных частиц	624
11. О равновесном спектре электронов и фотонов	627
12. Регулярный метод построения каскадных кривых по моментам	632
13. Каскадные кривые и энергетические спектры в легких веществах	636
14. Каскадные кривые и энергетические спектры в тяжелых веществах	646

I. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ

1. Основные уравнения теории

Электроны больших энергий**), проходя через вещество, теряют свою энергию на столкновения, т. е. на ионизацию и возбуждение атомов среды. Кроме того, тормозясь в кулоновском поле ядер атомов среды, электрон с некоторой вероятностью может испустить фотон. Подавляющая часть энергии электрона, расходуемая на столкновения, теряется малыми порциями, напротив, энергия, теряемая на излучение, равномерно распределяется между фотонами всех энергий от 0 до E_0 — энергии первичного электрона. Радиационные потери быстро растут с энергией (для больших энергий пропорционально E_0), ионизационные — практически не зависят от E_0 . Поэтому при E_0 , превышающих некоторую характерную для данного вещества критическую энергию $\beta \sim 1600 m_e c^2 Z^1$, где c — скорость света, m_e — масса электрона, Z — атомный номер вещества, главную роль

*) Настоящая статья представляет собой сокращенный и дополненный новыми результатами вариант статьи покойного С. З. Беленького и И. П. Иваненко, написанной в 1956 г.

**) Мы называем частицами больших энергий частицы, при прохождении которых через вещество существенны процессы радиационного торможения и образования пар.

в потерях энергии играют процессы радиационного торможения. При торможении в поле атомных ядер электрон может испустить фотон энергии, близкой к E_0 . Фотон такой энергии с определенной вероятностью может породить электрон — позитронную пару либо претерпеть комптоновское рассеяние. Вновь рожденные заряженные частицы, в свою очередь радиационно тормозясь, испускают фотоны больших энергий и т. д. Таким образом, на некоторой глубине вещества вместо одного первичного электрона энергии E_0 будем иметь несколько электронов и фотонов, суммарная энергия которых близка к E_0 .

Процесс размножения и одновременно дробления энергии продолжается до тех пор, пока энергия большинства частиц не станет близка к критической; тогда заряженные частицы большую часть своей энергии станут терять на ионизацию и лавина начнет постепенно затухать. Вероятности процессов, происходящих с электронно-фотонным излучением в веществе, даются квантовой электродинамикой. Теория ливней должна определить вероятность появления на некоторой глубине в энергетическом интервале $(E, E+dE)$ N_1 электронов и N_2 фотонов (на границу слоя вещества при $t=0$ падает пучок электронов или фотонов с заданным угловым и энергетическим распределением), идущих через плоскость, перпендикулярную оси*) ливня, на расстоянии $(r, r+dr)$ в элементе телесного угла $(\omega, \omega+d\omega)$. Математически эта задача очень сложна, а для получения многих важных характеристик каскадного ливня достаточно лишь знать среднее число электронов и фотонов на данной глубине. Поэтому мы будем рассматривать средние характеристики ливня.

Во всех элементарных процессах при больших энергиях углы, под которыми испускаются вторичные электроны и фотоны, чрезвычайно малы: порядка m_0c^2/E , где E — энергия первичных частиц. Резерфордское рассеяние заряженных частиц ливня, по крайней мере в веществах с малым Z , тоже мало, поэтому ливень развивается в основном в направлении движения первичной частицы. Это позволяет рассматривать развитие ливня с глубиной и его угловое и пространственное распределение как две различные задачи. Сначала определяется функция, описывающая развитие ливня с глубиной (без учета увеличения пути частиц из-за рассеяния), на основе которой решается задача об угловом и пространственном распределении частиц в ливне.

Запишем основные уравнения одномерной каскадной теории, учитывающие процессы образования пар фотонами, радиационного торможения и ионизационных потерь электронов:

$$\frac{\partial P(t, E)}{\partial t} = 2 \int_E^\infty \Gamma(t, E') W_p(E', E) dE' + \int_E^\infty P(t, E') W_e(E', E' - E) dE' - \int_0^E P(t, E) W_e(E, E') dE' - \beta \frac{\partial P(t, E)}{\partial E}, \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial \Gamma(t, E)}{\partial t} = \int_E^\infty P(t, E') W_e(E', E) dE' - \int_0^E \Gamma(t, E) W_p(E, E') dE'. \quad (1.1b)$$

Подробный вывод этих уравнений можно найти в монографиях С.З. Беленького² и Б. Росси³. Здесь $P(t, E)$ и $\Gamma(t, E)$ — функции, дающие среднее число электронов и фотонов соответственно в интервале энергий $(E, E+dE)$ на глубине t рассматриваемого слоя вещества; $W_p(E', E)$ — диф-

*) Осью ливня считается прямая, продолжающая направление движения первичной частицы.

ференциальная вероятность фотону энергии E' произвести на единице пути электрон — позитронную пару с энергией позитрона E и электрона $E' - E$; $W_e(E, E')$ — дифференциальная вероятность излучения электроном энергии E фотона энергии E' на единице пути; β — средние ионизационные потери заряженных частиц на единице пути вещества².

Уравнения (1.1а) и (1.1б) образуют систему двух линейных однородных интегро-дифференциальных уравнений. Они внешне похожи на уравнения, получающиеся в теории диффузии, поэтому их часто называют диффузионными уравнениями. Они связывают число электронов и фотонов на глубине t с числом электронов и фотонов на глубине $t + dt$. Линейные интегро-дифференциальные операторы в правых частях (1.1) действуют только на текущую переменную E — энергию частиц на глубине t , энергия первичной частицы или граничная энергия спектра первичных частиц E_0 входит в уравнения в качестве параметра. Для данной первичной энергии E_0 можно вычислить величины $P(E_0, t, E)$ и $\Gamma(E_0, t, E)$ лишь в том случае, если известны функции P и $\Gamma(E_0, t, E')$ с энергией E' , большей E , так как частицы с энергией E на глубине t образуются частицами больших энергий. Этому физически очевидному обстоятельству соответствует тот факт, что интегро-дифференциальный оператор в правой части уравнения (1.1) действует только на энергию, большую или равную E .

Иногда удобнее использовать уравнения с текущей координатой E_0 , переменная E в этом случае входит в уравнения в качестве параметра^{4, 5}. Тогда для некоторой вторичной энергии E можно вычислить функции $P(E_0, t, E)$ и $\Gamma(E_0, t, E)$ от первичной энергии E_0 в том случае, если известны функции P и $\Gamma(E'_0, t, E)$ от всех энергий E'_0 , лежащих между E_0 и E , потому что частица энергии E_0 может образовывать вторичные частицы энергии E либо непосредственно, либо через промежуточные частицы с энергией E'_0 , лежащей между E_0 и E . Соответствующий интегро-дифференциальный оператор действует на переменную E'_0 , меньшую или равную E , вплоть до $E'_0 = E$.

Уравнения (1.1) с граничными условиями, задающими число и энергетический спектр электронов или фотонов на границе слоя вещества при $t = 0$, являются основными уравнениями одномерной теории ливней. Случай одного первичного электрона энергии E_0 соответствует граничным условиям:

$$P(E_0, 0, E) = \delta(E - E_0); \quad \Gamma(E_0, 0, E) = 0. \quad (1.2)$$

Случай одного первичного фотона энергии E_0 соответствует граничным условиям:

$$P(E_0, 0, E) = 0; \quad \Gamma(E_0, 0, E) = \delta(E - E_0), \quad (1.2')$$

где δ — функция Дирака. Вообще говоря, уравнения (1.1) могут быть разрешены при произвольных начальных условиях:

$$P(E_0, 0, E) = \varphi_P(E_0, E); \quad \Gamma(E_0, 0, E) = \varphi_\Gamma(E_0, E),$$

где $\varphi_P, \varphi_\Gamma$ — некоторые произвольные функции.

2. Вероятности основных процессов

Вероятность излучения электроном энергии E фотона с энергией E' при прохождении слоя вещества толщиной в 1 см имеет по Бете и Гайтлеру¹ следующий вид:

$$W_e(E, E') dE' = 4\pi\alpha Z^2 r_0^2 \frac{dE'}{E'} \left[\left\{ 1 + \left(1 - \frac{E'}{E} \right)^2 \right\} \Phi_1 - \left\{ 1 - \frac{E'}{E} \right\} \Phi_2 \right]. \quad (1.3)$$

Здесь Z — заряд ядра, $\alpha = e^2/\hbar c$ — постоянная тонкой структуры, $r_0^2 = e^2/mc^2$ — «классический» радиус электрона, n — число атомов в 1 см^3 вещества. Формула (1.3) выведена в предположении $E \gg mc^2$. Функции Φ_1 и Φ_2 учитывают экранирование поля ядра полями атомных электронов. Уравнение (1.3) получено в борновском приближении, поэтому считалось, что оно не пригодно для тяжелых элементов. Поправка на неточность борновского приближения была исследована в работах Бете с сотрудниками⁶. Оказалось, что для процесса радиационного торможения она пренебрежимо мала и формулы (1.3) пригодны при любых Z . Л. Ландау и Ю. Румер показали, что излучение в поле атомных электронов можно приближенно учесть, заменив в выражении для вероятности излучения множитель Z^2 на $Z(Z+1)$ ⁷. Теоретический расчет радиационного торможения в поле атомных электронов без учета экранирования был проведен в работе⁸, а также в^{9,10,11}; учет экранирования был произведен в расчетах¹². Найдено, что излучение в поле электрона приближается с ростом энергии к излучению ядра с зарядом единица, но еще даже при $E = 100 mc^2$ оно на 15% меньше последнего. С другой стороны, в¹² показано, что экранирование меньше влияет на излучение в поле электрона, чем в поле ядра. Таким образом, замена Z^2 на $Z(Z+1)$ достаточно точно учитывает излучение в поле электронов.

Вероятность образования фотоном с энергией E' в поле ядра пары — позитрона с энергией E и электрона с энергией $E' - E$, при прохождении слоя вещества толщиной в 1 см дается по Бете и Гайтлеру¹ выражением

$$W_p(E', E) dE = 4naZ^2 r_0^2 \frac{dE}{E'} \left[\left\{ \left(\frac{E}{E'} \right)^2 + \left(1 - \frac{E}{E'} \right)^2 \right\} \Phi_3 + \frac{E}{E'} \left(1 - \frac{E}{E'} \right) \Phi_4 \right]. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) выведена в предположении $E' \gg mc^2$. Функции Φ_3 и Φ_4 учитывают экранирование поля ядра полями атомных электронов. Подробный вывод и обсуждение сечений W_e и W_p можно найти в работе¹³.

Как и в случае излучения, образование пар в поле атомных электронов можно приближенно с достаточной точностью учесть, заменив в выражении $W_p(E', E)$ множитель Z^2 на $Z(Z+1)$. Теория этого явления подобна теории тормозного излучения в поле атомных электронов. Теория без учета экранирования была развита в работах^{8,9,10,11,14}; экранирование было учтено в расчетах¹².

Выражения (1.4) получены в борновском приближении. Отклонения от сечений в борновском приближении изучались в работах^{15,16} при малых энергиях в случае тяжелых элементов, где авторы использовали точные дираковские волновые функции и получили, что в свинце точное сечение на 25% больше при энергии квантов $5mc^2$ и на 100% больше при энергии $3 mc^2$, чем сечение в борновском приближении. При этих энергиях была получена следующая зависимость поправки от атомного номера:

$$aZ^2 + bZ^4.$$

Бете и Максимон¹⁷ выполнили точные расчеты дифференциального сечения образования пар для очень больших энергий, пренебрегая экранированием; Бете и Девис получили полное сечение¹⁸. Поправка составляет 11,8% к сечению в свинце при 88 Мэв и 10,0% при 280 Мэв. Если учесть экранирование, поправку к сечению можно записать приближенно в форме $0,11 (Z/82)^2$.

Для больших энергий, когда экранирование можно считать полным, вероятности процессов радиационного торможения и образования пар на одной радиационной или лавинной единице длины записываются следующим образом:

$$W_e(E, E') dE' = \frac{dE'}{E'} \left[1 + \left(1 - \frac{E'}{E} \right)^2 - \left(\frac{2}{3} - 2b \right) \left(1 - \frac{E'}{E} \right) \right], \quad (1.5)$$

$$W_p(E', E) dE = \frac{dE}{E'} \left[\left(\frac{E}{E'} \right)^2 + \left(1 - \frac{E}{E'} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 2b \right) \left(1 - \frac{E}{E'} \right) \frac{E}{E'} \right]. \quad (1.6)$$

Величина $b = 1/18 \ln(191Z^{1/3})$ мала по сравнению с 1 и мало изменяется с изменением Z ; поэтому b с хорошей точностью принимают равным среднему значению $b = 0,0135$.

Если учесть излучение и образование пар в поле атомных электронов, а также поправку на неточность борновского приближения в тяжелых элементах, получим следующее выражение для «радиационной» единицы длины:

$$\frac{1}{l_0} = 4\alpha Z(Z+1) r_0^2 L_i^{\text{рад}} \left[1 + a \left(\frac{Z}{82} \right)^2 \right]. \quad (1.7)$$

Коэффициент « a » для процесса образования пар равен 0,11. В случае первичных частиц большой энергии, где роль электронов и фотонов в развитии ливня примерно одинакова, получим хорошее приближение, считая $a = 0,06$. Выражение $L_i^{\text{рад}}$ учитывает эффект полного экранирования. По А. Киричову и И. Померанчуку¹⁹ значения $L_i^{\text{рад}}$ примерно на 10% больше величин, полученных из модели Томаса—Ферми.

В таблице I приведены значения лавинных единиц в различных веществах, вычисленных по формуле (1.7). Коэффициент a принимался равным 0,06.

При меньших энергиях существенную роль в потерях энергии электронами начинает играть процесс ионизации и возбуждения атомов среды. Мы будем пользоваться величинами ионизационных потерь, усредненными по «равновесному» энергетическому спектру электронов². Величина ионизационных потерь релятивистских электронов на лавинной единице длины β носит название «критической энергии».

В области меньших энергий процесс образования пар для фотонов сменяется комптон-эффектом, т. е. упругими столкновениями фотона со свободными электронами. Дифференциальное сечение для комптон-эффекта было вычислено И. Е. Таммом²⁰, Клейном и Нишиной²¹. Предполагая $E'/mc^2 \gg 1$, вероятность фотону энергии E' на пути в одну радиационную единицу соудариться с электроном, оставив себе энергию E'' , получим в следующей

Таблица I

	Z	l —единица в г/см ²
Водород	1	62
Углерод	6	40
Азот	7	35,4
Кислород	8	32,1
Алюминий	13	22,7
Аргон	18	18
Железо	26	12,6
Медь	29	11,6
Свинец	82	5,55
Воздух	Состав по весу	
	76,4%	
	21,8%	
	1,3%	34,2
Вода	Состав по весу	
	11,1%	
	88,9%	33,9

форме:

$$W_{\text{комп}}(E', E'') dE'' = g \left[1 + \left(\frac{E''}{E'} \right)^2 \right] \frac{dE''}{E'E''}, \quad (1.8)$$

где $g = 55 \sum_i n_i Z_i / \sum_i n_i Z_i (Z_i + 1) L_i^{\text{рад}} \text{ Мэв}$.

Величину g для различных веществ можно найти в работе ². Интегрируя (1.8) по E'' от E' до минимального значения E'' , получим эффективное сечение поглощения фотонов вследствие комптон-эффекта:

$$\sigma_{\text{комп}} = \frac{\frac{mc^2}{E'} \cdot 108 \sum_i n_i Z_i L_i^{\text{комп}}}{\sum_i n_i Z_i (Z_i + 1) L_i^{\text{рад}}}; \quad (1.9)$$

«комптоновский» логарифм $L^{\text{комп}} = \ln(2E'/mc^2) + \frac{1}{2}$.

Сечения основных процессов в легких элементах мы будем использовать в форме полного экранирования — формулы (1.5) и (1.6). Использование асимптотического значения коэффициента радиационного торможения не должно приводить к большим ошибкам по двум причинам: во-первых, потому, что в легких веществах точная величина $W_e(E, E')$ вплоть до энергий порядка одной десятой критической отличается от своего асимптотического значения не более чем на 20%. Кроме того, электроны малых энергий (порядка критической и меньше) основную часть своей энергии тратят на ионизацию; потери на излучение играют роль небольшой поправки. Поэтому даже очень грубый учет радиационных потерь электронов приводит к небольшой ошибке. Формула (1.6) для $W_p(E', E)$ является худшим приближением к точному выражению сечения образования пар фотонами. Однако в основных уравнениях не был учтен комптон-эффект, влияние которого существенно при малых энергиях. Между процессом образования пар и комптон-эффектом имеется известное сходство в отношении образования вторичных электронов. Энергетическое распределение вторичных комптон-электронов до энергии $E \sim mc^2$ весьма похоже на распределение электронов в процессе образования пар. Комптон-эффект идет с заметной вероятностью в той энергетической области, где основным процессом для электронов являются ионизационные потери, а радиационные потери малы. Поэтому не играет уже существенной роли, на что будет тратить свою энергию фотон: на образование электрон-позитронной пары или нескольких малоэнергичных комптон-электронов. А для веществ с малым атомным номером суммарный коэффициент поглощения фотонов остается примерно постоянным до очень малых энергий $\sim 5 \cdot 10^6 \text{ эв}$. Поэтому если не интересоваться судьбой малоэнергичных электронов и принять, что процесс образования пар идет с сечением (1.6) вплоть до очень малых энергий, то тем самым мы приближенно учтем комптон-эффект. Отклонение действительных потерь энергии от вычисленных по формулам (1.5) и (1.6) в области энергий, близких к критической, не превышает в воздухе для торможения электронов 8%, а для поглощения фотонов 18% ²².

Приведенные здесь формулы сечений процессов тормозного излучения и образования пар применимы до сколь угодно больших энергий, если рассматривать процессы на одном изолированном атоме ²³. Однако картина меняется существенным образом, если рассматривать при больших энергиях процессы излучения и образования пар в среде. Влияние многократного рассеяния электронов атомами среды на процессы тормозного излучения и образования пар подробно разобрано в обзоре Е. Л. Фейнберга в УФН (58, 193 (1956)).

II. РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ. МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

3. Решение методом двойных функциональных преобразований

Асимптотические выражения сечений процессов радиационного торможения электронов (1.5) и образования пар фотонами (1.6) являются однородными функциями энергии первичной и вторичной частиц. Основные уравнения каскадной теории (1.1а) и (1.1б) линейны относительно функции P и Γ и, с сечениями основных процессов в форме (1.5) и (1.6), однородны относительно переменных E и E' . Вследствие этого уравнения (1.1) сравнительно легко удается решить методом функциональных преобразований. Используя преобразования Лапласа—Меллина по энергии, Л. Д. Ландау и Ю. Б. Румер⁷ в 1938 г. решили уравнения (1.1) без учета ионизационных потерь. С учетом ионизационных потерь, основываясь на методе функциональных преобразований, уравнения (1.1) решил Снайдер²⁴. Однако в ряде работ^{2, 25} метод решения Снайдера был подвергнут критике. Было показано, что его решение не точно удовлетворяет граничным условиям: оно описывает ливень, вызванный первичным электроном энергии E_0 и добавочным распределением электронов и фотонов, обладающим заметной интенсивностью вблизи критической энергии β . Поэтому решение Снайдера точно только при условии $E_0/\beta \gg 1$ и $t \gg 1$, где оно заметно не отличается от ливня, вызванного одним первичным электроном энергии E_0 . Кроме того, в решение Снайдера входит некоторая функция, определенная только при целых значениях аргумента, для нецелых значений аргумента она определяется графическим интерполированием. Заметим, что Снайдер нашел лишь зависимость от глубины полного числа частиц с энергией больше нуля, не решив задачи об энергетическом спектре частиц на произвольной глубине. В 1939 г. И. Е. Тамм и С. З. Беленький²⁶, решив проинтегрированные по глубине уравнения с учетом ионизационных потерь, нашли усредненный по всей каскадной кривой «равновесный» энергетический спектр. В 1941 г. С. З. Беленький²⁷ применением преобразования Лапласа—Меллина по переменной E и преобразования Лапласа по переменной t свел основные уравнения теории к уравнениям в конечных разностях, которые ему удалось решить. Некоторая входящая в это уравнение функция заменялась выражением, хорошо ее аппроксимирующим в существенной для задачи области изменения переменных. После этого удалось провести все вычисления и получить аналитические выражения зависимости числа частиц в ливне от глубины и энергии. Исследования показали, что введенная аппроксимация не вносит заметной ошибки при описании одномерной стадии развития ливня. Подробно разработанная на этой основе теория наиболее полно изложена в монографии².

Баба и Чакрабартти²⁵ в 1942 г. развивают теорию с учетом ионизационных потерь и приходят к выражениям для полного числа частиц, отличающимся от полученных Снайдером и Беленьким. В работе² было показано, что решения, полученные Баба и Чакрабартти, значительно недооценивают число частиц малых энергий. Поэтому полученные ими выражения для полного числа частиц неточны, а выражения энергетических спектров частиц становятся правильными при энергиях частиц $E > \beta$.

Снайдер в 1949 г.²⁸, усовершенствовав метод решения²⁴, получил точное решение уравнений в форме ряда, строго удовлетворяющее граничным условиям. Однако, несмотря на значительное усовершенствование математических методов, Снайдеру не удалось найти полного решения задачи. Он нашел зависимость полного числа частиц от глубины и

энергетический спектр в области $E/\beta \ll 1$. Баба и Чакрабартти²⁹ в 1948 г., усовершенствовав метод решения²⁵, также получили точное решение уравнений в форме ряда, строго удовлетворяющее граничным условиям. Однако физически новых результатов им получить не удалось. По-прежнему их решение значительно отличалось от результатов Беленького и Снайдера.

В 1952 г. Нияшимура и Камата³⁰, исходя из решения^{25,29} и заменив в нем ряд интегралом, который равен ряду в области его сходимости и является аналитическим продолжением вне области сходимости*), получили решение уравнений с учетом ионизационных потерь. Их способ решения несколько проще методов, использованных в работах^{28,29}; полученное решение совпадает с решением Снайдера²⁸.

В 1956 г. Чакрабартти и Гупта³¹, используя метод решения, аналогичный предположенному в работе³⁰, получили точное решение основных уравнений в форме ряда. Их ряд, в отличие от ряда²⁵, сходится хорошо, и первый член ряда при условии $E_0/\beta \gg 1$, как в² и²⁸, представляет решение с хорошей точностью. Применив при вычислении интегралов метод двойной точки перевала, им удалось получить точное решение полной одномерной задачи, т. е. найти аналитическое выражение зависимости числа частиц в ливне от глубины и от энергии. Их результаты с хорошей точностью совпадают с результатами С. З. Беленького, полученными в 1941—1946 гг.

Применим при решении основных уравнений (1.1) к функциям $P(t, E)$ и $\Gamma(t, E)$ преобразование Лапласа — Меллина по энергии E :

$$P(t, E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} E^{-(s+1)} P(t, s) ds, \quad P(t, s) = \int_0^\infty E^s P(t, E) dE \quad (2.1)$$

и преобразование Лапласа по переменной t :

$$P(t, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} P(\lambda, s) d\lambda, \quad P(\lambda, s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t, s) dt \quad (2.2)$$

(аналогично преобразовывается функция $\Gamma(t, E)$). Переменные s и λ — комплексные величины, контур интегрирования по s — прямая, параллельная мнимой оси, причем $\text{Re } s > 0$. Контур интегрирования по λ — прямая, параллельная мнимой оси, причем $\text{Re } \lambda > -\sigma_0$. Преобразования (2.1) и (2.2) позволяют перейти от переменных E и t к переменным s, λ и обратно. Умножим уравнения (1.1) на $E^s e^{-\lambda t}$ и проинтегрируем по E и t от нуля до бесконечности:

$$\left. \begin{aligned} \lambda P(\lambda, s) - \varphi_P(s) &= -A(s) P(\lambda, s) + B(s) \Gamma(\lambda, s) - \beta s P(\lambda, s-1), \\ \lambda \Gamma(\lambda, s) - \varphi_\Gamma(s) &= C(s) P(\lambda, s) - \sigma_0 \Gamma(\lambda, s), \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где $\varphi_P(s)$ и $\varphi_\Gamma(s)$ — соответствующим образом преобразованные граничные условия. Функции $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ и σ_0 можно найти в². Член $\beta s P(\lambda, s-1)$ учитывает ионизационные потери; его присутствие значительно усложняет уравнения, превращая их из алгебраических в уравнения в конечных разностях. Исключим из уравнений (2.3) функцию $\Gamma(\lambda, s)$:

$$\left. \begin{aligned} P(\lambda, s) \psi(\lambda, s) + \beta s P(\lambda, s-1) &= \varphi(s, \lambda), \\ \psi(\lambda, s) &= \frac{\lambda + A(s) - B(s) C(s)}{\lambda + \sigma_0} = \frac{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]}{\lambda + \sigma_0}, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

*) Заметим, что впервые подобный прием при вычислении энергетического спектра частиц с учетом ионизационных потерь был использован в работах С. З. Беленького (см., например,²).

где функции $\lambda_1(s)$ и $\lambda_2(s)$ являются корнями уравнения $\psi(\lambda, s) = 0$. Функция $\varphi(\lambda, s)$ определяется равенством

$$\varphi(\lambda, s) = \frac{B(s) - \varphi_\Gamma(s)}{(\lambda + \sigma_0) + \varphi_P(s)},$$

когда $|s| \rightarrow \infty$, функция $\psi(\lambda, s) \sim c_1 \ln s$, где c_1 — некоторая постоянная. Функция $\Gamma(\lambda, s)$ определяется равенством

$$\Gamma(\lambda, s) = \frac{C(s)P(\lambda, s) + \varphi_\Gamma(s)}{\lambda + \sigma_0}.$$

Пусть $\pi(\lambda, s)$ — решение уравнения (2.4) без правой части. Будем искать решение уравнения (2.4) с правой частью в форме

$$P(\lambda, s) = \Phi(\lambda, s) \pi(\lambda, s). \quad (2.5)$$

Подставив (2.5) в (2.4), получим следующее уравнение для функции $\Phi(\lambda, s)$:

$$\Phi(\lambda, s) - \Phi(\lambda, s-1) = -\frac{\varphi(\lambda, s)}{\beta s \pi(\lambda, s-1)}.$$

Нетрудно убедиться, что последнее уравнение имеет следующее решение ³²:

$$\Phi(\lambda, s) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda, s+n+1)}{(s+n+1) \pi(\lambda, s+n)}.$$

Таким образом:

$$P(\lambda, s) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda, s+n+1) \pi(\lambda, s)}{(s+n+1) \pi(\lambda, s+n)}.$$

Из уравнения (2.4) без правой части можно найти, что

$$\frac{\pi(\lambda, s)}{\pi(\lambda, s+n)} = \frac{(-1)^n \psi(\lambda, s+1) \psi(\lambda, s+2) \dots \psi(\lambda, s+n)}{\beta^n (s+1)(s+2) \dots (s+n)}.$$

После этого легко получить окончательное выражение функции $P(\lambda, s)$:

$$P(\lambda, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi(\lambda, s+n+1) \psi(\lambda, s+1) \psi(\lambda, s+2) \dots \psi(\lambda, s+n)}{\beta^n (s+1)(s+2) \dots (s+n)}. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) дает формальное решение проблемы. Выражение функции $P(\lambda, s)$ допускает соответствующее преобразование Меллина по s , и ряд (2.6) может быть проинтегрирован почленно. Но как функция λ n -й член ряда ведет себя как λ^n и к нему непосредственно не может быть применено обратное преобразование Лапласа (необходимо, чтобы преобразованная функция исчезала как λ^{-1} при $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow \infty$). Следовательно, мы должны просуммировать ряд (2.6) или получить для него иное представление.

4. Метод С. З. Беленького

С. З. Беленьким было показано ², что получить иное представление ряда (2.6) можно следующим образом.

Нетрудно показать, что наиболее существенную роль в теории играет область изменения переменных s от 0 до 2 и λ от 2 до $-0,6$. В этой области функция $\psi(\lambda, s)$ имеет две существенные особенности:

1. Она имеет простой полюс при $s=0$ ($C(s) \rightarrow \infty$).

2. Она обращается в нуль при значениях λ и s , определяемых соотношением $\lambda = \lambda_1(s)$ или $s = s_1(\lambda)$. Следовательно, в этой области изменения переменных функцию $\psi(\lambda, s)$ с хорошей точностью можно аппроксимировать выражением

$$\psi_0(\lambda, s) = \frac{f(\lambda)(s - s_1(\lambda))}{s}; \quad f(\lambda) = - \frac{[s\lambda'_1(s)(\lambda - \lambda_2(s))]_{s=s_1(\lambda)}}{\lambda - \sigma_0}. \quad (2.7)$$

Эта аппроксимация аналогична, но не совпадает с аппроксимацией, впервые примененной в работе ²⁶. Было показано, что аппроксимация (2.7) приводит к функции $P(E, t)$, практически совпадающей с точной в случае больших энергий, когда ионизацией можно пренебречь. Аппроксимация (2.7) влияет на члены, учитывающие в уравнении процессы образования пар и радиационного торможения. Поскольку ионизационные потери уравнениями (1.4) учитываются точно, можно надеяться, что и в рассматриваемом случае применение аппроксимации (2.7) дает хорошие результаты. Подставляя (2.7) в выражение (2.6) получим, для граничных условий (1.2):

$$P(\lambda, s) = \frac{E_0}{\beta} E_0^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[-\frac{E_0}{\beta} f(\lambda) \right]^n [\Gamma(s+1)]^2 \Gamma(s+n+1-s_1)}{\Gamma(s+n+1) \Gamma(s+n+2) \Gamma(s+1-s_1)}. \quad (2.8)$$

Отсюда, используя (2.1) и (2.2) и интегрируя по E , получим следующее выражение интегральной по E функции $N(E, t)$:

$$N(E, t) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_s} \int_{C_\lambda} ds d\lambda P(\lambda, s) E^{-s} e^{\lambda t} \frac{1}{s}. \quad (2.9)$$

Ряд (2.8) представляет разложение решения по степеням E_0/β ; нам нужно представить решение в форме ряда по степеням малого параметра β/E_0 . Используя соотношение

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+n+1)} = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{s-1} d\tau,$$

представим (2.8) в форме

$$P(\lambda, s) = \frac{s\Gamma(s+1)E_0^{s+1} \int_0^1 \tau^{s-1} F_1 d\tau}{\beta\Gamma(s+1-s_1)}, \quad (2.10)$$

где

$$F_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Z)^n \Gamma(s+n+1-s_1)}{n! \Gamma(s+n+2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(y+s+1-s_1) \Gamma(-y)}{\Gamma(s+y+2)} Z^y dy,$$

а

$$Z = \frac{E_0}{\beta} (1-\tau) \cdot f(\lambda).$$

Здесь контур интегрирования выбран таким образом, что полюса функции $\Gamma(y+s+1-s_1)$ лежат слева от пути интегрирования, а полюса функции $\Gamma(-y)$ — справа. Замыкая контур интегрирования C полуокружностью бесконечно большого радиуса и беря вычеты подынтегральной функции в точках $y=n$, нетрудно убедиться в справедливости (2.10). Вместе с тем, контурный интеграл (2.10) служит аналитическим продолжением ряда F_1 в области $\beta/E_0 < 1$. Замыкая контур интегрирования налево полуокружностью бесконечно большого радиуса и беря вычеты подынтегральной функции в точках $y=s_1-s-n-1$, получим разложе-

ние F_1 по обратным степеням Z . Ограничиваясь первым членом разложения, получим:

$$F_1 = \frac{\Gamma(s+1-s_1) Z^{-s+s_1-1} \left[1 + O\left(\frac{\beta}{E_0}\right) \right]}{\Gamma(s_1+1)}.$$

Интегралом по замыкающему контуру, который, как можно показать, будет порядка $e^{\frac{-E_0}{\beta}}$, пренебрегаем. Таким образом, подставляя выражение для $P(\lambda, s)$ в (2.9) и проведя интегрирование по s и λ (делая замену $\lambda = \lambda_1(s)$ после интегрирования по s), получим:

$$N(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{1}{s} H_1(s) D(s) G(s, \varepsilon) e^{\lambda_1(s)t + ys} ds, \quad (2.11)$$

где

$$G(s, \varepsilon) = e^s \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x} \left(1 - \frac{\varepsilon}{x}\right)^s dx; \quad H_1(s) = \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}; \quad D(s) = \frac{\left[-\frac{s\lambda'_1(s)}{H_1(s)} \right]^s}{\Gamma(s+1)}.$$

Интегрирование в (2.11) проведем методом перевала. В результате получим:

$$\{N_p(E_0, E, t)\}^p = \frac{H_1(s) D(s) G(s, \varepsilon) e^{ys + \lambda_1(s)t}}{s \sqrt{2\pi\lambda''_1(s) t}}, \quad (2.12)$$

где s определяется из уравнения $t = -y/\lambda'_1(s)$, а

$$\varepsilon = \frac{E f(\lambda_1(s))}{\beta}, \quad y = \ln(E_0/\beta).$$

Функция $G(s, \varepsilon)$ описывает энергетический спектр электронов на различных глубинах. При значении $s=1$, соответствующем максимуму ливня, $G(s, \varepsilon)$ совпадает с выражением «равновесного» спектра частиц при условии $\varepsilon_0 \gg \varepsilon^{2\alpha}$. Величина функции $G(s, \varepsilon)$ для различных значений переменных s и ε приведена в таблице II.

Отметим, что выражение (2.12) справедливо при выполнении следующих условий: а) величина y должна быть больше единицы, б) энергия E порядка критической энергии β и меньше. Глубина t должна быть больше единицы, потому что при вычислении $N(E, t)$ мы пренебрегли членом, пропорциональным $e^{\lambda_2(s)t}$, и в методе перевала разлагали функцию в ряд по степеням $1/t$ и членами порядка $1/t$ и выше пренебрегали.

Проведя аналогичные вычисления, получим следующие результаты для различных частных случаев:

а) первичный электрон энергии E_0 :

1. С учетом ионизационных потерь

$\{N_p(E_0, t, E)\}^p$ определено (2.12),

$$\{P(E_0, t, E)\}^p = \frac{H_1(s) D(s) (G_1(s, \varepsilon) - EG(s, \varepsilon)) \exp(ys + \lambda_1(s)t)}{sE \sqrt{2\pi\lambda''_1(s) t}},$$

$$\lambda'_1(s) = -\frac{y}{t}, \quad G_1(s, \varepsilon) = e^s \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x} \left(1 - \frac{\varepsilon}{x}\right)^s (x - \varepsilon) dx.$$

Если воспользоваться³ приближенным выражением для функции $C(s) = \frac{1}{s}$, отличающимся от точного всего на несколько процентов, то можно получить

Таблица II

Функция $G(s, \varepsilon)$										
$\begin{matrix} s \\ \varepsilon \end{matrix}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
0,05	0,967	0,937	0,913	0,891	0,870	0,850	0,832	0,815	0,799	0,784
0,1	0,947	0,901	0,863	0,830	0,798	0,770	0,744	0,720	0,698	0,677
0,2	0,918	0,846	0,792	0,744	0,701	0,663	0,629	0,598	0,569	0,543
0,5	0,860	0,751	0,667	0,597	0,538	0,489	0,446	0,408	0,376	0,346
0,8	0,823	0,692	0,591	0,511	0,447	0,396	0,355	0,313	0,280	0,252
1,2	0,786	0,634	0,522	0,436	0,369	0,315	0,275	0,238	0,207	0,180
1,6	0,758	0,592	0,472	0,384	0,316	0,263	0,221	0,186	0,160	0,138
2,0	0,736	0,559	0,434	0,345	0,277	0,227	0,186	0,153	0,129	0,109
3,0	0,694	0,499	0,367	0,273	0,214	0,173	0,134	0,112	0,095	0,071
4,0	0,662	0,459	0,321	0,232	0,175	0,135	0,102	0,080	0,062	0,048

Функция $G_1(s, \varepsilon)$										
$\begin{matrix} s \\ \varepsilon \end{matrix}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
0,05	0,990	0,982	0,973	0,965	0,956	0,948	0,938	0,929	0,920	0,917
0,1	0,983	0,960	0,940	0,930	0,920	0,906	0,892	0,879	0,865	0,852
0,2	0,968	0,939	0,911	0,885	0,860	0,836	0,815	0,794	0,773	0,751
0,5	0,935	0,876	0,823	0,775	0,731	0,692	0,665	0,620	0,588	0,558
0,8	0,908	0,829	0,759	0,700	0,642	0,604	0,554	0,516	0,479	0,441
1,2	0,880	0,779	0,694	0,621	0,557	0,515	0,468	0,422	0,382	0,341
1,6	0,855	0,740	0,644	0,566	0,494	0,436	0,387	0,343	0,306	0,274
2,0	0,837	0,708	0,599	0,519	0,445	0,388	0,336	0,297	0,262	0,226
3,0	0,800	0,625	0,514	0,433	0,357	0,288	0,259	0,226	0,196	0,152
4,0	0,767	0,596	0,480	0,399	0,301	0,244	0,202	0,162	0,133	0,111

Функция $G_2(s, \varepsilon)$										
$\begin{matrix} s \\ \varepsilon \end{matrix}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
0,05	7,16	4,48	3,50	2,95	2,59	2,30	2,11	1,96	1,83	1,72
0,01	6,51	3,84	2,88	2,35	2,01	1,73	1,57	1,43	1,31	1,22
0,2	5,86	3,23	2,30	1,82	1,49	1,22	1,08	0,968	0,871	0,792
0,5	5,04	2,50	1,63	1,19	0,923	0,745	0,607	0,515	0,447	0,384
0,8	4,65	2,16	1,37	0,930	0,691	0,525	0,427	0,351	0,292	0,244
1,2	4,32	1,89	1,11	0,738	0,525	0,398	0,310	0,247	0,199	0,157
1,6	4,10	1,71	0,966	0,620	0,427	0,304	0,230	0,177	0,140	0,112
2,0	3,93	1,58	0,865	0,547	0,361	0,255	0,185	0,141	0,108	0,084
3,0	3,64	1,37	0,702	0,412	0,262	0,181	0,118	0,091	0,066	0,048
4,0	3,45	1,23	0,604	0,337	0,205	0,132	0,091	0,069	0,048	0,032

Примечание. Заметим, что функции G_i можно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию $W_{\kappa, \mu}(\varepsilon)$:

$$G(s, \varepsilon) = \varepsilon \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2} - \kappa\right) e^{-(\mu + \frac{1}{2})} e^{\frac{\varepsilon}{2}} W_{\kappa, \mu}(\varepsilon);$$

$$G_1(s, \varepsilon) = \varepsilon^2 \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2} - \kappa\right) e^{-(\mu + \frac{1}{2})} e^{\frac{\varepsilon}{2}} W_{\kappa, \mu}(\varepsilon);$$

$$G_2(s, \varepsilon) = \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2} - \kappa\right) e^{-(\mu + \frac{1}{2})} e^{\frac{\varepsilon}{2}} W_{\kappa, \mu}(\varepsilon),$$

где $\mu = 0$ для $G(s, \varepsilon)$; $\mu = 1$ для $G_1(s, \varepsilon)$ и $\mu = \frac{1}{2}$ для $G_2(s, \varepsilon)$.
 $\kappa = \frac{1}{2} - s$ для $G(s, \varepsilon)$; $\kappa = -s - \frac{1}{2}$ для $G_1(s, \varepsilon)$ и $\kappa = -s$ для $G_2(s, \varepsilon)$.

Для значений $\varepsilon > 4$ величины G легко сосчитать, пользуясь асимптотическими формулами для $W_{\kappa, \mu}(\varepsilon)$.

следующие выражения для функций распределения фотонов:

$$\{\Gamma(E_0, t, E)\}^p = \frac{H'_1(s) D(s) G(s, \varepsilon) \exp(ys + \lambda_1 s t)}{s E \sqrt{2\pi \lambda_1''(s) t}},$$

$$\{N_\Gamma(E_0, t, E)\}^p = \frac{H'_1(s) D(s) G_2(s, \varepsilon) \exp(ys + \lambda_1(s) t)}{s \sqrt{2\pi \lambda_1''(s) t}}.$$

Здесь

$$G_2(s, \varepsilon) = e^\varepsilon \int_\varepsilon^\infty e^{-x} (x - \varepsilon)^{s-1} x^{-s} dx, \quad H'_1(s) = \frac{1}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}; \quad \lambda'_1(s) = -\frac{y}{t}.$$

Можно написать следующие соотношения между функциями:

$$\{P(E_0, t, E)\}^p = \{N_p\}^p \left(-E + \frac{G_1(s, \varepsilon)}{G(s, \varepsilon)} \right) \frac{1}{E};$$

$$\{\Gamma(E_0, t, E)\}^p = \frac{\{N_p\}^p}{E(\lambda_1(s) + \sigma_0)};$$

$$\{N_\Gamma(E_0, t, E)\}^p = \frac{\{N_p\}^p G_2(s, \varepsilon)}{G(s, \varepsilon)(\lambda_1(s) + \sigma_0)}.$$

Здесь всюду

$$y = \ln(E_0/\beta).$$

2. Без учета ионизационных потерь:

$$\{N_p\}^p = \frac{H_1(s) \exp(ys + \lambda_1(s) t)}{s \sqrt{2\pi \lambda_1''(s) t}},$$

$$\{P\}^p = \frac{H_1(s) \exp(ys + \lambda_1(s) t)}{E \sqrt{2\pi \lambda_1''(s) t}},$$

$$\{\Gamma(E_0, t, E)\}^p = \frac{H_3(s) \exp(ys + \lambda_1(s) t)}{E \sqrt{2\pi \lambda_1''(s) t}},$$

$$\{N_\Gamma(E_0, t, E)\}^p = \frac{H_3(s) \exp(ys + \lambda_1(s) t)}{s \sqrt{2\pi \lambda_1''(s) t}}.$$

Здесь

$$H_3(s) = \frac{C(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}, \quad \lambda'_1(s) = -\frac{y}{t}.$$

Можно написать следующие соотношения между функциями:

$$\{P(E_0, t, E)\}^p = \frac{\{N_p\}^p s}{E};$$

$$\{\Gamma(E_0, t, E)\}^p = \frac{\{N_p\}^p C(s) \cdot s}{E(\lambda_1(s) + \sigma_0)};$$

$$\{N_\Gamma(E_0, t, E)\}^p = \frac{\{N_p\}^p C(s)}{\lambda_1(s) + \sigma_0}.$$

Здесь всюду $y = \ln \frac{E_0}{E}$.

б) Первичный фотон энергии E_0 :

1. С учетом ионизационных потерь. Если воспользоваться приближенным выражением для функции $B(s) = 2\sigma_0/(s+1)^3$, отличающимся от точного всего на несколько процентов, то можно получить следующие

выражения для функций распределения:

$$\begin{aligned}\{N_p(E_0, t, E)\}^r &= \frac{H_1(s) D_2(s) G(s, \varepsilon) \exp(ys + \lambda_1(s)t)}{s \sqrt{2\pi\lambda_1''(s)t}}, \\ \{P(E_0, t, E)\}^r &= \frac{H_1(s) D_2(s) \{G_1(s, \varepsilon) - EG_2(s, \varepsilon)\} \exp(ys + \lambda_1(s)t)}{Es + 2\pi\lambda_1''(s)t}, \\ \{\Gamma(E_0, t, E)\}^r &= \delta(E_0 - E) e^{-\sigma_0 t} + \frac{H_1(s) D_3(s) G_2(s, \varepsilon) \exp(ys + \lambda_1(s)t)}{Es \sqrt{2\pi\lambda_1''(s)t}}.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\{N_\Gamma(E_0, t, E)\}^r &= e^{-\sigma_0 t} + \frac{H_1(s) D_3(s) G_2(s, \varepsilon) \exp(ys + \lambda_1(s)t)}{s \sqrt{2\pi\lambda_1''(s)t}}, \\ D_2(s) &= \frac{B(s) [f(\lambda_1(s))]^s}{(\lambda_1(s) + \sigma_0) \Gamma(s+1)}; \quad D_3(s) = \frac{D_2(s)}{\lambda_1(s) + \sigma_0}; \quad \lambda_1''(s) = -\frac{y}{t}.\end{aligned}$$

Можно написать следующие соотношения между функциями:

$$\begin{aligned}\{N_p(E_0, t, E)\}^r &= \frac{\{N_p\}^p B(s)}{\lambda_1(s) + \sigma_0}; \quad \{P(E_0, t, E)\}^r = \frac{\{P\}^p B(s)}{\lambda_1(s) + \sigma_0}; \\ \{\Gamma(E_0, t, E)\}^r &= \delta(E_0 - E) e^{-\sigma_0 t} + \frac{\{N_p\}^p B(s)}{E(\lambda_1(s) + \sigma_0)^2}; \\ \{N_\Gamma(E_0, t, E)\}^r &= e^{-\sigma_0 t} + \frac{\{N_p\}^p B(s) G_2(s, \varepsilon)}{G(s, \varepsilon) (\lambda_1(s) + \sigma_0)^2}.\end{aligned}$$

2. Без учета ионизационных потерь

$$\begin{aligned}\{N_p(E_0, t, E)\}^r &= \frac{H_4(s) \exp(ys + \lambda_1(s)t)}{s \sqrt{2\pi\lambda_1''(s)t}}, \\ \{P(E_0, t, E)\}^r &= \frac{H_4(s) \exp(ys + \lambda_1(s)t)}{E \sqrt{2\pi\lambda_1''(s)t}}, \\ \{\Gamma(E_0, t, E)\}^r &= \delta(E_0 - E) e^{-\sigma_0 t} - \frac{H_2(s) \exp(ys + \lambda_1(s)t)}{E \sqrt{2\pi\lambda_1''(s)t}}, \\ \{N_\Gamma(E_0, t, E)\}^r &= e^{-\sigma_0 t} - \frac{H_2(s) \exp(ys + \lambda_1(s)t)}{s \sqrt{2\pi\lambda_1''(s)t}}.\end{aligned}$$

Здесь $H_4(s) = \frac{B(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2}$, $\lambda_1''(s) = \frac{y}{t}$. Можно написать следующие соотношения между функциями:

$$\begin{aligned}\{P(E_0, t, E)\}^r &= \frac{\{N_p\}^r s}{E}, \\ \{\Gamma(E_0, t, E)\}^r &= \delta(E_0 - E) e^{-\sigma_0 t} - \frac{\{N_p\}^r s (\lambda_2(s) + \sigma_0)}{EB(s)}, \\ \{N_\Gamma(E_0, t, E)\}^r &= e^{-\sigma_0 t} - \frac{\{N_p\}^r (\sigma_0 + \lambda_2(s))}{B(s)}.\end{aligned}$$

На рис. 1, 2 приведены каскадные кривые $\{N_p(E_0, t, 0)\}^p$ и $\{N_0(E_0, t, 0)\}^r$ для различных значений переменных E_0 , t и E с учетом ионизационных потерь. Эти данные, вместе с данными таблицы II, где приведены также величины $G_1(s, \varepsilon)$ и $G_2(s, \varepsilon)$, могут быть полезны при проведении

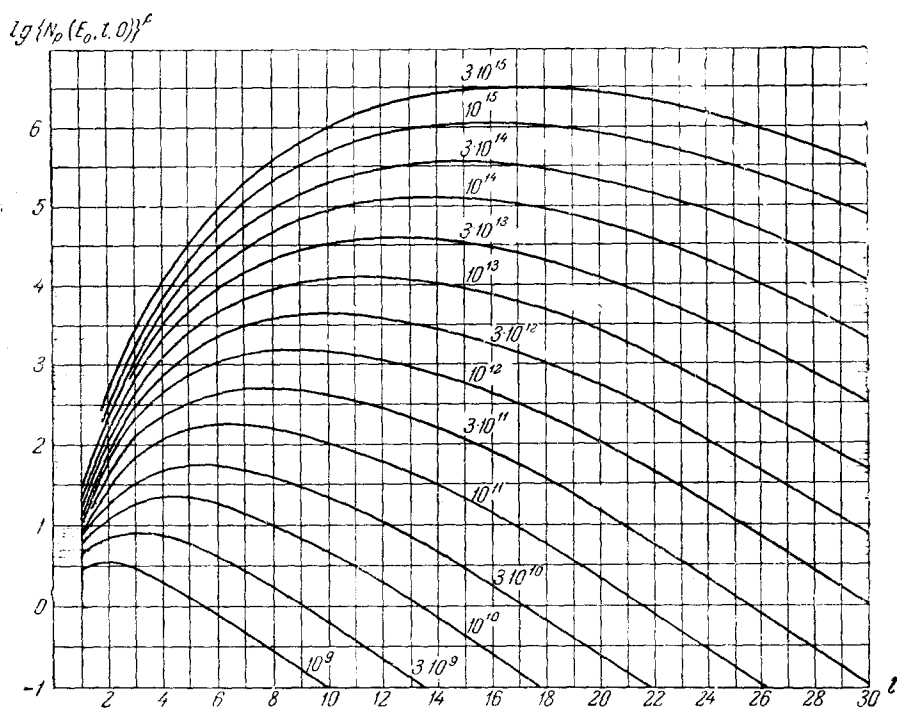


Рис. 1. Зависимость от глубины числа электронов с энергией больше нуля $\{N_p(E_0, t, 0)\}^c$ в ливне, вызванном первичным электроном энергии E_0 . Цифры около каждой кривой обозначают энергию первичного электрона в эв. Расчеты проводились с учетом ионизационных потерь с точностью до членов $1/t^2$.

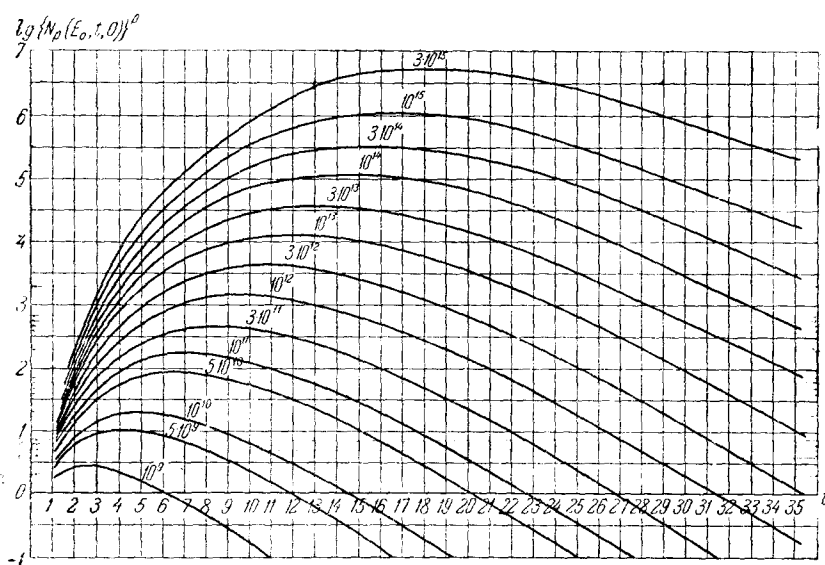


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но в ливне от первичного фотона.

различных расчетов. Таким образом, метод двойных функциональных преобразований с дальнейшей аппроксимацией (2.7) дает возможность получить полное описание одномерного развития каскадного ливня в легких веществах.

5. Метод Скотта, Снайдера, Баба и Чакрабартти

Напомним, что выражение $P(\lambda, s)$ допускает обратное преобразование по s и ряд (2.6) может быть проинтегрирован почленно. Но как функция λ n -й член ряда ведет себя как λ^n , и к нему не может быть применено обратное преобразование Лапласа.

Таким образом, мы должны просуммировать ряд (2.6) или записать его общий член в форме, в которой целое число n можно заменить комплексной переменной σ и представить ряд в форме контурного интеграла (см., например, ²). Знаменатель n -го члена (2.6) содержит n множителей $(s+1) \dots (s+n+1)$; запишем их как отношение двух гамма-функций. Числитель n -го члена (2.6) содержит $(n-1)$ множителей $\psi(\lambda, s+1) \dots \psi(\lambda, s+n)$. В работе ³³ В. Скотт вводит и в числителе отношение двух новых функций, определенных через бесконечные произведения, избавляясь тем самым от переменного числа множителей в n -м члене ряда. Введем новые функции

$$\psi(\lambda, s+1) \psi(\lambda, s+2) \dots \psi(\lambda, s+n) = \frac{L(\lambda, s+n+1)}{L(\lambda, s+1)},$$

где функция $L(\lambda, s)$ должна удовлетворять рекуррентному соотношению

$$L(\lambda, s) \psi(\lambda, s) = L(\lambda, s+1) \text{ или } L(\lambda, s) = \psi(\lambda, s-1) L(\lambda, s-1). \quad (2.13)$$

Можно показать ³⁴, что уравнение (2.13) имеет решение

$$L(s, \lambda + Z) = L(s, \lambda) [\psi(s, \lambda)]^Z \prod_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\psi(s, \lambda+n)}{\psi(s, \lambda+n+1)} \left(\frac{\psi(s, \lambda+n+1)}{\psi(s, \lambda+n)} \right)^Z \right\} \quad (2.14)$$

при условии, что а) бесконечное произведение в (2.14) сходится и что б) $\lim_{N \rightarrow \infty} [\psi(s, \lambda+N)/\psi(s, N)] = 1$.

Используя асимптотическое выражение $A(s)$, легко показать, что эти два условия выполняются. Функция $L(s, \lambda)$ удовлетворяет краевому условию $L(s, 0) = 1$. Равенство (2.14) справедливо при любых Z ; при $Z=1$ имеет $L(s, \lambda+1) = \psi(s, \lambda) L(s, \lambda)$, что совпадает с (2.13) при замене λ на $\lambda+1$. $L(s, \lambda)$ — аналитическая функция. Из выражений для функций $\psi(s, \lambda)$ (2.4) и величин $A(s)$, $B(s)$ и $C(s)$ видно, что функция $\psi(\lambda, s)$ имеет конечные не исчезающие значения для всех конечных λ , исключая нули в точках $\lambda = -s-n$, $n=1, 2, \dots$. Следовательно, $L(s, \lambda)$ есть аналитическая, не равная нулю функция для всех конечных λ , исключая изолированные полюсы в точках $\lambda = -s-n$. Бесконечное произведение в (2.14) сходится медленно, оно неудобно для численных расчетов. Поэтому при проведении численных расчетов использовалась удобная аппроксимация этой функции:

$$L(s, \lambda + z) = L(s, \lambda) \lim_{N \rightarrow \infty} [\psi(s, \lambda + N + 1)]^{\alpha(Z)} [\psi(s, \lambda + N)]^{\beta(Z)} \times \\ \times [\psi(s, \lambda + N + 1)]^{\gamma(Z)} [\psi(s, \lambda + N + 2)]^{\delta(Z)} \prod_{n=0}^{\infty} \psi(s, \lambda + n) / \psi(s, \lambda + n + Z). \quad (2.15)$$

где

$$\alpha(Z) = -\frac{Z(Z+1)(Z-1)(Z-2)}{24}; \quad \gamma(Z) = -\frac{Z(Z+1)(Z+2)(3Z-7)}{24};$$

$$\beta(Z) = \frac{Z(Z-1)(Z-2)(3Z-7)}{24}; \quad \delta(Z) = \frac{Z(Z-1)(Z+1)(Z+2)}{24}.$$

Полиномы α , β , γ , δ выбирались так, чтобы (2.15) совпадало с (2.14) для всех N при $Z=0, \pm 1, \pm 2$. Условие $\alpha(Z) + \beta(Z) + \gamma(Z) + \delta(Z) = Z$ гарантирует, что (2.15) сходится при тех же значениях λ , что и выражение (2.14). В то же время для данного числа членов N в произведении при малых Z выражение (2.15) точнее (2.14). Полезное асимптотическое выражение функции $L(\lambda, s)$ можно получить, написав для больших s $\ln \psi(\lambda, s) = \ln L(s+1, \lambda) - \ln L(s, \lambda) \cong \frac{\partial}{\partial s} \ln L(\lambda, s)$ и используя соотношение $\psi(\lambda, s) \cong c_1 \ln s$. После интегрирования получим:

$$L(\lambda, s) \cong (c_1 \ln s)^s, \text{ когда } |s| \rightarrow \infty.$$

Ряд (2.6) функции $P(\lambda, s)$ можно теперь переписать следующим образом:

$$P(\lambda, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Phi(s+n+1, \lambda) \Gamma(s+1) L(s+1, n, \lambda)}{\beta^n \Gamma(s+n+2)}.$$

Легко убедиться, что последнее выражение можно записать в форме контурного интеграла:

$$P(\lambda, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{d\sigma \cdot \pi \Psi(\sigma+s+1, \lambda) L(s+1, \sigma, \lambda)}{\sin \pi \sigma \cdot \Gamma(s+\sigma+2) \beta^n}, \quad (2.16)$$

где контур интегрирования — прямая, параллельная мнимой оси, причем $-1 < \operatorname{Re} \gamma < 0$. Функция $L(s+1, \sigma, \lambda)$ ведет себя при больших значениях $|\lambda|$ как λ^σ ; следовательно, интеграл по всем σ (2.16) должен вести себя как λ^γ , где $-1 < \gamma < 0$. Поэтому теперь мы можем применить к выражению $P(\lambda, s)$ обратные преобразования Лапласа и Меллина:

$$P(E, t) = -\frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{c_\lambda} e^{\lambda t} d\lambda \int_{c_s} E^{-s-1} ds \int_{c_\sigma} d\sigma \frac{\pi}{\sin \pi \sigma} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\sigma+2) \beta^n} L(s+1, \sigma, \lambda) \times$$

$$\times \Phi(s+n+1, \lambda). \quad (2.17)$$

c_λ, s, σ — прямые, параллельные мнимой оси в плоскостях λ, s и σ справа от всех полюсов подынтегральной функции. Таким образом, мы нашли решение уравнений (1.1) в форме тройных комплексных интегралов. Вычисление этих интегралов — дело не простое. Разные авторы вычисляли их различными способами; часто неудачный способ вычисления интегралов сильно снижал точность численных результатов или приводил к серьезным ошибкам.

Из формулы (2.17), полученной методом двойных функциональных преобразований, можно вывести результаты Снайдера²⁸. Рассмотрим ливень, вызванный первичным электроном энергии E_0 . Изменив порядок интегрирования, вычислим сначала интеграл по λ . Взяв вычеты подынтегральной функции (2.17) в точках $\lambda = \lambda_1(s+n+\sigma+1)$ и $\lambda = \lambda_2(s+n+\sigma+1)$, проведя все необходимые упрощения и сделав замену переменных

$$\sigma + n + 1 = -y, \quad s + \sigma + n + 1 = s \text{ (справа } s \text{ — снайдеровское),}$$

получим уравнения (26) и (27) работы ²⁸:

$$P(E, t) = -\frac{1}{(2\pi)^2 \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \int_D ds \int_C dy \frac{\Gamma(-y) \Gamma(s+y+n+1)}{\Gamma(s+n+1) [\lambda_1(s+n) - \lambda_2(s+n)]} \times \\ \times \left(\frac{E_0}{\beta} \right)^s \left(\frac{\beta}{E} \right)^{s+y+n+1} \cdot \{A_n(s+n) [\lambda_1(s+n) + \sigma_0] K_{\lambda_1}(s+n, y) e^{\lambda_1(s+n)t} - \\ - B_n(s+n) [\lambda_2(s+n) + \sigma_0] K_{\lambda_2}(s+n, y) \cdot e^{\lambda_2(s+n)t}\} \quad (2.17')$$

и аналогично для функции $\Gamma(E, t)$. Здесь введены следующие обозначения:

$$L(s+1, \sigma+n+1, \lambda_1(s+n+\sigma+1)) = L(s+y-1, -y, \lambda_1(s)) = \frac{K_{\lambda_1}(s, y)}{\Gamma(y+1)}, \\ L(s+1, \sigma+n+1, \lambda_2(s+n+\sigma+1)) = \frac{K_{\lambda_2}(s, y)}{\Gamma(y+1)}.$$

Величины A_n и $B_n(s+y)$ определяются из условий:

$$A_N(s+N) = \\ = \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \Gamma(s+N+1) \{[\lambda_1(s+N-k) - \lambda_2(s+N)] K_{\lambda_1}(s+N-k, k) \times \\ \times A_{N-k}(s+N-k) - [\lambda_2(s+N-k) - \lambda_2(s+N)] K_{\lambda_2}(s+N-k, k) B_{N-k} \times \\ \times (s+N-k)\} / \Gamma(k+1) \Gamma(s+N-k+1) [\lambda_1(s+N-k) - \lambda_2(s+N-k)], \\ B_N(s+N) = \\ = \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \Gamma(s+N+1) \{[\lambda_1(s+N-k) - \lambda_2(s+N)] K_{\lambda_1}(s+N-k, k) \times \\ \times A_{N-k}(s+N-k) - [\lambda_2(s+N-k) - \lambda_1(s+N)] K_{\lambda_2}(s+N-k, k) \times \\ \times B_{N-k}(s+N-k)\} / \Gamma(k+1) \Gamma(s+N-k+1) [\lambda_1(s+N-k) - \lambda_2(s+N-k)]. \quad (2.18)$$

Если на границу вещества падает первичный фотон энергии E_0 , то

$$A_0(s) = B_0(s) = 1,$$

если первичный электрон, то

$$A_0^*(s) = \frac{-(\lambda_2(s) + \sigma_0)}{C(s)}; \quad B_0^*(s) = \frac{-(\lambda_1(s) + \sigma_0)}{C(s)}.$$

В случае спектра первичных фотонов вида $1/E$ с максимальной энергией E_0

$$A_0^*(s) = \frac{-(\lambda_2(s) + \sigma_0)}{sC(s)}; \quad B_0^*(s) = \frac{-(\lambda_1(s) + \sigma_0)}{sC(s)}.$$

Выражения (2.18) дают возможность последовательно выразить величины $A_N(s+N)$ и $B_N(s+N)$ через рациональные функции $s - \lambda_1(s+N)$, $\lambda_2(s+N)$ и величины $A_0(s)$ и $B_0(s)$.

Чтобы представить решение в наиболее удобной форме для получения численных результатов, мы исследуем характер поведения функций $A_N(s)$ и $B_N(s)$. Функции $\lambda_1(s)$ и $\lambda_2(s)$ имеют точки ветвления в полуплоскости $\text{Re } s \leq 0$. При обходе вокруг точки ветвления функции $\lambda_1(s)$

и $\lambda_2(s)$ чередуются. Точно теми же свойствами обладают функции $K_{\lambda_1}(s, y)$ и $K_{\lambda_2}(s, y)$.

Исследование (2.18) показывает, что $A_n(s)$ и $B_n(s)$ являются аналитическими функциями в области $\operatorname{Re} s > 0$ и что они имеют точки ветвления только там, где их имеют функции $\lambda_1(s)$ и $\lambda_2(s)$. При обходе вокруг точки ветвления функции $A_n(s)$ и $B_n(s)$ чередуются. Аналитичность функций $A_n(s)$ и $B_n(s)$ при $\operatorname{Re} s > 0$ дает нам возможность перемещать контур интегрирования на n единиц влево в n -м члене (2.17). В результате получаем:

$$P(E, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{E_0} \right)^n P_n(E, t),$$

$$P_n(E, t) = -\frac{1}{4\pi^2\beta} \int_D ds \int_C dy \frac{\Gamma(-y) \Gamma(s+y+1)}{\Gamma(s+1) [\lambda_1(s) - \lambda_2(s)]} \left(\frac{E_0}{\beta} \right)^s \left(\frac{\beta}{E} \right)^{s+y+1} \times$$

$$\times \{A_n(s) [\lambda_1(s) + \sigma_0] K_{\lambda_1}(s, y) e^{\lambda_1(s)t} - B_n(s) [\lambda_2(s) + \sigma_0] K_{\lambda_2}(s, y) e^{\lambda_2(s)t}\}. \quad (2.19)$$

Аналогичное выражение можно написать для функции $\Gamma(E, t)$. Первый член разложения решения в ряд по степеням β/E_0 использовался в ранних работах Снайтера²⁴ и Сербера³⁵. Подынтегральные выражения (2.19) не имеют точек ветвления как функции s и y .

Напомним, что функции $K_{\lambda_1}(s, y)$, $K_{\lambda_2}(s, y)$ и $C(s+y)$ имеют полюсы при $y = -s - n$. Это дает возможность вычисления интеграла по s в (2.19) при $E \ll \beta$ по вычетам. Вычислим функцию $N(E, t)$ — число частиц с энергией больше E на данной глубине t :

$$N(E, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{E_0} \right)^n N_n(E, t),$$

где

$$N_n(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \left(\frac{E_0}{\beta} \right)^s \times$$

$$\times \left[\frac{A_n(s) [\lambda_1(s) + \sigma_0] K_{\lambda_1}(s, -s) e^{\lambda_1(s)t} - B_n(s) [\lambda_2(s) + \sigma_0] K_{\lambda_2}(s, -s) e^{\lambda_2(s)t}}{s [\lambda_1(s) - \lambda_2(s)]} - \right.$$

$$- \frac{1}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \left\{ A_n(s) [\lambda_1(s) + \sigma_0] K_{\lambda_1}(s, -s) \left[\frac{s+y+1}{G_{\lambda_1}(s, y)} \right]_{y=-s-1} e^{\lambda_1(s)t} \left(\frac{E}{\beta} \right) \times \right.$$

$$\times \left(\ln \frac{\beta}{E} + f(y) \right) - B_n(s) [\lambda_2(s) + \sigma_0] K_{\lambda_2}(s, -s) \left[\frac{s+y+1}{G_{\lambda_2}(s, y)} \right]_{y=-s-1} \times$$

$$\times e^{\lambda_2(s)t} \left(\frac{E}{\beta} \right) \left(\ln \frac{\beta}{E} + g(y) \right) + O \left(\frac{E}{\beta} \right)^2 \left\{ \ln^3 \frac{\beta}{E} + \dots \right\} \left. \right\}. \quad (2.20)$$

Входящие в (2.20) функции $f(y)$ и $g(y)$ приведены в работе²⁸. Первый член в (2.20) определяет $N(0, t)$ — полное число частиц с энергией больше нуля на данной глубине t . При $t > \frac{1}{2}$ член с $\lambda_1(s)$ много больше члена с $\lambda_2(s)$ (см. также работы²⁵ и³⁶). Интеграл, зависящий от $\lambda_1(s)$, может быть приближенно вычислен методом перевала

$$N_n(E, t) = \frac{\exp(\lambda_1(s)t + ys)}{[\beta(s) + b(s)t]^{1/2}} A_0(s) \left\{ H(s) - M(s) \frac{E}{\beta} \left[\ln \frac{\beta}{E} + f(s) \right] + \right.$$

$$\left. + O \left(\frac{E}{\beta} \right)^2 \left[\ln^3 \frac{\beta}{E} + \dots \right] \right\}. \quad (2.21)$$

Здесь $t = (ys - \alpha(s)) / (-s\lambda_1'(s))$; $b(s) = s^2\lambda_1''(s)$;

$$H(s) = \frac{[\lambda_1(s) + \sigma_0] K_{\lambda_1}(s, -s)}{(2\pi)^{1/2} [\lambda_1(s) - \lambda_2(s)]}; \quad M(s) = \frac{2\sigma_0 H(s)}{\lambda_1(s) + \sigma_0}.$$

Входящие сюда функции $f(s)$ и $\alpha, \beta(s)$ были определены ранее. Величины $\lambda_1(s)$, $\alpha(s)$, $b(s)$, $H(s)$, $M(s)$, $A(s)$ и т. д. для различных значений s приведены в таблице 1 работы ²⁸. Аналогично для $\Gamma(E, t)$ получается следующее соотношение:

$$\Gamma(E, t) = \frac{N(0, t)}{E(\lambda_1(s) + \sigma_0)} + O\left(\frac{E}{\beta}\right) \left[\ln^3 \frac{\beta}{E} + \dots \right]. \quad (2.21')$$

Дифференцируя выражение (2.21), мы находим, что

$$P(E, t) = \frac{2\sigma_0 N(0, E) \left\{ \ln \frac{\beta}{E} + f(s) - 1 \right\}}{\beta [\lambda_1(s) + \sigma_0]},$$

т. е. при E , стремящейся к нулю, дифференциальный спектр электронов расходуется как $\ln E$, а дифференциальный спектр фотонов — как $1/E$. Заметим, что метод перевала может быть использован только при вычислении $N_0(t)$, $N_0^+(t)$, $N_0^*(t)$ и $N_1^*(t)$. Для вычисления остальных величин $N_n(t)$, $N_n^+(t)$ и т. д. метод перевала не применим, так как функции $A_n(s)$ обращаются в нуль при $s = 1, 2, 3, \dots, n$. Можно вычислить интеграл по s (2.20) через вычеты полюсов в левой полуплоскости. В результате мы получаем ряд по степеням t , которым можно пользоваться при численных расчетах только на очень малых глубинах (см. также ²⁵). Автор вычислил $N(E, t) = N_0(E, t)$ от первичного электрона фотона и спектра фотонов энергии $y = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Используя таблицы 1 и 2 работы ²⁸, можно вычислить отношение N_1/N_0 в случае первичного электрона как функцию глубины при некоторых значениях y . В таблице III приведены результаты вычислений для $y = 2$ и 3. Из

Таблица III

s	1,05	1,55	2,15	2,65	
t	1,91	4,49	9,4	17,3	$y=2$
t	3,14	6,75	14,1		$y=3$
N_1/N_0	0,3	0,7	1,3	1,9	

таблицы видно, что, например, при $y = 2$ на глубине в 4 t -единицы, где интенсивность кривой $N/N_{\max} \sim 1/3$, точность кривой Снайдера порядка 10–20%, а с увеличением глубины ошибка растет. Площади под кривыми при $y \geq 2$ не более чем на 3–5% отличаются от E_0/β , что автор считает

критерием применимости метода перевала для оценки интегралов. Однако при малых y первый, второй и высшие моменты кривых Снайдера значительно отличаются от точных, т. е. кривые деформированы. Они дают несколько больше частиц до максимума и несколько меньше частиц на больших глубинах. На рис. 3 приведена кривая Снайдера 1 для $y = 2$ и кривая 2, вычисленная по моментам ³⁷. Из сравнения кривых видно, что первые моменты по t у кривых Снай-

дера меньше точных значений. Так, $\bar{t} = \int_0^4 N t dt / \int_0^4 N dt$ (*), вычис-

ленные по кривой 1, на 9% меньше точного значения, $\bar{t}^2 = \int_0^4 N t^2 dt / \int_0^4 N dt$ (*)

на 13% меньше точного значения. Из рис. 3 видно, что разница между моментами $\bar{t}^n = \int_0^\infty N t^n dt / \int_0^\infty N dt$ по Снайдеру и точными будет больше, чем для моментов (*). Таким образом, кривые работы ²⁸ достаточно точны, начиная с $y \geq 4-5$.

Используя данные таблиц 1 и 2 работы ²⁸, где приведены значения функций H , M , f , ..., можно показать, что при $E/\beta = 0,01$ член $O\left(\frac{E}{\beta}\right)^2 \ln^3 \frac{\beta}{E}$ в (2.21) составляет примерно 3% от первых двух, при $E/\beta = 0,05$ — уже примерно 20%, т. е., пользуясь (2.21), энергетический спектр частиц при $E/\beta > 0,05$ вычислить невозможно. Метод Снайдера дает возможность детально вычислить энергетический интегральный спектр от 0 до $0,05 E/\beta$. Но детальный расчет спектра в этой области энергий в рамках исходных предположений не имеет физического смысла. Таким образом, метод Снайдера позволяет найти полное число частиц как функцию глубины при энергии первичных частиц $y \geq 4-5$, но практически не дает возможности вычислить энергетический спектр. Поскольку при вычислении интегралов в (2.20) членом $e^{\lambda^2(s)t}$ пренебрегаем, то полученные выражения достаточно точны только с глубины $t > 1$. В работе ³⁸ было показано, что метод перевала, если представить выражение для $N(E, t)$ в форме

$$N(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{\varphi(s, E)} ds,$$

можно с хорошей точностью ($\sim 10\%$) применять для вычисления $N(E, t)$ до $t = 0$.

Для того чтобы получить результаты работы Баба и Чакрабартти ²⁹, мы положим в (2.17) $s + \sigma + 2 = s'$, $ds = ds'$ (справа s' идентично с s работы ²⁹) и, зафиксировав контур интегрирования по λ , перемещаем контур интегрирования s_s вправо, а s_s влево. Вычисляем сначала интеграл по σ через вычеты в полюсах $\sigma = -m - 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Получающийся ряд расходитсся, но если мы возьмем только конечное число полюсов, пренебрегая остатком, и к каждому члену ряда применим обратное преобразование Лапласа, то результирующий ряд будет сходиться. Результат интегрирования по σ запишем в форме

$$P(E, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E^{-n}}{2\pi i E_0 \beta^{-n+1}} \int_{C_s} ds \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} (-1)^n \frac{1}{2\pi i} \times \\ \times \int_{C_\lambda} e^{\lambda t} d\lambda L(s+n, n-1, \lambda). \quad (2.22)$$

Неоднократно используя рекуррентное соотношение (2.13) и краевое

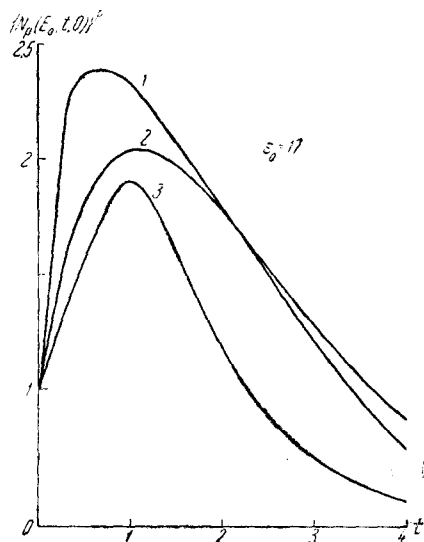


Рис. 3. Зависимость от глубины полного числа электронов $\{N_p(E_0, t, 0)\}^p$ в ливне, вызванном первичным электроном энергии $\epsilon_0 = 17$. Кривая 1 построена по данным работы ²⁸, кривая 2 — по моментам ³⁷, кривая 3 — по ²⁹.

условие для функции $L(\lambda, s)$, мы можем получить, что

$$L(s+n, -n-1, \lambda) = \prod_{k=0}^n \frac{1}{\Psi(s+k-1, \lambda)}. \quad (2.23)$$

Функция

$$\psi_n(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} e^{\lambda t} L(s+n, -n-1, \lambda) d\lambda \quad (2.24)$$

может быть найдена из выражения

$$\psi_0(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} e^{\lambda t} \frac{\lambda + \sigma_0}{[\lambda - \lambda_1(s-1)][\lambda - \lambda_2(s-1)]} d\lambda. \quad (2.25)$$

Проведя интегрирование (2.25), получим:

$$\psi_0(s, t) = \frac{(\sigma_0 + \lambda_1(s)) e^{\lambda_1(s)t}}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} + \frac{(\sigma_0 + \lambda_2(s)) e^{\lambda_2(s)t}}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}. \quad (2.25')$$

— выражение, совпадающее с формулой (8) работы²⁹. Нетрудно убедиться, используя (2.23) и (2.25), что (2.24) можно записать в форме

$$\left. \begin{aligned} \psi_n(s, t) &= \int_0^t \psi_0(s+n, t-t') \psi_{n-1}(s, t') dt' \\ \text{или} \\ \psi_n(s, t) &= \int_0^t \psi_0(s, t') \psi_{n-1}(s+1, t-t') dt', \end{aligned} \right\} \quad (2.24')$$

совпадающей с уравнениями (11) и (13) работы²⁹. Нетрудно показать, используя (2.25) и (2.24), что (2.22) можно переписать в форме

$$P(E, t) = \frac{1}{2\pi E_0 i} \int_{C_s} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\beta}{E}\right)^n \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} \psi_n(s, t) ds, \quad (2.22')$$

совпадающей с уравнением (14) работы²⁹. В работе³⁶ было показано, что

$$\psi_n(s, t) < \frac{(1+\varepsilon)^{n+1} t^n}{n!}.$$

Следовательно, ряд (2.22') равномерно и абсолютно сходится при $E > \beta t$, поэтому в (2.22') можно менять порядок суммирования и интегрирования. (2.22') есть точное решение основных уравнений теории при условии $E > \beta t$.

Введем новые функции

$$G(s, t) = \frac{\psi_1(s, t)}{\psi_0(s, t)} \quad \text{и} \quad f_n(s, t) = \psi_0(s, t) \frac{G^n(s, t)}{n!} - \psi_1(s, t) \frac{G^{n-1}(s, t)}{(n-1)!} + \dots \quad (2.26)$$

Запишем подынтегральное выражение (2.22'), заменив E^{s+n} на $\{(E + \beta G(s, t)) - \beta G(s, t)\}^{s+n}$, и разложим последнее выражение в ряд

по степеням $\beta G/(E + \beta G)$. В результате получим:

$$\begin{aligned} E_0^s \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} \frac{\Psi_n(s, t)}{\{(E + \beta G) - \beta G\}^{n+s}} = \\ = E_0^s \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} \Psi_n(s, t) \frac{1}{(E + \beta G)^{n+s}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\beta G}{E + \beta G} \right)^m \frac{\Gamma(n+s+m)}{\Gamma(m+1) \Gamma(n+s)}. \end{aligned}$$

Двойной ряд абсолютно сходится по (2.26), поэтому его члены можно переставлять. В результате получим следующее выражение функции $P(E, t)$:

$$P(E, t) = \frac{1}{2\pi i E_0} \int_{C_s} \left(\frac{E}{E + \beta G} \right)^s \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{E + \beta G} \right)^n \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} f_n(s, t) ds. \quad (2.27)$$

Из условия аналитичности и непрерывности (2.27) следует, что оно является точным решением (1.1) для всех $E \geq 0$. Для $N(E, t)$ получим:

$$\begin{aligned} N(E, t) = \sum_{n=0}^{\infty} N_n(E, t), \text{ где } N_n(E, t) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} \frac{1}{s+n-1} \left(\frac{E_0}{\beta} \right)^{s-1} \left(\frac{\beta}{E + \beta G} \right)^{s+n-1} \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} f_n(s, t) ds. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Введем функцию (см. также ³⁹)

$$\Phi_n(s, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f_n(s, t) dt, \text{ тогда } f_n(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} e^{\lambda t} \Phi_n(s, \lambda) d\lambda, \quad (2.29)$$

где p — большое действительное число такое, что все полюсы Φ_n лежат слева от пути интегрирования. После этого интеграл (2.28) можно вычислить методом двойной точки перевала. В результате получим:

$$N_n(E, t) = \frac{\exp(\Phi_n(s_n, \lambda_n))}{2\pi \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \lambda_n^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial s_n^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \lambda_n \partial s_n} \right)^2 \right\}^{1/2}}. \quad (2.30)$$

Точку перевала определяем из уравнений:

$$t + \frac{\partial \ln \Phi_n(s, \lambda)}{\partial \lambda} = 0, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} y_0 + \left[\ln \frac{\beta}{E + \beta G} - (s+n-1) \frac{\beta}{E + \beta G} \frac{\partial G}{\partial s} \right] - \frac{1}{s+n-1} + \\ + \frac{\partial}{\partial s} \{ \ln \Gamma(s+n) - \ln \Gamma(s) \} + \frac{\partial}{\partial s} \ln \Phi_n(s, \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Необходимые для численных расчетов величины приведены в ²⁹. При условии $E \gg \beta$ второй член в квадратных скобках (2.31) пренебрежимо мал по сравнению с первым. Это приводит к тому, что изменение $G(s, t)$ с s практически не меняет точку перевала. Следовательно, для высокоэнергичной части спектра учет ионизационных потерь приводит только к понижению энергии частиц на $\beta G(s_n, t)$. Для малых энергий $E/\beta \lesssim 1$, вторым членом в квадратных скобках нельзя пренебречь. Однако точка перевала меняется с E очень медленно, так что с хорошей точностью ее можно определить при $E=0$. При малых E тогда получаем следующее выражение для функции $N_n(E, t)$:

$$N_n(E, t) = \left\{ \frac{\beta G(s_n, t)}{E + \beta G(s_n, t)} \right\}^{s_n+n-1} N_n(0, t). \quad (2.30')$$

Заметим, однако, что использовать (2.30') можно лишь при условии $E_0/\beta \gg 1$, при $E_0/\beta \sim 1$ следует использовать более точное выражение (2.30). Из (2.30) легко получить выражение дифференциального энергетического спектра электронов:

$$P(E, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(E, t),$$

$$P_n(E, t) = -\frac{\partial N_n(E, t)}{\partial t} \cong \frac{s_n + n - 1}{\beta G(s_n, t)} \left\{ \frac{\beta G(s_n, t)}{E + \beta G(s_n, t)} \right\}^{s_n + n} N_n(0, t).$$

Методом двойной точки перевала можно практически вычислить лишь первые два члена ряда. Таким образом, для $P(E, t)$ получаем выражение:

$$P(E, t) \cong \text{const} \left\{ (s_0 - 1) \left(\frac{\beta G}{E + \beta G} \right)^{s_0} N_0(0, t) + (s_0 + 1) \left(\frac{\beta G}{E + \beta G} \right) N_2(0, t) \right\}. \quad (2.32)$$

Из (2.32) видно, что вклад второго члена становится больше, чем первого, начиная с энергии, меньше

$$\frac{(E + \beta G)^2}{\beta^2 G^2} \cong \frac{(s_0 + 1) N_2}{(s_0 - 1) N_0}.$$

Так, например, при $y = 10$ и $t = 20$ N_2 вносит большой вклад в спектр электронов с энергией, меньше $0,1\beta$. Дифференциальный спектр электронов по (2.32) остается при $E = 0$ конечным, тогда как согласно результатам работ ^{2, 3, 28} и др. он расходится как $\ln E$. При $E = 0$ первые два члена ряда дают значение $N(t, 0)$, заниженное в максимуме кривой

на 30–40%. Заметим, что по ²⁹ $\int_0^{\infty} N dt = \frac{E_0}{\beta}$, тогда как $\int_0^{\infty} (N_1(0, t) + N_2(0, t)) dt \cong 0,7 \frac{E_0}{\beta}$. Это различие вызвано тем, что выражение (2.32)

недоучитывает электроны малых энергий $E < \beta$. Известно, что с ростом глубины увеличивается относительное количество мягких электронов; поэтому неточность кривых работы ²⁹ быстро растет по мере развития ливня. На рис. 3 приведены: кривая 3 для $y = 2$ по данным ²⁹ и кривая 1 по данным ²⁸. Разница между кривыми в максимуме 25%, а на 4t-единицах — уже 60%. Очевидно, что ряды (2.28) и (2.32) сходятся тем быстрее, чем больше E ; поэтому решение Баба и Чакрабартти удобно при вычислении спектра электронов энергии порядка критической и больше.

Таким образом, в работах указанных авторов за последние годы были развиты новые, более совершенные математические методы. Однако им не удалось получить физически новых результатов. Физически новые результаты были получены в работе ³¹, к изложению основных результатов которой мы сейчас переходим.

6. Метод Чакрабартти и Гупта

Будем исходить из выражения функции $P(E, t)$, даваемого формулами (2.22') или (2.27). Далее, как и в работе ³³, проводя преобразование Лапласа по t уравнения (2.25), авторы получают:

$$P(E, t) = -\frac{1}{4\pi^2 \beta} \int ds \int d\lambda \left(\frac{E_0}{\beta} \right)^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\beta}{E} \right)^{s+n} \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} e^{\lambda t} \Phi_n(s, \lambda), \quad (2.33)$$

где

$$\Phi_n(s, \lambda) = \Phi_{n-1}(s, \lambda) \Phi_0(s+n, \lambda); \quad \Phi_0(s, \lambda) = \frac{\sigma_0 + \lambda}{(\lambda - \lambda_1(s))(\lambda - \lambda_2(s))}.$$

Следуя ³¹, нетрудно написать решение разностного уравнения в форме

$$\Phi_p(s, \lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \{\Phi_0(s+N+1, \lambda)\}^{p+1} \prod_{i=0}^N \frac{\Phi_0(s+i, \lambda)}{\Phi_0(s+p+i+1, \lambda)},$$

где p — произвольное число. Ряд в уравнении (2.33) сходится при условии $E > \beta t$. Наша задача — найти решение уравнений, пригодное при любых E . Как и в работе ³⁴, представим ряд (2.33) в форме контурного интеграла, который при $E > \beta t$ совпадает с рядом (2.33) и является его аналитическим продолжением в области $E < \beta t$ *). Мы имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\beta}{E} \right)^{s+n} \Gamma(s+n) \Phi_n(s, \lambda) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(s+p) \Gamma(p+1) \Gamma(-p) \left(\frac{\beta}{E} \right)^{s+p} \Phi_p(s, \lambda) dp, \end{aligned}$$

где $-1 < \gamma < 0$. Замыкая контур интегрирования направо полукругом бесконечно большого радиуса и беря вычеты подынтегрального выражения в точках $p = n$, нетрудно убедиться в справедливости написанного равенства. Подставляя предыдущее равенство в выражение (2.33) и проводя интегрирование по λ , получим после некоторых упрощений:

$$\begin{aligned} P(E, t) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(E, t), \quad \text{где } P_m(E, t) = \\ = - \frac{1}{4\pi^2 \beta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \left(\frac{E_0}{\beta} \right)^{s-1} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dp \frac{\Gamma(s+p) \Gamma(-p)}{\Gamma(s)} \left(\frac{\beta}{E} \right)^{s+p} \times \\ \times \left[\frac{\sigma_0 + \lambda_1(s+m)}{\lambda_1(s+m) - \lambda_2(s+m)} G_m(s, p) \exp \lambda_1(s+m)t - \right. \\ \left. - \frac{\sigma_0 + \lambda_2(s+m)}{\lambda_1(s+m) - \lambda_2(s+m)} F_m(s, p) \exp \lambda_2(s+m)t \right], \quad (2.34) \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} G_m(s, p) = \Gamma(p+1) \lim_{N \rightarrow \infty} \{\Phi_0(s+N+1, \lambda_1(s+m))\}^{p+1} \times \\ \times \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^N \Phi_0(s+i, \lambda_1(s+m)) \prod_{i=0}^N 1/\Phi_0(s+p+i+1, \lambda_1(s+m)), \\ F_m(s, p) = \Gamma(p+1) \lim_{N \rightarrow \infty} \{\Phi_0(s+N+1, \lambda_2(s+m))\}^{p+1} \times \\ \times \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^N \Phi_0(s+i, \lambda_2(s+m)) \prod_{i=0}^N 1/\Phi_0(s+p+i+1, \lambda_2(s+m)). \end{aligned}$$

Выражение (2.34) существенно отличается от (2.27). Напомним, что $\text{Re } \lambda_1(s)$ растет с ростом Res . Следовательно, вклад члена, содержащего

*) Заметим, что впервые подобный прием при вычислении энергетического спектра частиц с учетом ионизационных потерь был использован в работах С. З. Бельского (см. ²). В работе ³⁰ этот способ получения решения, пригодного для любых E , был проведен непоследовательно.

$\exp \lambda_1(s+1)t$, много меньше вклада члена, содержащего $\exp \lambda_1(s)t$, и так далее. В выражении (2.34) член $P_m(E, t)$ пропорционален $\exp \lambda_1(s+m)t$, тогда как в выражении (2.27) — пропорционален $\exp \lambda_1(s)t$. Таким образом, ряд (2.34) значительно быстрее сходится, чем (2.27). При $y_0 > 1$ в (2.34) вклад первого члена много больше вклада всех остальных для энергий $E \geq 0$. Легко видеть, что (2.34) с точностью до обозначений совпадает с выражением Снайдера (2.19). Из (2.34) легко получить выражение $N(E, t)$. Далее, интегралы в выражениях $P(E, t)$ и $N(E, t)$ вычислялись способом двойной точки перевала. В предельном случае $(s+p) \rightarrow 0$, что соответствует $E \rightarrow 0$, получаемые выражения совпадают с соответствующими формулами Снайдера. Когда

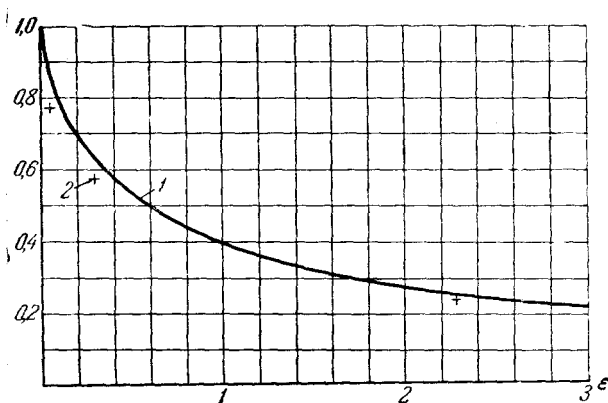


Рис. 4. Энергетический равновесный спектр И. Е. Тамма и С. З. Беленького²⁸ (сплошная кривая). Крестиком нанесен спектр электронов в максимуме лавины по данным Чакрабарти и Гупта³¹.

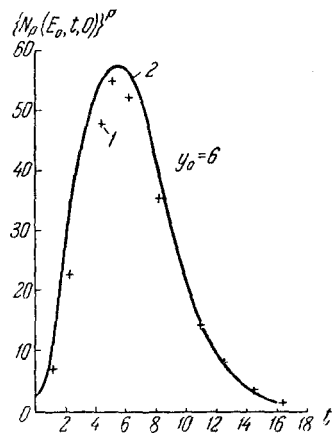


Рис. 5. Зависимость от глубины полного числа электронов $\{N_p(E_0, t, 0)\}^p$ в ливне от первичного электрона энергии $y_0=6$. Сплошная кривая построена по данным работы², крестиками обозначена кривая, взятая из³¹.

— $p \rightarrow 0$, что соответствует $E \rightarrow \infty$, получаемые выражения совпадают с решением основных уравнений теории без учета ионизационных потерь. Величины $P(E, t)$ и $N(E, t)$ для промежуточных значений E легко получить, используя таблицы 1 и 2 работы³¹. Попытки авторов³¹ оправдать использование в тяжелых элементах (Рb и другие) решения Баба и Чакрабарти²⁹ для $E=0$ на том основании, что оно близко к $N(E_1, t)$, полученному в³¹ при $y = \ln E_1/\beta = -2$ (в свинце это значение $E_1 \cong 2m_e c^2$), нам представляются неудовлетворительными по следующим соображениям. Из основных уравнений теории легко получить «закон сохранения энергии» в каскадной теории

$$\int_0^\infty N(0, t) dt = \frac{E_0}{\beta}.$$

Этому соотношению удовлетворяет решение $N(0, t) = \sum_{m=0}^\infty N_m(0, t)$ (ср. (2.28)), полученное Баба и Чакрабарти, и не удовлетворяют его первые два члена, которые недоучитывают подавляющее количество электронов малых энергий. Считать же, что их решение при $E=0$ описывает каскадный процесс в тяжелых элементах при $E_1 > 2m_e c^2$ (из-за неточности основ-

ных физических предположений в области энергий $E = (0 \div 2) m_e c^2$, не представляется возможным, потому что их решение не учитывает изменения с энергией суммарного коэффициента поглощения фотонов и резерфордского рассеяния заряженных частиц, играющих определяющую роль в развитии лавины в тяжелых веществах. Таким образом, метод Чакрабарти и Гупта позволяет вычислить каскадные кривые и энергетические спектры частиц на разных глубинах с учетом ионизационных потерь в легких веществах при $y > 1$. То есть, он позволяет получить точное полное решение одномерной задачи каскадной теории. Представляет интерес сравнить полученные результаты с результатами С. З. Беленького и других авторов. Как уже отмечалось, решение, полученное Баба и Чакрабарти без учета ионизационных потерь, совпадает с результатами других авторов. Зависимость полного числа частиц от глубины, полученная в³¹, совпадает с результатами Снайдера и Беленького. На рис. 4 приведен энергетический равновесный спектр 1 и спектр в максимуме лавины 2, построенный по данным работы³¹. Кривые 1 и 2 достаточно близки между собой, исключая область $E \sim 0, 1\beta$, где различие достигает 20%. Однако, в этой области энергий основные физические предположения теории не точны. На рис. 5 приведена зависимость числа частиц с энергией больше E от глубины в ливне, вызванном первичным электроном энергии $y_0 = 6$ по данным³¹ (кривые 1) и по данным работы² (кривые 2). Из рисунка видно, что кривые 1 и 2 очень хорошо совпадают друг с другом. Проведенное сравнение показывает, что приближенное полное решение одномерной задачи, полученное С. З. Беленьким (см., например,²), очень хорошо совпадает с точным.

7. Решение обобщенных уравнений теории

Рассмотрим обобщенные основные уравнения каскадной теории, учитывающие генерацию электронов и фотонов непрерывно вдоль всего пути развития каким-либо проникающим излучением. Пусть $S_p(E, t)dE dt$ — число электронов, а $S_\Gamma(E, t)dE dt$ — число фотонов энергии $(E, E + dE)$, рожденных внешним излучением в слое dt . Тогда основные уравнения каскадной теории запишутся в форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P(E, t)}{\partial t} &= L_1[P, \Gamma] + \beta \frac{\partial P}{\partial E} + S_p(E, t), \\ \frac{\partial \Gamma(E, t)}{\partial t} &= L_2[P, \Gamma] + S_\Gamma(E, t). \end{aligned} \right\} \quad (1.1')$$

Здесь L_1 и L_2 — линейные интегральные операторы, учитывающие процессы радиационного торможения и образования пар; в области малых энергий операторы приближенно учитывают комптон-эффект. Представляет интерес рассмотреть уравнения (1.1'), выбрав функции источника в форме:

$$a) S_p(E, t) = 0, S_\Gamma(E, t) = \delta(E_0 - E) e^{-\mu t}$$

и

$$б) S_\Gamma(E, t) = \begin{cases} E^{-\gamma-1} e^{-\mu t} & \text{для } E > E_k, \\ 0 & \text{для } E < E_k. \end{cases}$$

Прделав все необходимые преобразования, аналогично § 4, получим

первый член разложения $P(\lambda, s)$ по степеням β/E_0 в форме

$$P(\lambda, s) = \frac{2\sigma_0 E_0 s \Gamma(s+1)}{\beta(\lambda+\mu)(\lambda+\sigma_0)\Gamma(s+2)} \varepsilon_0^{-s+s_1-1} E_0^s \int_0^1 \tau^{s-1} (1-\tau)^{-s+s_1-1} d\tau.$$

Переходя от переменных λ и s к переменным t и E , получим следующие выражения функции $N_p(t, E)$:

$$N_p(t, E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{H_1(s) D_2(s)}{s} G(s, \varepsilon) \exp(\lambda_1(s)t + ys - \ln(\lambda_1(s) + \mu)) ds,$$

где $D_2(s) = 2\sigma_0 [f(\lambda_1(s))]^s / (\lambda_1(s) + \sigma_0) \Gamma(s+2)$, функция $G(s, \varepsilon)$ определяется уравнением (2.11). Если $\varepsilon \gg 1$, то $G(s, \varepsilon) = \Gamma(s+1)/\varepsilon^s$ и

$$N_p(t, E) = \frac{H_1(s) D_2'(s) \exp\{ys + \lambda_1(s)t - \ln(\lambda_1(s) + \mu)\}}{s \sqrt{2\pi \lambda_1''(s) t - \frac{[\lambda_1''(s)(\lambda_1(s) + \mu) - \lambda_1'^2(s)]}{(\lambda_1(s) + \mu)^2}}} \quad (2.35)$$

где $D_2'(s) = B(s)/(\lambda_1(s) + \sigma_0)$, а $y = \ln E_0/E$; выражение (2.35) совпадает с решением уравнений (1.1') без учета ионизационных потерь. При условии $y \gg 1$ (здесь $y = \ln E_0/\beta$) и энергии E порядка критической энергии β и меньше, получим следующее выражение для $N_p(t, E)$:

$$N_p(t, E) = \frac{H_1(s) D_2'(s) \exp\{ys + \lambda_1(s)t - \ln(\lambda_1(s) + \mu)\}}{s \left\{ 2\pi \lambda_1''(s) t - \frac{[\lambda_1''(s)(\lambda_1(s) + \mu) - \lambda_1'^2(s)]}{(\lambda_1(s) + \mu)^2} \right\}^{1/2}} G(s, \varepsilon), \quad (2.36)$$

где $\varepsilon = Ef(\lambda_1(s))/\beta$. Параметр s в (2.35) и (2.36) определяется из уравнения

$$\lambda_1'(s) = - \frac{y}{t - \frac{1}{\lambda_1(s) + \mu}}. \quad (2.37)$$

Из уравнения (2.37) видно, что при стремлении t к бесконечности s не растет неограниченно (как в случае уравнений без источника), а стремится к $\lambda_1(s) = -\mu$. Таким образом, начиная с некоторой глубины, начинает устанавливаться равновесие электронно-фотонной компоненты с генерирующим его излучением, поглощающимся по экспоненциальному закону с коэффициентом поглощения $1/\mu$. На глубинах, больших максимального пробега электронно-фотонной лавины, будет достигнуто равновесие между генерирующей и ливневой компонентой. Случай равновесия рассматривался в работах ^{3,40}. Полученные результаты можно обобщить на функцию генерации степенного вида. Аналогично (2.36) получим для $N_p(E_0, t, E)$ выражение в форме суммы двух членов $N_{p1}(E_0, t, E)$ и $N_{p2}(E_0, t, E)$. Для $N_{p1}(E_0, t, E)$ при $E < E_k$ получим следующее выражение:

$$N_{p1}(E_0, t, E) = - \frac{H_1(s) D_3(s) \exp\{ys + \lambda_1(s)t - \ln(\lambda_1(s) + \mu)\}}{s (2\pi)^{1/2} \left\{ \lambda_1''(s) t - \frac{[\lambda_1''(s)(\lambda_1(s) + \mu) - \lambda_1'^2(s)]}{(\lambda_1(s) + \mu)^2} \right\}^{1/2}} G(s, \varepsilon), \quad (2.38a)$$

где

$$D_3(s) = \frac{2\sigma_0 E_k^{-\gamma} [f(\lambda_1(s))]^s}{(\lambda_1(s) + \sigma_0) \Gamma(s+2) (s-\gamma)}; \quad y = \ln E_k/\beta; \operatorname{Re} s < \gamma.$$

Параметр s определяется из уравнения (2.37). При $E > E_k$, учитывая полюс $s = \gamma$, получим

$$N_{p1}(E_0, t, E) = -\frac{H_1(\gamma) B(\gamma) \Gamma(\gamma+1)}{\gamma(\lambda_1(\gamma) + \sigma_0)(\lambda_1(\gamma) + \mu)} e^{\lambda_1(\gamma)t} \frac{1}{E^\gamma}. \quad (2.38'a)$$

Для второго члена получим:

$$N_{p2}(E_0, t, E) = -\frac{H_1(s) D(s) \exp\{\lambda_1(s)t - \ln(\lambda_1(s) + \mu)\} \{A_1(\varepsilon) + A_2(\varepsilon)\}}{s(2\pi)^{1/2} \left\{ \lambda_1''(s)t - \frac{[\lambda_1'(s)(\lambda_1(s) + \mu) - \lambda_1'^2(s)]}{(\lambda_1(s) + \mu)^2} \right\}^{1/2}} \quad (2.38б)$$

Здесь

$$A_1(\varepsilon) = \frac{2\sigma_0\beta^{-\gamma}}{\Gamma(\gamma+2)} \varepsilon \int_0^1 \frac{(1-\tau)^\gamma}{\tau^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon(1-\tau)}{\tau} \right]^n \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(-n-\gamma) d\tau,$$

$$A_2(\varepsilon) = \frac{2\sigma_0\beta^{-\gamma}\varepsilon^{-\gamma+1}}{\Gamma(\gamma+2)} \int_0^1 \tau^{\gamma-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon(1-\tau)}{\tau} \right]^n \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(-n+\gamma) d\tau,$$

$D(s) = \frac{[f(\lambda_1(s))]^\gamma \Gamma(\gamma-s)}{\lambda_1(s) + \sigma_0}$; s определяется из уравнения

$$t = \frac{1}{\lambda_1(s) + \mu}.$$

Таким образом, формулы (2.38) определяют $N_p(E_0, t, E)$ в случае степенного вида функции генерации. Заметим, что член $N_{p2}(t, E)$ значительно меньше $N_{p1}(t, E)$.

Все разобранные до сих пор методы решения основных уравнений теории основывались на использовании функциональных преобразований. Напомним, что успех метода функциональных преобразований связан с использованием в теории асимптотических выражений сечений процессов радиационного торможения и образования пар, являющихся однородными функциями энергий первичной и вторичной частиц. Если опираться в теории на более точные сечения, не обладающие свойством однородности, то аппарат функциональных преобразований становится весьма громоздким и непроходимым. Даже для легких элементов использование асимптотических выражений сечений вместо точных приводит к некоторым ошибкам при определении функции $\bar{N}(E_0, t, E)$ ⁴¹. В работе⁴¹ основные уравнения теории решались методом возмущений. Первым приближением служило решение Снайтера²⁸, полученное в приближении «В». Поправка к нему вычислялась при использовании более точной аппроксимации бете-гайтлеровского сечения

$$R(E, E') = \frac{R_0(E, E')}{1 + k \left| \frac{E'}{E(E-E')} \right|},$$

отличающейся от точного сечения не более чем на 2%. Здесь $K = \frac{mc^2}{Z^{1/3}} \cdot \frac{255}{15,6 - \frac{4}{3} \ln Z}$, а R_0 — сечение в случае полного экранирования.

Результаты, полученные точными численными расчетами, справедливы только в случае легких элементов и высоких энергий $\ln E_0/\beta > 1$ первичных частиц. По сравнению с кривыми Снайтера, у формально более точных кривых максимум несколько ниже и лежит на большей глубине. Немного, на 10–15%, уменьшается число частиц на первых t -единицах поглотителя и соответственно увеличивается число частиц на больших

глубинах. Численные результаты даны в такой форме, что можно вычислить поправку к решению в случае полного экранирования в любом легком веществе. В работе ⁴¹ не учитывается комптон-эффект. Напомним, что в легких веществах суммарный коэффициент поглощения фотонов за счет процессов образования пар и комптон-эффекта с хорошей точностью остается постоянным вплоть до энергий $\sim 10^6$ эв. Поэтому результаты теории с асимптотическими сечениями более точны в легких веществах. Можно ожидать, что они отличаются от точных не более чем на 10%.

8. Другие способы решения

Баба и Гайтлер ⁴² развили другой метод решения основных уравнений теории. Он заключается в следующем. Пусть на границу слоя вещества при $t=0$ падает электрон энергии E_0 . Сначала вычисляется вероятность $f_0(E, E, t)$ этому электрону дойти до глубины t с энергией, большей E . Затем определяется число фотонов энергии больше E , испущенных электроном в различных точках его пути и подсчитывается число электронов первого поколения $f_1(E_0, E, t)$, образованных фотонами и достигающих глубины t с энергией больше E . Аналогично вычисляется число электронов следующих поколений, приходящих на глубину t с энергией больше E . Полное число электронов определяется в виде суммы электронов различных поколений

$$N(E_0, E, t) = f_0(E_0, E, t) + f_1(E_0, E, t) + f_2(E_0, E, t) + \dots$$

Ряд сходится достаточно быстро, если E порядка энергий первичной частицы E_0 и t не больше нескольких лавинных единиц. Во всех расчетах по методу последовательных столкновений используют упрощенные сечения процессов радиационного торможения и образования пар в форме полного экранирования. Ионизационными потерями и эффектом Комптона пренебрегают. Используют формулу Бете—Гайтлера ¹³ для разброса в потерях энергии при излучении, полученную без учета потерь электронов на ионизацию. В работах ^{42,43} были вычислены величины $\{N_p(E_0, E, t)\}^p$. В работе ⁴⁴ были вычислены величины $\{N_p(E_0, E, t)\}^p$, $\Gamma_p(E_0, E, t)$ и $\Gamma_\Gamma(E_0, E, t)$. В работе ⁴⁵ на электронной счетной машине методом последовательных столкновений были рассчитаны функции распределения N , P и Γ от спектра первичных фотонов вида $1/E$ при $E < E_0$ и 0 при $E > E_0$. В работах ⁴²⁻⁴⁴ функции распределения рассчитаны в интервале глубин $l = t/\ln 2$ от 0,2 до 5 и энергий $\ln E_0/E$ от 2 до 10. В работе ⁴⁵ — в интервале глубин t от 0,125 до 20,0 и энергий E_0/E от 0,9 до 0,00675. В ⁴⁶ были на электронной счетной машине рассчитаны интегральные спектры электронов и фотонов в ливне от первичного электрона и фотона в интервале энергий $\lg E_0/E$ от 1 до 10 и глубин t от 0,1 до 5,0. Авторы решали задачу без учета ионизационных потерь с точными выражениями сечений в форме полного экранирования. Как обычно, решение было получено в форме интеграла в комплексной плоскости, который авторы рассчитывали на электронной машине. Оказалось, что эти же величины в более ранних работах ⁴²⁻⁴⁴ были сосчитаны с ошибкой $\sim 10\%$. Эту неточность можно объяснить двумя причинами: использованием упрощенных сечений и приближенностью применяемых численных методов *).

В работах ⁴⁷ были написаны уравнения для функции распределения числа частиц, рожденных в слое вещества между t и $t+dt$ с энергией

*) Нами были проведены методом перевала расчеты тех же функций примерно в тех же интервалах энергий и глубин. Оказалось, что применение метода перевала вносит ошибку не более 10%.

в месте рождения между E , $E + dE$. В этих работах было получено решение уравнений для среднего числа частиц $\varepsilon\{P(E_0, E, t)\}$, рожденных в слое dt с энергией в месте рождения в интервале dE без учета ионизационных потерь. Так же было получено в форме абсолютно сходящегося ряда решение проинтегрированных по t уравнений с учетом ионизационных потерь. Правда, последнее решение почти не исследовано и не доведено до численных результатов. Отметим, что величина $\varepsilon\{P(E_0, E, t)\}$ более удобна для сравнения с экспериментами, выполненными с фотопластинками и диффузионными камерами. В ⁴⁸ было получено решение этих уравнений с учетом ионизационных потерь. Кроме того, в ⁴⁸ показано, что без учета ионизационных потерь число частиц, рожденных в слое от t_1 до t_2 с энергией E (или больше E) в месте рождения $\varepsilon\{P(E, t)\}$ равно площади под соответствующей каскадной кривой от t_1 до t_2 . С учетом ионизационных потерь первая величина всегда больше второй. В предельном случае при $E \rightarrow 0$ и $t_1 = 0$, а $t_2 = \infty$, $\varepsilon\{N_p(E_0, 0, t)\} \rightarrow \infty$, тогда как вторая величина остается ограниченной. Получено аналитическое выражение для средней энергии, приходящейся на данной глубине на одну заряженную частицу ливня. Приведены подробные таблицы величины $\varepsilon\{N_p(E, t)\}$ с учетом ионизационных потерь.

9. Каскадная теория для тяжелых веществ

В тяжелых веществах, где образование ливней происходит особенно интенсивно, каскадная теория встречается с некоторыми специфическими трудностями. Первая из них: в тяжелых веществах суммарный коэффициент поглощения фотонов сильно зависит от энергии. До сих пор мы считали этот коэффициент постоянным, что следует из асимптотического выражения для вероятности образования пар. Вторая трудность: рассеяние лавинных частиц в тяжелых веществах весьма велико. Например, в свинце критическая энергия $\beta = 6,4$ Мэв. Известно, что в районе максимума лавины больше двух третей частиц имеют энергию меньше критической, для них средний квадрат угла многократного рассеяния $\overline{\vartheta^2} = \left(\frac{E_k}{E}\right)^2 \gg 1$, где $E_k = 21$ Мэв. Поэтому в тяжелых веществах необходимо рассматривать уравнения с учетом рассеяния, которые в приближении многократного рассеяния (приближении Л. Д. Ландау) ⁴⁹ выглядят так:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta \frac{\partial P}{\partial t} &= L^1 [P(t, E, \vartheta) \Gamma(t, E, \vartheta)] + \frac{E_k^2 \Delta_\vartheta P(t, E, \vartheta) / 4E^2}{\beta \frac{\partial P}{\partial E}}, \\ \cos \vartheta \frac{\partial \Gamma}{\partial t} &= L_2 [P(t, E, \vartheta), \Gamma(t, E, \vartheta)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Здесь $\Delta_\vartheta = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) / \sin \vartheta$ — оператор Лапласа, $E_k = E_s \left(\frac{L_{\text{рез}}}{L_{\text{рад}}} \frac{1}{2} \right)^{1/2}$,

$E_s = mc^2 \sqrt{4\pi \cdot 137} = 21$ Мэв. Если на слой вещества при $t = 0$ вертикально падает электрон или фотон энергии E_0 , то граничные условия запишутся в форме:

$$P(0, E, \vartheta) = \delta(E_0 - E) \delta(\vartheta), \quad \Gamma(0, E, \vartheta) = 0$$

или

$$P(0, E, \vartheta) = 0, \quad \Gamma(0, E, \vartheta) = \delta(E - E_0) \delta(\vartheta).$$

В ряде работ делались попытки преодолеть указанные выше трудности теории для тяжелых веществ и получить решение уравнений (1.1) с переменным $\sigma(E)$ или найти решение уравнений (2.39), учитывающих рассеяние, с переменным $\sigma(E)$. В работах ⁵⁰ вычислялись каскадные кривые в свинце. Зависимость $\sigma(E)$ от энергии грубо аппроксимировалась прямыми линиями в различных областях энергий. Функция $N(E_1, t)$ при E_1 столь больших, что можно считать $\sigma = \sigma_0$ (в работе E_1 принималось равной $3 \cdot 10^8$ эв), бралась из работы ³ и вводилась в уравнения для функции $N(E, t)$, соответствующей $E < E_1$, как источник. Полученные для $N(E, t)$ уравнения решались очень сложными численными методами. Авторы получили правильный качественный вывод о большей проникающей способности ливня в тяжелых веществах за счет большей проникающей способности фотонов, энергия которых близка к критической в данном веществе. Однако вычисления авторов внутренне противоречивы, так как полученные ими кривые не удовлетворяют закону «сохранения энергии» в каскадной теории —

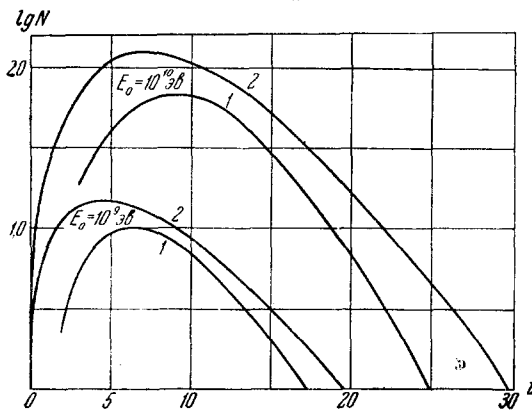


Рис. 6. Каскадные кривые в свинце от первичных электронов энергии $E_0 = 10^9$ и 10^{10} эв, построенные по моментам (2)⁵¹ и по данным работ ⁵⁰ (1).

ния фотонов от энергии ²⁶. Каскадные кривые, полученные в ⁵⁰, недоучитывают значительное количество электронов малых энергий. Они более правильны на небольших глубинах, с ростом глубины быстро растет относительное число мягких электронов и, следовательно, неточность кривых. На рис. 6 приведены кривые от первичных электронов энергии 10^9 и 10^{10} эв по ⁵⁰ и построенные по моментам ⁵¹. Каскадные кривые отличаются друг от друга более чем на 40%. Заметим, что на самом деле различие несколько больше, так как в ⁵⁰ и ⁵¹ использовались различные значения критической энергии для свинца. Учитывая все сказанное, эти каскадные кривые количественно не представляются удовлетворительными.

В работе ⁵² методом, аналогичным использованному в ⁵³, была выведена приближенная формула для $N(E, t)$, причем утверждается, что эта формула пригодна при любых Z и отношениях $E_0/\beta \gg 1$. При выводе была использована аппроксимация сечений Бете—Гайтлера, предложенная в ⁴¹. Ионизационные потери учитывались приближенно:

$$N(E_0, E, t) = \frac{e^{K_0}}{V^{t+K_1}} \exp(-t + 2\sqrt{(t+K_1)(y+K_2)}), \quad (2.40)$$

где $K_n = \frac{K_{n0} + \beta K_{n1}(Z)/2, 3}{E + \beta}$; $y = \ln\{E_0/(E + \beta/2, 3)\}$; $\beta \cong 700/(Z + 1, 2)$ — критическая энергия. Величины K_{n0} и K_{n1} приведены в таблице IV. На

$\int_0^\infty N(0, t) dt = E_0/\beta$. Площади

под их кривыми от первичных электронов энергии 10^9 и 10^{10} эв равны примерно $0,7E_0/\beta$. Кроме того, спектры электронов в максимуме лавины в воздухе и свинце, по данным ⁵⁰, значительно отличаются друг от друга и от «равновесного» спектра, который в максимуме лавины почти одинаков при любой зависимости коэффициента поглощения

Таблица IV

K_{00}	K_{01}	K_{10}	K_{11}	K_{20}	K_{21}
-1,22	$-0,9 \ln \left(\frac{Z}{10} + 1 \right)$	0,02	$0,13 \ln \left(\frac{Z}{10} + 1 \right)$	-0,9	$0,77 \ln \left(\frac{Z}{10} + 1 \right)$

рис. 7, 8 приведены кривые $N(E_0, E, t)$ в воздухе и свинце, построенные по формуле (2.40) при $E_0/\beta = 100$. При $t=0$ $N(E, t)$ в воздухе меняется от 2,29 до 2,35, причем растет с ростом E , в свинце $N(E, t)|_{t=0}$

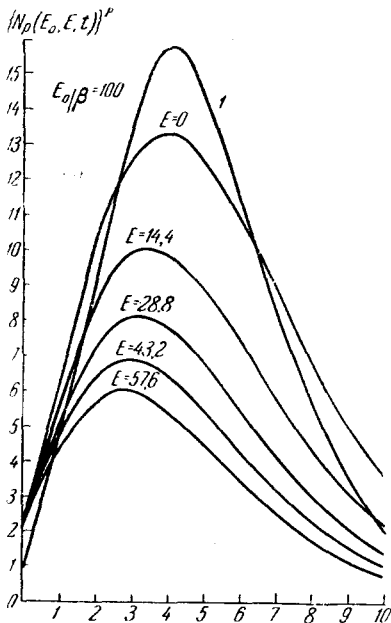


Рис. 7. Зависимость от глубины числа электронов с энергией больше E в ливне, вызванном электроном энергии $E_0/\beta=100$ по данным ⁵². Кривая 1— $\{N_p(E_0, t, 0)\}^p$ —построена по данным ²⁸.

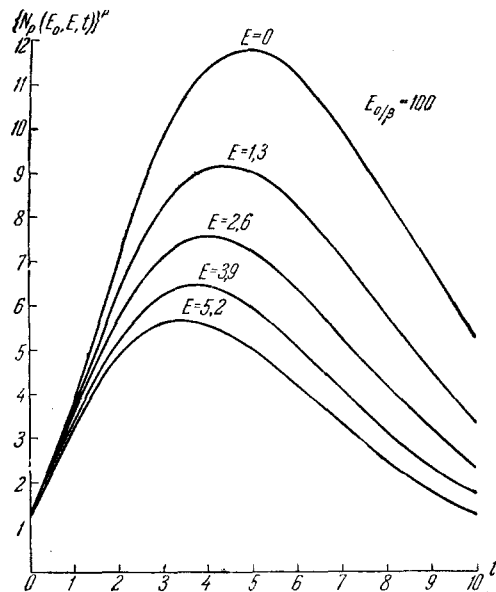


Рис. 8. То же, что и на рис. 7, но в свинце.

меняется с ростом E от 1,15 до 1,33. $dN(0, t)/dt|_{t=0} = 4,8$ в свинце и равно 2,5 для воздуха, тогда как точное значение $dN/dt|_{t=0} = 0$. На том же рисунке приведена кривая 1 для воздуха, построенная по формулам Снайдера, она отличается от кривых ⁵² за максимумом на 25—35% и более. Кроме того, каскадные кривые в свинце от первичных электронов больших энергий порядка $10^{10} - 10^{11}$ эв, построенные по (2.40), значительно отличаются на больших глубинах от кривых, построенных по методу моментов.

На рис. 9 приведен равновесный спектр электронов 1 и спектры в максимуме лавины в воздухе и свинце 2 по данным ⁵². Спектры в максимуме для воздуха и свинца совпадают друг с другом, но значительно, на 30% и более, отличаются от равновесного спектра. В ³ показано, что равновесный спектр, полученный И. Е. Таммом и С. З. Бельским, при $E > 10^7$ эв не более чем на 4% отличается от точного, тогда как спектр, полученный по данным ⁵², при $E = 10^7$ эв отличается от равновесного на 28%. Кроме того,

авторы⁵² не учитывают рассеяние, которое велико в тяжелых веществах. На том же рисунке приведены энергетические спектры электронов 3 и 4 по данным работ² и⁵² соответственно, на глубине 8 t -единиц (каскадный параметр $s=1,4$) в воздухе, эти спектры значительно отличаются друг от друга, например при $E=10^7$ эв на 22%.

В⁵² развит итерационный метод решения основных уравнений теории. Сложными численными методами вычислялась первая поправка к реше-

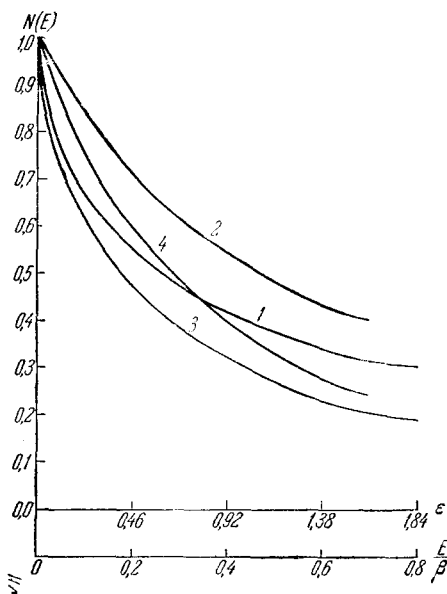


Рис. 9. Кривая 1—равновесный спектр электронов²⁶, кривая 2 и крестики около нее—спектр в максимуме лавины в воздухе и свинце соответственно по⁵², кривые 3 и 4—спектры электронов на глубине 8 t -единиц по данным² и⁵² соответственно.

ной картины ливня в легких веществах. Особенно полно эта задача решена в², а также³¹ при условии $\ln E_0/\beta > 1$ и $t > 1$. Однако разобранные методы не позволяют получить решения в энергетической области $E_0/\beta \sim 1$ в легких веществах и удовлетворительного решения с возможно более точным учетом рассеяния в тяжелых веществах при любых E_0 , особенно в энергетической области $E_0/\beta \sim 1$. Возможен иной подход к решению задачи, а именно можно определить функцию по ее моментам. Применению метода моментов в каскадной теории посвящена следующая глава.

III. РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ. МЕТОД МОМЕНТОВ

10. О вычислении моментов функции распределения лавинных частиц

Напомним еще раз, что вычисление каскадной кривой и энергетических спектров частиц встречает значительные трудности в тех случаях, когда использование асимптотических выражений сечений процессов образования пар и радиационного торможения незаконно, когда необходимо

использованию асимптотических сечений. При вычислении поправки использовалась аппроксимация сечений Бете—Гайтлера, предложенная в⁴¹. Автором были рассчитаны только две кривые для значений $\ln \frac{E_0}{\beta} = 3,69$ и 5 от первичного электрона в свинце. Рассеяние не учитывалось. Разработанный метод применим при условии $\ln \frac{E_0}{\beta} > 1$, причем получить энергетические спектры частиц, по-видимому, не представляется возможным из-за чрезвычайной сложности метода. В⁵⁴ численными методами, как и в⁵², были получены каскадные кривые в свинце в энергетической области 10^9 — 10^{11} эв. Однако в этой работе рассеяние учитывалось некорректно, что приводит к заметным ошибкам, особенно на больших глубинах.

Таким образом, с помощью разобранных выше методов решения основных уравнений теории, большинство из которых основано на методе функциональных преобразований, удастся получить довольно полное описание усредненной одномер-

учитывать рассеяние лавинных частиц, а также когда энергия первичной частицы сравнима с критической. Все эти случаи представляют большой практический интерес. Вычисление моментов является многообещающим методом решения поставленной задачи.

Определим моменты функции распределения следующей формулой:

$$\bar{t}^n(E_0, E) = \frac{\int_0^\infty f(E_0, t, E) t^n dt}{\int_0^\infty f(E_0, t, E) dt}. \quad (3.1)$$

С. З. Беленьким были получены рекуррентные формулы, позволяющие последовательно вычислить все моменты каскадной кривой ⁵⁵:

$$\{\bar{t}_p^n(E_0, 0)\}^p = \frac{n}{E_0} \int_0^{E_0} [P_p(E_0, E) \{\bar{t}_p^{n-1}(E, 0)\}^p + \Gamma_p(E_0, E) \{\bar{t}_p^{n-1}(E, 0)\}^\Gamma E dE] \quad (3.2)$$

и аналогичная формула для $\{\bar{t}_p^n(E_0, 0)\}^\Gamma$. Здесь $\{\bar{t}_p^n(E_0, 0)\}^{p, \Gamma}$ — n -е моменты функции распределения электронов с энергией больше нуля в ливне, созданном первичным электроном или фотоном. $P_p(E_0, E)$ и $\Gamma_p(E_0, E)$ — равновесные спектры электронов и фотонов в ливне, созданном первичным электроном энергии E_0 . Функции P_p и Γ_p входят в рекуррентную формулу в качестве нулевых моментов. В ⁵⁵ эта формула была обобщена на случай произвольного спектра первичных частиц. В тяжелых веществах, где образование ливней происходит особенно интенсивно, велико рассеяние лавинных частиц. Влияние рассеяния на величину моментов и форму кривой в тяжелых веществах исследовалось в ⁵⁶. Там была получена рекуррентная формула, позволяющая последовательно вычислить все моменты функции с учетом зависимости $\sigma(E)$ от энергии, рассеяния и ионизационных потерь в случае δ -образного спектра первичных частиц:

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{t}_p^n(E_0, 0)\}^p &= \frac{n}{E_0} \int_0^{E_0} \{P_{p, 0, n}(E_0, E) \{\bar{t}_p^{n-1}(E, 0)\}^p + \\ &\quad + \Gamma_{p, 0, n}(E_0, E) \{\bar{t}_p^{n-1}(E, 0)\}^\Gamma\} E dE, \\ \{\bar{t}_p^n(E_0, 0)\}^\Gamma &= \frac{n}{E_0} \int_0^{E_0} \{P_{\Gamma, 0, n}(E_0, E) \{\bar{t}_p^{n-1}(E, 0)\}^p + \\ &\quad + \Gamma_{\Gamma, 0, n}(E_0, E) \{\bar{t}_p^{n-1}(E, 0)\}^\Gamma\} E dE, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где $P_{p, 0, n}(E_0, E) = \int_0^\infty \int_{(\omega)} P_p(t, E_0, E, \vartheta) \cos^n \vartheta d\omega dt$. Аналогичные формулы

были получены для моментов $\{\bar{t}_\Gamma^n(E_0, 0)\}^{p, \Gamma}$. Заметим, что (3.3) определяет моменты функции распределения по глубине полного числа частиц с учетом рассеяния, идущих в пределах телесного угла $\varphi = 4\pi$, поэтому выводы теории должны сравниваться с опытами, в которых измерительный прибор помещается внутри свинца (см, например, ⁵⁸), так как при этом исключаются неучитываемые (3.3) краевые эффекты. Кроме того, при выводе (3.3) пренебрегали обратным током частиц через границу слоя вещества при $t=0$. В работе ⁵⁸ показано, что число обратнотонущих электронов через границу слоя вещества при $t=0$ менее 5% от интен-

сивности падающего пучка, поэтому обратным током можно пренебречь. Приведенные формулы для моментов можно обобщить. Можно получить рекуррентные формулы для моментов функции распределения числа частиц с энергией больше данной E^0 , а не только полного числа частиц с энергией больше нуля⁵⁹:

$$\left. \begin{aligned} \overline{t_p^n}(E_0, E^0) \}^p &= \frac{n \int_{E^0}^{E_0} \{ \overline{t_p^{n-1}}(E', E^0) \}^p \int_{E^0}^{E'} P_p(E_0, E) dE \cdot P_p(E_0, E') + \\ &\quad + \{ \overline{t_p^{n-1}}(E', E^0) \}^\Gamma \int_{E^0}^{E'} P_\Gamma(E_0, E) dE \cdot \Gamma_p(E_0, E') \} dE'}{\int_{E^0}^{E_0} P_p(E_0, E) dE}, \\ \overline{t_p^n}(E_0, E^0) \}^\Gamma &= \frac{n \int_{E^0}^{E_0} \{ \overline{t_p^{n-1}}(E', E^0) \}^p \int_{E^0}^{E'} P_p(E_0, E) dE \cdot P_\Gamma(E_0, E') + \\ &\quad + \{ \overline{t_p^{n-1}}(E', E^0) \}^\Gamma \int_{E^0}^{E'} P_\Gamma(E_0, E) dE \cdot \Gamma_\Gamma(E_0, E') \} dE'}{\int_{E^0}^{E_0} P_\Gamma(E_0, E) dE}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Аналогичные формулы были выведены для моментов $\{ \overline{t_p^n}(E_0, E^0) \}^{p, \Gamma}$. Как и в⁵⁶, обобщим формулы (3.4) на случай произвольного спектра первичных частиц. Так, для граничных условий вида $P(E, 0) = 0$, $\Gamma(E, 0) = \Phi_\gamma(E_0, E)$ (где E_0 — верхняя граница спектра), которые ничем по существу не отличаются от произвольного спектра, получим:

$$\left. \begin{aligned} \overline{t_p^n}(E_0, E^0) \}^\Phi &= \frac{\int_{E^0}^{E_0} \Phi_\gamma(E_0, E) \{ \overline{t_p^n}(E, E^0) \} \int_{E^0}^E P_\Gamma(E, E') dE' dE}{\int_{E^0}^{E_0} P(E_0, E) dE}, \\ \overline{t_\Gamma^n}(E_0, E^0) \}^\Phi &= \frac{\int_{E^0}^{E_0} \Phi_\gamma(E_0, E) \{ \overline{t_\Gamma^n}(E, E^0) \}^\Gamma \int_{E^0}^E \Gamma_\Gamma(E, E') dE' dE}{\int_{E^0}^{E_0} \Gamma(E_0, E) dE}, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} P(E_0, E) &= \int_E^{E_0} \Phi_\gamma(E_0, E') P_\Gamma(E', E) dE', \quad \Gamma(E_0, E) = \\ &= \int_E^{E_0} \Phi_\gamma(E_0, E') \Gamma_\Gamma(E', E) dE'. \end{aligned}$$

Таким же образом можно обобщить рекуррентные формулы с учетом рассеяния⁵⁹:

$$\left. \begin{aligned} \overline{t_p^n}(E_0, E^0) \}^p &= \frac{n \int_{E^0}^{E_0} \{ \overline{t_p^{n-1}}(E', E^0) \}^p \int_{E^0}^{E'} P_{p, 0, 0}(E_0, E) dE \cdot P_{p, 0, n}(E_0, E') + \\ &\quad + \{ \overline{t_p^{n-1}}(E', E^0) \}^\Gamma \int_{E^0}^{E'} P_{\Gamma, 0, 0}(E_0, E) dE \cdot \Gamma_{p, 0, n}(E_0, E') \} dE'}{\int_{E^0}^{E_0} P_{p, 0, 0}(E_0, E) dE} \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, полученные рекуррентные формулы позволяют, исходя из известной функции для равновесного спектра, являющегося нулевым моментом, вычислить все последующие моменты функций распределения ливневых частиц. Впервые приближенно моменты \bar{t} и \bar{t}^2 были рассчитаны для свинца в ⁶⁰. Там же была сделана попытка связать величины первых моментов с положением и числом частиц в максимуме ливня. Следуя ⁶⁰, запишем каскадную кривую в форме

$$N(E_0, t, 0) = \exp \left\{ \varphi \left(t, \frac{E_0}{\beta} \right) \right\}.$$

Предположим, что число частиц в ливне имеет острый максимум в некоторой точке $t_{\text{макс}}$. Разлагая функцию φ в ряд вблизи максимума и ограничиваясь только двумя первыми членами, вычислим интегралы $\int_0^\infty N(E_0, t, 0) t^n dt$ ($n = 0, 1, 2$), которые связывают первые моменты с положением и числом частиц в максимуме. Однако этот прием вычисления интегралов эквивалентен методу перевала, применяемому обычно в теории ливней. Поэтому полученные формулы справедливы только при условии $\ln E_0/\beta \gg 1$. Проведя несложные вычисления, получим:

$$t_{\text{макс}} = \bar{t}; \quad N_{\text{макс}} = \frac{E_0}{\beta \sqrt{2\pi(\bar{t}^2 - t^2)}}.$$

Результаты расчетов зависимости $t_{\text{макс}}$ и $N_{\text{макс}}$ от E_0 для свинца можно найти в работах ^{2,3}. Однако эти соотношения являются приближенными и становятся справедливыми только при очень больших энергиях $E_0 \sim 10^{11}$ эв ^{51, 74}. Заметим, что при наличии рекуррентных формул, в принципе, задача вычисления функций распределения электронов и фотонов в ливне или их важнейших характеристик сводится к нахождению проинтегрированного по глубине равновесного спектра, который входит в качестве нулевого момента во все рекуррентные формулы. При этом нужно учитывать, что небольшая ошибка в выражении для нулевых моментов будет последовательно увеличиваться при вычислении высших моментов. Поэтому для применимости метода моментов к решению основных уравнений каскадной теории очень важно оценить точность равновесного спектра.

11. О равновесном спектре электронов и фотонов

Проинтегрируем не учитывающие рассеяние уравнения (1.1) по t от 0 до ∞ с учетом граничных условий (один первичный электрон энергии E_0). Исключив функцию $\Gamma_p(E_0, E)$ из второго уравнения, получим:

$$-\delta(E_0 - E) = L[P_p(E_0, E)] + \beta \frac{\partial P_p(E_0, E)}{\partial E}, \quad (3.6)$$

где $L[P_p(E_0, E)]$ — интегральный оператор, действующий на переменную E , связанный с процессами радиационного торможения и образования пар. Решение уравнения (3.6) для равновесного спектра дано в работе И. Е. Тамма и С. З. Беленького ²⁶. Авторы заменили оператор L следующим приближенным оператором:

$$L_1[P(E_0, E)] = \frac{qN(E_0, E)}{E} + \frac{q \partial N(E_0, E)}{\partial E}, \quad (3.6')$$

где $N(E_0, E) = \int_E^\infty P(E_0, E) dE$, $q = 2,29$. Было показано, что при $E/\beta \gg 1$,

когда последним членом в (3.6) можно пренебречь, решения уравнения (3.6) и уравнения (3.6) с $L_1[P]$ вместо $L(P)$ практически не отличаются. Однако замена оператора L на L_1 влияет только на процессы радиационного торможения и образования пар. Поскольку ионизационные потери уравнение учитывает точно, то можно надеяться, что решение (3.6) с L_1 и с учетом ионизационных потерь также приведет к хорошим результатам. Решение приближенного уравнения (3.6) нетрудно найти:

$$N(E_0, E) = \frac{E_0}{\beta} \left\{ 1 - \varepsilon e^{\varepsilon} (\text{Ei}(-\varepsilon_0) - \text{Ei}(-\varepsilon)) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} e^{\varepsilon - \varepsilon_0} \right\}; \quad (3.7)$$

здесь $\varepsilon = qE/\beta$, β — критическая энергия, $\text{Ei}(-\varepsilon) = -\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ — экспоненциальный интеграл. Аппроксимация (3.6'), как следует из результатов работы ⁶¹, эквивалентна тому, что принимается не зависящей от энергии следующая величина:

$$q(E) = q = [N_p(E_0, E)]^{-1} \int_E^{\infty} \frac{\partial N_p(E_0, E')}{\partial E'} f\left(\frac{E}{E'}\right) dE',$$

где функция $f(x)$ слабо зависит от аргумента x :

$$f(x) = -1,36 + 0,327x + 1,21x^2 + 0,68x^3 - 1,36 \ln \frac{1-x}{x} - \\ - 1,17x^2 \ln x - 1,76x \ln x.$$

Численные расчеты показывают, что при изменении E от $E/\beta \gg 1$ до $E/\beta \cong 0,1$ функция $q(E)$ меняется всего на 2,5%. В работе ³ уравнение (3.6) решалось методом присоединенных уравнений. Полученное приближенное решение совпадает с (3.7). Это, по-видимому, связано с тем, что в основе двух разных методов решения лежит одно и то же предположение, а именно, что в области очень больших энергий $E/\beta \gg 1$ функция $N(E) \sim 1/E$.

Математические приближения, сделанные при решении уравнений (3.6), были оценены методом последовательных приближений, развитым в ³. Было показано, что при $\varepsilon_0 = 1$ поправка к решению И. Е. Тамма и С. З. Беленького не превышает 4,5%, причем с ростом ε_0 поправка уменьшается. Следовательно, в рамках исходных предположений приближенный равновесный спектр Тамма и Беленького отличается от точного решения уравнений (3.6) меньше чем на 4,5%.

Ошибку, вносимую в спектр Тамма и Беленького неточностью исходных предположений, т. е. тем, что в уравнениях используются асимптотические выражения для сечений процессов радиационного торможения и образования пар, строго справедливые лишь для очень больших энергий, приближенно учитывается комpton-эффект, пренебрегается электронами отдачи больших энергий, получающимися при столкновении электронов с электронами среды, можно оценить только сравнением с результатами вычислений, свободных от этих упрощающих предположений. Росси и Клапман ³, численно интегрируя уравнения (3.3), получили функцию $N(E_0, E)$ для фиксированной величины E от первичной энергии E_0 . Вычисления проводились для воздуха ($t = 43$ г/см², $\beta = 98$ Мэв); $E = 10^7$ эв. В расчете учитывались все происходящие в веществе процессы с излучением. Для сечений элементарных процессов брались точные формулы. Не учитывалось только рождение пар и излучение в поле атомных электронов и влияние эффекта плотности на ионизационные потери. Спектр Тамма и Беленького не более чем на 4% отличается от спектра, расчи-

танного Росси и Клапманом. Таким образом, можно считать, что, начиная с энергии $E \geq 10^7$ эв, в легких веществах приближенный равновесный спектр отличается от точного не более чем на 4%. Отметим, что математически точное решение уравнений (3.6) на 8,5% отличается от спектра, рассчитанного Росси и Клапманом. Следовательно, приближенный равновесный спектр лучше аппроксимирует реальный каскадный процесс, чем формально более точное решение уравнений.

Ричардс и Нордгейм⁶² разработали другой численный метод определения равновесного спектра электронов. Их метод применим при условии $E_0/\beta \gg 1$ и $E \ll E_0$ и даст значения $N(E, E)$ для данной величины E_0 как функцию энергии вторичных частиц. Они использовали точные выражения для вероятностей всех процессов, происходящих в веществе с излучением. Из хорошего совпадения равновесного спектра с численными расчетами можно сделать вывод, что комптон-эффект достаточно хорошо учитывается приближенными уравнениями (3.3), а процессы соударения с образованием электронов большой энергии мало влияют на развитие ливня.

В² было получено выражение равновесного спектра фотонов. Автор исходил из того, что выражение (3.7) достаточно точно представляет равновесный спектр электронов. Далее было написано уравнение для функции распределения фотонов $\Gamma(E_0, E)$ с учетом комптон-эффекта, радиационного торможения и образования пар. Сечение комптоновского рассеяния определялось следующим приближенным выражением:

$$W_k(E', E) dE = \frac{g dE}{E E'},$$

где g — некоторая постоянная, равная в случае воздуха $1,32 Mэв$. Написанное для $\Gamma(E_0, E)$ уравнение легко решается. В результате для равновесного спектра фотонов было получено следующее выражение:

$$\Gamma(E_0, E) = \frac{N(E_0, E)}{E\sigma(E)} + \Gamma_2(E_0, E), \quad (3.8)$$

где $\Gamma_2(E_0, E)$ — сложного вида поправочный член. Анализ этого выражения показал, что вплоть до энергий $0,07 \beta$ в воздухе поправка, вносимая вторым членом в дифференциальный спектр, не превышает 18%. Интегральный спектр изменяется из-за учета второго члена всего на несколько процентов. В работе⁶³ вычислялся равновесный спектр фотонов в воздухе с более точным выражением сечения комптон-эффекта

$$W_k(E', E) dE = \frac{g dE}{E \cdot E'} \left[1 + \left(\frac{E}{E'} \right)^2 \right].$$

Проведенные расчеты показали, что основные выводы, полученные в², остаются в силе. В работе⁶⁴ был рассчитан равновесный спектр фотонов для углерода, алюминия, железа, меди и свинца. Поправку к выражению (3.8), получающуюся при точном учете комптон-эффекта, можно считать небольшой для энергий $\sim 0,1 \beta$ вплоть до $Z = 30$. Однако для свинца поправка к дифференциальному спектру при $E = 0,5 \beta$ достигает 70%, но здесь уже нельзя говорить о пригодности метода расчета, применяемого в⁶⁴, где поправка считается малой. Выражение для интегрального спектра, получаемое из (3.8'), даже в свинце при $E > 2 Mэв$ незначительно отличается от точного. Таким образом, законность замены коэффициента поглощения фотонов из-за процесса образования пар суммарным коэффициентом поглощения подтверждается еще тем, что выражение

$$\Gamma(E_0, E) = \frac{N(E_0, E)}{E\sigma(E)} \quad (3.8)$$

достаточно точно описывает равновесный спектр фотонов в легких веществах.

В случае тяжелых веществ необходимо учитывать зависимость суммарного коэффициента поглощения фотонов от энергии и резерфордовское рассеяние ливневых электронов. Уравнения с переменным коэффициентом поглощения фотонов были решены только для случая равновесия. Проинтегрировав уравнение (2.39) по t от 0 до ∞ с учетом граничных условий (один первичный электрон энергии E_0) и исключив $\Gamma_p(E_p, E, \vartheta)$ из второго уравнения, получим:

$$-\cos \vartheta \cdot \delta(E_0 - E) \delta(\vartheta) = L[P_p(E_0, E, \vartheta)] + \frac{E_k^2}{4E^2} \Delta_\vartheta P_p(E_0, E, \vartheta) + \beta \frac{\partial P}{\partial E}, \quad (3.9)$$

где $L[P_p(E_0, E, \vartheta)]$ — интегральный оператор, связанный с процессами образования пар и радиационного торможения. В ⁶⁵ было найдено решение приближенного уравнения (3.9) (как и при решении (3.6), оператор L заменялся на L_1) без последнего члена:

$$N_p(E_0, E, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon_0, \varepsilon) P_n(\cos \vartheta),$$

$$f_n(\varepsilon_0, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{2n+1}{4\pi q} \frac{\varepsilon_0^2}{V\varepsilon_0^2 + a_n^2} \frac{1}{V\varepsilon^2 + a_n^2} & \text{при } \varepsilon < \varepsilon_0, \\ 0 & \text{при } \varepsilon > \varepsilon_0, \end{cases}$$

где $a_n = \frac{1}{2} \varepsilon_k \sqrt{n(n+1)/q}$, $E_k = 21 \text{ Мэв}$, $P_n(\cos \vartheta)$ — полиномы Лежандра. В работе ⁵⁷ было найдено приближенное решение уравнения (3.9) с учетом рассеяния и ионизационных потерь:

$$\left. \begin{aligned} N_p(E_0, E, \vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) P_n(\cos \vartheta), \\ f_n &= \frac{2n+1}{4\pi q} \varepsilon_0 \frac{1}{V\varepsilon^2 + a_n^2} \left[1 - \frac{1}{1+a_n} \Phi(y) \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

где

$$\Phi(y) = e^{-y} (y+1) \sqrt{y^2+1}; \quad y = \frac{\varepsilon}{a_n}.$$

Методом «присоединенных уравнений» ⁵ было найдено точное решение уравнений (3.9) в форме ряда по полиномам Лежандра:

$$P_n(E_0, E, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(E_0, E) P_n(\cos \vartheta).$$

Подставив в (3.9), получим следующее уравнение для функции $\varphi_n(E_0, E)$:

$$\left\{ L + \beta \frac{\partial}{\partial E} \right\} \varphi_n(E_0, E) = -\frac{2n+1}{4\pi} \delta(E_0 - E),$$

где L — некоторый оператор, связанный с процессами радиационного торможения и образования пар и действующий на переменную E . Определим оператор L^* , такой, что

$$\int_{E_1}^{\infty} u_n(E, E_1) L \varphi_n(E_0, E) dE = \int_{E_1}^{\infty} \varphi_n(E_0, E) L^* u_n(E, E_1) dE,$$

где $u_n(E, E_1)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$u_n(E, E_1) = 0 \quad \text{для } E < E_1.$$

Из уравнения для функции $\varphi_n(E_0, E)$ можно получить следующее соотношение:

$$\int_0^{\infty} \varphi_n(E_0, E) \left[L^* - \beta \frac{\partial}{\partial E} \right] u_n(E, E_1) dE = -\frac{2n+1}{4\pi} u_n(E_0, E_1). \quad (*)$$

Если функция $u_n(E, E_1)$ задана, то предыдущее соотношение можно рассматривать как интегральное уравнение для функции $\varphi_n(E_0, E)$. Произвольность выбора функции u_n можно использовать для того, чтобы уравнение (*) легче решалось, чем первоначальное уравнение для функции φ_n . Предположим, что $u_n(E, E_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[L^* - \beta \frac{\partial}{\partial E} \right] u_n(E, E_1) = -\delta(E - E_1) \frac{2n+1}{4\pi}.$$

Последнее уравнение называется присоединенным к уравнению для функции φ_n . Операторы в этом уравнении действуют на переменную E_0 (в обозначениях первоначального уравнения для φ_n), а не на E . Из уравнения (*) следует, что $u_n(E_0, E_1) = \varphi_n(E_0, E_1)$. Решение присоединенного уравнения, а следовательно и уравнения для $\varphi_n(E_0, E)$, удается найти в форме

$$f_n^p(E_0, E) =$$

$$= \frac{2n+1}{4\pi} \frac{\varepsilon_0}{q} e e^{\sqrt{\varepsilon^2 + a_n^2}} \left(\frac{\varepsilon}{a_n + \sqrt{\varepsilon^2 + a_n^2}} \right)^{a_n} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{e^{-\sqrt{x^2 + a_n^2}}}{x^2} \left(\frac{a_n + \sqrt{x^2 + a_n^2}}{x} \right)^{a_n} dx. \quad (3.10')$$

При $a_n = 0$ (3.10') совпадает с выражением для равновесного спектра без учета рассеяния. Отметим, что решение (3.10') все же является приближенным, так как приближенными являются исходные уравнения. Однако в ²⁶ из этих уравнений, только без учета рассеяния, было получено выражение для равновесного спектра, которое не более чем на 4% отличается от точного. Многократное рассеяние уравнением (3.9) учитывается точно, так что, по-видимому, (3.10) отличается от точного выражения также не более чем на 4%. Эта ошибка, связанная с приближенностью исходных уравнений Тамма и Беленького, неоднократно оценивалась ^{2,3,6}. С другой стороны, согласие между значениями функции $N_p(E, \Phi)$, даваемой формулами (3.10) и (3.10'), вполне удовлетворительное — они совпадают в пределах 6%. При $\varepsilon \ll a_n$ (3.10') переходит в

$$f_0^p(E_0, E) = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{\varepsilon_0}{q} \frac{1}{a_n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

в то же время для $f_0^p(E_0, E)$ получаем следующее асимптотическое разложение:

$$f_0^p(E_0, E) = \frac{1}{4\pi} \frac{E_0}{\beta} (1 + \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon c + \dots), \quad \varepsilon \ll 1.$$

Из выражений для f_0^p и f_n^p при малых энергиях следует, что любой прибор, регистрирующий частицы, идущие вперед в пределах телесного угла $\Phi < 4\pi$, будет регистрировать в энергетической области $E < 2-3 \text{ Мэв}$ меньше частиц, чем по равновесному спектру. В ⁶⁶ был получен экспериментальный спектр заряженных частиц в максимуме лавины, который сравнивался с равновесным спектром. Примерно до 3 Мэв спектры совпадают. Различие между теоретическим и экспериментальным спектрами можно объяснить тем, что авторы недосчитывают значительное количество обратнотидущих медленных электронов. Обратный ток в максимуме лавины в свинце примерно равен 0,41: в камере Вильсона стоят

пластины по 1,5 t -единицы свинца. Примерно половину частиц малых энергий, идущих под углом больше 30° от оси ливня, авторы могли просмотреть. В ⁶⁷ исследовали энергетический спектр электронов в районе максимума лавины в свинце, созданной спектром первичных фотонов вида $1/E$. Авторы отмечают хорошее согласие с равновесным спектром в энергетической области от 3 до 180 Мэв. Расхождение в области 0–3 Мэв они объясняют большим рассеянием назад.

Таким образом, проведенное обсуждение равновесного спектра частиц позволяет заключить, что он с хорошей точностью порядка 4% справедлив как для легких, так и для тяжелых веществ, начиная с энергии частиц порядка 2–3 Мэв, что позволяет с нужной точностью вычислить несколько первых моментов функции распределения лавинных частиц.

12. Регулярный метод построения каскадных кривых по моментам

Напомним, что для ливней большой энергии $E_0/\beta \gg 1$ знание только двух первых моментов каскадных кривых позволяет судить о положении и числе частиц в максимуме ливня. Для ливней малой энергии, когда E_0/β — величина порядка единицы, подобных соотношений получить не удается, так как применяемый при выводе соотношения $t_{\text{макс}}$ и $N_{\text{макс}} \sim f(E_0/\beta, \bar{t}, \bar{t}^2)$ метод эквивалентен методу передела, применяемому обычно в каскадной теории. Можно поставить задачу вычисления каскадной кривой по ее известным моментам. Зная все моменты \bar{t}^n , принципиально можно найти и саму функцию распределения (проблема моментов Стильтеса ⁶⁸). Если функция $N(t)$ при очень больших t затухает быстрее, чем $e^{-kx^{1/2}}$, где k — положительное число, то справедливо следующее соотношение ⁶⁸:

$$Y\bar{N}(Y^2) = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right) \varphi(s) \cos(sY) ds,$$

где

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_0 \bar{t}^n s^{2n}}{\beta (2n)!}.$$

Эти соотношения позволяют вычислить функцию $N(t)$ по ее моментам. Рассмотрим для примера несколько предельных случаев ⁵⁵. Пусть энергия первичной частицы $\epsilon_0 \gg 1$, причем ϵ_0 настолько велико, что и $\ln \epsilon_0 \gg 1$. В этом случае легко получить следующие выражения для первых моментов:

$$\{\bar{t}_r(\epsilon_0, 0)\}^p = \frac{1 + \frac{1}{\sigma_0}}{q} \ln \epsilon_0; \quad \{t_p(\epsilon_0, 0)\}^p = -\frac{1 + \frac{1}{\sigma_0}}{q} \ln \epsilon_0$$

и для n -го момента:

$$\{\bar{t}^n(\epsilon_0, 0)\}^p = \left(1 + \frac{1}{\sigma_0}\right)^n \frac{\ln^n \epsilon_0}{q^n}.$$

Таким образом, в этом приближении $\bar{t}^n = \bar{t}^n$. Функция $\varphi(s)$ тогда равна

$$\varphi(s) = \frac{E_0}{\beta} \cos\left(s\bar{t}^{\frac{1}{2}}\right).$$

Это значение $\varphi(s)$ соответствует следующей функции распределения $N(t)$:

$$N(t) = \frac{E_0}{\beta} \delta(t - \bar{t}).$$

Таким образом, в предельном случае очень больших энергий функция распределения приближается к δ -функции. Заметим, что в работе ⁶⁰ функция распределения была аппроксимирована функцией Гаусса

$$N(t) = \frac{E_0}{\beta} \frac{0,3}{\sqrt{\ln \frac{E_0}{\beta}}} \exp \left\{ -\frac{1}{3,2} \frac{(t - \bar{t})^2}{\ln \frac{E_0}{\beta}} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что при стремлении $\ln \frac{E_0}{\beta}$ к бесконечности предыдущее выражение переходит в δ -функцию. Пусть энергия первичной частицы $\varepsilon_0 \ll 1$. Допустим, что при таких малых энергиях поглощение фотонов несущественно. Тогда легко получить следующее выражение для n -го момента: $\bar{t}^n = (E_0/\beta)^n (n+1)$. Функция $\varphi(s)$ в этом случае равна

$$\varphi(s) = \frac{E_0}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[\left(\frac{E_0}{\beta} \right)^{1/2} s \right]^{2n}}{(n+1)n!} = \frac{2}{s^2} \left\{ \left(\frac{E_0}{\beta} \right)^{1/2} s \cdot \sin \left[\left(\frac{E_0}{\beta} \right)^{1/2} s \right] + \right. \\ \left. + \cos \left[\left(\frac{E_0}{\beta} \right)^{1/2} s \right] - 1 \right\},$$

а функция распределения $N(t)$ равна

$$N(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t < \frac{E_0}{\beta}, \\ 0, & \text{если } t > \frac{E_0}{\beta}. \end{cases}$$

Это распределение соответствует первичной заряженной частице, теряющей энергию при прохождении через вещество только на ионизацию. Наконец, рассмотрим последний предельный случай. Допустим, что $\varepsilon_0 \leq 1$, но поглощение фотонов играет существенную роль. Этот случай соответствует прохождению электронов энергии порядка критической в тяжелых веществах. Можно показать, что в этом случае для $n \geq 2$

$$\bar{t}^n = \frac{n!}{q} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\chi_1(\varepsilon_0, \varepsilon)}{\sigma^n(\varepsilon)} d\varepsilon, \text{ где } \chi_1(\varepsilon_0, \varepsilon) = \varepsilon e^\varepsilon \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{e^{-x}}{x^2} dx.$$

Это означает, что для $t > \bar{t}$ функция распределения имеет вид

$$N(t) = \frac{E_0}{\beta} \int_0^{\varepsilon_0} e^{-\sigma(\varepsilon)t} \chi_1(\varepsilon_0, \varepsilon) \sigma(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Однако во всех практически важных случаях удастся вычислить только первые несколько моментов. Поэтому практически целесообразнее аппроксимировать функцию $N(t)$ некоторой другой функцией, первые несколько моментов которой совпадают с точными моментами функции $N(t)$. Это значит, что нужно подобрать такие аппроксимационные формулы, которые по двум-трем первым моментам позволяют достаточно точно описать искомые функции распределения. В² каскадные кривые от первичных частиц очень больших энергий аппроксимированы выражением вида

$$\exp \left\{ + \alpha t^{\frac{1}{2}} - \gamma t \right\}.$$

Коэффициенты α и γ подбирались таким образом, чтобы эта аппроксимация давала правильное значение площади под каскадной кривой (закон сохранения энергии) и первого момента. Каскадные кривые от первичных частиц меньших энергий аппроксимированы выражением вида

$$\exp\{\alpha t^{\frac{1}{2}} - \gamma t\} + \chi \exp(-\gamma t).$$

Коэффициенты α , γ и χ подбирались таким образом, чтобы получить правильные значения площади двух первых моментов каскадных кривых. В работе ⁶⁹ были получены каскадные кривые в свинце с учетом зависимости $\sigma(E)$ от энергии и с приближенным учетом рассеяния. Кривые от первичного электрона аппроксимированы выражением вида $(1 + \beta)$

$\exp\{\alpha t^{\frac{1}{2}} - \gamma t\} - \beta \exp(-2\gamma t)$, аналогичным предложенному в ². Однако эта аппроксимация неудовлетворительно описывает каскадный процесс при энергии первичных частиц $E_0 < 10^8$ эв и на глубинах $t < t_{\text{макс}}$ лавины. На больших глубинах это выражение ведет себя как e^{-kt} , причем коэффициент k меняется примерно в два раза при изменении E_0 от 10^8 до 10^{11} эв, тогда как точные кривые на больших глубинах ведут себя как $e^{-\sigma_{\text{мин}} t}$, где $\sigma_{\text{мин}}$ — минимальное значение суммарного коэффициента поглощения фотонов. Чтобы определить коэффициенты, входящие в аппроксимационную формулу, необходимо решить систему трех трансцендентных уравнений, что сильно затрудняет вычисления. Заметим также, что для построения кривой по трем моментам нужно подбирать другой вид аппроксимационной зависимости, причем без детального исследования его невозможно определить. Чтобы в этом случае определить коэффициенты, нужно решить систему уже четырех трансцендентных уравнений, что само по себе представляет сложную вычислительную задачу.

Можно предложить регулярный метод построения каскадных кривых, используя системы полиномов, ортогональных на промежутке $(0, \infty)$ ⁷⁰. Известно, что в легких и тяжелых веществах пробег для поглощения фотонов остается порядка одной лавинной единицы вплоть до энергий порядка 10^6 эв. Пробег электронов при энергии E меньше критической по порядку величины равен E/β . Поэтому естественно считать, что каскадные кривые при больших значениях t ведут себя как $e^{-\sigma_{\text{мин}} t}$, где $\sigma_{\text{мин}}$ — минимальное значение суммарного коэффициента поглощения фотонов. Кроме того, нам известны значения каскадных кривых при $t=0$, даваемые граничными условиями; известны из основных уравнений (1.1) величины производных каскадных кривых по глубине при $t=0$; известны численные величины нескольких первых моментов каскадных кривых. Используя эти сведения о поведении каскадных кривых, мы сконструируем весовую функцию $w(x)$ (с которой ортогональна используемая система полиномов на промежутке $(0, \infty)$), приближенно передающую основные черты искомых каскадных кривых. С выбранной весовой функцией, используя обычные методы теории ортогональных многочленов, мы построим нужную систему ортогональных полиномов.

Аппроксимируем функцию $\varphi(x)$ с помощью суммы полиномов:

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 L_1^i(x) + A_2 L_2^i(x) + A_3 L_3^i(x) + \dots$$

Полиномы $L_n^i(x)$ ортогональны на промежутке $(0, \infty)$ с весом $w(x)$. Аппроксимация будет тем лучше, чем меньше средняя квадратичная

ошибка

$$M = \int_0^{\infty} \omega(x) (A_0 + A_1 L_1^i(x) + A_2 L_2^i(x) + \dots - \varphi(x))^2 dx.$$

Коэффициенты A_n , определяемые из условия минимальности средней квадратичной ошибки $\frac{\partial M}{\partial A_n} = 0$, равны

$$A_n = \frac{1}{N_n} \int_0^{\infty} \omega(x) \varphi(x) L_n^i(x) dx, \text{ здесь } N_n = \int_0^{\infty} \omega(x) L_n^i(x) dx.$$

Заменим в разложении $\varphi(x)$ переменную x на γt (где γ — любое положительное число) и умножим обе части равенства на $\omega(\gamma t)$. Введя обозначение $\omega(\gamma t) \cdot \varphi(\gamma t, E_0, E) = N(E_0, E, t)$, перепишем его в форме

$$N(E_0, E, t) = \omega(\gamma t) \sum_{n=0}^{\infty} A_n(E_0, E) L_n^i(\gamma t). \quad (3.11)$$

Коэффициенты A_n равны в нашем случае

$$A_n(E_0, E) = \frac{1}{N_n} \int_0^N N(E_0, E, t) L_n^i(\gamma t) dt^*). \quad (3.12)$$

Пусть $\omega(x) \geq 0$ и моменты любого порядка функции $\omega(x)$ существуют:

$$a_n = \int_0^{\infty} x^n \omega(x) dx, a_0 = 1.$$

Тогда полиномы $L_n^i(x)$, следуя обычным методам теории ортогональных многочленов⁷¹, определим следующим образом:

$$L_n^i(x) = \frac{1}{D_{n-1}} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \text{ здесь } D_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}. \quad (3.13)$$

Условие ортогональности полиномов запишем в форме

$$\int_0^{\infty} L_n^i(x) L_k^i(x) \omega(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{D_n}{D_{n-1}}, & n = k. \end{cases} \quad (3.14)$$

Выражение (3.11) с соответствующим образом определенной функцией $\omega(\gamma t)$, дает удобную аппроксимацию каскадных кривых, причем коэффициенты $A_n(E_0, E)$ просто связаны с моментами искомых функций распределения.

*) Коэффициенты A_n можно определить из условия ортогональности полиномов $L_n^i(x)$. Умножив (3.11) на $L_k^i(x)$ и проинтегрировав по x от 0 до ∞ , найдем для $A_n(E_0, E)$ выражения, совпадающие с (3.12).

13. Каскадные кривые и энергетические спектры в легких веществах

Для того чтобы, пользуясь формулами (3.11) и (3.12), рассчитать каскадные кривые и энергетические спектры частиц в легких веществах, необходимо вычислить несколько первых моментов функции $N(E_0, E, t)$. В³⁷ были получены явные аналитические выражения двух первых моментов каскадных кривых. В таблице V приведены значения трех пер-

Таблица V

z_0	$\{\bar{t}_p\}^p$	$\{\bar{t}_p\}^r$	$\{\bar{t}_p^2\}^p$	$\{\bar{t}_p^2\}^r$	$\{\bar{t}_p^3\}^p$	$\{\bar{t}_p^3\}^r$
0,2	0,096	1,357	0,148	3,694		
0,4	0,188	1,421	0,301	3,899		
0,6	0,273	1,480	0,459	4,119		
0,8	0,353	1,536	0,619	4,375		
1,0	0,429	1,590	0,780	4,609	2,240	19,79
1,2	0,500	1,641	0,943	4,850		
1,4	0,568	1,691	1,107	5,083		
1,6	0,633	1,740	1,271	5,313		
1,8	0,694	1,785	1,434	5,540		
2,0	0,752	1,829	1,599	5,762	6,364	26,51
3,0	1,006	2,027	2,392	6,803	9,817	32,78
4,0	1,213	2,195	3,132	7,746	13,37	38,79
5,0	1,386	2,340	3,845	8,625	16,84	44,52
6,0	1,536	2,468	4,503	9,429	20,29	50,02
7,0	1,666	2,582	5,192	10,26	29,53	61,29
8,0	1,782	2,685	5,691	10,87	32,73	65,86
9,0	1,886	2,778	6,233	11,53	42,83	77,59
10,0	1,979	2,862	7,140	12,53	48,16	86,07

вых моментов электронной каскадной кривой для значений первичной энергии ϵ_0 от 0,2 до 10. Третий момент был вычислен с помощью численного интегрирования по рекуррентным формулам. При $E_0/\beta \gg 1$ формулы для \bar{t} и \bar{t}^2 с точностью до членов порядка $1/\epsilon_0$ можно переписать следующим образом:

$$\{\bar{t}_p(E_0, 0)\}^p = \ln \frac{E_0}{\beta} + 0,44; \quad \{\bar{t}_p^2(E_0, 0)\}^p - \{\bar{t}_p^2(E_0, 0)\}^r = 1,76 \ln \frac{E_0}{\beta} - 0,21,$$

$$\{\bar{t}_p(E_0, 0)\}^r = \ln \frac{E_0}{\beta} + 1,2; \quad \{\bar{t}_p^2(E_0, 0)\}^r - \{\bar{t}_p^2(E_0, 0)\}^r = 1,76 \ln \frac{E_0}{\beta} + 2,32.$$

В таблице VI приведены значения этих моментов для ϵ_0 от 15 до 2290, а также значения моментов, вычисленных по формулам из³. Из таблицы видно, что первый и второй моменты отличаются друг от друга не более чем на 1% в широком диапазоне энергий. Таким образом, выражения для моментов, полученных в³⁷, в области больших энергий незначительно отличаются от моментов, полученных исходя из решения основных уравнений теории методом Снайтера. Напомним, что приближения, сделанные нами при вычислении моментов, относятся к процессам, играющим основную роль именно при больших энергиях.

Полученные значения моментов использовались при построении каскадных кривых. Аппроксимируем каскадные кривые от первичных фото-

Таблица VI

ε_0	по 3	по 2	по 3	по 2	по 3	по 2	по 3	по 2
	$\{\bar{t}_p\}^p$	$\{\bar{t}_p\}^p$	$\{\bar{t}_p\}^p$	$\{\bar{t}_p\}^p$	$\{\bar{t}_p^2\}^p$	$\{\bar{t}_p^2\}^p$	$\{\bar{t}_p^2\}^p$	$\{\bar{t}_p^2\}^p$
15	2,290	2,298	3,080	3,098	8,343	8,408	13,40	13,52
20	2,577	2,598	3,367	3,389	10,24	9,992	15,74	15,87
25	2,800	2,814	3,590	3,614	11,84	11,56	17,66	17,81
30	2,983	2,999	3,773	3,799	13,22	12,94	19,32	19,47
40	3,270	3,289	4,060	4,089	15,52	15,22	22,06	22,22
63,6	3,734	3,757	4,524	4,557	19,58	19,27	26,84	27,02
229	5,015	5,051	5,805	5,851	33,04	32,73	42,64	42,55
2290	7,318	7,377	8,408	8,477	65,5	65,34	78,78	78,78

нов с помощью суммы полиномов Лагерра $L_n^1(x)$:

$$\{N_p(E_0, t, 0)\}^r = \gamma t e^{-\gamma t} \sum_{n=0}^k A_n(E_0, 0) L_n^1(\gamma t). \quad (3.15)$$

Коэффициенты A_n просто связаны с моментами искомой функции распределения:

$$\begin{aligned} A_0(E_0, 0) &= \frac{\gamma E_0}{\beta}; \quad A_1(E_0, 0) = \frac{\gamma E_0 (2 - \gamma \{\bar{t}_p(E_0, 0)\}^r)}{2\beta}; \\ A_2(E_0, 0) &= \frac{\gamma E_0 (3 - 3\gamma \{\bar{t}_p(E_0, 0)\}^r + \frac{\gamma^2 \{\bar{t}_p^2(E_0, 0)\}^r}{2})}{3\beta} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Коэффициент γ полагаем равным минимальному значению суммарного коэффициента поглощения фотонов. Каскадные кривые от первичных фотонов аппроксимировались также с помощью суммы полиномов Лагерра $L_n^0(x)$:

$$\{N_p(E_0, t, 0)\}^r = e^{-\gamma t} \left\{ \sum_{n=0}^k A_n L_n^0(\gamma t) + c_1 L_{k+1}^0(\gamma t) \right\}. \quad (3.17)$$

Постоянную c_1 определяем, требуя, чтобы для аппроксимированных кривых (3.17) величина $N_p(E_0, t, 0)$ при $t=0$ была равна своему точному значению. В ³⁷ и ⁷² показано, что аппроксимация каскадных кривых (3.17) полностью эквивалентна аппроксимации (3.16). Так как мы хотим получить каскадные кривые от первичных частиц энергии порядка критической, где число частиц в максимуме лавины порядка единицы и максимум лежит на глубине порядка одной лавинной единицы, то особенно важно, чтобы аппроксимационная кривая точно удовлетворяла граничным условиям, т. е. была возможно более точной на первых l -единицах поглотителя. Каскадные кривые от первичного электрона аппроксимировались с помощью суммы (3.17). Было показано, что в энергетической области $E_0/\beta \gg 1$ аппроксимированные каскадные кривые не более чем на 5% отличаются от точных. Каскадные кривые, рассчитанные по (3.17) с использованием двух первых моментов, не более чем на 10—15% отличаются от кривых, полученных с использованием первых трех моментов, в то время как они значительно отличаются от кривых, построенных с использованием только одного первого момента. Это свидетельствует о том, что ряд (3.17) быстро сходится. Кроме

того, точность полученных кривых при очень малых значениях энергии первичных частиц специально исследовалась. Учитывая все это, можно

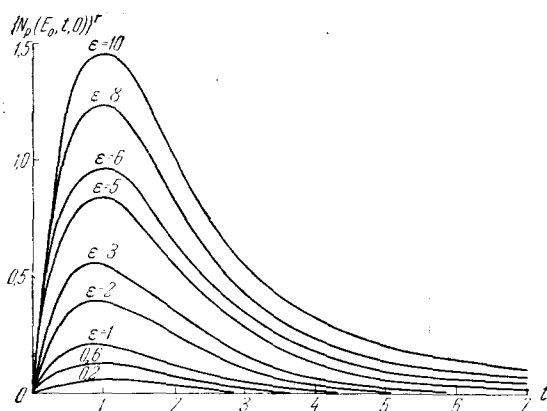


Рис. 10. Зависимость от глубины полного числа электронов $\{N_p(E_0, t, 0)\}^\Gamma$ в ливне, вызванном первичным фотоном энергии ϵ_0 от 0,2 до 10.

утверждать, что только первых три члена ряда (используется два первых момента) аппроксимируют точное решение с ошибкой порядка 10%. На рис. 10 изображены функции распределения электронов $\{N_p(E_0, t, 0)\}^\Gamma$ с энергией больше нуля в ливне, вызванном первичным фотоном энергии ϵ_0 от 0,2 до 10. На рис. 11 изображены функции распределения электронов $\{N_p(E_0, t, 0)\}^\Gamma$ с энергией больше нуля в ливне, вызванном первичным электроном с энергией ϵ_0 от 1 до 10. Заметим, что каскадные кривые от первичного электрона или фотона энергии $\epsilon_0 \gg 1$ отлича-

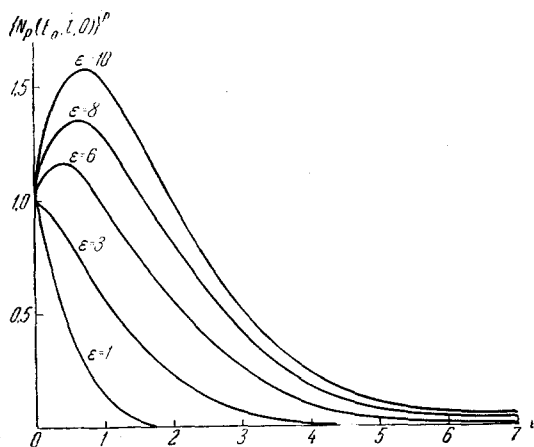


Рис. 11. То же, что и на рис. 10, но в ливне от первичного электрона.

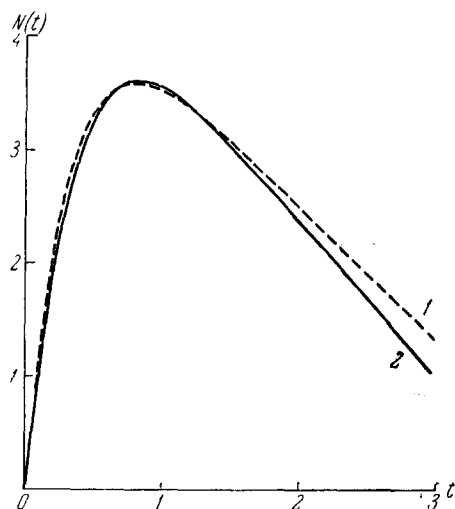


Рис. 12. Кривая 1—экспериментальная каскадная кривая в углероде от тормозного спектра первичных фотонов с максимальной энергией 330 Мэв⁶⁸, кривая 2 получена усреднением по спектру первичных фотонов каскадных кривых, рассчитанных по моментам³⁷. Кривые 1 и 2 нормированы при $t=0,1$.

ются друг от друга не сильно, тогда как при $\epsilon_0 \sim 1$ различие между кривыми велико. Это не трудно понять: электроны больших энергий, как и фотоны, большую часть своей энергии тратят на рождение вторичных частиц, способных продолжать ливень. Электроны же малых энергий большую часть своей энергии необратимо тратят на ионизацию.

В ⁵⁸ получена экспериментальная каскадная кривая в углероде от спектра первичных фотонов вида $1/E$ при $E < E_{\text{макс}}$. Усредняя кривые (3.17) по спектру $1/E$, можно рассчитать соответствующую теоретическую кривую. Результаты расчетов приведены на рис. 12. Кривые совпадают в пределах 5%, некоторое различие в «хвосте» можно объяснить тем, что при расчете считали коэффициент поглощения фотонов равным асимптотическому, тогда как в рассматриваемой области энергий он примерно на 15% меньше, что приводит к большей проникающей способности лавины.

Изложенным выше способом можно получить не только зависимость полного числа частиц от глубины, но и зависимость от глубины числа частиц с энергией больше некоторой E , т. е. получить энергетические спектры частиц на любой глубине. В ⁷² были получены рекуррентные формулы для моментов $\{\bar{t}_\Gamma^n(E_0, E)\}^p$ и $\{\bar{t}_\Gamma^n\}^\Gamma$ функции распределения фотонов с энергией больше E_1 в ливне, вызванном первичным электроном или фотоном энергии E_0 . Результаты расчетов \bar{t} и \bar{t}^2 для значений ϵ_0 от 0,6 до 50 и ϵ_1 от 0,1 до 1,0 приведены в таблице VII.

Таблица VII

$\{\bar{t}_\Gamma^n(E_0, E)\}^p$					$\{\bar{t}_\Gamma^n(E_0, E)\}^\Gamma$			
$\epsilon_0 \backslash E$	0,11	0,2	0,6	1	0,11	0,2	0,6	1
0,6	1,386	1,361	1,294		1,451	1,358	1,294	—
1	1,480	1,445	1,410	1,294	1,664	1,514	1,312	1,294
5	2,207	2,092	1,942	1,847	2,816	2,624	2,216	1,946
11	2,806	2,705	2,467	2,318	3,496	3,347	2,958	2,694
20	3,323	3,212	2,939	2,774	4,047	3,905	3,536	3,293
30	3,692	3,576	3,287	3,109	4,432	4,293	3,933	3,698
50	4,171	4,050	3,753	3,557	4,927	4,791	4,444	4,210

$\{\bar{t}_\Gamma^2(E_0, E)\}^p$					$\{\bar{t}_\Gamma^2(E_0, E)\}^\Gamma$			
$\epsilon_0 \backslash E$	0,11	0,2	0,6	1	0,11	0,2	0,6	1
0,6	3,95	3,82	3,35		4,22	3,70	3,35	—
1	4,22	4,05	3,67	3,35	5,36	4,54	3,44	3,35
5	7,63	7,03	6,03	5,41	12,18	10,99	8,44	6,79
11	11,66	10,92	9,24	8,23	17,40	16,24	13,37	11,53
20	15,74	14,96	12,70	11,38	22,40	21,11	18,01	16,01
30	19,05	17,92	15,51	14,02	26,29	24,91	21,58	19,46
50	23,63	22,48	19,66	17,89	31,74	30,28	26,35	24,35

Функции $\{N_\Gamma(E_1, t)\}^\Gamma$ и $\{N_\Gamma(E_1, t)\}^p$ аппроксимировали с помощью суммы полиномов $L_n^1(x)$ и $L_n^0(x)$. Результаты расчетов для воздуха приведены на рис. 13 — 19. Значения рассчитанных кривых в пределах 10% совпадают со значениями, рассчитанными по точным формулам теории при $\epsilon_0 \gg 1$. Энергетический спектр в максимуме у аппроксимированных кривых в пределах 10% совпадает с равновесным спектром. В ⁷³ тем же способом, что и в ⁷², были вычислены энергетические спектры электронов в ливнях, вызываемых первичным электроном или фотоном. Результаты расчета первых двух моментов приведены в

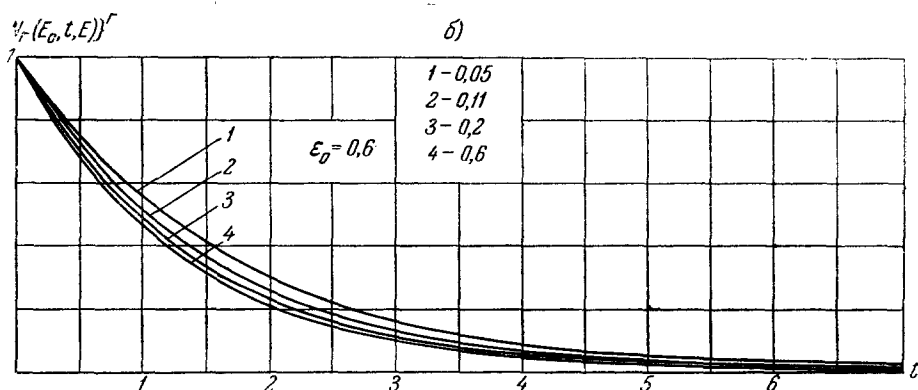
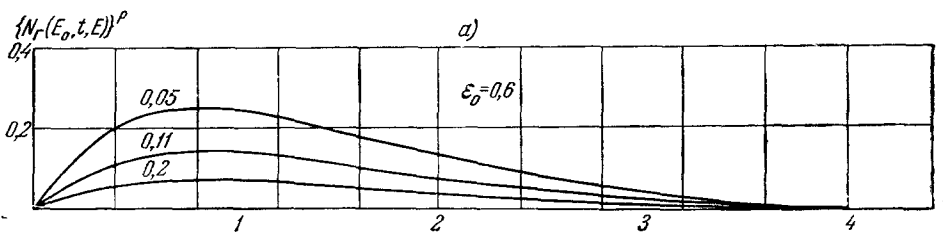


Рис. 13. Зависимость от глубины числа фотонов с энергией больше ϵ (от 0,05 до 1) $\{N_r(E_0, t, \epsilon)\}^{p,r}$ в ливне, вызванном первичным электроном а) или фотоном б) энергии ϵ_0 от 0,6 до 50 γ_2 .

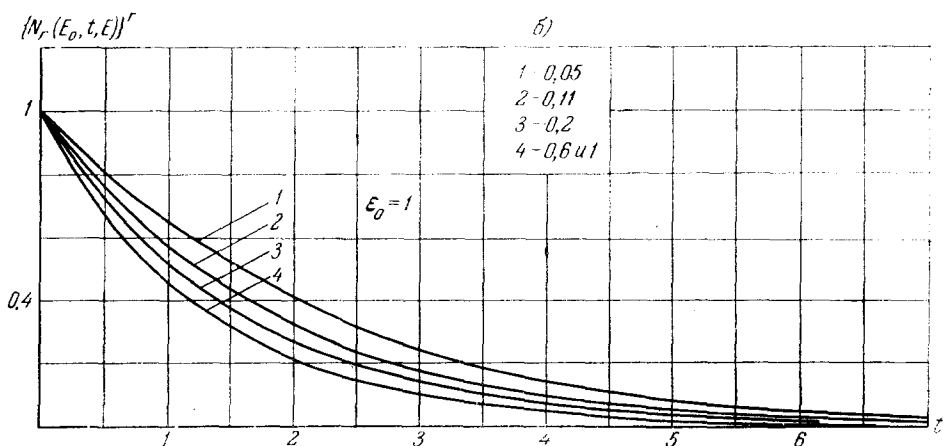
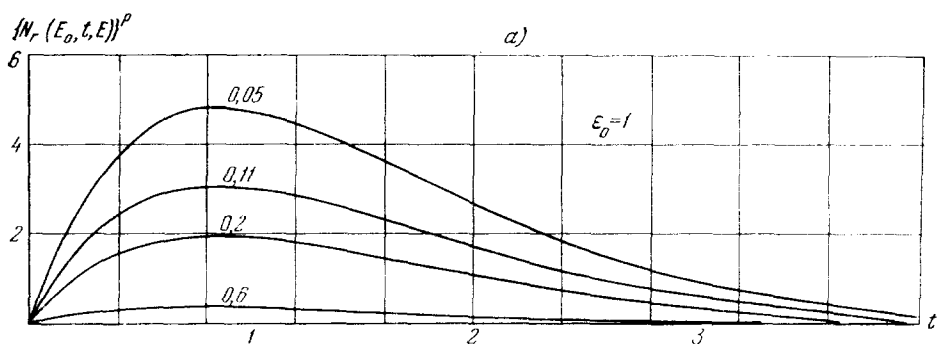


Рис. 14. То же, что и на рис. 13.

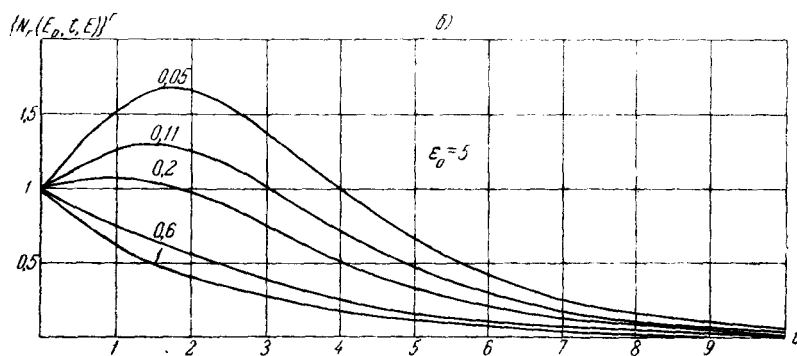
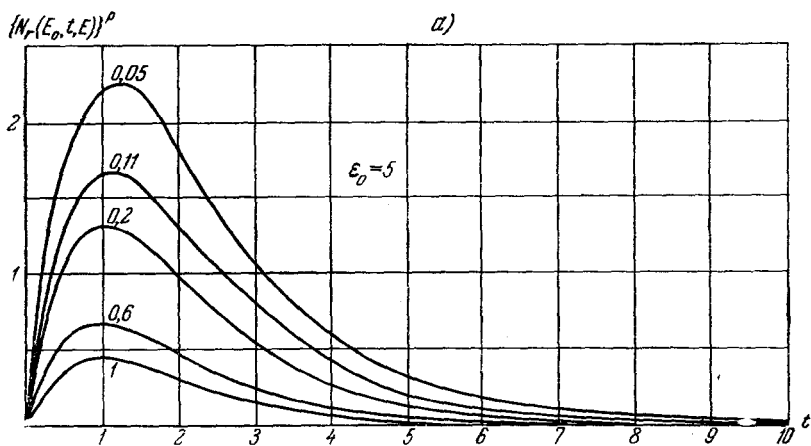


Рис. 15. То же, что и на рис. 13.

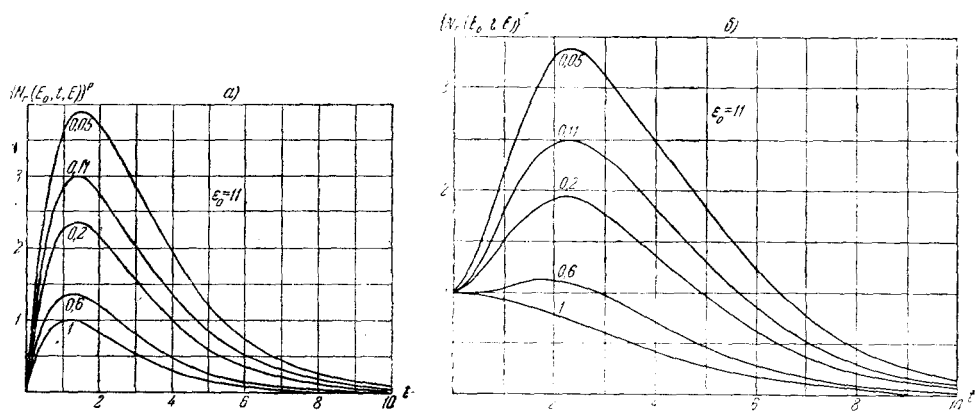


Рис. 16. То же, что и на рис. 13.

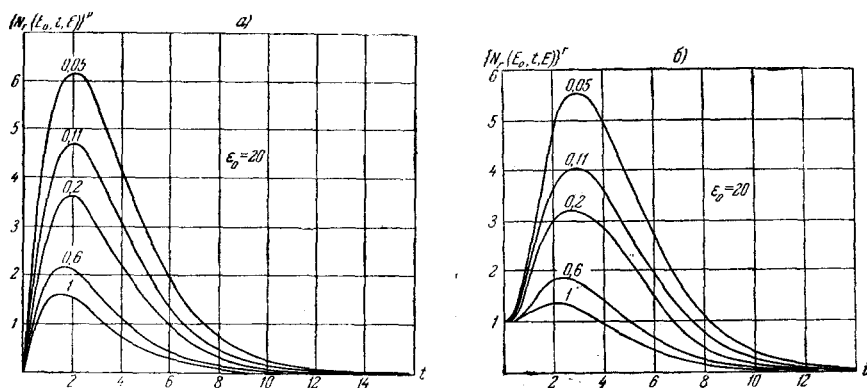


Рис. 17. То же, что и на рис. 13.

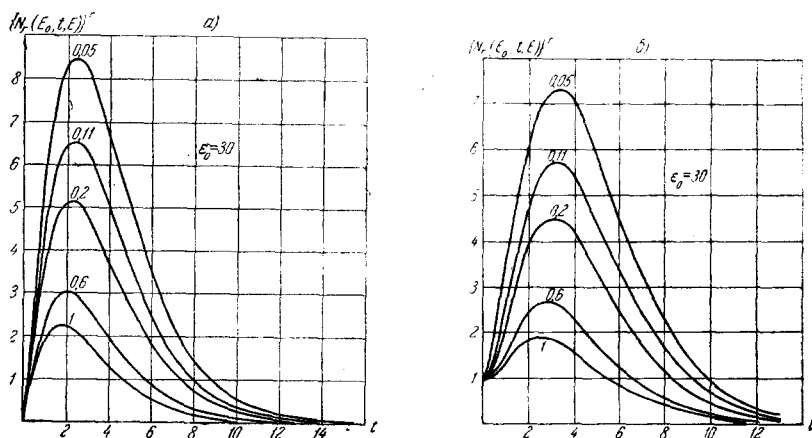


Рис. 18. То же, что и на рис. 13.

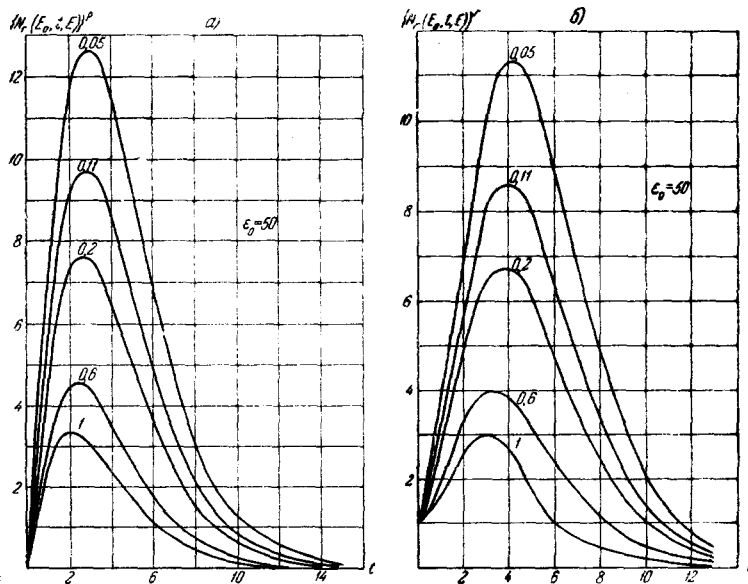


Рис. 19. То же, что и на рис. 13.

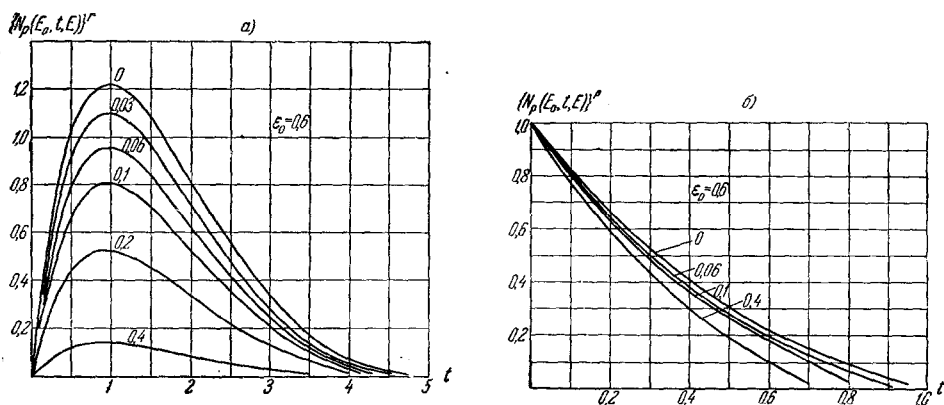


Рис. 20. Зависимость от глубины числа электронов с энергией больше ε (от 0,03 до 2) $\{N_p(E_0, t, E)\}^p$ в ливне, вызванном первичным фотоном а) или электроном б) энергии ε_0 от 0,6 до 15.73 .

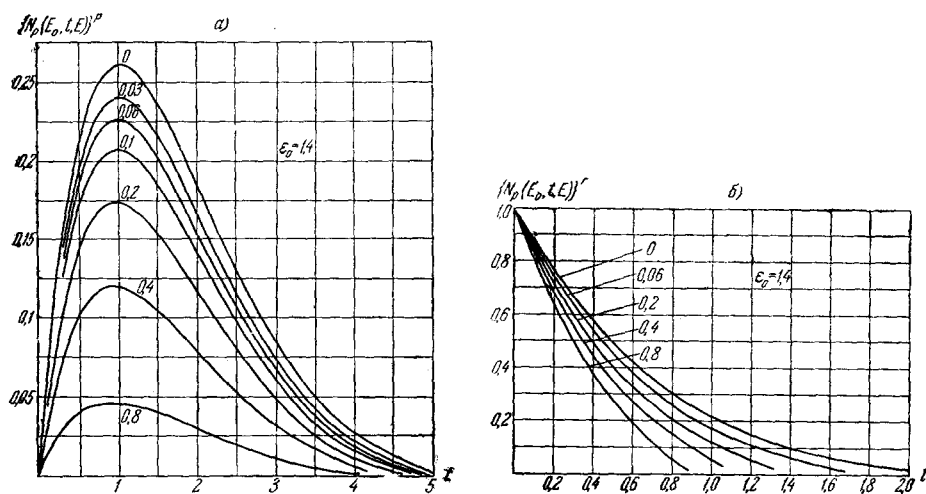


Рис. 21. То же, что и на рис. 20.

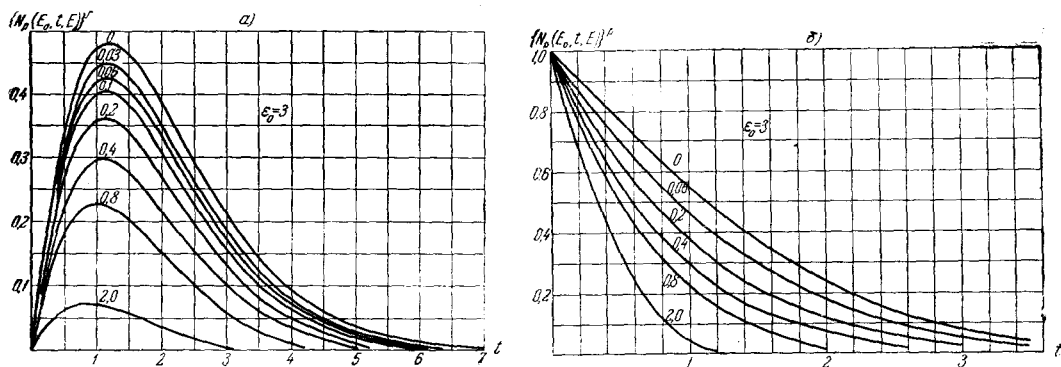


Рис. 22. То же, что и на рис. 20.

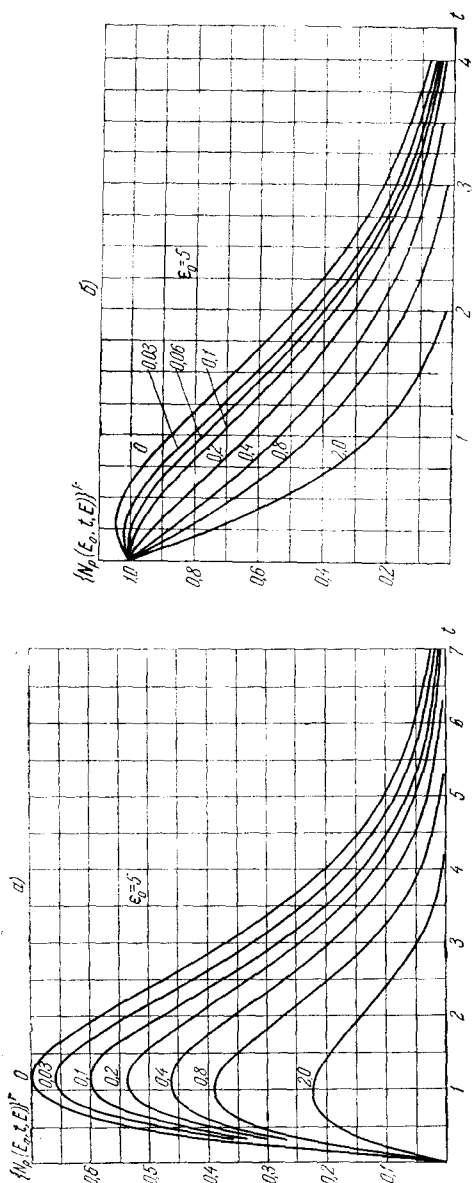


Рис. 23. То же, что и на рис. 20.

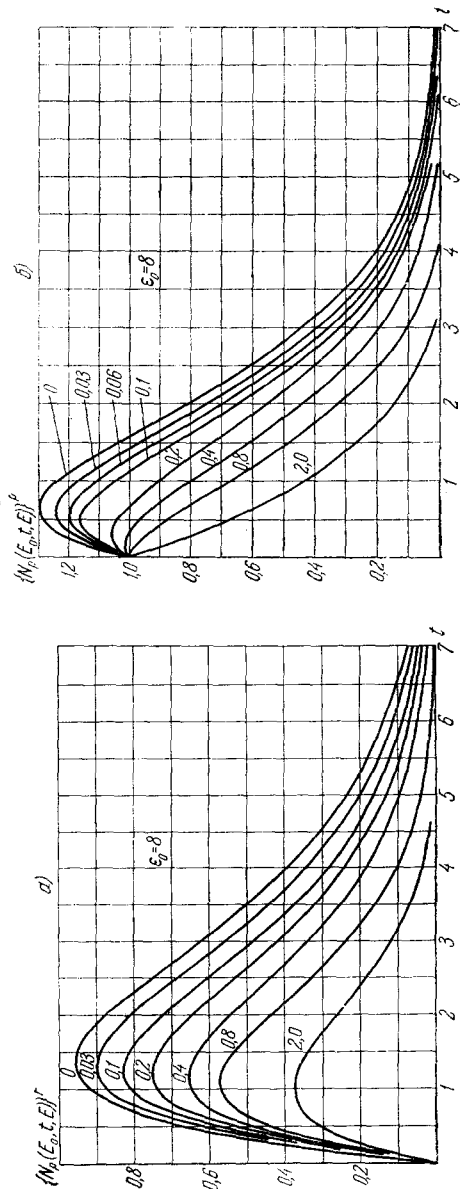


Рис. 24. То же, что и на рис. 20.

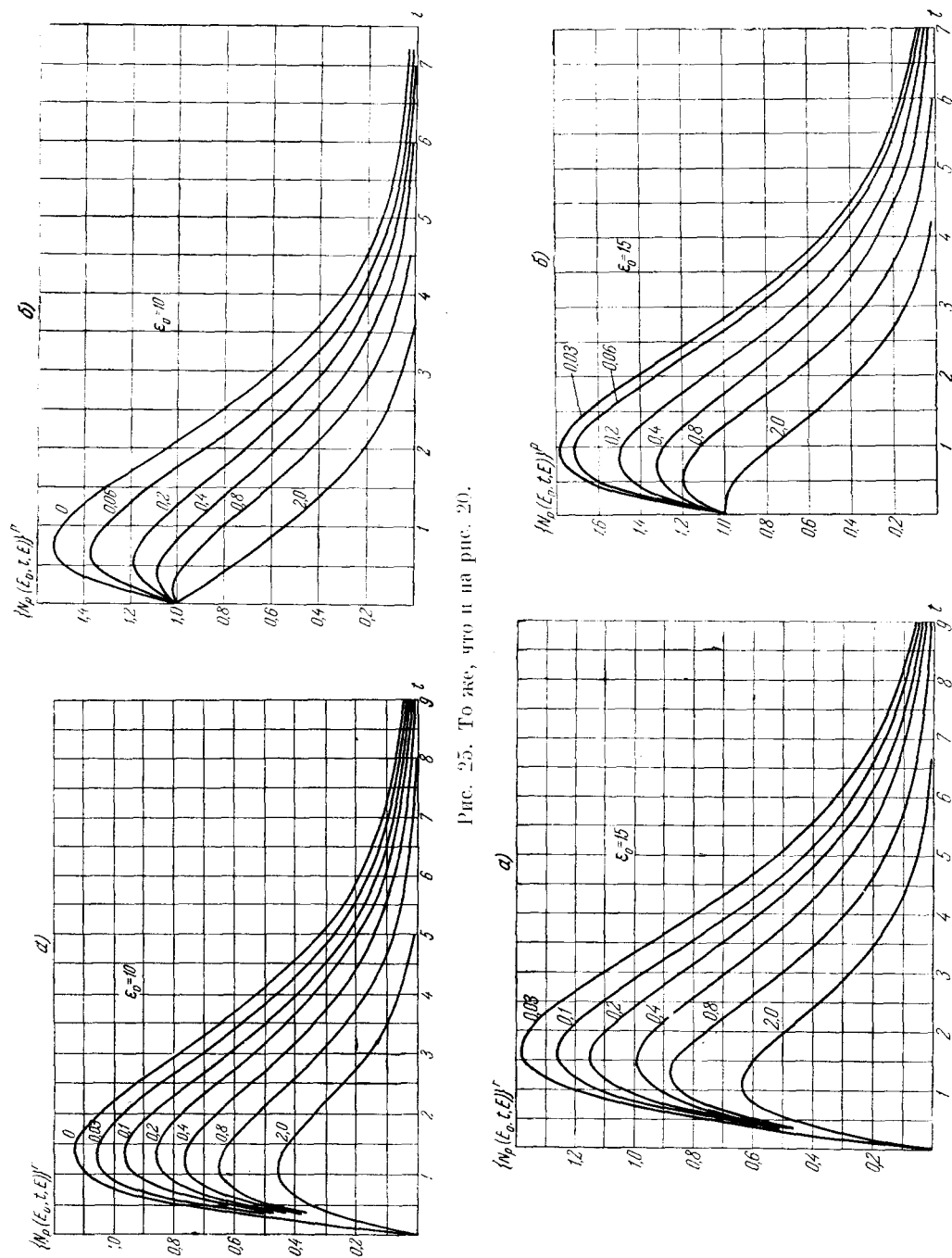


Рис. 25. То же, что и на рис. 20.

Рис. 26. То же, что и на рис. 20.

таблице VIII. Полученные по моментам каскадные кривые $\{N_p(E_1, t)\}^{p, \Gamma}$ изображены на рис. 20—26. Точность полученных кривых порядка 10%.

Таблица VIII

$\{\bar{t}_p(E_0, E)\}^P$								$\{\bar{t}_p(E_0, E)\}^\Gamma$							
$\epsilon_0 \backslash \epsilon$	0,03	0,06	0,1	0,2	0,4	0,8	2,0	0,03	0,06	0,1	0,2	0,4	0,8	2,0	
0,6	0,189	0,160	0,147	0,098	0,043			1,393	1,387	1,385	1,335	1,321			
1,4	0,493	0,435	0,408	0,311	0,237	0,126		1,62	1,57	1,56	1,50	1,44	1,38		
3,0	0,934	0,886	0,838	0,746	0,620	0,316	0,061	1,96	1,92	1,88	1,80	1,70	1,42	1,07	
5,0	1,299	1,259	1,208	1,130	0,978	0,660	0,230	2,25	2,22	2,17	2,10	1,97	1,68	1,26	
8,0	1,706	1,654	1,60	1,54	1,37	1,03	0,63	2,61	2,56	2,51	2,46	2,29	1,98	1,63	
10	1,90	1,85	1,80	1,73	1,56	1,23	0,82	2,78	2,74	2,69	2,62	2,46	2,15	1,79	
15	2,27	2,22	2,17	2,08	1,94	1,63	1,19	3,13	3,08	3,03	2,93	2,80	2,48	2,07	

$\{\bar{t}_p^2(E_0, E)\}^P$								$\{\bar{t}_p^2(E_0, E)\}^\Gamma$							
$\epsilon_0 \backslash \epsilon$	0,03	0,06	0,1	0,2	0,4	0,8	2,0	0,03	0,06	0,1	0,2	0,4	0,8	2,0	
0,6	0,335	0,197	0,145	0,065	0,0084			3,83	3,69	3,55	3,49	3,42			
1,4	0,873	0,753	0,615	0,415	0,202	0,082		4,74	4,53	4,38	4,17	3,84	3,67		
3,0	2,09	1,90	1,73	1,41	0,997	0,479	0,030	6,40	5,04	5,85	5,52	4,94	3,94	2,68	
5,0	3,55	3,35	3,11	2,72	2,10	1,28	0,31	8,13	7,90	7,65	7,15	6,33	5,05	3,42	
8,0	5,16	5,00	4,81	4,33	3,63	2,52	1,12	10,4	10,0	9,77	9,19	8,22	6,61	4,76	
10	6,65	6,05	5,15	5,28	4,52	2,74	1,72	11,9	11,4	11,0	10,3	9,15	7,56	5,53	
15	8,47	8,27	7,90	7,30	6,45	4,98	3,05	14,2	14,0	13,5	12,7	11,6	9,7	7,1	

Таким образом, с помощью метода моментов на основе равновесного спектра Тамма и Беленького можно вычислить каскадные кривые и энергетические спектры частиц в легких веществах в ливнях, вызываемых первичными электронами или фотонами в энергетической области ϵ_0 от 0,2 до ~ 100 .

14. Каскадные кривые и энергетические спектры в тяжелых веществах

Напомним коротко основные трудности, с которыми встречается каскадная теория ливней в тяжелых веществах: 1. Суммарный коэффициент поглощения фотонов сильно зависит от энергии. 2. Рассеяние ливневых частиц в тяжелых веществах весьма велико. Поэтому в теории не удается получить выражений для $N(E_0, E, t)$, так как неприменим метод функциональных преобразований, успех которого связан с использованием асимптотических выражений для сечений основных процессов.

В работах ^{26, 55, 57} был развит метод решения проинтегрированных по глубине основных уравнений с переменным σ и с учетом рассеяния, позволивший получить выражение для равновесного спектра электронов и фотонов и, используя равновесный спектр, в принципе, вычислить все моменты функции распределения ливневых частиц. Судить о точности каскадной теории для тяжелых веществ можно, сравнивая вычисленные моменты с опытом. В ⁵⁶ была выведена рекуррентная формула, позволяющая последовательно вычислить все моменты функций распределения от произвольного спектра первичных частиц и вычислены первые два момента функции распределения электронов в свинце от спектра первичных фото-

нов вида $1/E$. Полученные моменты сравнивались с опытом; поскольку в этой работе не учитывалось рассеяние, она нуждается в уточнении.

В³⁷ была выведена рекуррентная формула, позволяющая последовательно вычислить все моменты функции распределения с учетом рассеяния и вычислены первые два момента функции распределения электронов в свинце от спектра первичных фотонов вида $1/E$. Результаты расчетов приведены в таблице IX. Средние значения первого момента, экспериментальные и теоретические, отличаются на 1%, второго момента — на 4%. Однако различие лежит в пределах ошибок опыта и расчета. В то же время без учета рассеяния величина первого момента при $\sigma = \sigma_0$ меньше экспериментального значения примерно на 30%, а при $\sigma = \sigma(E)$ — больше примерно на 10%. Следовательно, первые два момента функции распределения, вычисленные с возможно более точным учетом рассеяния и ионизационных потерь, находятся в очень хорошем согласии с опытом.

Таблица IX

$\bar{t}_{\text{теор.}}$	$\bar{t}_{\text{эксп.}}$	$\bar{t}^2_{\text{теор.}}$	$\bar{t}^2_{\text{эксп.}}$
$5,89 \pm 0,12$	$5,9 \pm 0,2$	$53,4 \pm 2$	55 ± 4

Отметим, что в легких веществах метод моментов необходим для расчета каскадных кривых и энергетических спектров при энергии первичных частиц $\epsilon_0 \sim 1$. При $\epsilon_0 \gg 1$ там хорошо работает метод функциональных преобразований. Иное положение в теории для тяжелых веществ, где необходимо вычислить каскадные кривые и энергетические спектры в возможно более широком диапазоне энергий первичных частиц. Поэтому при выборе весовой функции необходимо использовать больше сведений о поведении каскадной кривой. Ранее мы выбирали весовую функцию, учитывая поведение кривых при больших t и граничные условия при $t=0$. Теперь же мы будем использовать для построения весовой функции и величину первого момента. В⁵¹ вычислены первые два момента функции распределения электронов в свинце в ливне, вызванном первичным электроном или фотоном энергии E_0 . Результаты приведены в таблице X. Каскадные кривые от первичного фотона аппроксимированы с помощью суммы

Таблица X

$\bar{t} \backslash \epsilon_0$	1	3	5	10	20	30	40
$\{\bar{t}_p(E_0, 0)\}^r$	4,32	4,34	4,37	4,63	5,22	5,69	6,04
$\{\bar{t}_p^2(E_0, 0)\}^r$	36,1	34,8	34,8	37,1	43,8	50,3	54,3
$\{\bar{t}_p(E_0, 0)\}^p$	0,343	1,14	1,65	2,34	3,18	3,67	4,01
$\{\bar{t}_p^2(E_0, 0)\}^p$	1,43	6,88	10,7	16,2	22,3	26,4	29,0
$\bar{t} \backslash \epsilon_0$	50	60	70	90	118,1	10^9 эв	10^{10} эв
$\{\bar{t}_p(E_0, 0)\}^r$	6,30	6,53	6,74	7,08	7,43		
$\{\bar{t}_p^2(E_0, 0)\}^r$	58,5	61,8	64,7	70,3	74,6		
$\{\bar{t}_p(E_0, 0)\}^p$	4,25	4,43	4,60	4,88	5,17	7,00	9,20
$\{\bar{t}_p^2(E_0, 0)\}^p$	32,0	34,1	36,1	39,2	42,7	70,8	110,0

полиномов, ортогональных на промежутке $(0, \infty)$ с весом ⁷⁴

$$\omega(\gamma t) = \frac{\gamma^{i+1} t^i e^{-\gamma t}}{\Gamma(i+1)}.$$

Здесь γ — минимальное значение суммарного коэффициента поглощения фотонов, i определяется из условия равенства первого момента весовой функции первому моменту искомой функции распределения

$$i = \bar{\gamma}_\Gamma(E_0, 0) - 1.$$

Отметим, что при $\epsilon_0 \sim 1$ мы получаем значения $i < 1$. В этом случае $\left. \frac{dN}{dt} \right|_{t=0} = \infty$, поэтому удобнее считать $i = 1$ и из соответствующего условия определять γ . Таким образом, при $\epsilon_0 \sim 1$ используемый здесь способ аппроксимации автоматически переходит в способ, использованный ранее при вычислении каскадных кривых в легких веществах. Каскадные кривые от первичных электронов аппроксимировались с помощью полиномов, ортогональных на промежутке $(0, \infty)$, с весом

$$\omega(\gamma t) = \frac{\gamma^{i+1} (a + t^i) e^{-\gamma t}}{\Gamma(i+1) + a\gamma^i}.$$

Здесь величины i и a определяются из условия равенства первого момента весовой функции величине $\bar{t}(E_0, 0)$ искомой функции распределения и из граничного условия $\{N_p(\epsilon_0, 0, 0)\}^p = 1$. При $\epsilon_0 \sim 1$ получаются значения $0 < i < 1$. Чтобы избежать бесконечной производной при $t = 0$, мы считаем у нескольких первых кривых i равным ближайшему целому числу и после этого определяем величину a . Отметим, что путем небольшого усложнения можно рассчитать этим способом каскадные кривые, более точные при малых значениях t . Для этого достаточно в весовую функцию соответствующим образом ввести еще один параметр, значения которого можно определить из граничного условия для производной по t каскадной кривой. Электронные каскадные кривые в свинце, рассчитанные этим способом, от первичного фотона и электрона приведены на рис. 27 и 28, а также в таблице XI, где приведены $\{N_p(E_0, t, 0)\}^p$ при

Таблица XI

E_0	t	0,5	1,0	2,0	3,0	3,5	4,0	5,0	5,5
10^9 эв	$\{N_p(E_0, t, 0)\}^\Gamma$	5,77	9,35	13,76	15,6	15,9	15,8	15,1	14,5
10^{10} эв		16,3	33,3	65,4	91,8	102,2	110,6	—	125,2
E_0	t	6,0	8,0	10,0	12,0	14,0	16,0	20,0	
10^9 эв	$\{N_p(E_0, t, 0)\}^\Gamma$	13,8	10,64	7,66	5,26	3,48	2,23	0,84	
10^{10} эв		125,8	119,3	101,4	79,9	59,5	42,3	18,9	

$E_0 = 10^9, 10^{10}$ эв. Коэффициент γ полагался равным 0,24. Величины моментов при $E_0 = 10^9$ эв брались из ⁵⁷, а при $E_0 = 10^{10}$ эв — из ⁶⁹. Заметим, что у всех полученных каскадных кривых коэффициент поглощения в «хвосте» близок к экспериментальному значению 0,24⁹. Точность полученных кривых, как и в случае легких веществ, $\sim 10\%$.

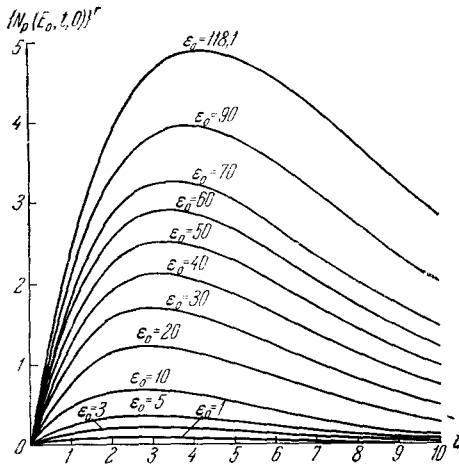


Рис. 27. Каскадные кривые $\{N_p(E_0, t, 0)\}^Г$ в свинце от первичных фотонов энергии ϵ_0 от 1 до 118,1 эв.

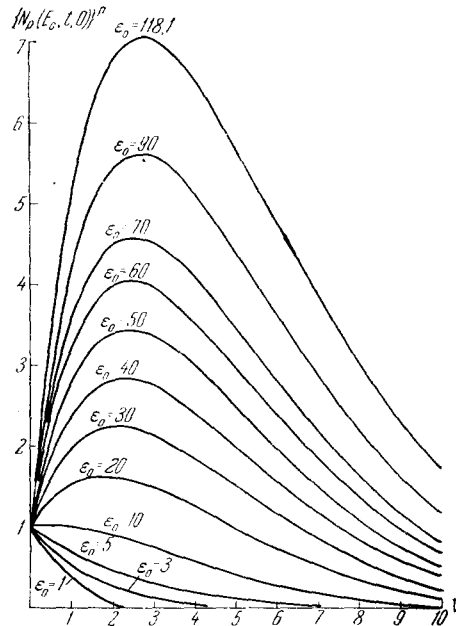


Рис. 28. То же, что и на рис. 27, но от первичного электрона.

На рис. 29 приведена экспериментальная каскадная кривая в свинце 1, полученная в ⁵⁸ от спектра первичных фотонов $1/E$. Кривая 2 — результат усреднения по тому же спектру фотонов каскадных кривых, приведенных на рис. 27 и 28. Расчетная и экспериментальная кривые в пределах 5% совпадают.

Таким образом, приведенные кривые удовлетворительно описывают каскадный процесс в свинце.

В ⁷⁵ методом случайных испытаний для отдельных частных случаев на специальной машине были получены каскадные кривые в свинце. Однако в ⁷⁵ приближенно учитывались электроны от фотонов энергии ниже 10 Мэв и резерфордовское рассеяние заряженных частиц. Авторы получили число электронов на данной глубине t в виде суммы двух членов $n = n_1 + n_2$, где n_1 — число электронов от фотонов энергии больше 10 Мэв, полученное методом случайных испытаний, n_2 — число электронов от фотонов энергии ниже 10 Мэв. Для определения n_2 автор использовал следующую

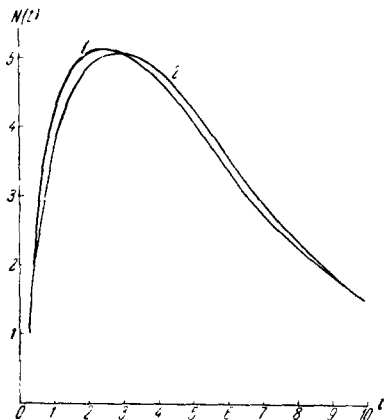


Рис. 29. Кривая 1 — экспериментальная каскадная кривая в свинце от тормозного спектра первичных фотонов с максимальной энергией 330 Мэв, кривая 2 — получена усреднением по спектру фотонов каскадных кривых, рассчитанных по моментам³⁷. Кривые нормированы при $t=0,5$.

формулу:

$$n_2(t) = \int_0^t \frac{\omega(t')}{\beta} e^{-(t-t')\sigma_m} dt',$$

где $\omega(t')$ — средняя энергия, теряемая фотонами энергии ниже 10 Мэв на излучение в одном акте, σ_m — средний коэффициент поглощения фотонов в энергетической области $1-10 \text{ Мэв}$, β — критическая энергия в свинце. Такой выбор n_2 основан на предположении, что электроны, полученные от фотонов энергии ниже 10 Мэв , теряют свою энергию на ионизацию на пути, много меньшем среднего свободного пробега фотонов, что заведомо неточно (см. рис. 28). Заметим, что в большинстве случаев при комптоновском рассеянии вторичные электроны уносят

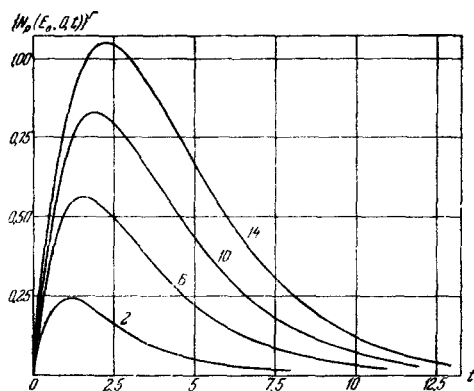


Рис. 30. Каскадные кривые для меди от первичного фотона, цифры около кривых обозначают энергию первичного фотона в единицах β/q .

значительную (больше половины) часть энергии падающего фотона. Учет рассеяния производится следующим образом. Все точки каскадных кривых, полученных без учета рассеяния, сдвигаются влево на расстояние

$$\Delta t = r(1 - e^{-t}). \quad (3.18)$$

Такой учет рассеяния приводит к практически постоянному смещению всей кривой на $\Delta t = r$ для $t > 2$, что заведомо неточно. Кроме того, такой учет рассеяния не меняет высоты максимума кривой *), тогда как согласно ⁵⁷ даже при $E_0 = 10^9 \text{ эв}$ учет рассеяния приводит к увеличению высоты максимума 2,5%. На рис. 30 приведены вычисленные методом моментов каскадные кривые от первичного электрона энергии $E_0 = 10^8 \text{ эв}$: кривая 1 с учетом, кривая 2 без учета рассеяния. Из рисунка видно, что учет рассеяния приводит к более сложной деформации всей кривой и, кроме того, приводит к увеличению высоты максимума примерно на 10%. Поэтому каскадные кривые, полученные в ⁷⁵, представляются удовлетворительными при условии $E_0/\beta \gg 1$. В этой области энергий они совпадают с кривыми, приведенными на рис. 27 и 28, в пределах 10—15%.

*) Заметим, что после применения к каскадной кривой преобразования (3.18), автор затем перенормирует ее площадь к E_0/β , что может несколько изменить высоту максимума.

В работе ⁷⁴ методом моментов были рассчитаны электронные каскадные кривые для меди от первичного электрона и фотона в интервале энергий $10^7 \leq E_0 \leq 10^{12}$ эв. Расчет проведен с учетом зависимости суммарного коэффициента поглощения фотонов от энергии и резерфордского рассеяния заряженных частиц. Коэффициент γ полагался равным 0,38. Результаты расчета первых двух моментов приведены в таблице XII. Каскадные кривые приведены на рис. 31—33. Точность полученных кривых $\sim 10\%$.

Таблица XII

z_0	$\left\{ \bar{t}_p(z_0, 0) \right\}$	$\left\{ \bar{t}_p^2(z_0, 0) \right\}$	$\left\{ \bar{t}_p(z_0, 0) \right\} \Gamma$	$\left\{ \bar{t}_p^2(z_0, 0) \right\} \Gamma$	z_0	$\left\{ \bar{t}_p(z_0, 0) \right\}$	$\left\{ \bar{t}_p^2(z_0, 0) \right\}$	$\left\{ \bar{t}_p(z_0, 0) \right\} \Gamma$	$\left\{ \bar{t}_p^2(z_0, 0) \right\} \Gamma$
2	0,96	2,99	3,13	17,8	$3,5 \cdot 10^2$	6,62	56,4	7,48	69,7
6	2,02	8,22	3,61	21,2	$5,6 \cdot 10^2$	7,10	64,0	7,92	77,1
10	2,64	12,1	3,94	23,8	$7,7 \cdot 10^2$	7,42	69,2	8,22	82,7
14	3,06	15,1	4,24	26,2	$9,8 \cdot 10^2$	7,66	73,3	8,47	87,2
35	4,13	24,9	5,16	36,3	$1,4 \cdot 10^3$	8,01	79,5	8,83	94,1
56	4,66	30,6	5,65	42,3	$7,4 \cdot 10^3$	9,68	112	10,5	129
77	5,01	34,6	5,97	46,7	$1,4 \cdot 10^4$	10,3	126	11,1	144
98	5,27	37,9	6,22	50,1	$7,4 \cdot 10^4$	12,0	166	12,8	187
$1,4 \cdot 10^2$	5,66	42,9	6,58	55,3	$1,4 \cdot 10^5$	12,6	183	13,4	205

Таким образом, с помощью метода моментов удастся рассчитать функцию $N(E_0, t, 0)$ в широком диапазоне энергий и глубин и в тяжелых веществах. В работе ⁵⁹ были вычислены первые два момента функции распределения электронов $\{N_p(E_0, t, E^0)\} \Gamma$ с энергией больше E^0 в свинце. Результаты расчета моментов приведены в таблице XIII.

Таблица XIII

$z_0=50$			$z_0=90$			$z_0=118,1$		
z_0	$\left\{ \bar{t}_p(z_0, z_0) \right\} \Gamma$	$\left\{ \bar{t}_p^2(z_0, z_0) \right\} \Gamma$	z_0	$\left\{ \bar{t}_p \right\} \Gamma$	$\left\{ \bar{t}_p^2 \right\} \Gamma$	z_0	$\left\{ \bar{t}_p \right\} \Gamma$	$\left\{ \bar{t}_p^2 \right\} \Gamma$
0	6,30	58,5	0	7,08	70,3	0	7,43	74,6
0,183	6,12	54,9	0,183	6,89	66,6	0,183	7,25	70,9
0,738	5,59	45,4	0,932	6,22	53,6	0,838	6,57	59,5
1,292	5,18	40,2	1,680	5,74	45,4	1,493	6,12	50,8
2,402	4,66	31,3	2,428	5,40	38,9	2,476	5,67	43,9
3,511	4,30	26,7	4,674	4,79	31,6	4,114	5,19	36,3
5,175	3,90	22,0	6,919	4,33	27,5	6,734	4,54	29,1
6,839	3,61	18,6						

Функция $\{N_p\} \Gamma$ аппроксимировалась с помощью суммы полиномов $L_n^1(x)$. Результаты расчетов $\{N_p\} \Gamma$ для различных значений E_0 и E^0 приведены на рис. 34—36. На рис. 37 приведен равновесный спектр I и энергетический спектр в районе максимума лавины. Из рисунка видно, что спектры в районе максимума лавины при $z_0=50; 90; 118,1$ в пределах 2% совпадают друг с другом и в пределах 10% — с равновесным спектром, точность которого неоднократно оценивалась. Величина средней энергии, приходящейся на данной глубине на одну заряженную частицу,

определенная по вычисленным спектрам, в пределах 20% совпадает с точным значением. Кроме того, было показано, что за максимум лавина в тяжелых веществах затухает медленнее, чем в легких. Все это

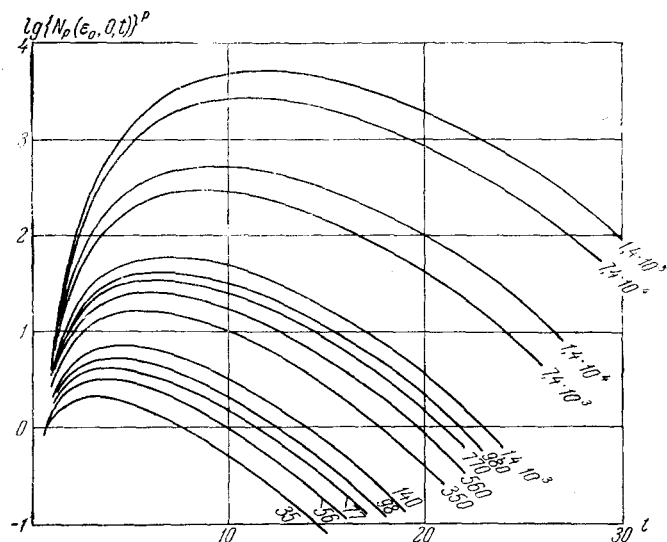


Рис. 31. То же, что и на рис. 30.

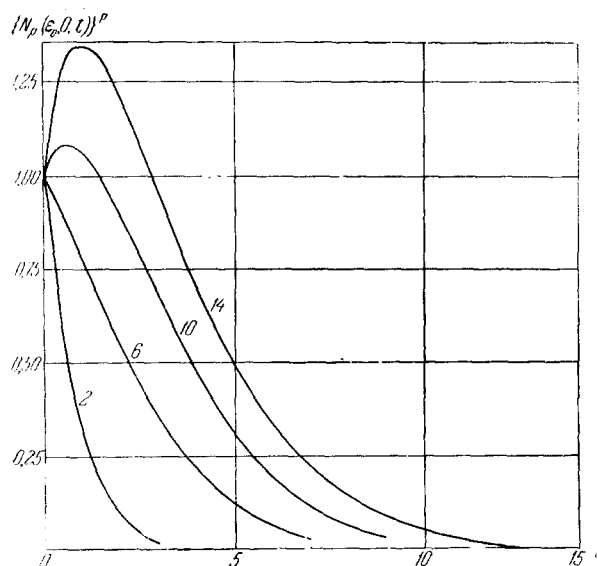


Рис. 32. То же, что и на рис. 30, но от первичного электрона.

позволяет утверждать, что энергетические спектры в тяжелых веществах сосчитаны в ⁵⁹ с ошибкой порядка 10%.

Проведенный обзор работ по одномерной каскадной теории ливней показывает, что метод функциональных преобразований вместе с методом моментов позволяют получить практически полное решение одномерной задачи о среднем поведении электронно-фотонных ливней в легких и тяжелых веществах.

Применимость метода функциональных преобразований ограничивается требованием однородности функций, описывавших вероятности всех процессов, относительно энергий первичной и вторичной частицы.

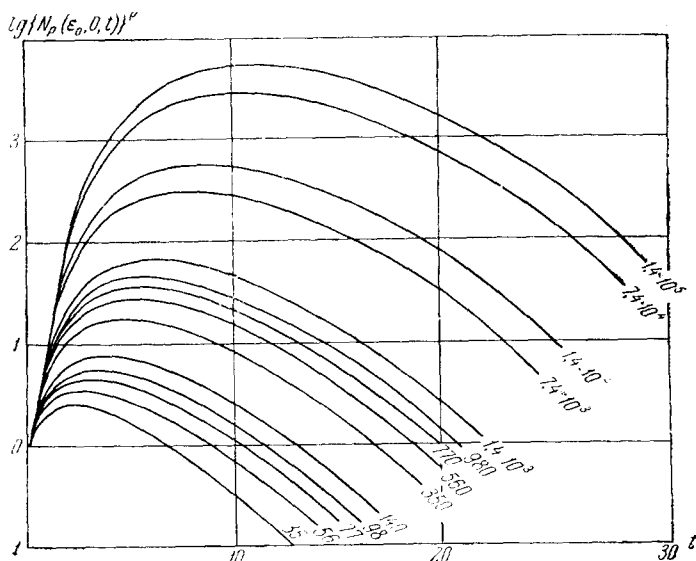


Рис. 33. То же, что и на рис. 32.

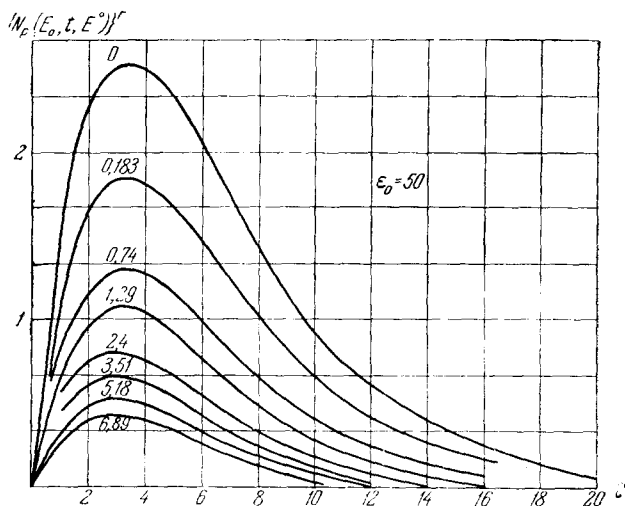


Рис. 34. Зависимость от глубины числа электронов энергии больше ε (от 0 до ~ 7), в свинце в ливне, вызванном первичным фотоном энергии $\varepsilon_0 = 50, 90$ и $118,1$ соответственно.

Для того чтобы практически получить решение уравнений методом функциональных преобразований, необходимо выполнение еще одного условия: $\ln E_0/\beta > 1$. Кроме того, этим методом практически очень трудно получить решение уравнений с учетом рассеяния.

Методом моментов удается получить решение уравнений для легких веществ в энергетической области $\varepsilon_0 \sim 1$, а также решение уравнений в тяжелых веществах с учетом зависимости суммарного коэффициента

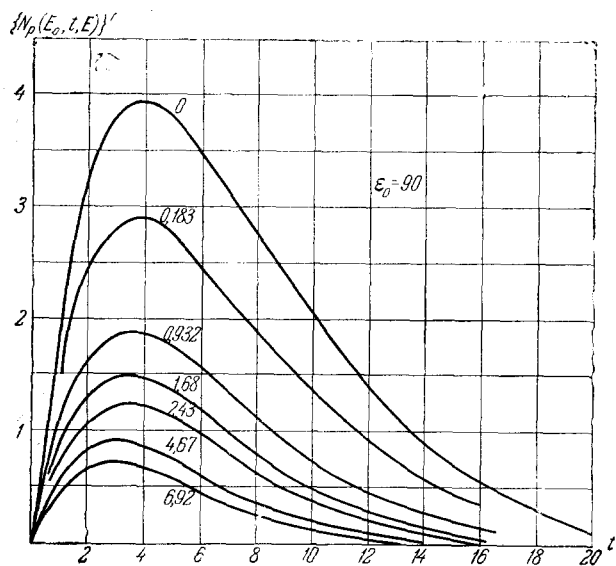


Рис. 35. То же, что и на рис. 34.

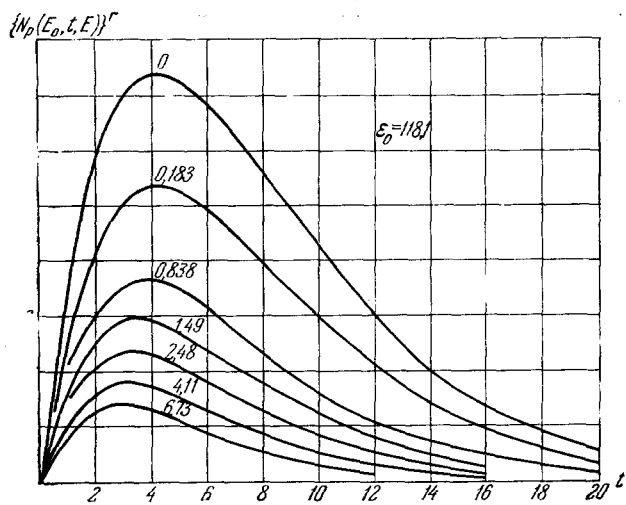


Рис. 36. То же, что и на рис. 34.

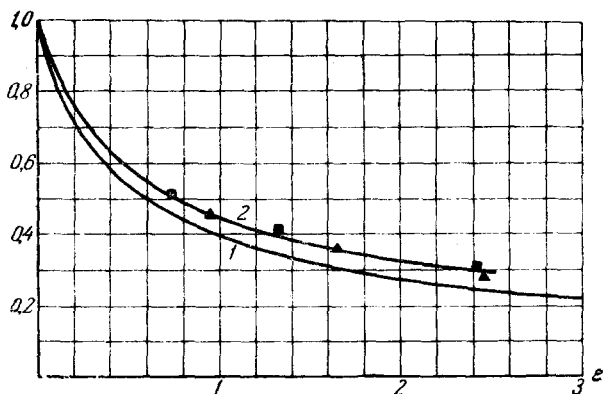


Рис. 37. Кривая 1—равновесный спектр, кривая 2 и треугольники и квадраты около нее — спектр в максимуме лавины от первичного электрона энергии $\epsilon_0 = 50, 90$ и 118.1 .

поглощения фотонов от энергии и с учетом резерфордского рассеяния заряженных частиц лавины. Метод моментов позволяет получить с хорошей точностью решение в довольно широком диапазоне глубин и энергий первичных частиц. Однако он является приближенным методом. Приведенные в обзоре таблицы и графики могут быть полезными при различного рода численных расчетах по каскадной теории.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. H. A. Bethe, W. Heitler, Proc. Roy. Soc. A146 (1934), 83.
2. С. З. Беленький, Лавинные процессы в космических лучах, Гостехиздат, 1948.
3. Б. Росси, Частицы больших энергий, Гостехиздат, 1955.
4. F. L. Friedman, Massachusetts Institute of Technology, Thesis, 1949.
5. И. П. Иваненко, ЖЭТФ 32 (1957), 333.
6. H. Bethe, L. Maximon a. F. Low, Phys. Rev. 91 (1953), 417.
7. L. Landau a. G. Rumer, Proc. Roy. Soc. 166 (1938), 213.
8. П. Немировский, Journ. of Phys. (CCCP) 11 (1947), 94.
9. A. Borsellino, Nuovo Cim. 4 (1947), 112.
10. V. Votruba, Phys. Rev. 73 (1948), 1468.
11. K. M. Watson, Phys. Rev. 72 (1947), 1060.
12. J. A. Wheeler, W. E. Lamb, Phys. Rev. 55 (1939), 858.
13. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.
14. A. Borsellino, Rev. Univ. nac. Tucuman A6 (1947), 7.
15. J. Jaeger a. H. Hulme, Proc. Roy. Soc. A153 (1936), 443.
16. J. Jaeger, Nature 137 (1936), 781; 148 (1941), 86.
17. L. Maximon a. H. A. Bethe, Phys. Rev. 87 (1952), 156.
18. H. Davies a. H. A. Bethe, Phys. Rev. 87 (1952), 156.
19. А. Кирпичов, и И. Померанчук, ДАН СССР 15 (1944), 301.
20. И. Е. Тамм, Zs. f. Phys. 62 (1930), 545.
21. O. Klein, a. J. Nischina, Zs. f. Phys. 52 (1929), 853.
22. О. Н. Вавилов, Диссертация, Труды ФИАН 4 (1949), 5.
23. C. Weizsäcker, Zs. f. Phys. 88 (1934), 612.
24. H. Snyder, Phys. Rev. 53 (1938), 960.
25. H. J. Bhabha, S. K. Chakrabarty, Proc. Roy. Soc. 181 (1943), 267; Proc. Ind. Acad. Sci. 15 (1942), 464.
26. И. Е. Тамм, С. З. Беленький, Journ. of Phys. (CCCP) 1 (1939), 177.
27. С. З. Беленький, ДАН СССР 33 (1941), 609.
28. H. S. Snyder, Phys. Rev. 76 (1949), 1563.
29. H. J. Bhabha, S. K. Chakrabarty, Phys. Rev. 74 (1948), 1352.
30. J. Nishimura a. K. Kamata, Progr. of Theor. Phys. 7 (1952), 185.
31. S. K. Chakrabarty, M. R. Gupta, Phys. Rev. 101 (1956), 813.
32. Н. Гельфанд, Уравнения в конечных разностях, Гостехиздат, 1954.
33. W. T. Scott, Phys. Rev. 76 (1949), 1563.
34. H. S. Snyder, Phys. Rev. 75 (1949), 906.
35. R. Serber, Phys. Rev. 54 (1938), 317.
36. K. S. K. Iyengar, Proc. Ind. Acad. Sci. A15 (1942), 195.
37. И. П. Иваненко, ЖЭТФ 31 (1956), 86.
38. L. Janossy a. Tzu, Nature 157 (1946), 62.
39. S. K. Chakrabarty, Nature 158 (1946), 166.
40. И. Л. Розенталь, ЖЭТФ 22 (1952), 92.
41. J. B. Bernstein, Phys. Rev. 80 (1950), 995.
42. H. J. Bhabha, W. Heitler, Proc. Roy. Soc. A159 (1937), 432.
43. N. Arley, Proc. Roy. Soc. A168 (1938), 519.
44. N. Arley, B. Eriksen, Kgl. Danske Videnskab Selskab., Mat.-fys. Medd. 17 (1940), № 11; N. Arley, On the theory of stochastic process and their application to the theory of cosmic radiation (G. E. C. Gads Forlag, Copenhagen, 1943).
45. J. C. O'Rourke, A. Anderson, Phys. Rev. 99 (1955), 1484.
46. J. C. Butcher, B. A. Chartress a. H. Messel, Nuclear Phys. 6 (1958), 271.
47. A. Ramakrishnan, S. K. Srinivasan, Proc. Ind. Acad. Sci. 44 (1956), 263; 45 (1957), 133; S. K. Srinivasan, N. R. Ranganathan, Proc. Ind. Acad. Sci. 45 (1957), 69, 268.
48. И. П. Иваненко, ЖЭТФ 35 (1958), 132.
49. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 10 (1940), 1007.

50. N. Dall'aporta, E. Clementel, Nuovo Cim. 3 (1946), 235; N. Dall'aporta, G. Poiani, Nuovo Cim. 4 (1947), 1; E. Clementel, L. Fabbrichesi, Nuovo Cim. 5 (1948), 78.
 51. И. П. Иваненко, ДАН СССР 107 (1956), 819.
 52. См. статью K. Ott'a в книге «Kosmische Strahlung», ed. W. Heisenberg, Berlin, 1953.
 53. W. Heisenberg, Kosmische Strahlung, Berlin, Springer, 1943.
 54. K. Ott, Zs. f. Naturforsch. 9a. (1954), 488.
 55. С. З. Беленький, ЖЭТФ 19 (1949), 940.
 56. В. Я. Файнберг, ЖЭТФ 22 (1952), 112.
 57. С. З. Беленький, Б. И. Максимов, ЖЭТФ 22 (1952), 102.
 58. W. Blocker, R. W. Kenney, W. K. H. Panofsky, Phys. Rev. 79 (1950), 419.
 59. И. П. Иваненко, ЖЭТФ 32 (1957), 491.
 60. С. З. Беленький, ЖЭТФ 14 (1944), 384.
 61. С. З. Беленький, ДАН СССР 61 (1948), 621.
 62. J. A. Richards, L. W. Nordheim, Phys. Rev. 74 (1948), 1106.
 63. П. С. Исеев, ЖЭТФ 24 (1953), 78.
 64. П. С. Исеев, ЖЭТФ 28 (1955), 374.
 65. С. З. Беленький, ЖЭТФ 15 (1945), 7.
 66. K. Hinotani, K. Suga, J. Tanaka, J. Phys. Soc. of Japan 9 (1954) 883.
 67. K. M. Grosse, E. Hayward, Phys. Rev. 80 (1950), 40.
 68. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948, стр. 406.
 69. Г. Т. Зацепин, ДАН СССР 63 (1948), 243.
 70. И. П. Иваненко, Изв. АН СССР, сер. физ. 19 (1955), 624.
 71. G. Szegő, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 23 (1939).
 72. И. П. Иваненко, М. А. Малков, ЖЭТФ 32 (1957), 450.
 73. И. П. Иваненко, ЖЭТФ 33 (1957), 135.
 74. И. П. Иваненко, Б. Е. Самосудов, ЖЭТФ 35 (1958), 1265.
 75. R. R. Wilson, Phys. Rev. 86 (1952), 261.
-