

ТЕОРИЯ ЯДРА КАК СИСТЕМЫ МНОГИХ ТЕЛ

Р. Д. Иден*)

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория многих тел в применении к ядру касается установления связи между ядерными силами и экспериментальными свойствами ядер. Предполагается, что ядерные силы могут быть выведены из двухчастичного потенциала, который должен быть выбран так, чтобы наиболее точно соответствовать экспериментальным данным по рассеянию нуклонов на нуклонах. Следует отметить, однако, что эта теория во многом не зависит от детального предположения о силах и может быть также успешно применена к иным типам систем многих тел.

Многие экспериментальные свойства ядер объединены посредством различных эмпирических моделей ядер, в частности оболочечной моделью и оптической моделью, и одной из главных целей общей теории должно быть предсказание параметров этих моделей из наших знаний о ядерных силах. Эти параметры включают в себя: энергию, приходящуюся на один нуклон, и плотность бесконечной ядерной материи, поверхностную энергию и распределение плотности нуклонов в реальном ядре, действительный потенциал оболочечной модели и комплексный потенциал оптической модели, а также распределение нуклонов по импульсам в ядре. Это распределение может быть получено из ядерных реакций при высоких энергиях.

Вторая цель общей теории состоит в том, чтобы показать, как относятся волновые функции различных ядерных моделей к истинной волновой функции, и изучить условия, при которых модель может успешно аппроксимировать поведение ядра в каждом конкретном эксперименте. Такое знание соотношения между моделью и ядром помогает также наметить пути усовершенствования модели и указывает границы ее применимости. Изучение теории многих тел для достижения этих целей с необходимостью включает в себя трудные математические проблемы обоснования различных приближений, на которых основаны применения теории. К таким проблемам относится вопрос о сходимости различных разложений в ряды и нахождение условий, относящихся к двухчастичным силам, при которых справедливы применяемые приближения. Например, представляется неправдоподобным, чтобы эта теория могла дать какое бы то ни было простое соотношение между ядерными силами и деталями резонансных реакций, и, следовательно, легко понять, почему методы, основанные на разложении в ряды, непригодны в резонансной области.

*) Nuclear Reactions, vol. I, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1959, стр. 1—41. Перевод И. В. Широковой.

Оболочечная и оптическая модели ядра основаны на предположении, что нуклоны движутся совершенно независимо друг от друга в потенциальной яме, которая представляет собой усредненное взаимодействие с другими нуклонами. Подобная модель независимых частиц играет важную роль в теории многих тел. Для того чтобы определить общий формализм, необходимо сначала определить модель независимых частиц, а затем получить формально точное выражение для волновой функции ядра, разложенной по модельным волновым функциям. Это формальное соотношение для ядерной волновой функции и аналогичное соотношение для энергии ядра могут быть представлены в виде ряда по возрастающим степеням потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия. Но ряды такого типа не используются непосредственно для метода последовательных приближений, подобного обычной теории возмущений, вследствие крайне короткодействующего характера нуклон-нуклонного потенциала, включающего эффект отталкивающей сферы. Вместо использования обычной теории возмущений нужно сначала преобразовать соотношение для энергии ядра в другой ряд, в котором последовательные приближения выражены через двунуклонную матрицу реакции.

В отличие от нуклон-нуклонного потенциала эта матрица реакции имеет конечные матричные элементы между различными состояниями модели независимых частиц. Получившееся разложение в ряд для энергии содержит как матрицу реакции, так и одночастичный потенциал, определяющий модель независимых частиц. При некотором частном выборе одночастичного потенциала ряд оказывается сходящимся очень быстро. Этот выбор обеспечивает условия самосогласованности в отношении одночастичного потенциала и матрицы реакции, чего в принципе достаточно, чтобы определить и то и другое.

Результирующая, определенная самосогласованным образом модель по форме должна походить на оболочечную ядерную модель независимых частиц, но она может также включать зависимость одночастичного потенциала от импульса и отклонение формы ядра от сферической вдали от замкнутых оболочек. Следовательно, необходимо убедиться в том, что эти новые свойства не должны влиять заметным образом на согласие между предсказаниями оболочечной модели независимых частиц и экспериментальными результатами. Дальнейшее улучшение теории многих тел, которая более точно учитывает вырожденные состояния, ведет к вековым уравнениям, в которых матрица реакции играет роль нуклон-нуклонного потенциала. Эти вековые уравнения имеют практическое применение только для низко лежащих состояний ядра, где число состояний с одинаковой энергией строго ограничено принципом Паули. При более высоких энергиях сложность этих уравнений дает нам некоторые указания на то, почему этот метод теряет смысл в области резонансных реакций.

В резонансной области допустимая энергия возбуждения может быть распределена между нуклонами очень большим количеством способов, а это и есть то сильное вырождение, которое является причиной усложнений в вековых уравнениях. Однако оптическая модель имеет дело не с этими отдельными резонансами, а с усреднением по резонансам. И так как она описывает нейтрон, падающий на ядро мишени в основном состоянии, эксперименты соответствуют отбору таких состояний составной системы, в которой вся допустимая энергия возбуждения сконцентрирована в этом одном нейтроне. Теория, следовательно, должна предсказывать вероятность распада этих отобранных состояний в другие состояния той же энергии. При помощи различных упрощающих предположений в теории многих тел показывается, что одиночный возбужденный

нейтрон как бы движется в комплексном потенциале, мнимая часть которого тесно связана с вероятностью распада из этого состояния. Этот комплексный потенциал отождествляется с потенциалом оптической модели.

Когда энергия частиц, падающих на ядро, становится по порядку величины значительно больше 100 Мэв, то становится все более очевидным, каким образом волновая функция будет отличаться от модельной волновой функции. Излагаемая теория предсказывает значительные отклонения от модели независимых частиц в ядре. Эти отклонения непосредственно связаны с сильным нуклон-нуклонным взаимодействием. Получающиеся корреляции влияют на вероятность таких процессов, как вырывание дейтронов из ядра и поглощение мезонов в ядре.

Во всех этих экспериментальных областях, относящихся к слабо возбужденным состояниям ядра, усредненному рассеянию нейтронов низких энергий и реакциям при высоких энергиях, теория многих тел согласуется качественно с идеями, лежащими в основе существующих моделей ядра, и обеспечивает улучшение некоторых из них. Там, где были сделаны количественные оценки, в частности, в отношении насыщения ядерных сил, существует приемлемое согласие с экспериментом.

а) Сводка результатов. Для того чтобы пояснить физический смысл матрицы реакции двух частиц и ее отношение к нуклон-нуклонному потенциалу, мы рассмотрим в § 2 взаимодействие двух частиц. Посредством сравнения системы из двух невзаимодействующих частиц в потенциальной яме с системой, в которой они взаимодействуют через парный потенциал, будет показано, что энергетический сдвиг, вызванный взаимодействием, равен диагональному элементу матрицы реакции. Волновая функция при взаимодействии также может быть выражена через матрицу реакции и волновую функцию при отсутствии взаимодействия.

В § 3 мы описываем формализм Голдстона, который дает решение проблемы многих тел в форме ряда теории возмущений по ядерному потенциалу с выбором модели независимых частиц в качестве невозмущенной системы. Связь этой теории возмущений для многих тел с методом Хартри—Фока описана в § 4. В § 5 определена обобщенная матрица реакции. Она отличается от матрицы реакции, введенной в § 2 тем, что ее матричные элементы зависят от состояний более чем двух частиц как за счет принципа Паули, так и за счет более сложной зависимости от энергии системы в целом. Эта матрица реакции позволяет провести частичное суммирование ряда теории возмущений для энергии системы многих тел. Условие сходимости получающихся рядов в матрице реакции получено по аналогии с методом Хартри—Фока и приводит к самосогласованным уравнениям, которые описаны в § 6.

В § 7 описывается приближение, развитое Бракнером для бесконечной ядерной материи. Хотя работа Бракнера по ядерной материи рассматривается как особый случай более общей теории, описанной в этой статье, следует отметить, что исторически работа Бракнера появилась первой, а настоящая теория является естественным расширением ее области применимости. Точность первого приближения как для конечного ядра, так и для бесконечной ядерной материи рассматривается в § 8 где отмечается, что поправочные члены малы за счет принципа Паули и короткодействующего характера ядерных сил. Наконец, рассматривается соотношение между теорией многих тел и оболочечной моделью (§ 9), оптической моделью (§ 10) и ядерными реакциями при высоких энергиях (§ 11).

б) Обзор современной литературы. Первая попытка использования матрицы реакции для определения свойства насыщения ядерной материи была предпринята Бракнером, Левинсоном и Мамудом¹. Их метод основан на аналогии с формализмом теории множественного рассеяния Ватсона² и Ватсона и Фрэнсиса³. Их вычисления были обобщены Бракнером, включившим в рассмотрение тензорные нуклон-нуклонные силы⁴ и принявшим в расчет условие самосогласованности между усредненным потенциалом нуклона в ядерной материи и матрицей реакции⁵. Первая попытка теоретического обоснования этого метода, основанная на обобщении ватсоновского формализма, была предпринята Бракнером и Левинсоном⁶ и Иденом и Фрэнсисом⁷. В последней статье отмечаются также более общие применения теории многих тел к оболочечной модели и к оптической модели. Бракнер, Иден и Фрэнсис⁸ применили эту теорию к реакциям при высоких энергиях, а также к оболочечной модели ядра в приближении «два нуклона плюс замкнутая оболочка»; относящемся как к смешанной конфигурации⁹, так и к оптической модели¹⁰. Бракнером¹¹ было показано, что трудность, касающаяся несвязанных диаграмм, отсутствует в теории многих тел. Уравнения для модели независимых частиц в применении к конечному ядру были рассмотрены автором¹² путем обобщения метода Хартри—Фока и в дальнейшем обсуждены в более детальной трактовке¹³, основанной на модификации метода Ватсона. Обзор основного содержания вышеупомянутой работы был дан Бете¹⁴ в статье, в которой изложение теории в ряде мест улучшено в сторону большей строгости и ясности.

Ко времени написания настоящей работы наиболее удовлетворительная форма общей теории дана в статье Голдстона¹⁵, использующего метод, основанный на зависящей от времени теории возмущений в квантовой теории поля. Хьюгенгольц¹⁶ в изящной формулировке этой теории использовал теорию резольвент. Обе эти статьи ограничиваются рассмотрением ядерной материи, но работа Голдстона легко обобщается на конечное ядро, как показано в § 6 настоящей статьи. На сегодняшний день наиболее детальный расчет для проблемы ядерного насыщения сделан Бракнером и Гаммелем¹⁷. Другая работа, относящаяся к решению самосогласованных уравнений, выполнена Бете и Голдстоном¹⁸, Бракнером и Вэдом¹⁹ и Таулесом²⁰. Приложения к поверхностной энергии ядра были изучены Скайрмом²¹ и к спин-орбитальному потенциалу оболочечной модели — Скайрмом²² и Кисслингером²³. Электромагнитное взаимодействие в теории многих тел рассмотрено Бэллом, Иденом и Скайрмом²⁴ и Бэллом²⁵.

Дальнейшая работа по общей теории системы многих тел, аналогичная по характеру вышеупомянутым работам, была выполнена Рейзенфельдом и Ватсоном²⁶ и Карилусом и Ватсоном²⁷. В статье Джестроу²⁸ по ядерной проблеме многих тел корреляция вводится несколько иным способом, но Имери²⁹ в своей работе высказывает сомнения относительно малости поправочных членов при наблюдаемых плотностях ядра. В статье Хуанга и Янга³⁰ уравнение для взаимодействия двух частиц выражено через наблюдаемые фазовые сдвиги, но их обобщение этого уравнения на систему многих тел приводит к бракнеровскому приближению, в котором матрица реакции ищется в приближении свободных, а не находящихся в ядерной материи частиц; представляется сомнительным, что такое приближение будет применимо к задаче о ядре, хотя оно выглядит пригодным для системы многих тел при более низких плотностях. Для чтения настоящей статьи не предполагается знание вышеупомянутых статей. Ссылки на них сделаны только для того, чтобы указать, где заинтересовавшийся читатель может найти нужные детали или другие сведения, не включенные в настоящий обзор теории.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ЧАСТИЦ

Бракнеровский метод вычисления энергии системы многих тел с сильным парным взаимодействием можно проиллюстрировать, рассматривая энергию взаимодействия двух частиц. Рассмотрим систему из двух различных частиц, движущихся во внешнем потенциале $V(r)$ и взаимодействующих друг с другом посредством потенциала $v(r_1 - r_2)$. Энергия взаимодействия будет получена сравнением с невозмущенной системой, в которой $v(r_1 - r_2)$ полагается равным нулю.

Невозмущенная система подчиняется уравнению Шредингера

$$\left(E_0 + \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_1^2 + \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_2^2 - V_1 - V_2 \right) \Phi_0(1, 2) = 0. \quad (2.1)$$

Так как гамильтониан разделяется, невозмущенная волновая функция Φ_0 может быть выбрана в виде произведения $\Phi_1(r_1)\Phi_2(r_2)$. Собственное значение энергии E_0 надо сравнить с соответствующей энергией E после включения взаимодействия v_{12} :

$$(E - H_0 - v_{12})\psi(1, 2) = 0, \quad (2.2)$$

где H_0 обозначает гамильтониан невозмущенной системы, данной в уравнении (2.1), а v_{12} обозначает $v(r_1 - r_2)$. Энергия взаимодействия равна

$$\Delta E_{12} = E - E_0. \quad (2.3)$$

Она может быть вычислена методами теории возмущений, если v_{12} — достаточно «слабое» взаимодействие. В настоящем контексте «слабое» означает, что матричные элементы v_{12} невелики по отношению к различным решениям (2.1). Ряд теории возмущения имеет вид

$$\Delta E_{12} = (\Phi_0 | v_{12} | \Phi_0) + \sum_{a \neq 0} (\Phi_0 | v_{12} | \Phi_a) \frac{1}{(E' - E_a)} (\Phi_a | v_{12} | \Phi_0) + \dots \quad (2.4)$$

Энергия E' имеет значение E_0 в рэлей-шредингеровской теории возмущения и значение $E_0 + \Delta E_{12} = E$ в вигнер-бриллюэновской теории возмущения.

Если матричные элементы v_{12} велики, разложение (2.4) более не применимо, хотя сам сдвиг энергии ΔE_{12} все еще может быть малым. Например, для короткодействующей отталкивающей сферы (т. е. для твердых шаров) матричные элементы v_{12} становятся бесконечными и разложение (2.4) теряет смысл, но сдвиг энергии ΔE_{12} будет малым, если мал радиус твердой сферы. Этот факт наводит на мысль, что разложение (2.4) должно быть заменено разложением, содержащим некоторый оператор, отличный от потенциала v_{12} . Задача отыскания такого оператора «псевдопотенциала» в настоящей проблеме упрощается при замене уравнения Шредингера (2.2) эквивалентным интегральным уравнением. (Альтернативный подход к этой проблеме был рассмотрен Хуангом и Янгом³⁰.) Это интегральное уравнение может быть записано в операторной форме:

$$\psi = \Phi_0 + \frac{Q}{E - H_0} v_{12} \psi, \quad (2.5)$$

где Q — проектирующий оператор, который отбрасывает состояние Φ_0 :

$$Q = 1 - |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|. \quad (2.6)$$

Эквивалентность (2.2) и (2.5) может быть проверена посредством умножения последнего уравнения слева на $(E - H_0)$ и учета того, что мы

должны удовлетворить условию для собственного значения

$$\Delta E_{12} = (\Phi_0 | v_{12} | \psi). \quad (2.7)$$

Если мы выразим формально решение (2.5) через оператор M_{12} , действующий на Φ_0 ,

$$\psi = M_{12}\Phi_0, \quad (2.8)$$

то энергетический сдвиг выразится диагональным матричным элементом оператора $v_{12}M_{12}$ в состоянии Φ_0 . Определив также новый оператор t_{12} посредством

$$t_{12} = v_{12}M_{12}, \quad (2.9)$$

уравнения для t_{12} и энергетического сдвига ΔE_{12} можно переписать в виде

$$t_{12} = v_{12} + v_{12} \frac{Q}{E - H_0} t_{12}, \quad (2.10)$$

$$\Delta E_{12} = (\Phi_0 | t_{12} | \Phi_0). \quad (2.11)$$

Для потенциала v_{12} слабого взаимодействия (2.11) сводится к (2.4). Для потенциала сильного взаимодействия (2.11) дает точный сдвиг энергии при условии, что (2.10) решено точно, и приближенный сдвиг энергии, если (2.10) решено в приемлемом приближении. Например, если невозмущенное решение аппроксимировано двумя плоскими волнами, то (2.11) пропорционально фазовому сдвигу в пределе бесконечного ядра (Фукуда и Ньютон^{30a}). Метод Хуанга и Янга³⁰ также равнозначен получению приближенного решения для (2.10), которое основано на фазовом сдвиге для двух частиц, рассеивающихся в потенциале v_{12} . Если энергия E в знаменателе последнего члена в (2.10) заменена на E_0 , то Q становится оператором главного значения, а ΔE_{12} будет пропорционально тангенсу фазового сдвига. Если в (2.10) $(E_0 - H_0)^{-1}$ заменено на $(E_0 - H_0 - i\varepsilon)^{-1}$, где ε является малой константой, мы получим решение, соответствующее рассеянию двух частиц, и диагональный матричный элемент (2.11) будет тогда пропорционален синусу фазового сдвига.

Далее мы увидим, что для нуклонов в ядре получается уравнение, аналогичное по форме (2.10), но имеющее энергетический знаменатель, отличный от знаменателя $(E - H_0)$, который в (2.10) относится только к двум частицам. Оператор Q также сильно усложнится за счет учета принципа Паули для нуклонов. Эти два изменения заметно повлияют на конкретную форму решения, так что оно не будет больше иметь какого бы то ни было простого отношения к фазовым сдвигам.

Основной пункт, который мы хотели бы здесь отметить, состоит в том, что матрица в (2.10) формально является полной суммой ряда по последовательным итерациям потенциала v_{12} . Бракнеровский метод в задаче многих тел сводится к использованию частичного суммирования в многочастичной теории возмущений, так что некоторые из рядов типа (2.10) объединяются в соответствующие t -матрицы. Далее этот метод сводится к разложению по этим (конечным) t -матрицам.

3. МНОГОЧАСТИЧНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

В этом параграфе мы опишем формализм, обязанный своим происхождением Голдстону¹⁵ и дающий полный ряд теории возмущений для ядерной волновой функции и для собственного значения соответствующей энергии. Предполагается, что ядра состоят из A нуклонов, взаимодействующих через двухчастичный потенциал v_{ij} . Нашим исходным

пунктом будет невозмущенная система, соответствующая модели независимых частиц для ядра.

Для определенности модели потенциал V выбирается зависящим только от переменных, описывающих один нуклон. Так как, далее, мы наложим требования самосогласованности, то потенциал V должен зависеть и от импульсов и от координат, и в координатном пространстве он будет недиагональной матрицей с элементами

$$(r|V|r'). \quad (3.1)$$

Возможная зависимость от других переменных, таких, как заряд, спин и момент, не указано явно. Потенциал V , если он выбран эрмитовым, будет определять полную систему ортогональных волновых функций, являющихся решениями уравнения Шредингера

$$\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_r^2 \Phi_n(r) + E_n \Phi_n(r) = \int d^3r' (r|V|r') \Phi_n(r'). \quad (3.2)$$

Для ядер конечного размера одночастичные состояния Φ_n будут дискретными при $E_n < 0$ и непрерывными при $E_n > 0$.

Предположим, что состояние модели полностью определено указанием A заполненных одночастичных состояний. Это допущение полностью игнорирует вопросы вырождения, которые будут отложены до следующего параграфа, так как они ведут к усложнению обозначений, затемняющих основное содержание настоящего параграфа. Далее, основное состояние модели будет получено, когда низшие одночастичные состояния будут заполнены в соответствии с принципом Паули. Это будет волновая функция, заданная посредством слетеровского детерминанта

$$\Phi_0 = (A!)^{-\frac{1}{2}} \det \Phi_{l_0}(i). \quad (3.3)$$

Так как волновые функции $\Phi_n(r)$ образуют полную систему, они могут быть выбраны в качестве базиса представления системы. В настоящей статье мы в основном будем работать в этом представлении. Так, вместо записи волновой функции $\Phi_n(r)$ для описания отдельного состояния частицы мы будем употреблять вектор состояния $|n\rangle$. В этом представлении уравнение Шредингера (3.2) примет вид

$$(T+V)|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (3.4)$$

где T обозначает оператор кинетической энергии. Матричные элементы операторов T и V даются посредством

$$(l|T|m) = -\frac{\hbar^2}{2M} \int d^3r \Phi_l^*(r) \nabla_r^2 \Phi_m(r), \quad (3.5)$$

$$(l|V|m) = \int d^3r \int d^3r' \Phi_l^*(r) (r|V|r') \Phi_m(r'). \quad (3.6)$$

Для конкретизации состояний, на которые действуют операторы, и для отбора соответствующих матричных элементов операторов полезно ввести операторы рождения и уничтожения η_m^* и η_n для различных одночастичных состояний. Они должны удовлетворять обычным соотношениям антикоммутации для системы фермионов, а именно

$$\eta_n \eta_m^* + \eta_m^* \eta_n = \delta_{mn}, \quad (3.7)$$

в то время как все другие η и η^* антикоммутируют. Эти операторы действуют в фокковском пространстве, определяемом посредством чисел заполнения (1 или 0) для всех возможных одночастичных состояний.

Так, $|l\rangle$ обозначает, что соответствующее одночастичное состояние заполнено, а $|l^{-1}\rangle$ относится к незаполненному состоянию:

$$\eta_l |l\rangle = |l^{-1}\rangle, \quad (3.8)$$

$$\eta_l^* |l^{-1}\rangle = |l\rangle, \quad (3.9)$$

$$\eta_l^* |l\rangle = 0, \quad (3.10)$$

$$\eta_l |l^{-1}\rangle = 0. \quad (3.11)$$

Вследствие этих соотношений оператор n^*n дает единицу, если он падает

ческие знаменатели, содержащие энергию возбуждения модели в промежуточном состоянии для каждого произведения. Полное разложение может быть проделано в соответствии с диаграммами, подобными введенным Фейнманом в квантовой теории поля. Эти разложения не понадобятся в полной мере в настоящей статье, но в дальнейших параграфах будут коротко обсуждены вопросы об их сходимости. Мы переходим теперь к рассмотрению, во-первых, начальных членов в разложении (3.22) для энергии, что даст приближение Хартри, и, во-вторых, к преобразованию в новое разложение, первые члены которого будут связаны с приближением Бракнера.

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРТРИ—ФОКА

Энергия E_0 , данная в (3.22), формально соответствует точному решению уравнения Шредингера (3.14) для ядра из A нуклонов, независимо от выбора потенциала V , определяющего невозмущенную задачу. Вопрос о том, соответствует ли E_0 физическому решению задачи многих тел, будет зависеть от сходимости ряда. Если при некоторых предположениях относительно нуклон-нуклонного потенциала v и для некоторого частного выбора одночастичного потенциала V разложение сходится быстро, то энергию можно будет вычислить из небольшого числа первых членов ряда. Чтобы проиллюстрировать этот пункт, предположим в настоящем параграфе, что v ведет себя достаточно хорошо, так что разложение по степеням оператора v в теории возмущений имеет смысл. Например, для ядерных плотностей это будет справедливо для потенциалов Юкавы или Гаусса, но, конечно, не будет справедливо для потенциала с отталкивающей сферой, который будет рассмотрен в последующих параграфах.

Первые члены в (3.22) дают в качестве первого приближения для E_0

$$E_0^H = \sum_{l_0} \langle l_0 | T + V | l_0 \rangle + \sum_{(l_0 m_0)} \{ \langle l_0 m_0 | v | l_0 m_0 \rangle - \langle l_0 m_0 | v | m_0 l_0 \rangle \} - \sum_{l_0} \langle l_0 | V | l_0 \rangle = \sum_{l_0} \langle l_0 | T | l_0 \rangle + \sum_{(l_0 m_0)} \{ \langle l_0 m_0 | v | l_0 m_0 \rangle - \langle l_0 m_0 | v | m_0 l_0 \rangle \}. \quad (4.1)$$

Первая сумма в (4.1) берется по всем заполненным одночастичным состояниям в Φ_0 , а вторая — по всем парам заполненных состояний. Выражение (4.1) как раз и является энергией системы многих тел с пробной волновой функцией Φ_0 .

Если E_0^H минимизируется относительно различных пробных потенциалов V , то минимальное значение будет соответствовать уравнениям Хартри—Фока и

$$(r | V | s) = \sum \{ \langle l_0 r | v | l_0 s \rangle - \langle l_0 r | v | s l_0 \rangle \}. \quad (4.2)$$

Состояние ядра ψ_0 , которое является решением уравнения (3.18), соответствующим модельному состоянию Φ_0 , дается формулой

$$\psi_0 = \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{n, L'} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_0 - H_0 + ina} H_1 \dots \frac{1}{\varepsilon_0 - H_0 + ia} H_1 \right\} \Phi_0. \quad (3.20)$$

Суммирование производится по всем значениям $n = 0, 1, 2, \dots$, а символ L' означает, что члены, содержащие несвязные диаграммы, опущены. Несвязной диаграммой здесь называется произведение матричных элементов, содержащее изолированную группу переходов, которая начинается и кончается на основном состоянии. Это основное состояние не может встречаться как промежуточное ни в одном члене разложения (3.20), так что энергетический знаменатель $\varepsilon_0 - H_0$ не может обращаться в нуль. Следовательно, мы можем положить $a = 0$ и написать

$$\psi_0 = \sum_{n, L'} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_0 - H_0} H_1 \right\}^n \Phi_0. \quad (3.21)$$

Эта формула не учитывает возможности вырождения состояния Φ_0 . Такая возможность будет рассмотрена позднее.

Энергия системы в состоянии ψ_0 дается посредством

$$E_0 = \varepsilon_0 + \sum_{n, L} \left(\Phi_0 \left| H_1 \left\{ \frac{1}{\varepsilon_0 - H_0} H_1 \right\}^n \right| \Phi_0 \right). \quad (3.22)$$

Здесь символ L означает, что только связные диаграммы должны быть включены в сумму. Связной диаграммой будем считать диаграмму, которая может быть записана как произведение двух других диаграмм. Опять-таки это ограничение означает, что Φ не может встречаться в качестве промежуточного состояния ни в одном члене выражения (3.22), так что если состояние Φ_0 не вырождено, то энергетический знаменатель не может обращаться в нуль.

Вычисления в (3.21) и (3.22) могут быть проведены посредством методов, хорошо известных в квантовой теории поля. Каждый член в сумме по n состоит из произведения матричных элементов от v или V и соответствующих операторов рождения и поглощения, указанных в (3.19). Это произведение может быть преобразовано в сумму «нормальных» произведений (т.е. таких членов, в которых операторы уничтожения стоят справа от операторов рождения) путем последовательного использования следующей из коммутационных соотношений формулы:

$$\eta_i \eta_m^* = \delta_{im} - \eta_m^* \eta_i. \quad (3.23)$$

В (3.21) и (3.22) результирующие нормальные произведения будут давать нуль, за исключением тех случаев, когда операторы уничтожения относятся к одночастичным состояниям, заполненным в Φ_0 . Кроме того, (3.22) также требует, чтобы операторы рождения относились к тому же набору одночастичных состояний. Символ δ_{im} в (3.23) обуславливает связь между матричными элементами (или переходами), на которых основано определение диаграмм. После подстановки (3.23) и выполнения суммирования по состояниям, указанным в (3.19), матричные элементы будут связаны через простые одночастичные состояния по типу

$$(ab|v|pr)(ps|v|cd), \quad (3.24)$$

$$(ab|v|pr)(p|V|c). \quad (3.25)$$

В (3.22) каждый член содержит произведение матричных элементов, связанных друг с другом по типу (3.24), (3.25) в цепочку, концы которой связаны с основным состоянием Φ_0 . Кроме того, имеются энергетиче-

ческие знаменатели, содержащие энергию возбуждения модели в промежуточном состоянии для каждого произведения. Полное разложение может быть сделано в соответствии с диаграммами, подобными введенным Фейнманом в квантовой теории поля. Эти разложения не понадобятся в полной мере в настоящей статье, но в дальнейших параграфах будут коротко обсуждены вопросы об их сходимости. Мы переходим теперь к рассмотрению, во-первых, начальных членов в разложении (3.22) для энергии, что даст приближение Хартри, и, во-вторых, к преобразованию в новое разложение, первые члены которого будут связаны с приближением Бракнера.

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРТРИ—ФОКА

Энергия E_0 , данная в (3.22), формально соответствует точному решению уравнения Шредингера (3.14) для ядра из A нуклонов, независимо от выбора потенциала V , определяющего невозмущенную задачу. Вопрос о том, соответствует ли E_0 физическому решению задачи многих тел, будет зависеть от сходимости ряда. Если при некоторых предположениях относительно нуклон-нуклонного потенциала v и для некоторого частного выбора одночастичного потенциала V разложение сходится быстро, то энергию можно будет вычислить из небольшого числа первых членов ряда. Чтобы проиллюстрировать этот пункт, предположим в настоящем параграфе, что v ведет себя достаточно хорошо, так что разложение по степеням оператора v в теории возмущений имеет смысл. Например, для ядерных плотностей это будет справедливо для потенциалов Юкавы или Гаусса, но, конечно, не будет справедливо для потенциала с отталкивающей сферой, который будет рассмотрен в последующих параграфах.

Первые члены в (3.22) дают в качестве первого приближения для E_0

$$E_0^H = \sum_{l_0} \langle l_0 | T + V | l_0 \rangle + \sum_{(l_0 m_0)} \{ \langle l_0 m_0 | v | l_0 m_0 \rangle - \langle l_0 m_0 | v | m_0 l_0 \rangle \} - \\ - \sum_{l_0} \langle l_0 | V | l_0 \rangle = \sum_{l_0} \langle l_0 | T | l_0 \rangle + \sum_{(l_0 m_0)} \{ \langle l_0 m_0 | v | l_0 m_0 \rangle - \langle l_0 m_0 | v | m_0 l_0 \rangle \}. \quad (4.1)$$

Первая сумма в (4.1) берется по всем заполненным одночастичным состояниям в Φ_0 , а вторая — по всем парам заполненных состояний. Выражение (4.1) как раз и является энергией системы многих тел с пробной волновой функцией Φ_0 .

Если E_0^H минимизируется относительно различных пробных потенциалов V , то минимальное значение будет соответствовать уравнениям Хартри—Фока и

$$(r | V | s) = \sum_{l_0} \{ \langle l_0 r | v | l_0 s \rangle - \langle l_0 r | v | s l_0 \rangle \}. \quad (4.2)$$

Следует отметить также, что этот выбор оператора V , по-видимому, помогает сходимости ряда (3.22) для E_0 , так как он приводит к сокращению некоторых матричных элементов, относящихся к одночастичным переходам. Например, следующий член второго порядка будет равен нулю, если уравнения (4.2) удовлетворяются совместно с волновыми уравнениями (3.4):

$$\sum_{l_0 m_0} \sum_s \{ \langle l_0 m_0 | v | l_0 s \rangle - \langle l_0 m_0 | v | s l_0 \rangle - (m_0 | V | s) \} \frac{1}{E_{m_0} - E_s} \times \\ \times \sum_{n_0} \{ \langle n_0 s | v | n_0 m_0 \rangle - \langle n_0 s | v | m_0 n_0 \rangle - (s | V | m_0) \}. \quad (4.3)$$

Если Φ_0 является основным состоянием модели, то $E_{m_0} < E_s$, так как s должно относиться к возбужденному состоянию более высокому, чем m_0 , для того чтобы удовлетворить принципу Паули. Из свойства эрмитовости потенциалов v и V следует, что (4.3) отрицательно и увеличится до своего максимального значения нуль, когда будет выполнено (4.2).

Уравнение (4.2) включает соотношение

$$(r|V|r) = \sum_{l_0} \{ (l_0 r|v|l_0 r) - (l_0 r|v|r l_0) \}, \quad (4.4)$$

где r может как относиться, так и не относиться к заполненному в Φ_0 состоянию. Нет необходимости удовлетворять уравнению (4.4), чтобы обратить в нуль (4.3). Однако в ряде для E_0 существуют члены более высокого порядка, которые обратятся в нуль, только если удовлетворяется уравнение (4.4). Отметим также, что уравнение (4.2), включающее (4.4), может быть выведено из общего вариационного принципа, показывающего, что уравнения Хартри—Фока дают лучшую из возможных мультипликативных волновых функций для системы.

Бесконечная ядерная материя. Для ядра конечного размера уравнения Хартри—Фока определяют как потенциал V , так и волновые функции $|n\rangle$. Для бесконечной ядерной материи (в которой следует отбросить кулоновские силы) волновые функции $|n\rangle$ должны представляться плоскими волнами. Выше по импульсу состояние, заполненное в Φ_0 , будет определяться ядерной плотностью. Наилучшее приближение к физической энергии ядерной материи получается минимизацией E_0^H . Эта процедура оправдывается общим вариационным принципом, так как мы минимизируем среднее значение гамильтониана системы. Когда одночастичные волновые функции $|n\rangle$ являются плоскими волнами, полный импульс должен сохраняться во всех матричных элементах от v или V . Следовательно, поправочный коэффициент (4.3) будет равен нулю для всех пробных волновых функций, и уравнение (4.2) сводится к (4.4). Хотя потенциал V не требуется для определения волновых функций, его диагональные элементы все же имеют смысл потенциальной энергии частицы. Полная энергия частицы имеет вид

$$E_n = (n|T+V|n). \quad (4.5)$$

Диагональные матричные элементы оператора V , данные в (4.4), имеют также важное значение для определения точности приближения, если рассматриваются члены более высокого порядка, чем в (4.1). Хотя (4.3) обращается в нуль для бесконечного ядра, все еще остается, например, следующий член второго порядка, который не равен нулю:

$$\sum_{(l_0 m_0)} \sum_{rs \neq l_0 m_0} \left\{ \frac{(l_0 m_0|v|rs)(rs|v|l_0 m_0)}{E_{l_0} + E_{m_0} - E_r - E_s} \right\}. \quad (4.6)$$

В сумме по промежуточным состояниям должен сохраняться импульс, так что как r , так и s отличаются от l_0 и m_0 . Значение этого члена непосредственно зависит от потенциала V через энергии в знаменателе, которые даются формулами, аналогичными (4.5).

Тот факт, что зависимость (4.6) от V улучшает приближение, может быть сразу же обнаружен при рассмотрении членов третьего приближения

в выражении (3.22) для энергии. В эти члены входит выражение

$$\sum_{(l_0 m_0)} \sum_{n_0 r s} \frac{(l_0 m_0 | v | r s) \{ (n_0 s | v | n_0 s) - (n_0 s | v | s n_0) \} (r s | v | l_0 m_0)}{(E_{l_0} + E_{m_0} - E_r - E_s)^2}, \quad (4.7)$$

$$- \sum_{(l_0 m_0)} \sum_{r s} \frac{(l_0 m_0 | v | r s) (s | V | s) (r s | v | l_0 m_0)}{(E_{l_0} + E_{m_0} - E_r - E_s)^2}. \quad (4.8)$$

Когда V удовлетворяет (4.4), то члены (4.7) и (4.8) дают в сумме нуль. Прямая связь между этим сокращением и зависимостью (4.6) от V становится очевидной, так как член (4.8) равен по величине, но противоположен по знаку главному члену в разложении (4.6) по степеням потенциала V (в первом порядке по V). Можно легко убедиться, что аналогичные сокращения встречаются и в высших порядках. В заключение отметим, что сокращение не имело бы места при предположении, что невозмущенные волновые функции относятся к энергиям свободных частиц.

Мы приходим к заключению, что быстрота сходимости поправочных членов, по-видимому, существенно улучшается при выборе диагональных элементов V , удовлетворяющих (4.4), и при определении одночастичных состояний по (4.5).

5. МАТРИЦА РЕАКЦИИ

Диагональные элементы введенной в § 2 матрицы t дают сдвиг энергии, обязанный взаимодействию v между парами частиц. Будем называть t матрицей реакции псевдопотенциала для пары частиц. В этом параграфе мы обобщим и видоизменим данное в § 2 определение, приведя его к форме, более употребительной в теории многих тел. Наши определения будут пригодны как для бесконечной ядерной материи, так и для конечного ядра.

Диагональные элементы матрицы t аналогично формуле (2.10) определяются как сумма ряда, возникающего при последовательных итерациях нуклон-нуклонного потенциала v :

$$(l_0 m_0 | t | l_0 m_0) = (l_0 m_0 | v | l_0 m_0) + \sum_{\substack{p \neq l_0 m_0 \\ q \neq l_0 m_0}} (l_0 m_0 | v | p q) \frac{1}{\varepsilon_0 - H_0(pq)} (p q | t | l_0 m_0). \quad (5.1)$$

Промежуточные состояния должны быть ограничены теми, для которых как p , так и q отличаются от l_0 и m_0 ; основания для такого ограничения станут очевидными в § 6. Промежуточные состояния также должны удовлетворять принципу Паули по отношению к другим занятым состояниям системы. Энергетический знаменатель равен

$$\varepsilon_0 - H_0(p, q) = E_{l_0} + E_{m_0} - E_p - E_q, \quad (5.2)$$

так как определение (5.1) ограничено теми состояниями системы, для которых все частицы системы находятся в основных состояниях. Следовательно, p и q являются единственными промежуточными состояниями, которые возбуждены.

Отметим, что (5.1) содержит частичное суммирование членов из бесконечного ряда (3.22) для энергии E_0 ядра в целом. Это суммирование ограничено диаграммами, в которых возбуждено не более двух частиц. Ясно, что такое суммирование не будет адекватным, если мы захотим преобразовать полный ряд (3.22) в другой ряд по t -матрице вместо v -матрицы.

Общее определение t -матрицы аналогично (5.1) по выбору членов, но содержит допущение о возможности возбуждения более чем двух частиц. Нам требуются такие матричные элементы $(rs, a | t | pq, a)$, возникающие при суммировании ряда по матричным элементам от v , в которых группа возбужденных состояний a заполнена как в начальном, так и в конечном состоянии при переходе из pq в rs .

Соответствующее интегральное уравнение имеет вид

$$(rs, a | t | pq, a) = (rs | v | pq) + \sum_{ij} \frac{(rs | v | ij) (ij, a | t | pq, a)}{\varepsilon_0 - H_0(ij, a)}. \quad (5.3)$$

Промежуточное состояние должно удовлетворять принципу Паули в отношении других заполненных состояний. Так как V предполагается заданным одночастичным потенциалом, то величина $H_0(ij, a)$ хорошо определена и равна энергии системы в состоянии $|ij, a\rangle$. Это дает

$$\varepsilon_0 - H_0(ij, a) = E_p + E_q - E_i - E_j - \delta E(pq, a), \quad (5.4)$$

где $\delta E(pq, a)$ — полная энергия возбуждения в состоянии $|pq, a\rangle$.

Определенная в (5.3) матрица t не является двухчастичным оператором, так как ее матричные элементы зависят от многочастичных состояний. Однако однократное применение оператора матрицы t может привести только к изменению состояний двух частиц. Этот последний факт создает возможность получения приемлемого приближения для t -матрицы.

6. САМОСОГЛАСОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ЯДРА

Ряды (3.21) и (3.22) соответственно для ядерной волновой функции ψ_0 и энергии ядра E_0 могут быть преобразованы так, что члены по v сгруппируются в итерации уравнения (5.3). Эти группы членов в принципе могут быть просуммированы посредством решения (5.3), как интегрального уравнения, дающего разложения ψ_0 и E_0 в ряд по t -матрице. Разложение для волновой функции ψ_0 имеет вид

$$\psi_0 = \sum_{n, L'_i} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_0 - H_0} H' \right\}^n \Phi_0, \quad (6.1)$$

$$H' = \sum_{lmpq} (lm | t | pq) \eta_l^* \eta_p \eta_q - \sum_{lm} (l | V | m) \eta_l^* \eta_m. \quad (6.2)$$

Суммирование L'_i в (6.1) имеет смысл, аналогичный суммированию L' в (3.21), в котором отбрасываются все члены, содержащие диаграммы, в которых одна и та же группа частиц возбуждается из состояния Φ_0 и теряет возбуждение, переходя снова в Φ_0 , изолированно от остальных частиц системы. Кроме того, L'_i содержит только те члены, которые не включают в себя простых итераций t -матрицы, таких, как

$$(lm | t | ps) (rs | t | pq). \quad (6.3)$$

Можно легко убедиться в том, что при переходе от (3.21) к (6.1) с использованием (5.3) все члены, содержащие итерации оператора v , складываются и образуют единственный член в t . Следовательно, члены, подобные (6.3), не возникают. Члены, не содержащие таких итераций, называются неприводимыми по аналогии с неприводимыми диаграммами, введенными Голдстоном¹⁵.

Ряд (3.22) для энергии ядра E_0 принимает вид

$$E_0 = \varepsilon_0 + \sum_{n, u_i} \left(\Phi_0 \left| H' \left\{ \frac{1}{\varepsilon_0 - H_0} H' \right\}^n \right| \Phi_0 \right). \quad (6.4)$$

Сумма по L_i ограничена неприводимыми связанными диаграммами. Разлагая (6.4) в первом порядке по t и по V , мы получим

$$E_0^{(0)} = \sum_{l_0} (l_0 | T | l_0) + \sum_{(l_0 m_0)} \left\{ (l_0 m_0 | t | l_0 m_0) - (l_0 m_0 | t | m_0 l_0) \right\}. \quad (6.5)$$

В это разложение потенциал V не входит в явном виде, так как его среднее значение в основном состоянии сокращается с частью Φ_0 . Однако волновая функция $|l_0\rangle$ будет зависеть от выбора V . Первая поправка к $E_0^{(0)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta E_0^{(1)} = \sum_{l_0 m_0 s} \{ (l_0 m_0 | t | l_0 s) - (l_0 m_0 | t | s l_0) - (m_0 | V | s) \} \frac{1}{(E_{m_0} - E_s)} \times \\ \times \sum_{n_s} \{ (n_0 s | t | n_0 m_0) - (n_0 s | t | m_0 n_0) - (s | V | m_0) \}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Элементы t матрицы в (6.6) должны быть вычислены из уравнений (5.3) и (5.4), причем следует отметить, что δE в этом случае равно нулю.

Члены $E_0^{(0)}$ и $\Delta E_0^{(1)}$ можно сравнить с соответствующими членами в (4.1) и (4.3) в обычной теории возмущений. В отличие от E_0^H , даваемой уравнением (4.1), первое приближение к энергии, а именно $E_0^{(0)}$, не является средним значением гамильтониана системы. Следовательно, вариационный принцип не дает а priori оснований для минимизации $E_0^{(0)}$. Однако в § 4 отмечалось, что самосогласованные уравнения Хартри, по-видимому, тесно связаны с быстротой сходимости ряда теории возмущений, так как они обуславливают исчезновение ряда поправочных членов. Мы можем попытаться выбрать потенциал V так, чтобы обратились в нуль аналогичные члены в настоящем разложении.

Матричные элементы оператора V в основном состоянии могут быть выбраны таким образом, что первый поправочный член в $\Delta E_0^{(1)}$ обратится в нуль. Это дает

$$(s | V | m_0) = \sum_{l_0} \{ (l_0 s | t | l_0 m_0) - (l_0 s | t | m_0 l_0) \}. \quad (6.7)$$

Такое определение применимо только тогда, когда все частицы находятся в основном состоянии Φ_0 . Этого недостаточно, чтобы определить потенциал V самосогласованным образом, когда он действует в состоянии с несколькими возбужденными частицами. В частности, нам нужно оценить среднее значение V в промежуточном состоянии $|pq\rangle$ из уравнения (5.1), что дает матричные элементы $(l_0 m_0 | t | l_0 m_0)$, встречающиеся в выражении $E_0^{(0)}$.

Сама t -матрица зависит от полной энергии возбуждения состояния, на которое она действует, и не является двухчастичным оператором. Однако существенно, что потенциал V должен быть одночастичным потенциалом, не зависящим от состояния других частиц. Следовательно, V -матрица должна быть выражена через матрицу t , взятую при некото-

рой средней энергии возбуждения $\delta\bar{E}$:

$$(r|V|s) = \sum_{l_0} \{ (l_0 r | t(\delta\bar{E}_s) | l_0 s) - (l_0 r | t(\delta\bar{E}_s) | s l_0) \}, \quad (6.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } \delta E_s &= 0, \text{ если } |s\rangle \text{ заполнено в } \Phi_0; \\ \delta\bar{E}_s &= \text{средней энергии одночастичного возбуждения,} \\ &\text{когда } |s\rangle \text{ является возбужденным состоянием.} \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Определение (6.9) выбрано потому, что оно представляется наиболее приемлемым приближением для вычисления $H_0(p, q)$ в (5.1), требующего знания матричных элементов $(p|V|p)$ при возбужденных состояниях $|q\rangle$. Уравнение для $t(\delta\bar{E}_s)$ с $\delta\bar{E}_s$, определенным в (6.9), имеет вид

$$(l_0 r | t(\delta\bar{E}_s) | l_0 s) = (l_0 r | v | l_0 s) + \sum_{pq} \frac{(l_0 r | v | pq)(pq | t(\delta\bar{E}_s) | l_0 s)}{E_{l_0} + E_s - E_p - E_q - \delta E_s}. \quad (6.10)$$

Принцип Паули должен удовлетворяться в промежуточных состояниях. Теперь можно понять, почему в уравнении (5.4) для $(l_3 m_0 | t | l_0 m_3)$ было необходимо ограничиваться такими промежуточными состояниями, в которых возбуждены две частицы. Если бы мы не наложили этого ограничения, то $\Delta E_0^{(1)}$ не содержало бы никаких членов по t , так как они были бы явно включены в решение (5.4). Существенно, что мы отбросили эти одночастичные переходы, так что они будут появляться как поправочные члены в $\Delta E_0^{(1)}$. Тогда эти члены могут быть использованы для определения одночастичного потенциала V путем приравнивания нулю $\Delta E_0^{(1)}$. Иначе мы не могли бы избежать присутствия несокращающегося вклада от V в $\Delta E_0^{(1)}$.

Самосогласованная методика. В заключение этого параграфа резюмируем самосогласованную методику для определения первого приближения к энергии системы нуклонов в ядре.

I. Сначала выбирается пробный одночастичный потенциал V , который мы обозначим $V^{\text{пр}}$. В общем случае $V^{\text{пр}}$ будет зависеть как от координат, так и от импульсов частицы, на которую он действует. Он может также содержать спин-орбитальное взаимодействие, подсказываемое феноменологическим потенциалом оболочечной модели ядра.

II. Из уравнения Шредингера

$$(E_l - T - V^{\text{пр}}) | l \rangle = 0 \quad (6.11)$$

определяется полная система одночастичных волновых функций, соответствующих потенциалу $V^{\text{пр}}$.

III. Из полной системы выбираются A одночастичных состояний $|l_0\rangle \dots$, заполняющих основное состояние Φ_0 , с учетом принципа Паули. (Методу, конечно, можно обобщить и на случай выбора конфигурации, отличной от основного состояния.)

IV. Вычисляются элементы $(l_0 r | t(\delta\bar{E}_s) | l_0 s)$ матрицы t из уравнений (6.10), в которых энергии и волновые функции являются теми же, что и определенные в пункте II настоящей сводки, с использованием в качестве потенциала $V^{\text{пр}}$.

V. Вычисляется новый одночастичный потенциал $V^{\text{выч}}$ из формулы (6.8), в которой матричные элементы $t(\delta\bar{E}_s)$ те же, что вычисленные в пункте IV.

VI. $V^{\text{выч}}$ сравнивается с $V^{\text{пр}}$. Выбирается новый подгоночный потенциал, и вся процедура повторяется до тех пор, пока $V^{\text{выч}}$ и $V^{\text{пр}}$ не станут приблизительно равны, а сама методика приблизительно самосогласованной.

VII. При самосогласованном потенциале V и соответствующих ему волновых функциях $|l\rangle$ и псевдопотенциале t энергия E_0 примерно равна $E_0^{(0)}$, даваемой выражением

$$E_0^{(0)} = \sum_{l_0} (l_0 | T | l_0) + \sum_{(l_0 m_0)} \{ l_0 m_0 | t | l_0 m_0 \} - (l_0 m_0 | t | m_0 l_0) \}. \quad (6.12)$$

Второе суммирование производится по всем парам $(l_0 m_0)$ в состояниях, заполненных в избранной конфигурации Φ_0 . Элементы t -матрицы в (6.12) вычисляются из (6.10) с $\delta E_s = 0$.

При переходе к самосогласованному потенциалу исключаются все поправочные члены второго порядка по t и V . Встречающиеся в приближении Хартри члены второго порядка, типа указанных в (4.6), уже включены в $E_0^{(0)}$ через уравнение для t . Таким образом, для «хорошего» потенциала v описанные в настоящем параграфе самосогласованные уравнения уже дают улучшение уравнений Хартри. Самосогласованные уравнения сохраняют свой смысл и для сингулярного потенциала v , каким является истинный нуклон-нуклонный потенциал с отталкивающей сферой, так как t -матрица не содержит сингулярностей, ведущих к расходящимся матричным элементам. Конечность значений матричных элементов t может быть выведена из их непосредственной связи со сдвигом энергии, рассмотренным в § 2. Точность результатов будет зависеть от сходимости ряда для $E_s - E_0^{(0)}$. Поправочные члены ряда будут обсуждены в § 8.

7. БРАКНЕРОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ЯДЕРНОЙ МАТЕРИИ

Простейшим применением теории является бесконечное ядро. В пренебрежении кулоновскими силами непрерывная ядерная материя будет обладать свойствами насыщения при плотности, равной или близкой к плотности в центре большого ядра.

Волновые функции для модели (являющейся невозмущенной системой) должны быть плоскими волнами, удовлетворяющими периодичным граничным условиям. Состояние $|l\rangle$ фиксировано заданием импульса k_l . Одночастичный потенциал V имеет матричные элементы $\langle r' | V | r \rangle$, которые не должны зависеть от суммы $(r + r')$, но, вообще говоря, будут зависеть от разности $(r - r')$. Следовательно, в импульсном представлении V будет диагональным и равным в системе единиц, в которой $\hbar = 1$,

$$\langle k | V | k' \rangle = V(k) (2\pi)^3 \delta(k - k'). \quad (7.1)$$

В основном состоянии волновая функция модели будет соответствовать газу Ферми, в котором все состояния являются заполненными, вплоть до импульса Ферми k_F . Импульс Ферми полностью определен, когда известна плотность ядерной материи. Если записать плотность как $\rho = \frac{3}{4} \pi r_0^3$, где r_0 является радиусом сферы, содержащей один нуклон, то импульс Ферми (при $\hbar = 1$) равен

$$k_F = \frac{1.524}{r_0} \text{ с.м.}^{-1}. \quad (7.2)$$

При выборе для r_0 экспериментального значения $1,10 \cdot 10^{-13}$ см получим

$$k_F = 1,38 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-1}. \quad (7.3)$$

Для этой модели ряд теории возмущений (3.22) упрощается за счет того, что в матричных элементах для взаимодействия должен сохраняться импульс. Для серберовских сил матричный элемент оператора v будет иметь вид

$$(k_l k_m | v | k_r k_s) = \frac{1}{2} \{ (k_l - k_r) + \omega | k_l - k_s \} (2\pi)^3 \delta(k_l + k_m - k_r - k_s). \quad (7.4)$$

Аналогично полный импульс будет сохраняться во всех матричных элементах t .

Записав

$$(k'_1 k'_2 | t | k_1 k_2) = \delta(k'_1 + k'_2 - k_1 - k_2) (k'_1 k'_2 | \tilde{t} | k_1 k_2), \quad (7.5)$$

получим, что t -матрица будет удовлетворять уравнению

$$(k'_1 k'_2 | \tilde{t} | k_1 k_2) = \frac{1}{2} \{ \omega(k'_1 - k_1) + \omega(k'_1 - k_2) \} + (2\pi)^{-3} \int d^3 k \cdot \frac{1}{2} \{ \omega(k'_1 - k') + \omega(k'_1 - k) \} \frac{1}{E(k_1) + E(k_2) - E(k') - E(k) \delta E} (k' k | \tilde{t} | k_1 k_2), \quad (7.6)$$

где $\delta E = 0$, если k_1 и k_2 лежат ниже импульса Ферми k_F , и $\delta E = k_F^2/2M$, если k_1 или k_2 лежит выше k_F . Область интегрирования ограничена соотношением $k' + k = k_1 + k_2$, $k > k_F$, $k' > k_F$.

Стоящие в (7.6) энергии $E(k)$ определяются из V в (7.1):

$$E(k) = \frac{k^2}{2M} + V(k). \quad (7.7)$$

Вследствие сохранения момента поправочные члены второго порядка в (6.6), соответствующие одночастичным переходам, будут равны нулю. Однако условие самосогласованности (6.8) для V еще будет прилагаться к диагональным матричным элементам и

$$V(k) = 3(2\pi)^{-3} \int_0^{k_F} d^3 k' (k' k | \tilde{t} | k' k). \quad (7.8)$$

(Множитель 3 возникает за счет того, что три нуклона с импульсом k взаимодействуют с одним нуклоном с импульсом k (Бете¹⁴).)

Для любой заданной плотности ядерной материи импульс Ферми k_F определяется посредством

$$\varrho = \frac{2}{3} \pi^2 k_F^3. \quad (7.9)$$

При каждой плотности уравнения (7.6), (7.7) и (7.8) обеспечивают метод определения самосогласованного потенциала $V(k)$.

С помощью этого самосогласованного потенциала, связанного с t -матрицей соотношением (7.8), энергия $E_0^{(0)}$, даваемая формулой (6.5), может быть вычислена при любой заданной плотности. Для бесконечной ядерной материи вместо $E_0^{(0)}$ нам потребуется средняя энергия на один нуклон $A^{-1}E_0^{(0)}$. Следуя Бете, мы обозначим эту энергию, приходящуюся на один нуклон, через $W(k_F)$:

$$W(k_F) = \frac{3\pi^2}{3k_F^3} \cdot 4(2\pi)^{-3} \int_0^{k_F} d^3 k \left[\frac{k^2}{2M} + \frac{1}{2} V(k) \right]. \quad (7.10)$$

Это дает

$$W(k_F) = \frac{3k_F^2}{10M} + \frac{3}{k_F^3} \int_0^{k_F} \frac{k^2}{2} V(k) dk. \quad (7.11)$$

Множитель половина перед V возникает за счет необходимости суммирования двухчастичных взаимодействий только по всем парам нуклонов, причем каждая пара подсчитывается только один раз. В системе единиц $\hbar = 1$ k_F дается уравнением (7.2), а в (7.11)

$$({}^3/_{10}M) = 2,5 \cdot 10^{-26} \text{ Мэв} \cdot \text{см}^2.$$

В методике, принятой Бракнером, минимизируется средняя энергия на один нуклон $W(k_F)$, как функция от k_F , при условии, что $V(k)$ самосогласовано с t при каждом значении k_F . Минимальное значение $W(k_F)$ предполагается тогда дающим наилучшее значение для средней энергии на нуклон в ядерной материи при условии пренебрежения поправочными членами, которые считаются малыми. Соответствующее значение k_F^0 величины k_F , обращающее $W(k_F)$ в минимум, в аналогичном приближении должно соответствовать плотности насыщенной ядерной материи.

Удобный критерий для точности, с которой практически достигается минимум, дан Бете¹⁴ для случая, когда t -матрица не зависит чувствительно от плотности. Если t не зависит от плотности и минимизировано с V данным уравнением (7.8), то $W(k_F)$ в минимуме равно энергии наиболее слабо связанного нуклона, т. е. нуклона с импульсом k_F . Если k_F^0 дает этот минимум, то

$$W(k_F^0) = \frac{(k_F^0)^2}{2M} + V(k_F^0). \quad (7.12)$$

Странный на первый взгляд факт, что средняя энергия на нуклон равна энергии наиболее слабо связанного нуклона, объясняется множителем половина, стоящим при V в выражении для W .

Практически все же t -матрица зависит от k_F , но эта зависимость очень слабая и может давать нулевой эффект при минимуме W ¹³. Представляется вероятным, что соотношение (7.12) должно быть точным или очень близким к точному.

Прежде чем перейти к описанию последних вычислений для бесконечной ядерной материи, мы кратко рассмотрим приближение эффективной массы, которое широко использовалось в более ранних вычислениях⁵ и которое, по-видимому, останется полезной идеей. Это приближение получено разложением $V(k)$ в степенной ряд по ka , где, например¹⁴,

$$a = 0,706 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (7.13)$$

$$V(k) = V_0 + V_1(ka)^2. \quad (7.14)$$

В пренебрежении всеми степенями (ka) выше второй энергия одного нуклона в потенциале $V(k)$ может быть записана в форме

$$E(k) = \frac{k^2}{2M^*} + V_0, \quad (7.15)$$

$$\frac{1}{2M^*} = \frac{1}{2M} + V_1 a^2. \quad (7.16)$$

В этом приближении эффективная масса M^* нуклона в ядре трактуется как постоянная, и усредненная энергия (7.11) нуклона принимает вид

$$W(k_F) = \frac{3}{5} k_F^2 \left(\frac{1}{2M} + \frac{1}{2} V_1 a^2 \right) + \frac{1}{2} V_0 \quad (7.17)$$

до тех пор, пока наиболее слабо связанный нуклон имеет энергию

$$E(k_F) = \frac{k_F^2}{2M^*} + V_0. \quad (7.18)$$

Сравнение выражений (7.17) и (7.18) с экспериментом не является вполне прямым. Можно было бы ожидать, что $W(k_F)$ представляет собой объемную энергию на один нуклон, так как это единственная средняя энергия, которая может быть определена для бесконечной ядерной материи. Объемная энергия связи в формуле Вайцекера для массы приблизительно равна 14 Мэв на нуклон. С другой стороны, $E(k_F)$ является отрицательной энергией диссоциации наиболее слабо связанного нуклона, которая имеет экспериментальное значение около 8 Мэв . В последнем случае, однако, учитываются эффекты поверхностных и кулоновских сил для конечного ядра; наряду с этим отметим, что эти эффекты приводят к средней энергии связи порядка 8 Мэв . Мы приходим к заключению, что собственное значение $E(k_F)$, представляемое в (7.18), будет порядка 14 Мэв , на что также указывает общий результат ⁴⁴ о том, что E_{k_F} и $W(k_F)$ должны быть почти равны при оптимальной плотности ядерной материи. Мы примем значение, несколько меньшее 14 Мэв :

$$E(k_F) = W(k_F) = 12 \text{ Мэв}. \quad (7.19)$$

С этими значениями V_0 и M^* могут быть оценены при нормальной плотности, для которой k_F дается формулой (7.3). Опять-таки отметим, что имеется некоторое сомнение относительно использования точного экспериментального значения, так как ядерная материя с чисто ядерными силами имела бы немного более высокую плотность, чем ядро конечного размера с ядерными плюс кулоновскими силами. Со значениями (7.19) и (7.3) мы получим

$$M^* = 0,42 M, \quad V_0 = -65 \text{ Мэв}. \quad (7.20)$$

С приведенными выше оговорками мы можем считать (7.20) эмпирическими значениями в приближении эффективной массы для бесконечной ядерной материи. Эмпирическое значение M^* обсуждалось также Вайскопфом ³¹.

Ко времени написания настоящей статьи наиболее полные вычисления для ядерной материи сделаны Бракнером и Гаммелем ¹⁷. Прежде чем привести их результаты, мы кратко перечислим допущения и приближения, сделанные ими при решении самосогласованных уравнений, связывающих V и t при каждой плотности. Они не используют приближение эффективной массы, но в пределах некоторых приближений в решении уравнения для t -матрицы получают решение, в котором V и t являются почти точно самосогласованными при каждой плотности. Это решение получается численно с использованием электронной машины.

Бракнер и Гаммель выбрали за нуклон-нуклонный потенциал v потенциал, вычисленный Христианом, Гаммелем и Талером ³². Этот потенциал согласуется с данными по рассеянию при низких энергиях, а также с фазовыми сдвигами в четных состояниях до 300 Мэв . Он включает в себя короткодействующее притяжение вне отталкивающей сферы радиуса $5 \cdot 10^{-14} \text{ см}$, а также тензорные силы большого радиуса.

Он не согласуется с экспериментальными результатами, относящимися к поляризации в нечетных состояниях. Нечетные состояния предполагались не оказывающими большого влияния на энергию связи и отбрасывались при вычислениях. Основные приближения состояли в том, что интегральное уравнение для матрицы t считалось возможным разделить на уравнения, относящиеся к различным значениям J и l . Эти приближения включают в себя: 1) замену энергетического знаменателя его средним значением по углам в системе центра инерции и 2) усреднение по углам при учете принципа Паули. Их решения полученных приближенных уравнений даны для двух значений средней энергии возбуждения $\delta \bar{E}_s$ для возбужденных состояний s в уравнении (6.10). Эти значения равны $\delta E_s = 0$ и $\delta E_s = E_F$.

Для $\delta E_s = 0$ результирующая энергия на один нуклон имеет минимум, равный $-15,8$ Мэв, при плотности, эквивалентной значению r_0 , меньшему чем $1,0 \cdot 10^{-13}$ см. Для $\delta E_s = E_F$ минимум равен $-14,5$ Мэв при r_0 , немного большем чем $1,0 \cdot 10^{-13}$ см. Сочетая последний результат с оценкой кулоновской энергии для ядра из 82 протонов, они получают минимум при $r_0 = 1,07 \cdot 10^{-13}$ см. Эту цифру следует сравнивать с плотностью в центре тяжелых ядер, полученной из экспериментов по рассеянию электронов и соответствующей $r_0 = 1,10 \cdot 10^{-13}$ см.

Значение деталей этого результата, включающего оценку кулоновских сил, несколько затемняется тем, что для конечного ядра поверхностная энергия имеет тот же порядок величины и должна быть учтена. Но и при этой оговорке, и с надлежащей скидкой на сделанные приближения результаты находятся в приемлемом согласии с опытом.

Оценка поправочных членов Бракнером и Гаммелем дала $+0,3$ Мэв. Возможно, что некоторые сомнения в этой оценке могут возникнуть из-за того, что два вычисленных минимума для одной и той же энергии различаются на $1,3$ Мэв, а в общем формализме предполагается, что различие должно вызываться различными поправочными членами. Эти члены обсуждаются в следующем параграфе. Следует отметить, что $E(k_F)$ и $W(k_F)$, вычисленные по методу Бракнера и Гаммеля, различаются более, чем на 10 Мэв.

8. ПОПРАВОЧНЫЕ ЧЛЕНЫ

а) Бесконечная ядерная материя. Для сравнения с конечным ядром удобно считать число нуклонов хотя и большим, но конечным. Обозначим это число через A . Энергия ядерной материи может быть получена из E_0 , данного в (6.4), где волновые функции берутся в виде плоских волн. Первое приближение $E_0^{(0)}$ дается формулой (6.5). Так как полный импульс должен сохраняться при взаимодействии плоских волн, то будут отсутствовать поправочные члены, соответствующие одночастичным переходам типа указанных в (6.6). Не будет существовать никаких простых итераций типа приведенной в (6.3) из-за особенностей конструкции ряда по матричным элементам v для матрицы t .

Первые поправочные члены в ряде для $E_0 - E_0^{(0)}$ будут третьего порядка по V и t . Например, они будут включать в себя

$$\sum_{l_0 m_0 n_0} \sum_{pq} \frac{\langle l_0 m_0 | t | pq \rangle \{ \langle p n_0 | t | p n_0 \rangle - \langle p n_0 | t | n_0 p \rangle - \langle p | V | p \rangle \} \langle pq | t | l_0 m_0 \rangle}{(E_{l_0} + E_{m_0} - E_p - E_q)^2}. \quad (8.1)$$

Этот член дает поправку к энергии, которая, как и первое приближение, пропорциональна числу нуклонов A . Условие самосогласованности

для V имеет целью сделать величину в фигурных скобках в (8.1) как можно более малой. Однако она не может быть равной нулю, ибо, как это видно из § 5, мы были вынуждены определить V через $t(\delta\bar{E})$, где $\delta\bar{E}$ — некоторая средняя энергия возбуждения. С другой стороны, элемент t -матрицы $(pn_0|t|pn_0)$ в (8.1) должен быть вычислен при заполнении возбужденных состояний p и q , так как он является функцией от $(E_{l_0} + E_{m_0} - E_p - E_q)$. Хотя, казалось бы, возможно выбрать $\delta\bar{E}$ так, чтобы (8.1) исчезло, все же подобные несокращения существовали бы в более высоких порядках. По-видимому, при существующем состоянии наших знаний о свойствах сходимости ряда не может быть установлен ясный критерий для наилучшего значения $\delta\bar{E}$. Следовательно, мы вынуждены считать $\delta\bar{E}$ за параметр. Бракнер и Гаммель¹⁷ предположили, что $\delta\bar{E}$ представляет некоторую среднюю энергию возбуждения для одной частицы, однако форма (8.1) наводит на мысль о предположении, что следует использовать среднюю энергию возбуждения двух состояний p и q .

Наряду с (8.1) будут существовать недиагональные члены матрицы t , не сокращающиеся с V . Они включают в себя

$$\sum_{l_0 m_0} \sum_{pq r} \frac{(l_0 m_0 | t | p q) (p n_0 | t | l_0 r) (r q | t | m_0 n_0)}{(E_{l_0} + E_{m_0} - E_p - E_q) (E_{m_0} + E_{n_0} - E_q - E_r)}. \quad (8.2)$$

В дополнение к (8.2) будут существовать аналогичные члены третьего порядка, имеющие иной обменный характер. Эти члены были названы трехчастичными диаграммами, так как они представляют собой переходы, в которых три частицы изменяют свои состояния. Принцип Паули должен удовлетворяться в промежуточных состояниях. Сочетая это требование с сохранением импульса, можно убедиться, что в среднем энергетические знаменатели в (8.2) будут большими, и можно предположить, что эти члены будут малыми.

Члены, соответствующие трехчастичным диаграммам, были оценены Бете¹⁴ в допущении, что t -матрица может быть аппроксимирована потенциалом Юкавы. Результат Бете дает поправку в $-0,12$ Мэв на нуклон, которая составляет около 1% от полной энергии связи; Бракнер и Гаммель дают цифру $-0,3$ Мэв, основанную на их численном расчете t -матрицы с потенциалом отталкивающей сферы.

Малость членов с трехчастичными диаграммами является главным аргументом в пользу общей правильности метода. Никакого общего исследования сходимости поправочных членов высших порядков проведено не было. Обсуждавшееся в конце последнего параграфа различие между двумя результатами для энергии насыщения непосредственно связано с отсутствием точного сокращения (8.1) с аналогичными членами высших порядков, а не с членами, содержащими трехчастичные диаграммы. По-видимому, малость трехчастичных диаграмм обязана своим происхождением короткодействующему характеру нуклон-нуклонного потенциала v . Неизвестно, имеется ли связь между условием, налагаемым на v требованием малости трехчастичных диаграмм, и условием сходимости или асимптотической сходимости метода. Ничего не известно о том, имеется ли прямая связь между величиной членов, соответствующих диаграммам, и физической вероятностью для нуклонов образовывать группы частиц в ядре. В заключение отметим, что, по-видимому, в задачах многих тел типа исследуемой скорее можно ожидать асимптотической, чем обычной сходимости.

б) **Конечное ядро.** В дополнение к членам, содержащим двухчастичные переходы, аналогичным (8.1) и (8.2), для конечного ядра существуют еще поправочные члены, возникающие за счет матричных элементов, в которых только одна частица изменяет свое состояние. Основным членом этого типа является указанный в (6.6). Поправочный член (6.6) равен нулю, если V удовлетворяет условию самосогласованности (6.7), и отрицателен в остальных случаях. Наиболее трудная область для самосогласования V лежит вблизи ядерной поверхности. Если в области поверхности имеется отклонение, то член (6.6) будет представлять собой поверхностную энергию и будет иметь порядок $A^{-1/3}$ относительно главного члена $E_0^{(0)}$. Для плохо выбранного потенциала V отклонения будут иметь место не только на поверхности, но и всюду, так что (6.6) будет иметь тот же порядок по A , что и основной член $E_0^{(0)}$. Для конечного ядра в матричных элементах t не должен сохраняться импульс. Из соотношения неопределенностей следует, что матричные элементы с несохранением импульса будут отличаться уменьшающим множителем $A^{-2/3}$ от элементов с сохранением импульса. Так как V получается суммированием матричных элементов от t по A заполненным состояниям, то и матричные элементы от V с сохранением и несохранением импульса будут различаться на тот же множитель. Отсюда следует, что член (6.6), содержащий дважды $A^{-2/3}$ и множитель A за счет суммирования по промежуточным состояниям, будет иметь порядок $A^{-1/2}$ относительно $E_0^{(0)}$.

Для самосогласованного потенциала V член (6.6) равен нулю. Основной член $E_0^{(0)}$, приведенный в (6.5), будет содержать член, пропорциональный ядерному объему (и, следовательно, пропорциональный A), и дальнейшие члены, относящиеся к поверхностным эффектам. Последние будут примерно пропорциональны $A^{2/3}$, если предположить, что толщина поверхности мала.

9. ОБОЛОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ

В принципе уравнения для конечного ядра, описанные в § 6, обеспечивают самосогласованный метод определения энергии ядра. Главным упрощающим предположением было пренебрежение вопросом о вырождении модели, так что основное состояние предполагалось однозначным. Это допущение выглядит приемлемым, если основное состояние представляет собой ядро с замкнутой оболочкой. Тогда модельная волновая функция Φ_0 представляет собой простейший тип оболочечной модели, в которой каждый нуклон движется независимо от остальных в своей собственной потенциальной яме V . Потенциал V определяется так, что энергия $E_0^{(0)}$ в модельном состоянии Φ_0 приблизительно равна энергии ядра в соответствующем состоянии ψ_0 . Мы можем заключить, что как модель, так и ядро имеют сходные разрывы в энергии связи, а, возможно, также и в устойчивости в окрестности замкнутой оболочки модели.

Порядок заполнения одночастичных состояний в модели определяется самосогласованным потенциалом V . Для того чтобы замкнутые оболочки соответствовали наблюдаемым экспериментально, порядок уровней в потенциале V должен быть таким же, как порядок уровней в потенциале оболочечной модели V^{sm} . Это не означает, что наш вычисленный потенциал V должен совпадать с существующими идеями относительно потенциала V^{sm} , так как V^{sm} может быть видоизменен различными способами без серьезного изменения порядка уровней. Например, V^{sm} обычно предполагается имеющим форму

$$V^{sm} = V_0(r) + (ls) V_1(r), \quad (9.1)$$

где $V_0(r)$ и $V_1(r)$ являются заданными функциями от r , одинаковыми для всех нуклонов. Это предположение будет находиться в очевидном противоречии с экспериментом, если вычислить энергию ядра посредством сум-

мирования величины $T + \frac{1}{2} V^{sm}$ по всем заполненным одночастичным состояниям. Энергия связи определяется в основном потенциалом $V_0(r)$. Для каждого заданного ядра потенциал $V_0(r)$ может быть приближенно определен из известных экспериментально размеров ядра и из энергии связи последнего нуклона в яме. Для того чтобы эта энергия связи имела ее наблюдаемое значение порядка 8 Мэв , глубина ямы, в которой движется последний нуклон, должна быть порядка 34 Мэв . Если все нуклоны разместить в яме такой глубины, то можно вычислить среднюю энергию связи на нуклон, которая оказывается лежащей между одним и двумя Мэв . Это не согласуется с наблюдаемым значением 8 Мэв . Выход состоит в том, чтобы изменить V^{sm} , сделав его зависящим от импульса.

В приближении большинства вычислений по оболочечной модели потенциал V^{sm} выбирается в виде бесконечной ямы. Это приближение может быть видоизменено добавлением члена, пропорционального квадрату импульса частицы, что не изменит порядка уровней, а лишь заменит истинную массу нуклона M эффективной массой M^* . Более реалистичным представляется считать эффективную массу изменяющейся от значения M на краю ядра до значения M^* внутри ядра, причем последнее значение примерно равно соответствующему значению для ядерной материи. Лоусоном, Марком и Росом³³ показано, что корректный порядок уровней еще может быть получен с зависящим от импульса потенциалом такого типа. Но пока еще далеко не ясно, как будет изменяться зависимость от импульса вблизи края ядра (см., однако,⁴⁵).

Ответ на этот вопрос содержится в решении самосогласованных уравнений § 6. Трудность решения этих уравнений, возможно, сделает необходимыми некоторые упрощающие допущения вблизи границы ядра. Это делает желательным получение каких-либо указаний на характер этих допущений из эмпирического анализа и сравнения с экспериментальными данными по типу отмечавшейся выше работы³³.

Несмотря на усложнение порядка уровней за счет зависимости от импульса и краевых эффектов, вероятно, что спин-орбитальный член потребуется той же величины, что и употребляемый в V^{sm} . Выбрав V как среднее, полученное из весьма грубо вычисленной t -матрицы, Скайрм²² и Кисслингер²³ получили спин-орбитальный член правильного порядка величины и правильного знака.

Так как для конечного ядра потенциал V определяется совместно с t и с одночастичными волновыми функциями, то он, очевидно, не будет сферически симметричным во всех случаях, кроме замкнутой оболочки. Между замкнутыми оболочками следует ожидать, что потенциал будет иметь форму, подобную форме плотности, и, по-видимому, в разумном приближении этот потенциал можно брать сфероидальным. Некоторые вычисления со сфероидальной ямой были проделаны Нильсоном³⁴ и Готфридом³⁵. Они использовали вариационный метод, который (хотя он и может оказаться хорошим приближением) и не имеет прямой связи с самосогласованным решением уравнений § 6. Если предположить, что t -матрица мало чувствительна к слабым изменениям волновых функций, то самосогласованные уравнения эквивалентны минимизации энергии

$$\sum_{l_0} (l_0 | T | l_0) + \frac{1}{2} \sum_{l_0 m_0} \{ (l_0 m_0 | t | l_0 m_0) - (l_0 m_0 | t | m_0 l_0) \} \quad (9.2)$$

с данным «псевдопотенциалом» t . Это выражение равно

$$\sum_{l_0} (l_0 | T | l_0) + \frac{1}{2} \sum_{l_0} (l_0 | V | l_0). \quad (9.3)$$

Так как V является средним по всем состояниям m_0 , то оно, очевидно, является функцией деформации. Нильсон²⁴ предположил, что эта деформация ведет к сфероидальному потенциалу V , и рассматривал деформацию как вариационный параметр, минимизирующий энергию (9.3). Он нашел, что деформация, дающая минимум энергии, согласуется с деформацией, полученной из наблюдаемых квадрупольных моментов.

Много конкретных вычислений по оболочечной теории были проведены для ядер, состоящих из замкнутой оболочки плюс один, два или три нуклона. Эти вычисления показывают, что поведение ядерных уровней, переходов и магнитных моментов можно детально предсказать, исходя из предположения о том, что нуклоны вне замкнутой оболочки взаимодействуют через эффективный нуклон-нуклонный потенциал U_{ij} только друг с другом. Эффективный потенциал U_{ij} оказывается имеющим обменный характер, более похожий на смесь Розенфельда, чем на смесь Сербера. Существования отталкивающей сферы не предполагалось. Если вне замкнутой оболочки имеется лишь один нуклон, то похоже, что его волновая функция с большой точностью является одночастичной.

Возникает вопрос о том, имеются ли в теории многих тел теоретические обоснования для тех весьма простых допущений, которые делаются в вычислениях по оболочечной теории. Имеется весьма малое количество работ по этому вопросу, однако достигнут некоторый прогресс в отношении получения из теории многих тел приближения, используемого в оболочечной теории (Бракнер, Иден и Френсис⁹, Бете¹⁴).

Вычисления, относящиеся к модели независимых частиц, в чистом виде были проделаны лишь для поправочного члена к энергии бесконечной ядерной материи. Эти вычисления показали, что трехчастичные флуктуации ведут к очень малой поправке к энергии, определяемой через суммарное одночастичное взаимодействие в усредненном поле. Как отмечено в § 7, эта поправка имеет порядок 1% от основного члена и мала за счет принципа Паули и короткодействующего характера ядерных сил. Любое прямое исследование чистоты одночастичного характера ядра «замкнутая оболочка плюс один нуклон» потребует как решения уравнений для псевдопотенциала t , так и вычислений по оболочечной модели с использованием этого потенциала для определения смешивания конфигураций нечетного нуклона и нуклонов остова.

Важно отметить отсутствие прямой связи между зависимостью одночастичного потенциала V от импульса и электромагнитными эффектами. В частности, например, справедливость приближения эффективной массы с $M^* = M/2$ не означает, что гиромагнитное отношение для протона удваивается. Последнее имело бы место, если бы V был заданным внешним потенциалом, но так как это потенциал, определенный самосогласованным образом, то электромагнитные эффекты должны вводиться посредством возвращения к исходному взаимодействию v_{ij} и записи электромагнитного взаимодействия в градиентно-инвариантной форме до вычисления матрицы t и потенциала V . Эти вопросы детально исследованы Бэллом, Иденом и Скайрмом²⁴ и Бэллом²⁵.

Теория многих тел дает некоторые указания на то, каким образом может быть оправдано использование в оболочечной теории плавного нуклон-нуклонного потенциала, имеющего иной обменный характер, чем потенциал с твердой сферой, требуемый данными по рассеянию нукло-

нов. Для простоты мы рассмотрим взаимодействие двух нейтронов вне замкнутого оболочечного остова, причем в духе теории многих тел мы будем пытаться дать формально точное решение в предположении, что остов порождает только осредненное поле, в котором движутся нейтроны. Это, в сущности, та же задача, что и рассмотренная в § 2, только теперь мы должны учесть вырожденность основного состояния.

Пусть решение Φ_0 для невозмущенной системы из двух нуклонов в заданном потенциале удовлетворяет уравнению

$$(\varepsilon_0 - H_0) \Phi_0 = 0. \quad (9.4)$$

Отметим, что волновая функция Φ_0 относится к двум нуклонам, а не к ядру, как в предыдущих параграфах. Теперь мы учтем вырождение посредством записи волновой функции Φ_0 в форме $|\beta' \varepsilon_0\rangle$, где β' может пробегать несколько возможных значений. Мы ищем решение задачи с учетом возмущения

$$(E - H_0) \psi = v \psi, \quad (9.5)$$

где v обозначает истинный нуклон-нуклонный потенциал. Запишем ψ в виде

$$\psi = \sum_{\beta \in r} |\beta', \varepsilon_r\rangle (\beta', \varepsilon_r | \psi). \quad (9.6)$$

Формальное решение дается в виде

$$\psi = \Omega \psi_0, \quad (9.7)$$

$$\psi_0 = \sum_{\beta'} |\beta' \varepsilon_0\rangle (\beta' \varepsilon_0 | \psi), \quad (9.8)$$

$$\Omega \psi_0 = \psi_0 + \frac{Q_0}{E - H_0} v \Omega \psi_0, \quad (9.9)$$

$$Q_0 |\beta' \varepsilon_0\rangle = 0,$$

$$Q_0 |\beta' \varepsilon_r\rangle = 1, \quad \varepsilon_r \neq \varepsilon_0, \quad (9.10)$$

при условии, что E определено как

$$(E - \varepsilon_0) (\beta' \varepsilon_0 | \psi_0) = \sum_{\beta''} (\beta' \varepsilon_0 | t | \beta'' \varepsilon_0) (\beta'' \varepsilon_0 | \psi_0), \quad (9.11)$$

где

$$t \psi_0 = v \psi_0 + v \frac{Q_0}{E - H_0} t \psi_0. \quad (9.12)$$

Уравнение (9.11) для сдвига энергии имеет форму обычного векового уравнения для двух частиц, взаимодействующих через псевдопотенциал t вместо истинного потенциала v . Уравнение (9.12) для t содержит обобщенный проектирующий оператор Q_0 , который отбрасывает все состояния, вырожденные относительно основного состояния невозмущенной задачи. В дальнейшем обобщении, предложенном Бете¹⁴, оператор Q отбрасывает не только состояния, вырожденные относительно основного, но и состояния, имеющие энергию, близкую к ε_0 . Далее сдвиг энергии будет определяться диагонализацией полученной t -матрицы относительно состояний, в которых оператор Q равен нулю. Похоже, что все это имеет непосредственное отношение к методике, широко используемой в современных вычислениях по оболочечной модели. Как отмечено выше, в этих вычислениях не используется нуклон-нуклонный потенциал, требуемый данными по рассеянию. Представляется, что существующая теория указывает на то, что используемый потенциал должен быть приближенным решением уравнения (9.12) для матрицы t . Интересно отметить, что

уравнение (9.11) показывает, что при подходящей t -матрице сдвиг энергии дается вековым уравнением (9.11) без введения дальнейшего смешивания конфигураций. Однако другие величины, такие, как магнитные моменты или вероятности перехода, будут получаться из функции ψ , данной в (9.6), и будут зависеть от примеси других конфигураций.

Изложенные выше соображения применимы к ядру с двумя нуклонами сверх замкнутого остова при условии правильности допущения о том, что влияние остова сводится только к созданию усредненного поля. Само же усредненное поле определяется t -матрицей, как это рассмотрено в § 6.

10. ОПТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Использование комплексного потенциала для описания ядра было впервые предложено Фешбахом, Сербером и Тейлором³⁶ для объяснения рассеяния нуклонов высокой энергии на ядрах. Этот потенциал был применен к рассеянию при низких энергиях Фешбахом, Портером и Вайскопфом³⁷ для объяснения экспериментов Баршалла³⁸ по рассеянию. В этих экспериментах определялось сечение упругого рассеяния для нейтронного пучка с разбросом по энергиям, превышающим рассеяния между соседними уровнями составного ядра. Это сечение оказалось для каждого ядра плавной функцией энергии и имело характерный «большой» резонанс ширины около 2 Мэв . Эти сечения оказались в хорошем согласии с оптической моделью, в которой действие ядра мишени на падающий нуклон описывается посредством потенциальной ямы $V(r)$ вида

$$V(r) = -[U(r) + iW(r)]. \quad (10.1)$$

Действительная часть $U(r)$ потенциала аналогична одночастичному потенциалу оболочечной модели. Мнимая часть $iW(r)$ учитывает возможность удаления нейтрона из входного канала посредством поглощения его ядром с образованием составного ядра. Фешбах, Портер и Вайскопф³⁷ показали, что такая форма потенциала находится в согласии с усредненными экспериментальными данными, так что тут есть возможность получить согласие с результатами как для полного упругого рассеяния, так и для сечения поглощения. Для нейтронов наилучшее согласие получается при $U(r) \cong 40 \text{ Мэв}$ и $W(r) \cong 2 \text{ Мэв}$ внутри объема, соответствующего $r_0 \cong 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ см}$.

С точки зрения теории многих тел, проблемой оптической модели является вычисление $U(r)$ и $W(r)$ из известного нуклон-нуклонного потенциала. Первая попытка применения существующей формы теории к оптической модели была сделана Бракнером, Иденом и Френсисом¹⁰.

Экспериментальное усреднение в баршалловских³⁸ экспериментах по рассеянию проведено по большому количеству отдельных резонансов составного ядра. Это наводит на мысль о том, что в теории может быть принято приближение бесконечной ядерной материи, в котором возбужденные уровни имеют непрерывный спектр. Будем предполагать правильным, что приближенное экспериментальное ускорение по резонансам конечного ядра заменяется переходом к пределу бесконечного ядра. Далее мы рассмотрим, каким образом вычисляется глубина действительной ямы $U(r)$ и глубина $W(r)$ ямы, описывающей поглощение ядерной материи.

В предыдущих параграфах одночастичный потенциал для нуклонов рассматривается в модели, относившейся к ядру в основном состоянии. Теперь же нам требуется потенциал, действующий на нейтрон в возбужденном состоянии модели. Это возбужденное состояние выбирается энергией падающего на ядро нуклона. Мы произведем экстраполяцию к ядерной материи посредством рассмотрения такой ситуации, когда нуклон-

нуклонное взаимодействие включается в начальном состоянии, в котором возбужден один нуклон.

Начальное состояние состоит из нейтрона с энергией $\epsilon > 0$ и совокупности нуклонов в основном состоянии ферми-газа, имеющих полную энергию ϵ_0 и гамильтониан H_0 . Имеется большое количество модельных состояний, вырожденных относительно начального, каждое из которых относится к одному из способов, которыми энергия ϵ_0 плюс энергия связи нейтрона могут быть распределены между другими нуклонами. Это вырождение может быть рассмотрено двумя различными путями соответственно двум различным физическим ситуациям. Описанный в § 9 первый путь имеет целью определение состояния модели, непосредственно связанного с основным состоянием ядра. В этом методе проблема вырождения переносится из уравнения для t -матрицы в вековое уравнение, определяющее соответствующую суперпозицию состояний в модели. Целью второго пути является определение такого состояния модели, которое непосредственно связано с чистым одночастичным возбуждением. Это состояние отбирается с помощью граничных условий для падающего на ядро мишени свободного нуклона и, следовательно, полностью соответствует настоящей задаче. Метод здесь состоит в том, чтобы учесть вырождение в уравнении для t -матрицы с помощью комплексного потенциала.

Будем описывать начальное состояние нуклона импульсом k , основные состояния частиц в сфере Ферми — индексами l_0, m_0, \dots и остальные состояния — индексами l, m, \dots . Уравнение для t -матрицы, содержащее матричные элементы состояния k , имеет вид

$$(kl_0 | t | kl_0) = (kl_0 | v | kl_0) + \int dp \int dq \frac{(kl_0 | v | pq)(pq | t | kl_0)}{E_k + E_{l_0} - H_0(pq) + ia}. \quad (10.2)$$

Член ia возникает за счет включения взаимодействия (см. 3.20).

Потенциал, действующий на нейтрон в состоянии k , равен

$$V(k) = \int dl_0 \{ (kl_0 | t | kl_0) - (kl_0 | t | l_0 k) \}. \quad (10.3)$$

Остальные элементы t равны

$$(l_0 m_0 | t | l_0 m_0) = (l_0 m_0 | v | l_0 m_0) + \int dp dq \frac{(l_0 m_0 | v | pq)(pq | t | l_0 m_0)}{E_{l_0} + E_{m_0} - H_0(pq) + ia}. \quad (10.4)$$

Так как мы теперь учитываем в уравнении для t промежуточные состояния, вырожденные относительно начального, то в (10.2) будут состояния p, q , для которых $E_p + E_q = E_{l_0} + E_k$. Все возбужденные состояния, содержащие k, p, q , будут иметь комплексный потенциал, знак которого определяется комплексным членом ia , указывающим, по какую сторону от сингулярности лежит путь интегрирования. Интегрирование по p, q в (10.2) будет производиться вокруг сингулярности при значении

$$E_p + E_q = E_k + E_{l_0} \quad (10.5)$$

и будет давать мнимую часть от $(kl_0 | t | kl_0)$. Знак этой мнимой части будет отрицательным. Аналогично оператор

$$H_0 = \frac{p^2}{2M} + \frac{q^2}{2M} + V(p) + V(q) \quad (10.6)$$

будет содержать отрицательную мнимую часть, обеспечивающую широкий обход вокруг сингулярности в (10.2) в том же направлении, которое указывается членом ia .

В уравнении (10.4) гамильтониан $H_0(pq)$ будет содержать аналогичную мнимую часть, которая, однако, в первом порядке не будет влиять на $(l_0 m_0 | t | l_0 m_0)$, так как на пути интегрирования нет сингулярностей из-за соотношения

$$E_{l_0} + E_{m_0} < E_p + E_q, \quad (10.7)$$

следующего из принципа Паули.

Комплексный потенциал $V(k)$ был весьма грубо оценен Бракнером, Иденом и Фрэнсисом¹⁰ в таком приближении, когда W мало по сравнению с v , а t -матрица аппроксимируется потенциалом Юкавы. При этом получаются расчеты, аналогичные проведенным Лейном и Ванделем³⁹, которые оценивали поглощение нейтронов Ферми-газа, не учитывая, однако, условие самосогласованности для $U(k)$ при определении энергетических уровней одночастичных состояний. Это дает разумное согласие со значениями 2 Мэв для W и около 40 Мэв для U . Если для всех состояний учесть зависимость U от импульса, то похоже, что предсказанное значение W оказывается заниженным¹⁰, однако при сделанных приближениях это заключение нельзя считать вполне определенным. Бракнером⁴⁰ была сделана попытка увеличить значение W посредством другого способа учета принципа Паули. Другая возможность состоит в том, что в работе¹⁰ неправильно указывается влияние эффективной массы.

Существующая ситуация в отношении вывода оптической модели из теории многих тел может быть резюмирована следующим образом: имеется качественная связь, которая выглядит разумно согласующейся с физической интуицией, однако эта связь не сформулирована конкретным образом, и отдельные интуитивные моменты пока не являются оправданными.

11. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Теория многих тел непосредственно применена к ряду реакций при высоких энергиях. Сюда входят реакции, в которых падающая частица первоначально взаимодействует только с одним из нуклонов ядра мишени, хотя сам формализм может быть обобщен на реакции в которых участвует большее число нуклонов, а также на возможные поверхностные эффекты. Частными примерами таких реакций являются: 1) вырывание дейтона при больших энергиях, 2) рождение и захват мезонов ядрами, 3) фотоядерные эффекты, 4) протон-протонное рассеяние или протон-нейтронное рассеяние в ядре.

Обзор теории этих реакций и ссылки на предыдущие работы даны Бракнером, Иденом и Фрэнсисом⁸. В этих реакциях экспериментально подтверждается, что волновая функция ядра в основном состоянии в отдельных случаях ведет себя совершенно иначе, чем волновая функция независимых частиц. Хотя для ряда экспериментов модельный оператор, связывающий обе волновые функции, создает только слабый возмущающий эффект, в этих экспериментах он играет доминирующую роль. При энергиях падающей частицы порядка 100 Мэв сечения реакций весьма чувствительны к деталям корреляций между нуклонами в ядре мишени. Эти корреляции имеют прямое отношение к распределению относительно²⁰ импульса нуклонных пар, которое в настоящей теории играет такую же роль, как и распределение импульсов нуклонов, введенное ранее Чу и Гольдбергом⁴¹. Мы не будем входить в детали получения сечений для этих процессов, а лишь отметим, что главными приближениями являются: 1) только один нуклон в ядре мишени

вступает в прямое взаимодействие с падающей частицей, 2) средняя энергия возбуждения ядра-остатка считается постоянной, для того чтобы устранить зависимость сечения от конечного состояния ядра-остатка.

Эти приближения приводят для сечений перечисленных выше процессов к теоретическим выражениям, непосредственно зависящим от распределения относительно импульса пар нуклонов в ядре-мишени. Рассмотрим физическую картину этих приближений на примере вырывания дейтронов падающими протонами с энергией порядка 100 Мэв. Падающий протон сталкивается только с одним нейтроном ядра-мишени. Вероятность вырывания для этого нейтрона будет наибольшей, если у него перед столкновением окажется большой величины импульс, сравнимый с импульсом падающего протона. Таким образом, в эксперименте почти непосредственно измеряется вероятность такого импульса.

Функция распределения для двух нуклонов, имеющих соответственно импульсы k_1 и k_2 , имеет вид

$$f(k_1, k_2) = \int d^3 \dots dA (k_1 k_2 \dots A) |\psi|^2. \quad (11.1)$$

Первым приближением к волновой функции ψ в форме (6.1) является просто антисимметричное произведение Φ . Подстановка в (11.1) здесь дает

$$f^{(0)}(k_1 k_2) = \frac{1}{A^2} \sum_{(l_0 m_0)} |(k_1 k_2 | l_0 m_0) - (k_1 k_2 | m_0 l_0)|^2, \quad (11.2)$$

где $|l_0\rangle$ и $|m_0\rangle$ обозначают одночастичные волновые функции в основном состоянии ядра-мишени.

В следующем приближении учитывается второй член в ряде (6.1) для ψ , что дает

$$f^{(1)}(k_1 k_2) = \frac{1}{A^2} \sum_{(l_0 m_0)} \left| (k_1 k_2 | l_0 m_0) + \sum_{pq} \frac{(k_1 k_2 | pq)(pq | l | l_0 m_0)}{E_{l_0} + E_{m_0} - E_p - E_q} - \right. \\ \left. - (k_1 k_2 | m_0 l_0) - \sum_{pq} \frac{(k_1 k_2 | pq)(pq | l | m_0 l_0)}{E_{l_0} + E_{m_0} - E_p - E_q} \right|^2. \quad (11.3)$$

Приближение, даваемое посредством $f^{(1)}(k_1 k_2)$, соответствует физической картине, в которой нейтрон (подвергающийся вырыванию) находится в сильном взаимодействии с другим нуклоном, перед тем как происходит реакция вырывания. Это сильное взаимодействие обеспечивает большой импульс, необходимый для увеличения вероятности вырывания. Непосредственным вычислением⁸ можно проверить, что увеличение, определяемое отношением $f^{(1)}$ к $f^{(0)}$, по порядку величины равно десяти. Следующий член в ряде (6.1) для ψ не будет в заметной степени увеличивать вероятность, так как этот член содержит трехчастичные диаграммы, ведущие обычно лишь к малым поправкам.

Приближение (11.3) для распределения импульсов аналогично распределению, введенному Гайдманом⁴² из физических соображений. Результаты в разумной степени согласуются с экспериментальными доказательствами, полученными Хадли и Йорком⁴³. Остальные упомянутые выше эксперименты при высоких энергиях также выглядят находящимися в приемлемом согласии с теоретическим импульсным распределением⁸.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. K. A. Brueckner, C. A. Levinson, H. M. Mahmoud, Phys. Rev. 95, 217 (1954).
2. K. M. Watson, Phys. Rev. 89, 575 (1953).
3. K. M. Watson and N. C. Francis, Phys. Rev. 92, 291 (1953).
4. K. A. Brueckner, Phys. Rev. 96, 508 (1954).
5. K. A. Brueckner, Phys. Rev. 97, 1353 (1955).
6. K. A. Brueckner and C. A. Levinson, Phys. Rev. 97, 1344 (1955).
7. R. J. Eden and N. C. Francis, Phys. Rev. 97, 1366 (1955).
8. K. A. Brueckner, R. J. Eden and N. C. Francis, Phys. Rev. 98, 1445 (1955).
9. K. A. Brueckner, R. J. Eden and N. C. Francis, Phys. Rev. 99, 76 (1955).
10. K. A. Brueckner, R. J. Eden and N. C. Francis, Phys. Rev. 100, 891 (1955).
11. K. A. Brueckner, Phys. Rev. 100, 36 (1955).
12. R. J. Eden, Phys. Rev. 99, 1418 (1955).
13. R. J. Eden, Proc. Roy. Soc. A235, 408 (1956).
14. H. A. Bethe, Phys. Rev. 103, 1353 (1956).
15. G. Goldstone, Proc. Roy. Soc. A239, 267 (1957).
16. N. M. Hugenholtz, Physica 23, 481, 533 (1957).
17. K. A. Brueckner and J. Gammel, Phys. Rev. 105, 1679 (1957).
18. H. A. Bethe and G. Goldstone, Proc. Roy. Soc. A238, 551 (1956).
19. K. A. Brueckner and W. Wada, Phys. Rev. 103, 1008 (1956).
20. D. J. Thouless, Proc. Roy. Soc. A239, 108 (1957).
21. T. H. R. Skyrme, Phil. Mag. 1, 1043 (1956).
22. T. H. R. Skyrme, D. T. S. Bell, Phil. Mag. 1, 1055 (1956).
23. L. S. Kisslinger, Phys. Rev. 104, 1077 (1956).
24. J. S. Bell, R. J. Eden and T. H. R. Skyrme, Nucl. Phys. 2, 586 (1957).
25. J. S. Bell (частное сообщение).
26. W. B. Riesenfeld and K. M. Watson, Phys. Rev. 104, 492 (1956).
27. R. Karplus and K. M. Watson, Phys. Rev. 107, 1205 (1957).
28. R. Jastrow, Phys. Rev. 98, 1479 (1955).
29. V. J. Emery, Ph. D. thesis, Manchester University (1957).
30. K. Huang and C. N. Yang, Phys. Rev. 105, 767 (1957).
31. V. F. Weisskopf, Nucl. Phys. 3, 423 (1957).
32. J. C. Gammel, R. S. Christian and R. M. Thaler, Phys. Rev. 105, 311 (1957).
33. A. A. Rose, R. D. Lawson and H. Mark, Phys. Rev. 104, 401 (1956).
34. S. G. Nilsson, Dan. Mat. Fys. Medd. 29, 16 (1955).
35. K. Gottfried, Ph. D. Thesis, M. J. T. (1956).
36. S. Feshbach, R. Serber and T. B. Taylor, Phys. Rev. 75, 1352 (1949).
37. H. Feshbach, C. E. Porter and V. F. Weisskopf, Phys. Rev. 76, 1550 (1954).
38. H. H. Barschall, Phys. Rev. 86, 431 (1952).
39. A. M. Lane and C. F. Wandell, Phys. Rev. 99, 647 (1955).
40. K. A. Brueckner, Phys. Rev. 103, 172 (1956).
41. C. F. Chew, M. L. Goldberger, Phys. Rev. 77, 470 (1950).
42. J. Heidmann, Phys. Rev. 80, 171 (1950).
43. J. Hadley, H. F. York, Phys. Rev. 80, 345 (1950).
44. N. M. Hugenholtz and L. Van Hove, Physica, 24, 363 (1958).
45. R. Hall and R. J. Eden, Nuclear Physics, 6, 157 (1958).