



**ТОМАС ЮНГ**  
**(1773—1829)**

## РАЗВИТИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О ЯВЛЕНИЯХ ДИФРАКЦИИ \*)

(к 130-летию со дня смерти Томаса Юнга)

*Г. Д. Малюжинец*

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Наиболее простые закономерности распространения электромагнитных, акустических или иных волн в однородной или неоднородной среде относятся к случаю крайне малых длин волн  $\lambda$ , т. е. к случаю, описываемому геометрической оптикой. Волновые поля геометрической оптики являются локально плоскими в том смысле, что на малых участках они подчиняются закономерностям плоских волн в однородной среде, распространяющихся в определенных лучевых направлениях. В случае изотропной среды совокупность лучей представляет собой семейство линий, ортогональных к семейству распространяющихся волновых фронтов.

Опираясь на представление о лучах, можно считать геометро-оптическое поле разбитым сколь угодно подробно на лучевые трубки, в каждой из которых распространение происходит совершенно самостоятельно. Поэтому, если на пути распространения имеется препятствие, на котором оканчивается часть лучей, в то время как другая часть проходит мимо, то образуется характерная для геометрической оптики резкая граница между освещенной и затененной областью.

При хотя бы малой, но конечной длине волны  $\lambda$  имеет место размывание резкой границы светотени, представляющее собой простейшее явление дифракции. Происходит как бы расщепление крайних лучей, благодаря которому поле частично проникает в область геометрической тени. Слово дифракция (от латинского *diffringere* — разбивать, расщеплять), связанное с таким кажущимся расщеплением лучей, было предложено Гримальди (1665) для обозначения наблюдавшегося им размывания узкого пучка солнечного света, пропускаемого сквозь малое отверстие, а также тени от стержня, освещаемого узким пучком. Поэтому дифракцией в узком смысле слова называются такие относительно небольшие отличия в распространении волн от законов геометрической оптики, когда волновое поле или каждое из его отдельных составляемых имеют достаточное сходство с локально-плоскими полями, хотя и могут возникнуть новые, необъясняемые геометрической оптикой, направления распространения.

Дифракцией в широком смысле называются любые отклонения от законов геометрической оптики. Поэтому сюда относятся почти все волновые явления при распространении в областях произвольной формы.

---

\*) Настоящая статья является переработкой статьи «Дифракция волн», написанной для нового издания физического словаря.

## § 2. ИСТОРИЧЕСКОЕ РАЗВИТИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О ДИФРАКЦИИ

Первая волновая трактовка дифракции дана Юнгом (1800), другая — Френелем (1815). Характерные черты этих объяснений можно проследить на простейшем примере дифракции за прямолинейным краем препятствия.

В картине волнового поля, имеющей место за препятствием, Юнг \*) усматривает сочетание двух явлений: собственно дифракции и интерференции. Для объяснения явления дифракции Юнг, в дополнение к геометро-оптическому принципу распространения локально плоских волн в направлении лучей, ввел принцип поперечной передачи амплитуды колебаний непосредственно вдоль волновых фронтов, указав, что скорость

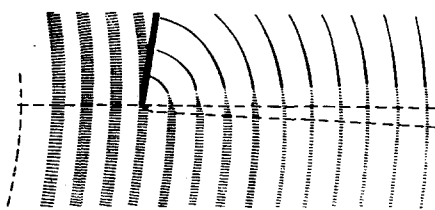


Рис. 1.

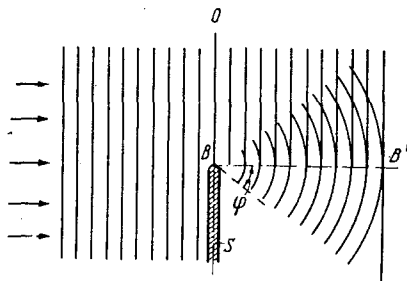


Рис. 2.

этой передачи, т. е. поток амплитуды пропорционален длине волны и различию амплитуд (градиенту) на фронте. На рис. 1, заимствованном из статьи Юнга, изображено, как образуется дифрагированная волна за препятствием благодаря такой передаче амплитуды по цилиндрическим фронтам от границы геометрической тени. Таким образом, согласно Юнгу возникновение дифрагированной волны имеет локальный характер, так как происходит в некоторой окрестности границы тени за краем препятствия. Аналогичная дифрагированная волна образуется и в освещенной области (рис. 2) так, что создается поле цилиндрических волн, как бы испускаемых краем отверстия. Интерференция между дифрагированной волной и незаслоненной препятствием частью падающей волны объясняет появление на экране  $B'$  интерференционных полос выше границы геометрической тени  $BB'$  и отсутствие их ниже.

Не увидев возможности объяснить методом Юнга тот факт, что острые и закругленные края приводят к одинаковому дифракционному изображению на экране вблизи границ геометрической тени ( $|\varphi| \ll 1$  \*\*). Френель (1815) отказался от локальной трактовки дифракции как явления, происходящего в окрестности краев отверстия. Используя принцип Гюйгенса, он представил дифракционные явления как результат интерференции полей бесконечного множества фиктивных элементарных источников (рис. 3), распределенных по всей плоскости отверстия. Для наглядности представления о величине дифракционного поля в некоторой произвольной точке  $A$  за большим по сравнению с длиной волны отверстием Френель ввел разбиение плоскости отверстия на кольцеобразные полуволновые зоны. Последние строятся с помощью циркуля, начиная с первой зоны, так, как показано на рис. 4 для случая плоской волны, падающей на отверстие радиуса  $a$ , и точки  $A$ , расположенной на оси. В данном случае

\*) Th. Young, A course of lectures on natural philosophy and mechanical arts, т. I—II, London, 1807.

\*\*) Область больших углов дифракции  $\varphi$ , где обнаруживаются различия в дифрагирующих свойствах острого и закругленного края экрана, в то время не подвергалась специальному обследованию.

на отверстии уместается ровно пять зон Френеля. Действие совокупности гюйгенсовых источников, расположенных в смежных зонах 2, 3 и 4, 5, в существенной мере взаимно компенсируется из-за противоположности фаз колебаний, доходящих от этих зон до точки  $A$ . Поэтому результирующее поле в точке  $A$  обуславливается в основном источниками, относящимися только к первой зоне. Случай, когда на отверстии укладывается только одна зона Френеля, приблизительно, соответствует расстоянию  $OA = a^2/\lambda$ , начиная с которого пучок света, звука или другого излучения, о котором может идти речь, становится относительно быстро расширяющимся из-за дифракции. Отдаленная область пространства, соответствующая расстояниям, значительно превышающим величину  $a^2/\lambda$ , называется зоной Фраунгофера. В этой зоне дифрагированная волна приобретает определенную характеристику направленности и подчиняется, по существу, уже геометрическим законам.

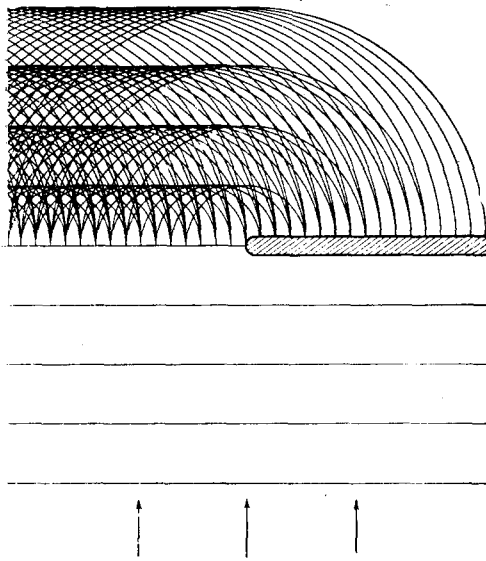


Рис. 3.

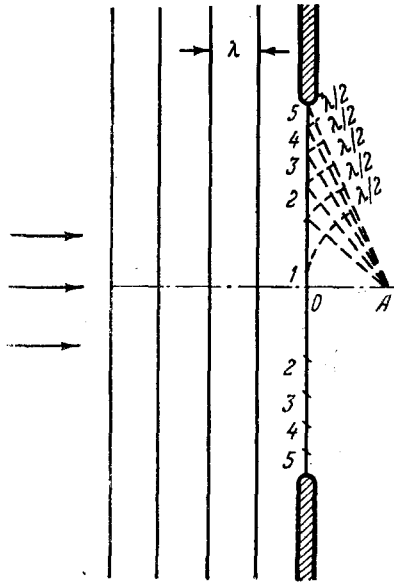


Рис. 4.

Френелевское представление о дифракции, разработанное математически его автором, вскоре получило преобладающее значение и привело к окончательной победе волновой теории света над ньютоновской эмиссионной. Хотя френелевский метод является более формальным, поскольку для объяснения дифракции у края привлекаются к рассмотрению весьма удаленные от края источники, локальный подход Юнга, более адекватный физической сути явления дифракции, считался со времен Френеля неверным. В дальнейшем Маджи (1888) и Рубинович (1917, 1924) показали, что результаты вычислений френелевским методом приводятся с помощью математического преобразования к форме, предсказанной Юнгом.

В строгой формулировке Гельмгольца (1859) и Кирхгоффа (1882) принцип Гюйгенса представляет собой интегральное тождество, связывающее значение волнового поля в произвольной точке некоторой области с краевыми значениями поля и его производных на границе области. В таком виде этот принцип пригоден лишь для формулировки математической задачи дифракции в форме интегрального уравнения, решить которое в общем случае не удается. Поэтому получить представление о дифракционном поле и вычислить его на основании принципа Гюйгенса можно, как

правило, только если указанные краевые условия известны из других соображений. Для приближенных вычислений дифракции, следуя Кирхгоффу, принимают значения поля и его производных в плоскости отверстия такими, как если бы экран никак не искажал падающую волну. В тени же непосредственно за экраном эти значения принимаются равными нулю. Этим способом удобно получаются приближенные формулы дифракционного поля для отверстий различной формы, как для конечных расстояний от отверстия (дифракция Френеля), так и для удаленной зоны Фраунгофера (дифракция Фраунгофера). Сравнение с точным решением задачи дифракции на полуплоскости, полученным Зоммерфельдом (1896), показывает, что хотя приближенные формулы дифракции Френеля и приводят к преуменьшенным значениям поля для больших углов дифракции в зоне тени, но для малых углов дифракции, т. е. вблизи границы тени, эти формулы хорошо отображают дифракционную картину.

Метод Френеля встречает затруднения, когда не удастся заранее, хотя бы приближенно, угадать (подобно тому как это делает Кирхгофф для больших отверстий) распределение элементарных источников на граничных поверхностях. Это относится, например, к дифракции в поглощающую поверхность при распространении волн вдоль нее, или к огибанию волнами плавно выпуклого препятствия.

### § 3. СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ ЮНГОВСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О ДИФРАКЦИИ<sup>1-5</sup>

По законам геометрической оптики распространение в каждой лучевой трубке происходит независимо. При этом лучевая амплитуда (величина, квадрат модуля которой пропорционален потоку энергии вдоль трубки), сохраняя постоянное значение вдоль каждой трубки, может быть отлична от нуля в одних трубках и равна нулю в смежных, что соответствует наличию резкой границы геометрической теории. Согласно более точным представлениям дифракция в узком смысле слова представляет собой, в первом приближении, эффект поперечной диффузии лучевой амплитуды из одних лучевых трубок в смежные, или, иными словами, диффузию лучевой амплитуды по фронтам распространяющихся волн.

Чтобы получить на основе такого представления все результаты упрощенной френелевой теории дифракции за отверстиями произвольной формы в плоском экране для малых углов дифракции, достаточно рассмотреть явления поперечной диффузии амплитуды по фронтам приблизительно плоских волн. Если подставить выражение приблизительно плоской волны  $U = A(x, y, z) e^{-i(\omega t - kx)}$ , распространяющейся в направлении  $x$ , в волновое уравнение  $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \Delta U$ , то для плавно изменяющейся амплитуды  $A(x, y, z)$  получается уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{D}{c} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{D}{c} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right),$$

где  $D = \lambda c / 4\pi i$ . Пренебрегая в левой части вторым членом по сравнению с первым (ввиду малости длины волны  $\lambda$ ), получают уравнение:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{D}{c} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

которое может быть переписано также в виде двухмерного уравнения диффузии-теплопроводности

$$\frac{\partial A}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

если положить  $x = ct$ , т. е. связать систему отсчета с движущейся волной, совпадающей в момент  $t = 0$  с плоскостью  $x = 0$ , в которой расположен экран с отверстием. Когда плоская волна с единичной амплитудой ( $A = 1$ ) падает на экран с отверстием (рис. 5 и 6), то, если принять непосредственно за отверстием амплитуду также равной единице, а за экраном — равной нулю, обнаружится распыливание амплитуды по фронту волны по мере дальнейшего продвижения последней, аналогичное обычной диффузии или теплопроводности. Это изображено на рисунках посредством вертикальных прямых, изменяющаяся толщина которых пропорциональна величине  $|A|$  на фронте волны. Расчет такого

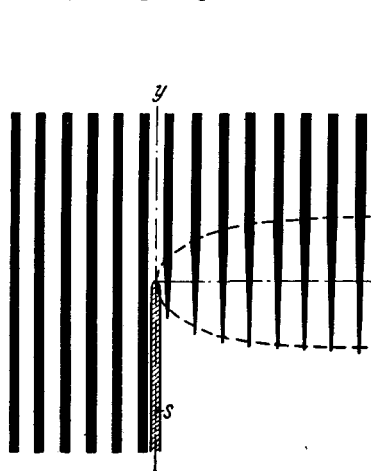


Рис. 5.

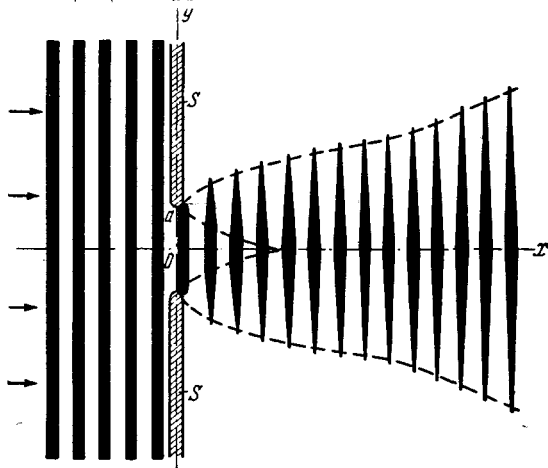


Рис. 6.

распыливания с помощью уравнений (1) и (2) приводит к формулам, совпадающим с приближенными формулами френелевой дифракции. При  $\lambda \rightarrow 0$  коэффициент диффузии  $D = \lambda c / 4\pi i$  исчезает, т. е.  $\partial A / \partial x = 0$  (случай геометрической оптики с ее резкими границами тени).

Мнимость коэффициента  $D$ , приводящая к сходству уравнения (2) с уравнением Шредингера в квантовой механике, означает, что диффузия комплексной амплитуды  $A$  происходит со сдвигом фаз, вследствие чего возможны осцилляции в распределении модуля амплитуды  $|A|$  по фронту волны. Однако по характеру типичных постановок задачи, явление диффузии волновой амплитуды в большинстве случаев имеет большее сходство с явлениями обычной диффузии и теплопроводности, чем с квантовой механикой.

Изложенный метод позволяет решать задачи, которые не удастся решить на основе френелевого метода. Например, распространение волны над поглощающей поверхностью  $y = 0$  (характеризуемой нормальным импедансом  $1/g$ ), когда краевое условие на этой поверхности имеет вид условия «внешней теплопроводности»  $\frac{\partial A}{\partial y} = hA$ , где  $h = 2\pi g / i\lambda$ .

На рис. 7 изображен случай, когда волна, скользкая вначале вдоль идеально отражающей плоскости, где  $g = 0$ , проходит затем некоторый участок  $x_1 < x < x_2$ , где имеется поглощение ( $g > 0$ ), после чего опять движется над непоглощающей плоскостью. Явление дифракции проявляется здесь в том, что амплитуда волны  $A$ , рассчитываемая по формулам, вполне аналогичным формулам теплопроводности или диффузии, ослабевает на нижней части фронта, по мере продвижения волны над поглощающим участком. Процесс на этом участке подобен остыванию

первоначально нагретой пластины, охлаждаемой посредством внешней теплопроводности  $h$  с нижнего конца. После вступления волны вновь на непоглощающий участок начинается обратный процесс «прогрева» нижней части за счет «неостывшей» верхней, что также показано на рис. 7.

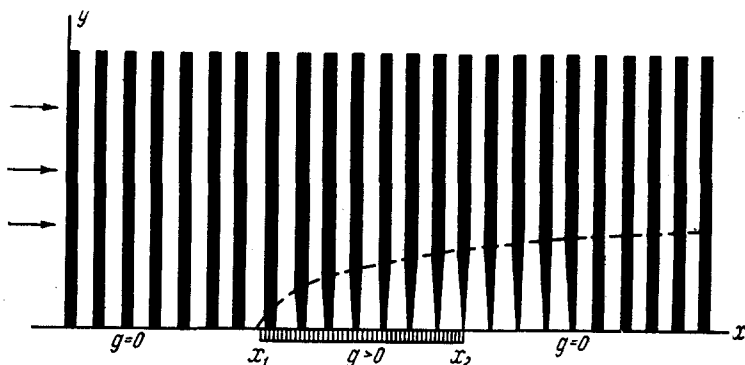


Рис. 7.

Подобно обычной диффузии или теплопроводности, явление поперечной диффузии амплитуды по фронту волны имеет локальный характер и сравнительно сильно выражено лишь в зонах эффективной диффузии, где градиенты комплексной амплитуды на фронте достаточно велики. На рис. 5 подобная зона очерчена параболой (пунктир). С уменьшением длины волны эта парабола приближается к границе геометрической тени, в пределе сливаясь с ней. В случае отверстия (рис. 6) две параболические зоны эффективной диффузии сливаются на расстоянии  $a^2/\lambda$ , фигурирующем также во френелевом рассмотрении дифракции. Дальнейшее расплывание максимума амплитуды на фронте продолжается приблизительно по линейному закону.

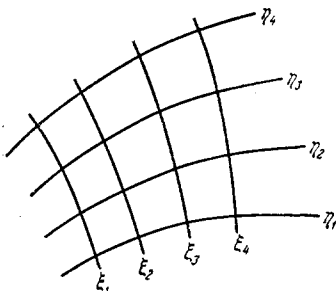


Рис. 8.

Для получения более точного представления о дифракции рассмотрение поперечной диффузии амплитуды по фронту плоской волны недостаточно. Необходимо аналогичное рассмотрение диффузии лучевой амплитуды по искривленным фронтам, которые получаются в соответствии с законами геометрической оптики для заданной формы дифрагирующих объектов и расположения источников поля. Ограничиваясь двумерным случаем для некоторого описываемого волновым уравнением  $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{c^2}{n^2} \Delta U$  простого поля в неоднородной среде с плавно изменяющимся от точки к точке показателем преломления  $n$ , можно в геометрическом приближении ввести (рис. 8) семейство лучей  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$  и ортогональных им волновых поверхностей  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ , где  $\xi$  — оптическая длина пути (эйконол). Вводя удельную площадь сечения лучевой трубки  $\kappa = \frac{d\sigma}{d\eta}$ , можно написать выражение волнового поля в координатах  $\xi, \eta$  в виде

$$U = \frac{A}{\sqrt{n\kappa}} e^{-i(\omega t - k\xi)},$$

где  $A(\xi, \eta)$  — лучевая амплитуда, называемая иначе функцией ослабления. В результате подстановки выражения для  $U$  в волновое уравнение и пренебрежений, подобных сделанным ранее, для  $A$  получается аналогичное (1) уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{D}{c} \frac{1}{\sqrt{nx}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{nx} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{A}{\sqrt{nx}} \right), \quad (3)$$

которое, путем замены  $\xi = ct$ , переходит в уравнение диффузии-теплопроводности по фронту, искривленному и деформирующемуся с течением времени.

Приведенное выше описание дифракции у краев отверстий путем рассмотрения поперечной диффузии по плоским фронтам является лишь простейшим приближением, точность которого не превышает точности френелевских формул. Для точного описания следует обратиться к более полной юнговской картине волнового поля и учесть, что поперечная диффузия лучевой амплитуды происходит по фронтам цилиндрической волны, расходящейся от края. При этом для расчетов диффузии лучевой амплитуды вместо (1) нужно пользоваться уравнением (3), которое для однородной среды ( $n=1$ ) в цилиндрическом случае получает вид

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{D}{cr^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}. \quad (4)$$

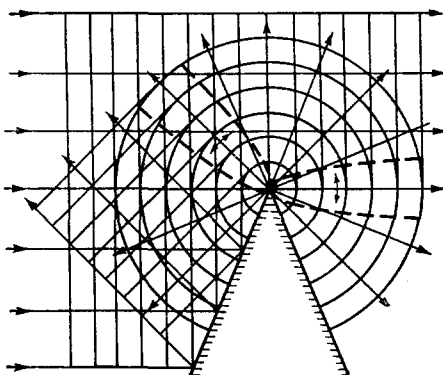


Рис. 9.

На рис. 9 представлена схема поперечной диффузии при дифракции плоской волны на идеально отражающем клине с произвольным углом раствора. Пунктирными параболой показаны две зоны эффективной диффузии, охватывающие границы геометрической тени для прошедшей и отраженной волны. Искривленные стрелки внутри этих зон указывают направление поперечной диффузии вдоль цилиндрических фронтов. Остальные стрелки соответствуют направлениям распространения волновых фронтов. В областях, находящихся вне парабол, явление поперечной диффузии слабо выражено ввиду того, что градиенты лучевой амплитуды в них становятся слишком малыми, из-за расширения цилиндрических фронтов. Поэтому диффузией здесь практически можно пренебречь. Расходящаяся волна в этих областях, которую можно называть зоной Фраунгофера, имеет характер обычной цилиндрической волны, идущей от края клина и обладающей определенной характеристикой направленности. В действительности же эта волна имеет своим источником не край клина, а зону эффективной диффузии. Здесь собственно и происходит явление дифракции. Поскольку процесс диффузии связан с некоторым запаздыванием, то цилиндрическая волна в зонах Фраунгофера отстает по фазе от сопряженной с ней на границе геометрической тени плоской волны на величину  $\pi/4$ .

Расчет дифракции на идеально отражающем клине, проведенный с помощью уравнения (4), приводит к результатам, асимптотически совпадающим на расстояниях  $r \gg \lambda$  со строгим решением Зоммерфельда. Поскольку поперечно-диффузионное приближение незаконно у самого ребра клина, такое совпадение показывает, что ближайшие к ребру участки



имеют пренебрежимо малую значимость в суммарном эффекте диффузии, который накапливается по мере распространения волны от ребра вдаль. В малой угловой области  $|\varphi| \ll 1$  вблизи границы геометрической тени за экраном, расходящаяся цилиндрическая волна мало отличается от плоской и может рассматриваться вместе с незаслоненной экраном частью

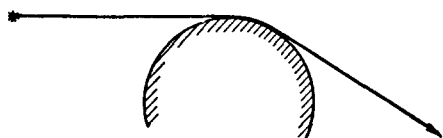


Рис. 10.

падающей волны, как одна приблизительно плоская волна. В этом и состоит смысл предыдущего приближенного рассмотрения диффузии амплитуды по приблизительно-плоским фронтам за отверстиями (рис. 5 и 6). Поскольку существенная для малых углов дифракции

зона эффективной диффузии также принадлежит области  $|\varphi| \ll 1$ , то результат расчета диффузии по приблизительно-плоским фронтам оказывается правильным для малых углов дифракции. При этом эффект диффузии автоматически вносит исправление в погрешность, связанную с неправильным выбором направления фронтов, с точностью тем большей, чем меньше была допущенная погрешность. Поскольку в действительности диффузия происходит по цилиндрическим, а не плоским волновым фронтам, становится очевидной и причина неправильности такого упрощенного расчета, когда речь идет о больших углах дифракции по обе стороны от границы геометрической тени. Однако подобные упрощения формы волновых поверхностей, вносящие лишь небольшие искажения в зонах эффективной диффузии и в их окрестностях, являются удобным средством для приближенного количественного рассмотрения более сложных явлений дифракции. Такими упрощениями пользуются Леонтович и Фок<sup>1-3</sup>.

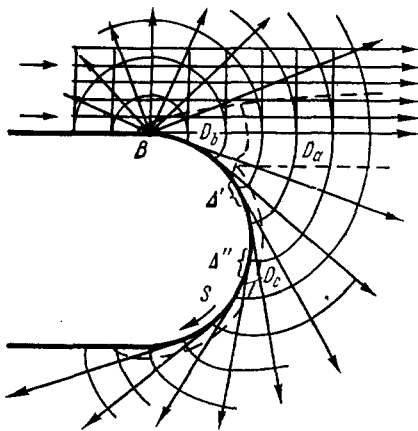


Рис. 11.

При дифракции у закругленного края явление поперечной диффузии в освещенной и теневой области имеет свои специфические особенности, за которыми легче проследить, рассматривая распространение волн вдоль плоскости, оканчивающейся закруглением только сзади или только спереди, и считая, для простоты, что нормальная производная поля на границе обращается в нуль. При наличии выпуклого препятствия (рис. 10) луч, следующий из источника в произвольную точку области тени, строится согласно принципу Ферма и совпадает по форме (в случае однородной среды) с нитью, натянутой между этими двумя точками. Волновые фронты в области тени в случае заднего закругления (рис. 11) являются эвольвентами для такого рода лучей. Дифракция обуславливается поперечной диффузией лучевой амплитуды по этим волновым фронтам из освещенной области в теневую. Зону эффективной диффузии можно условно разбить на три части  $D_a$ ,  $D_b$ ,  $D_c$ , показанные на рис. 11 пунктиром. В зоне  $D_a$  и в некоторой ее угловой окрестности дифракционная картина близка к той, которая получается в окрестности границы геометрической тени за острым краем экрана или клина (рис. 9). В зоне  $D_c$  диффузионная передача лучевой амплитуды вдоль дуги  $S$  может происходить только «каскадным» способом, при котором диффузионное и лучевое распространение чере-

дуге между собой так, что процесс диффузии в последующие трубки начинается лишь после того, как диффузия в предыдущие трубки уже заканчивается; это объясняется тем, что внутри данной зоны любые две достаточно удаленные друг от друга лучевые трубки, например для участков  $\Delta'$  и  $\Delta''$ , не связаны между собой общим волновым фронтом. В результате, если радиус кривизны  $r_0$  выпуклого тела постоянен, в зоне  $D_c$  устанавливается процесс диффузии, экспоненциально ослабевающий в направлении дуги  $S$ . Поэтому перепад амплитуды в смежных лучевых трубках вдоль дуги оказывается связанным с самой амплитудой зависимостью

$$\frac{dA}{dS} = -aA, \quad (5)$$

где, как показывает более детальный расчет,

$$-a = \alpha \frac{i - \sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{\pi}{\lambda r_0^2}},$$

причем  $\alpha \cong 1,02$  — первый корень производной функции Эйри (если на границе тела обращается в нуль само поле, а не его нормальная производная, то  $\alpha \cong 2,34$ , т. е. величина  $\alpha$  зависит от свойств материала, из которого изготовлено тело, и характера поляризации падающей волны). Зависимость (5) справедлива и для случая переменного радиуса кривизны  $r_0 = r_0(s)$  при условии, что этот радиус мало изменяется вдоль дуги  $s$  на расстоянии, соответствующем длине участка луча, уменьшающегося в зоне  $D_c$ . При этом из (5) следует, что

$$A(s) = A(s_0) \exp \left[ \alpha \frac{i - \sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{\pi}{\lambda}} \int_{s_0}^s r_0^{-\frac{2}{3}}(s) ds \right],$$

или, при  $r_0 = \text{const}$ ,

$$A(s) = A(s_0) \exp \left[ \alpha \frac{i - \sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{\pi}{\lambda r_0^2}} (s - s_0) \right]. \quad (6)$$

Вещественная часть в показателе обуславливает экспоненциальное затухание амплитуды на луче, скользящем вдоль дуги  $s$ . Наличие мнимой части эквивалентно некоторому уменьшению скорости распространения, связанному с замедлением, обусловленным вышеописанным механизмом последовательной диффузии в зоне  $D_c$ . Когда какой-нибудь луч ответвляется по касательной от дуги  $s$  и выходит из зоны  $D_c$  в зону Фраунгофера, дальнейшее затухание и замедление прекращается и лучевая амплитуда делается постоянной, так что амплитуда самого волнового поля продолжает убывать только в соответствии с расширением лучевых трубок. Однако значительное затухание, которому подвергалась лучевая амплитуда на каждом таком луче за время прохождения в зоне диффузии, приводит к тому, что в области тени для больших углов дифракции поле за выпуклым препятствием гораздо слабее, чем за таким же экраном с острыми краями. В нижней части рис. 11, где поверхность препятствия становится плоской, диффузия прекращается, поскольку эта поверхность является идеально отражающей с краевым условием  $\frac{\partial u}{\partial n}$  (в противном случае имел бы место механизм диффузии, описанный в связи с рис. 7).

Дифрагированная волна, идущая из точки  $B$  вверх и назад, навстречу падающей волне, формируется за счет диффузии лучевой амплитуды вдоль тех, имеющих относительно малый радиус цилиндрических волновых

фронтов, которые расположены в промежуточной зоне  $D_b$  вблизи точки  $B$ . Чем больше радиус кривизны поверхности тела вправо от точки  $B$ , тем меньше вблизи этой точки возмущение, возникающее от проникновения поля в узкую область между границей геометрической тени и поверхностью тела. Поэтому при большом радиусе кривизны явление диффузии по цилиндрическим фронтам малого радиуса очень слабо выражено, а следовательно, в отличие от случая острого края, рассеяние вверх и назад пренебрежимо мало.

Характерной особенностью дифракции у края препятствия, закругленного спереди (рис. 12), является поперечная диффузия лучевой амплитуды непосредственно из падающей волны в отраженную. Для рассмотрения этого процесса необходимо обобщить геометро-оптическое представление о падающей и отраженной волнах для неплоской границы<sup>6</sup>. Дифракционное поле  $U_N$ , соответствующее случаю, когда нормальная производная на границе тела обра-

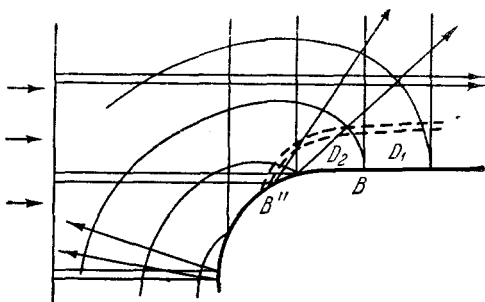


Рис. 12.

щается в нуль ( $\frac{\partial U_N}{\partial n}=0$ ), может быть однозначно представлено суммой падающей  $U_1$  и отраженной  $U_2$  волн, причем  $U_1 = 1/2 \times (U_N - U_D)$ ,  $U_2 = 1/2 (U_N + U_D)$ , где  $U_D$  — дифракционное поле, аналогичное  $U_N$ , но соответствующее краевому условию  $U_D=0$ . Если представить себе мысленно два экземпляра окружающей объект области пространства и считать, что в одном экземпляре

присутствует только падающая волна  $U_1$ , а в другом только отраженная  $U_2$ , то при указанном разбиении отраженная волна у гладкой границы тела оказывается непрерывным и гладким (с учетом обращения знака нормали) продолжением падающей. В пределе  $\lambda \rightarrow 0$   $U_1$  и  $U_2$  переходят в обычные падающую и отраженную волны геометрической оптики. При малых же, но конечных  $\lambda$  дифракционные явления, как и раньше, могут быть описаны путем рассмотрения диффузии лучевой амплитуды по геометро-оптическим фронтам, непрерывно переходящим из области падающей в область отраженной волны. На рис. 12, где падающей является плоская волна, видно, что лучевые трубки в отраженной волне, по мере приближения к точке  $B$ , во-первых, сравнительно резко расширяются, что приводит к быстрому ослаблению поля в них, во-вторых, все теснее прижимаются к границе тела, где имеет место связь отраженного поля с падающим. Возникающие благодаря этим двум факторам заметные различия лучевых амплитуд на близких участках объединенного фронта падающей и отраженной волн, вызывают поперечную диффузию.

Таким образом, в отличие от случая отражения плоской волны от плоской границы, или от плавно выпуклой при крутых углах падения, в данном случае имеет место двойной механизм передачи энергии из падающей волны в отраженную. К обычному рефлексионному механизму, свойственному геометрической оптике, здесь присоединяется еще процесс диффузионной передачи. На рис. 12 накладываются друг на друга зоны эффективной диффузии для падающей ( $D_1$ ) и отраженной ( $D_2$ ) волн обведены пунктиром. Из зоны  $D_1$  лучевая амплитуда диффундирует на границе тела в зону  $D_2$ . Благодаря этому падающая волна вблизи поверхности ослабевает по мере приближения к точке  $B$ , а это приводит одно-

временно и к уменьшению результирующего поля. За точкой  $B$ , где в соответствии с рисунком падающая волна скользит вдоль идеально отражающей плоскости ( $\frac{\partial U}{\partial n}=0$ ), рефлекссионная связь отраженной волны с падающей прекращается. Диффузионная же связь сохраняется и дальше, причем результирующее суммарное поле, постепенно устанавливаясь с удалением от точки  $B$ , в пределе совпадает с неискаженной падающей плоской волной.

Если бы вместо горизонтальной поверхности за точкой  $B$  имелось дальнейшее закругление, как на рис. 11, то возникли бы дифракционные явления, аналогичные вышеописанным, с образованием зон эффективной диффузии  $D_a$ ,  $D_b$ ,  $D_c$ .

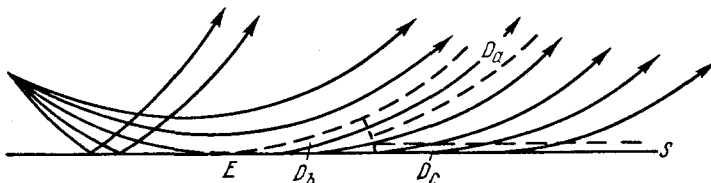


Рис. 13.

При дифракции на крае большого плавно-выпуклого тела, когда можно пренебречь встречным рассеянием из точки  $B$  (рис. 11), в зонах эффективной диффузии (кроме удаленной части зоны  $D_a$ ) и их окрестностях фронты геометрического приближения для падающей, отраженной и дифрагирующей в тень волн оказываются почти нормальными к поверхности тела и распространяющимися вдоль нее в одном направлении. Заменяя их точно нормальными фронтами и рассчитывая диффузию амплитуды по таким фронтам, В. А. Фок и М. А. Леонтович дали приближенную теорию дифракции радиоволн вокруг земного шара<sup>3</sup>.

При образовании тени в неоднородной среде возникают дифракционные явления, аналогичные описанным. При отражении, например, цилиндрической волны от плоскости (рис. 13) в среде с показателем преломления, изменяющимся с высотой, как  $n(z) = e^{z/r_0}$ , лучи загибаются вверх, и образуется область тени, куда поле проникает вследствие поперечной диффузии между лучевыми трубками. Здесь, так же как в случае, изображенном на рис. 11, образуются зоны эффективности диффузии  $D_a$ ,  $D_b$ ,  $D_c$ , причем для лучей, выходящих во френгоферову зону из  $D_c$ , поле ослабевает от луча к лучу в направлении  $s$  по тому же экспоненциальному закону, описываемому формулой (6) и распространение происходит с таким же замедлением. В данном случае аналогия с дифракцией волны в однородной среде вокруг цилиндрического препятствия с радиусом закругления  $r_0$  является точной, поскольку рассматриваемое волновое поле в неоднородной среде, заполняющей полупространство  $z > 0$ , точно преобразуется в поле в однородной среде ( $n=1$ ) в области вне цилиндра  $r > r_0$  простой заменой переменных  $s=r_0\varphi$ ;  $z=r_0 \ln(r/r_0)$ .

#### § 4. ДИФРАКЦИЯ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ СЛОВА

В общем случае рассмотрение дифракции в широком смысле слова совпадает с рассмотрением волнового поля, возбуждаемого некоторым источником в бесконечной или конечной области, заполненной однородной или неоднородной средой. Теоретическое исследование дифракции сводится к решению математической задачи о вынужденных колебаниях

в заданной области. Примером постановки задачи может быть случай скалярного волнового поля  $U(Q)e^{-i\omega t}$  ( $\omega$  — частота), возбуждаемый точечным источником, расположенным в точке  $Q = Q_0$  и колеблющимся во времени по гармоническому закону  $e^{-i\omega t}$  (рис. 14). В акустическом случае функция  $U(Q)$  соответствует звуковому давлению или потенциалу скорости. В электромагнитном случае, для двумерной задачи, та же функция может означать одну из компонент вектора Герца, либо напряженности электрического или магнитного поля.

Рассмотрим случай, когда поле в заданной произвольной трехмерной области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  подчиняется волновому уравнению

$$\Delta U + k^2 n^2(Q) u = -4\pi\delta(Q - Q_0), \quad (7)$$

где показатель преломления  $n(Q) > 0$  — непрерывная функция точки  $Q$  области  $G$ , причем  $n(Q_0) = 1$ ,  $k$  — постоянный параметр,  $\delta(Q - Q_0)$  — дельта-функция.

На границе  $\Gamma$  поле непрерывно и удовлетворяет одному из краевых условий:

$$U = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} - ikgU = 0 \quad (\operatorname{Re} g \geq 0), \quad (8)$$

( $\nu$  — внешняя нормаль).

Условие третьего вида в акустическом случае означает задание нормального импеданса  $1/g$  на границе. В электромагнитном случае оно называется краевым условием Леонтовича<sup>7</sup>. В особых случаях в краевые условия могут входить также производные более высокого порядка, например при дифракции звуковых волн на упругих пластинах<sup>8</sup>.

Условиями (7) и (8) задача еще не поставлена однозначно, поэтому необходимо добавить условие, исключающее, в случае системы без потерь, возможность возбуждения свободных колебаний, собственная частота которых совпадает с заданной частотой  $\omega$ , а собственные функции ортогональны

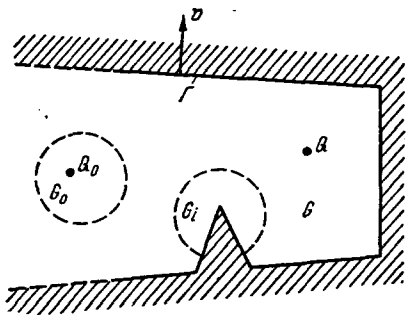


Рис. 14.

к функции распределения источника. Кроме того, необходимо условие, обеспечивающее отсутствие в бесконечности или на границе других источников вынужденных колебаний, помимо заданного.

Чтобы исключить из рассмотрения возможные собственные колебания, используется то, что искомое решение  $U(Q; k)$  является аналитической функцией  $k$ , как указано И. М. Гельфандом, только для вынужденных колебаний. Исключение источников в бесконечности достигается принципом погашаемости, заключающимся в том, что присутствие потерь в среде должно приводить к погашению, а не к усилению поля с удалением от заданного источника. Поскольку наличие положительной мнимой части у волнового числа  $k$  эквивалентно присутствию потерь в среде, принцип погашаемости в обычных случаях сводится к требованию ограниченности решения  $U(Q; k)$  при  $\operatorname{Im} k > 0$  во всей области  $G$ , кроме малой окрестности  $G_0$  источника. Однако, поскольку для некоторых областей ограниченное решение может не существовать<sup>10</sup> (из-за концентрирующих эффектов) при  $\operatorname{Im} k < |\operatorname{Re} k|$ , то в общем случае, следуя Фоку<sup>9</sup>, удобно налагать требование ограниченности для чисто мни-

мых значений  $k$ , т. е. использовать условие

$$|U(Q; k)| < \infty \quad (9)$$

в области  $G \rightarrow G_0$  при  $\arg k = \pi/2$ . Лишние источники на границе требованием ограниченности также исключаются. Таким образом, задача о вынужденных колебаниях<sup>10</sup> или дифракции в случае точечного источника сводится к нахождению аналитически зависящего от  $k$  решения уравнения (7), при краевых условиях (8), удовлетворяющего принципу погашаемости (9).

Функция  $U(Q; k)$ , представляющая вынужденное колебание, называется также резольвентой. В то же время  $U = K(Q, Q_0)$ , рассматриваемая как функция пары точек наблюдения и источника, является функцией Грина для данного уравнения, области и краевых условий.

В более общих случаях дифракции поле в особых местах границ (ребра, заострения) может обращаться в бесконечность. Тогда, для исключения лишних источников на границе, вместо условия ограниченности пользуются требованием интегрируемости квадрата модуля поля (ограниченность энергии) в окрестностях типа  $G_i$  (рис. 14). Последнее равносильно ограничению порядка возрастания поля с уменьшением расстояния  $d$  до особого элемента<sup>11</sup>. Так, например, в случае, если граница имеет острое ребро, то с приближением к нему поле должно возрастать не быстрее, чем  $d^{-1/2}$ .

Если все дифрагирующие объекты расположены на конечном расстоянии  $R < A$  от начала координат, причем источник расположен в области  $R > A$ , где среда однородна ( $n=1$ ), то удобно выделить из общего дифракционного поля  $U(Q)$  падающую волну  $U_0(Q)$ , которая в случае единичного источника, в соответствии с уравнением (7), является просто сферической волной  $U_0(Q) = e^{ikR_1}/R_1$ . Тогда условие погашаемости (9) может быть записано в виде

$$|U - U_0| < \infty \quad (10)$$

в области  $G$  при  $\text{Im } k > 0$ .

Такая формулировка задачи позволяет рассматривать дифракцию не только сферической падающей волны, но и произвольной, в частности, плоской волны, приходящей из бесконечности. Вместо условия погашаемости (10) можно пользоваться в данном случае условием излучения Зоммерфельда<sup>12</sup>:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[ \frac{\partial(U - U_0)}{\partial R} - ik(U - U_0) \right] = 0 \quad (11)$$

при  $k > 0$ .

В качестве примера точных решений приведем простейшее решение<sup>13</sup> задачи Зоммерфельда о дифракции плоской волны

$$U_0 = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (|\text{Re } \varphi_0| < \Phi)$$

в клиновидной области  $G (-\Phi < \varphi < \Phi, r > 0)$  для волнового уравнения  $\Delta U + k^2 U = 0$  при краевых условиях  $U(r, \pm \Phi) = 0$ . Интеграл

$$U = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-ikr \cos \alpha} s(\alpha + \varphi) d\alpha$$

представляет в области  $G$  общее решение волнового уравнения. Контур  $\gamma$  изображен на рис. 15. Условие погашаемости здесь сводится к тре-

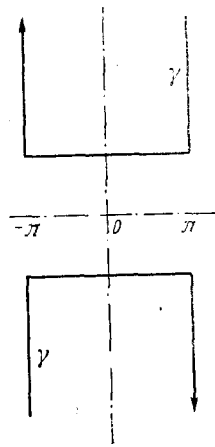


Рис. 15.

бованию регулярности функции  $s(\alpha) - (\alpha - \varphi_0)^{-1}$  в полосе  $|\operatorname{Re} \alpha| \leq \Phi$ . Подставляя интеграл в краевые условия, получаем два тождества:

$$\int_{\gamma} e^{-ikr \cos \alpha_s} (\alpha \pm \Phi) d\alpha \equiv 0 \quad (r > 0).$$

Отсюда следует<sup>14</sup>, что функции  $s(\alpha \pm \Phi)$  должны быть четными. Таким образом, получаются два простых функциональных уравнения:

$$s(\alpha \pm \Phi) - s(-\alpha \pm \Phi) = 0.$$

Решение этих уравнений, удовлетворяющее указанному требованию регулярности, имеет вид

$$s(\alpha) = \frac{\pi}{4\Phi} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4\Phi} (\alpha - \varphi_0) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\Phi} (\alpha + \varphi_0) \right].$$

Подставляя эту функцию в исходный интеграл, получаем искомое решение дифракционной задачи.

Вывод решения для краевых условий третьего рода

$$\frac{\partial U}{r \partial \varphi} \mp ikg_{\pm} U = 0 \quad (\varphi = \pm \Phi)$$

аналогичен<sup>15</sup>, только вышеуказанные функциональные уравнения получаются более сложными.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Леонтович, Изв. АН СССР, сер. физ. 8, 16—22 (1944).
2. В. А. Фок, ЖЭТФ, № 1, 693 (1945); Изв. АН СССР, сер. физ. 10, № 2, 171 (1946).
3. М. А. Леонтович и В. А. Фок, ЖЭТФ, № 557 (1946).
4. Г. Д. Малюжинец, Доклад на Всесоюзном совещании по вопросам электрических колебаний и волн при Горьковском университете (12 XII 1946 г.), Изв. Высш. учебн. завед., сер. радиофиз. (1960).
5. C. E. Schensted, Trans. IRE on Antennas and Propagation, № 3, 240 (1956).
6. Г. Д. Малюжинец, Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции, Автореферат докторской диссертации, Изд. АН СССР, М., 1950.
7. Леонтович М. А., «Новейшие исследования по распространению радиоволн», сборник второй, М.—Л., 1948.
8. Малюжинец Г. Д., ДАН 118, № 6 (1958); IV Всес. акустич. конференция, Рефераты докладов, изд. АН СССР, М., 1958.
9. Фок В. А. и Бурсиан В. Р., ЖРФХО (часть физическая) 58, 356 (1926), V. A. Fock, Annalen d. Phys. 17, 401 (1933).
10. Малюжинец Г. Д., ДАН 28, № 3 (1951).
11. J. Meixner, Zeits. Naturforsch. 7a, 506 (1948); A. W. Maue, Zeits. Naturforsch. 7a, 387 (1952); Zeits. angew. Math. u. Mech. 33, № 1—2 (1953).
12. A. Sommerfeld, Jahresberichte d. Deutsch. Math. Vereinigung 21, 309 (1912).
13. Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения матем. физики, гл. XX, ОНТИ, 1937.
14. Малюжинец Г. Д., ДАН 118, № 6 (1958).
15. Малюжинец Г. Д., ДАН 121, № 3 (1958).