1959 г. Октябрь Т. LXIX, вып. 2

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ВОЗМОЖНО ЛИ ПРЕДСКАЗАНИЕ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ *)

Макс Борн

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о том, как влияет малая неопределенность в начальных условиях на предвычисление процессов в классической механике, исследовался во многих работах **).

---

*) Max Born, Vorhersagbarkeit in der klassischen Mechanik, Zeitschrift für Physik 153, 372—388 (1958). Перевод С. Г. Суворова.

От переводчика. Вопрос о статистическом характере процессов, рассматриваемых классической механикой, обсуждался в научной литературе неоднократно. Ему посвящена интересная, но, к сожалению, неоконченная, монография Н. С. Крылова («Работы по обоснованию статистической физики», изд. АН СССР, 1950), некоторые соображения высказывал Д. И. Блохинцев и другие авторы.

Ряд работ за последние годы опубликовал проф. М. Борн. Они имеют специфическую направленность: в них ставится задача обосновать абсолютно-статистическую природу механических процессов, и на этом основании полностью исключить детерминизм классической механики, причем по установившейся в некоторых кругах на Западе традиции под детерминизмом понимается «лапласовский детерминизм», исключающий случайность. Статистичность вводится проф. Борном в форме предположения, что начальные данные в механической задаче выступают в виде гауссовского распределения, а не как абстрактные абсолютно точные величины, а затем рассматривается поведение начальной фазовой области со временем. Мы считали полезным ознакомить наших читателей с аналитическим рассмотрением поставленной автором задачи. По этой статье читатель может судить о том арсенале аргументов, который привлекается противниками детерминизма для разрешения вопроса о соотношении статистической и динамической закономерности. При разработке этой проблемы нельзя оставить без рассмотрения доводы проф. М. Борна.

Читатель несомненно обратит внимание на интересную попытку проф. Борна дать «физически осмысленное определение детерминированности», если система динамически стабильна. Возможность такой попытки показывает, однако, что детерминизм (даже лапласовского типа) — не пустая выдумка математиков, а лишь абстрактная и односторонняя форма отражения *объективных* тенденций. Как известно, марксизм не признает детерминизм, *исключающий случайность*; его скудоумность критиковал Энгельс еще 80 лет назад, а Маркс при рассмотрении экономических процессов в капиталистическом обществе по существу дал анализ соотношения динамических и статистических закономерностей. Рассмотрение такого рода детерминизма в качестве «догмы марксизма» покоится, к сожалению, на знакомстве с марксистской философией из вторых, притом необъективных, рук.

**) Профессор В. А. Фок обратил мое внимание на то, что его ученик Н. С. Крылов проводил подобные исследования с целью дать новое обоснование статистической механике. Более краткое сообщение по этому вопросу см. у Я. Френкеля,

смысле, а следовательно, предвычисляема ли она?

Я возвращаюсь здесь к нему снова прежде всего потому, что прежние рассуждения мои и Хутона очень запутаны, и простая и наглядная основа

В последующем будет показано, что классическая механика требуемого свойства не имеет, за исключением одного случая, а именно системы идеальных гармонических осцилляторов, которые (в силу слабого взаимодействия) мало применимы. Кроме того, поведение наиболее общей системы сводится к поведению наипростейшей (к линейному периодическому движению материальной точки). Поэтому маловероятно, чтобы можно было придумать другие законы движения, которые были бы детерминированы.

Но тем самым лишены почвы все попытки построить квантовую механику на основе гипотезы о скрытых координатах, подчиненных детерминистическим законам (как это, например, предлагает Ж. П. Вижье*)).

Хотя сам я подрастал в атмосфере идей предыдущего столетия, мне всегда казалось удивительным, что должна существовать такая область — механика — и образованная по ее образцу классическая физика, где все абсолютно точно и свободно от неопределенностей, которые обыкновенно управляют жизнью и мышлением человека. Поэтому в исключении мнимой точности, реализуемом современной физикой, я вижу прогресс в стремлении к единому мировоззрению**).

Защищаемую здесь точку зрения следовало бы проводить уже при обучении. По-моему мнению, соображения, подобные следующим, особенно соображения § 1, должны были бы найти место в элементарном учебном процессе, чтобы с самого начала не допускать появления детерминистического предубеждения.

1. СВОБОДНОЕ АПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Наиболее общий случай может быть сведен к наипростейшему, к свободному апериодическому движению материальной точки. Прежде всего оно должно быть представлено совершенно элементарно и наглядно, а затем аналитически с точки зрения статистической динамики.

Закон движения один и тот же для каждой как угодно искривленной траектории, по которой движется без трения материальная точка; таким образом траекторию можно считать прямолинейной, как при свободном движении.

Пусть s будет расстоянием материальной точки от некоторой фиксированной точки O, а v — ее скорость. Тогда

$$s = s_0 + vt, \qquad v = v_0. \tag{1}$$

Мы рассмотрим совокупность движений, представленных через плотность вероятности начального состояния $P(s_0,\ v_0,\ 0) = f(s_0,\ v_0)$. Так как число частиц сохраняется, то плотность вероятности ко времени t будет выражаться:

$$P(s,\ v,\ t) = f(s_0,\ v_0) = f(s - vt,\ v). \tag{2}$$

В частности, мы будем в последующем рассматривать плотность вероят-

*) См., например, статью Ж. П. Вижье на стр. 130 цитированной выше книги.

**) Попытка развить такую систематическую философию содержится в книге М. Поланьи. M. Polanyi «Personal Knowledge; towards a post-critical philosophy» (London, Routhledge and Kegan Paul, 1958). Поланьи отбросил идею о том, что дало бы полное объективное познание, и пытается обосновать субъективное суждение как необходимое и решающее. О классической механике он говорит (стр. 18), что она приближается к идеалу объективности, но что применение формул к опытным фактам снова включает элемент личной способности суждения, ибо точность начальных данных обусловлена личными свойствами наблюдателя. Я иду еще дальше. Речь идет не о психологической ошибке измерения, которая в конце концов допускает систематический учет, а о некоем логическом принципе: требование неограниченной точности логически бессмысленно, так как за такими-то большими десятичными знаками просто ничего невозможно знать.

ности как гауссовское нормальное распределение

$$f(s,\ v)=\frac{1}{2\pi\sigma\tau}e^{-\frac{1}{2}Q(s,\ v)}, \tag{3}$$

где

$$Q=\left(\frac{s-\bar{s}}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{v-\bar{v}}{\tau}\right)^2. \tag{4}$$

Величина f нормирована к единице, а $\bar{s}$ и $\bar{v}$ означают средние значения s и v, в то время как σ, τ суть рассеяние (средние квадратичные отклонения). Введем редуцированные переменные

$$x=\frac{s-\bar{s}-\bar{v}t}{\sigma},\quad y=\frac{v-\bar{v}}{\tau} \tag{5}$$

и вычислим плотность вероятности

$$P_1(x,\ y,\ t)=\sigma\tau P(s,\ v,\ t)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}Q_1(x,\ y,\ t)}, \tag{6}$$

где после введения сокращения

$$M=\frac{\tau}{\sigma} \tag{7}$$

Q_1 может быть записано тремя способами:

$$Q_1(x,\ y,\ t)=\left\{\begin{aligned}&(x-Mty)^2+y^2,\\&x^2-2Mtxy+(1+M^2t^2)\,y^2,\\&(1+M^2t^2)\left(y-\frac{Mt}{1+M^2t^2}x\right)^2+\frac{x^2}{1+M^2t^2}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Прежде всего опишем наглядно и качественно, как расплывается плотность вероятности. Согласно (1) в плоскости sv расположен ламинарный

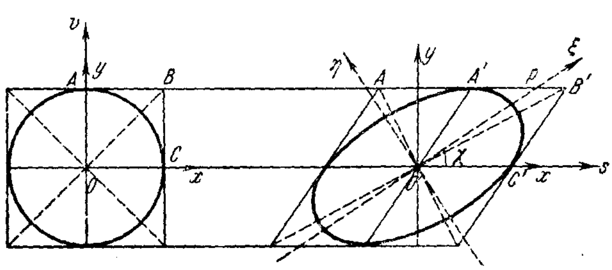

Рис. 1.

поток, параллельный оси s, в котором каждый участок испытывает ножницеобразную деформацию (рис. 1). Из квадрата образуется параллелограмм, стороны которого, параллельные оси x, неизменны ($AB = A'B'$, но $BC < B'C'$). Из окружности получается эллипс, главные оси которого мало отклоняются от диагонали параллелограмма. С возрастанием времени параллелограмм становится, очевидно, длиннее и тоньше, и то же можно сказать об эллипсе; при этом размер площади остается постоянным, что соответствует теореме Лиувилля в механике. Если t становится очень большим, то направление большой оси ξ приближается к направлению оси x, а направление малой оси η — к направлению оси y. Область более значительных вероятностей с возрастанием t все более растягивается в направлении ξ и все более суживается в направлении η.

Однако нельзя сказать без анализа, что для больших t это справедливо также и относительно направлений x и y, хотя обе координатные системы все более сближаются. Соотношения становятся несколько запутанными, они могут быть выяснены только путем анализа.

Прежде всего из первого и третьего способа написания Q непосредственно следует, что плотность вероятности для v (или y), независимого от s (или x), равна

$$P_{12}(y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(x, y, t)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} \tag{9a}$$

и наоборот, плотность вероятности для s (или x), независимой от v (или x), равна

$$P_{11}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(x, y, t)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+M^2t^2)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{1+M^2t^2}}. \tag{9b}$$

Обе суть гауссовские распределения, но в то время, как рассеяние для y постоянно, для x оно зависит от времени, а именно через $\sqrt{1+M^2t^2}$. Поэтому рассеяние для s равно

$$\sigma(t) = \sigma\sqrt{1+M^2t^2} = \sqrt{\sigma^2+\tau^2t^2}. \tag{10}$$

Преобразование к главным осям эллипса, представленного через $Q(x, y, t) = \text{const}$, напишется:

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi\cos\chi - \eta\sin\chi, \\ y &= \xi\sin\chi + \eta\cos\chi, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

из элементарного вычисления можно видеть, что угол χ между осями ξ и x выражается через

$$\operatorname{ctg} 2\chi = \frac{1}{2} Mt. \tag{12}$$

В силу (11) $Q_1(x, y, t)$ переходит в

$$Q_2(\xi, \eta, t) = \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right)^2. \tag{13}$$

При этом a^2, b^2 суть обратные величины корней векового уравнения Q_1, которое, принимая во внимание (12) и тождество $1 + 2\operatorname{ctg}^2 2\chi = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2\chi + \operatorname{ctg}^2\chi)$, можно записать в форме

$$\lambda^2 - \lambda(\operatorname{tg}^2\chi + \operatorname{ctg}^2\chi) + 1 = 0. \tag{14}$$

Это квадратное уравнение обратимо, корни его суть $\lambda_1 = \operatorname{tg}^2\chi$, $\lambda_2 = \operatorname{ctg}^2\chi$. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \operatorname{ctg}\chi, \\ b &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \operatorname{tg}\chi, \end{aligned} \quad ab = 1.\right\} \tag{15}$$

Q_2 соответствует плотность вероятности

$$P_2(\xi, \eta, t) = \frac{1}{2\pi ab} e^{-\frac{1}{2}Q_2(\xi, \eta, t)}. \tag{16}$$

Постоянство произведения ab выражает теорему Лиувилля, в силу чего величина площади деформированного эллипса $Q_2 = r^2$ (r — константа) независима от времени. То, что величина произведения как раз равна единице, следует из того, что для $t \to 0$ уравнение эллипса согласно (8) переходит в уравнение окружности $x^2 + y^2 = r^2$; точно так же имеем: $\pi(ra)(rb) = \pi r^2$, или $ab = 1$. Квадрат рассеяния для ξ равен

$$\overline{\xi^2} = \iint \xi^2 P_2(\xi, \eta, t)\, d\xi\, d\eta = a^2; \tag{17}$$

таким же образом получаем для рассеяния η и коэффициента корреляции:

$$\overline{\eta^2} = b, \quad \overline{\xi\eta} = 0. \tag{18}$$

Отсюда соответствующие величины x, y можно получать с помощью (11):

$$\left.\begin{aligned} \overline{x^2} &= a^2 \cos^2\chi + b^2 \sin^2\chi, \\ \overline{y^2} &= a^2 \sin^2\chi + b^2 \cos^2\chi, \\ \overline{xy} &= (a^2 - b^2)\cos\chi \sin\chi. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Если вставить здесь выражение (15) для a и b, то получим элементарное уравнение:

$$\left.\begin{aligned} \overline{x^2} &= 1 + 4\,\mathrm{ctg}^2\, 2\chi = 1 + M^2 t^2 = \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma}\right)^2, \\ \overline{y^2} &= 1, \\ \overline{xy} &= 2\,\mathrm{ctg}^2\,\chi = Mt. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Первые два значения согласуются с непосредственно вычисленными [формула (9a) и (9b)]. Третье показывает, что распределения x и y не независимы, и дает меру для их корреляции; она, естественно, уменьшается для $t \to 0$ и возрастает при $t \to \infty$.

Из (11) и (12) вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } t \to 0: \quad \chi \to \frac{\pi}{4}, \quad x \to \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad y \to \frac{1}{2}(\xi + \eta); \\ &\text{для } t \to \infty: \quad \chi \to 0, \quad x \to \xi, \quad y \to \eta. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Таким образом, оси $\xi\eta$, как это ясно из рис. 1, сначала являются диагоналями квадрата $OABC$, ориентированного по xy, и с возрастанием t приближаются к осям xy.

Несмотря на это, компоненты движения xy и $\xi\eta$ ведут себя совершенно различно; хотя как рассеяние x, так и рассеяние ξ возрастают с возрастанием t до бесконечности, но рассеяние y остается постоянным, между тем как рассеяние η, обратно пропорциональное рассеянию ξ, стремится к нулю. Основа для этого естественна, она состоит в том, что $\xi\eta$ — компоненты независимы, а xy — компоненты не независимы.

Из этого должны последовать рассуждения, которые предваряют выводы следующего раздела. В нем будет показано, что совершенно те же рассуждения имеют место для периодической системы, а именно не только для одной степени свободы, но и для любого их числа. Тогда место координаты s и скорости v заступают пары переменных — угол φ и действие I, — которые Бор применил в своей квазиклассической квантовой теории. И вот, если рассеяние угловой переменной становится большим сравнительно с ее периодом, то состояние относительно этой переменной становится совершенно неопределенным.

Если мы теперь вспомним теорию Бора, то увидим, что ее главной чертой является введение более определенных стационарных состояний, устанавливаемых дискретными значениями переменной действия ($I = hn$, $n = 1, 2, \ldots$).

Но как раз это есть соотношение классической (гауссовской) совокупности траекторий для больших t, если она описывается переменными ξ, η; состояние по ξ будет совершенно неопределенным, когда оно по η совершенно точно, и, кроме того, ξ, η не следует отличать от x, y, причем x означает отклонение угловой переменной от ее среднего значения, а y — отклонение переменной действия от ее среднего значения.

Этот результат освещает борновский метод квантования с некоторой новой стороны. Очевидно, эта новая сторона относится не к отдельной траектории, а к совокупности траекторий в стационарном конечном состоянии $t \to \infty$.

Конечно, требование, что для значений I разрешены только те, которые являются кратными целому числу h, тем самым еще никак не объяснено. Это подлежит компетенции квантовой механики.

2. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ, СВОБОДНОЕ ОТ ДЕЙСТВИЯ СИЛ

Пусть частица движется свободно (без трения) по замкнутой линии длины l. Тогда имеют значение только периодические функции от s с периодом l. Но гуассовское распределение (3) не периодично; следует заменить его через подобную периодическую функцию. Наиболее просто выбрать

$$F(s, v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(s + kl, v), \tag{22}$$

где f является функцией, определенной из уравнения (3). Тогда плотность вероятности к моменту t

$$P(s, v, t) = F(s - vt, v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(s - vt + kl, v). \tag{23}$$

Легко видеть, что если $f(s, v)$ в области значений $-\infty \leq s \leq \infty$, $-\infty \leq v \leq \infty$ нормирована, то и $F(s, v)$ и отсюда $P(s, v, t)$ для значений $0 \leq s \leq l$, $-\infty \leq v \leq \infty$ также нормированы. А именно имеет место общий *закон*:

если $G(s)$ периодична

$$G(s + l) = G(s), \tag{24}$$

то

$$\int_0^l G(s) F(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} G(s) f(s)\, ds. \tag{25}$$

В самом деле,

$$\int_0^l G(s) F(s)\, ds = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^l G(s) f(s + kl)\, ds =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kl}^{(k+1)l} G(s - kl) f(s)\, ds = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kl}^{(k+1)l} G(s) f(s)\, ds$$

и выполнение суммирования дает (25).

В частности, для $G = 1$ имеет место

$$\int_0^l F(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, ds, \tag{26}$$

что подтверждает утверждение о нормировании F.

Далее следует, что оценка ожидания любой физической, в том числе и периодической относительно s величины $G(s, v, t)$, вычисленной по периоду l с $P(s, v, t)=F(s-vt, v)$, идентична с оценкой ожидания величины G, вычисленной по всей области значений $-\infty \leq s \leq \infty$ с $f(s-vt, v)$.

В силу этого все полученные в предыдущем разделе результаты можно просто перенести на случай периодического движения. Только все точки, для s-значений которых модули l совпадают (т. е. разность которых кратна l), следует рассматривать как идентичные.

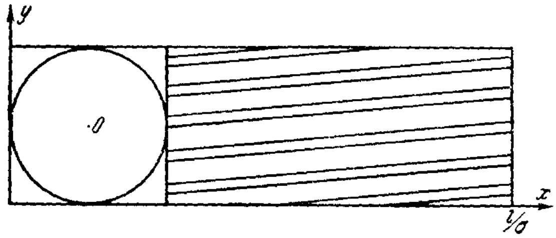

Рис. 2.

Естественно принять, что начальное рассеяние координат

$$\sigma \ll l. \tag{27}$$

Тогда период по x $l/\sigma \gg 1$.

А вот если $\sigma(t) \gg l$, то никакое предсказание положения больше невозможно. Согласно (10) это есть случай, когда $\sigma(t) \sim \sigma M t = \tau t \gg l$, или когда

$$t \gg t_c, \tag{28}$$

где $t_c = \frac{l}{\sigma M} = \frac{l}{\tau}$. Если точность значения скорости велика, т. е. τ мало, то критический интервал времени t_c велик. На рис. 2 процесс пояснен геометрически. Параллелограмм, показанный на рис. 1, здесь вытянут в длинную тонкую ленту, которая простирается на многие периоды l/σ; отрезки этой ленты в более высоких периодах, в первом периоде смешаны. То же самое имеет место для эллипсов, вписанных в параллелограммы. Таким образом, из первоначального круга возникает ряд параллельных полос, которые с возрастанием t равномерно покрывают всю область первого периода.

К этому случаю относится, в частности, и свободный от действия сил ротатор, если s, v заменяют через ϑ, ω, где ϑ — угол вращения, ω — угловая скорость; тогда период равен 2π.

Но и обсуждавшийся ранее случай*) одной частицы, которая движется взад-вперед по прямой между упруго отражающими концами у $s=0$ и $s=l$, может быть подытожен при таком рассмотрении. Необходимо только функцию $F(s, v)$, данную в (22), заменить через

$$F(s, v)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{f(2kl+x-vt, v)+f(2kl-x-vt, -v)\}, \tag{29}$$

а зигзагообразные движения — движениями по неограниченной прямой, происходящими под влиянием двух противоположных и равных скоростей, причем все точки вне интервала $0 \leq s \leq l$ должны быть засунуты внутрь путем редукции модуля $2l$.

*) См. подстрочное примечание 1 на стр. 173.

3. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Общий случай движения с одной степенью свободы под действием консервативных сил может быть сведен к примеру, рассмотренному в предыдущем разделе.

Пусть q, p суть координата и момент, а $H(q, p)$ — гамильтонова функция. Задача разрешается, если посредством канонического преобразования $(q, p) \longrightarrow (\varphi, I)$ возможно ввести новые переменные таким образом, что $H(q, p) \longrightarrow E(I)$, независимое от φ. Если движение, оставаясь в конечной области, является периодичным и имеет место

$$I = \oint p\, dq \tag{30}$$

за один период, то I называют переменной действия, а φ — угловой переменной. Обычно φ нормируется так, что период равен единице. Движение представляется в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \nu(I)\, t, \qquad I = I_0, \tag{31}$$

причем

$$\nu(I) = \frac{dE}{dI} \tag{32}$$

есть функция от I, кроме случая линейного осциллятора частоты ν_0, где $E = \nu_0 I$. Если мы отвлечемся от этого исключения, то можем предыдущие результаты перенести на общий случай, ибо I — интервал, в котором плотность вероятности $P(\varphi, I, t)$ вначале имеет заметное значение, является малым; если теперь применить разложение в ряд:

$$\left.\begin{aligned} E(I) &= \overline{E} + \overline{\nu}(I - \overline{I}) + \frac{1}{2}\mu(I - \overline{I})^2 + \ldots, \\ \nu(I) &= \overline{\nu} + \mu(I - \overline{I}) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

и учесть только записанные члены, то все выглядит так же, как и в случае, свободном от сил; но результаты, выведенные для него, показывают, что рассеяние для I (соответственно v) не увеличилось. Поэтому это приближение допустимо для всех t.

В частности, для плотности вероятности имеем

$$P(\varphi, I, t) = \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\, e^{-\frac{1}{2}Q(\varphi, I, t)}, \tag{34}$$

где

$$Q(\varphi, I, t) = \left(\frac{\varphi - \overline{\varphi} - \nu(I)\, t}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{I - \overline{I}}{\tau}\right)^2. \tag{35}$$

Если теперь заменить

$$x = \frac{\varphi - \overline{\varphi} - \overline{\nu} t}{\sigma}, \quad y = \frac{I - \overline{I}}{\tau}, \tag{36}$$

то снова получим формулу (8) для Q_1, причем

$$M = \frac{\tau}{\sigma}\,\mu = \frac{\tau}{\sigma}\left(\frac{d^2E}{dI^2}\right)_{\overline{I}}. \tag{37}$$

Критическая эпоха, за которой больше невозможно никакое предсказание, имеет теперь значение

$$t_c = \frac{1}{M\sigma} = \frac{1}{\tau\mu}. \tag{38}$$

Все остальные соображения остаются неизменными. Для линейного осциллятора и только для него согласно (37) $M = 0$, $\mu = 0$; следовательно, $t_c = \infty$, то есть первоначальное распределение сохраняется.

4. СИСТЕМА С n СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Остается еще разобрать случай консервативной системы с n степенями свободы. Пусть q_k, $p_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ будут обобщенными координатами и моментами, $H(q, p)$ — гамильтоновой функцией. Предположим, что можно ввести новые канонические переменные φ_k, I_k, для которых H переходит в функцию только от одного I:

$$H(q, p) \to E(I). \tag{39}$$

Движения, при которых p, q периодичны относительно φ, называются многократно-периодическими; тогда φ и I обозначают в виде угловой переменной и переменной действия. Периоды относительно φ_k, как обычно, примем равными единице.

На том же основании, как и в предыдущем разделе, достаточно в разложении в ряд

$$\left.\begin{aligned} E(I) &= \overline{E} + \sum_k \overline{\nu}_k \, (I - \overline{I}) + \frac{1}{2} \sum_{kl} \mu_{kl} (I_k - \overline{I}_k)(I_l - \overline{I}_l) + \ldots, \\ \nu_k(I) &= \overline{\nu}_k + \sum_l \mu_{kl} (I_l - \overline{I}_l) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

принять во внимание выписанные члены.

Канонические уравнения движения для φ, I гласят:

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \nu_k, \quad \frac{dI_k}{dt} = 0 \tag{41}$$

и имеют решение:

$$\varphi_k = \varphi_k^\circ + \nu_k t, \quad I_k = I_k^\circ. \tag{42}$$

Плотность вероятности в qp-пространстве $P(q, p, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial P}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial P}{\partial q_k} \right). \tag{43}$$

В φI-пространстве оно выглядит так:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_k \nu_k \frac{\partial P}{\partial \varphi_k}. \tag{44}$$

Его решение, удовлетворяющее начальному условию

$$P(\varphi, I, 0) = f(\varphi, I), \tag{45}$$

равно

$$P(\varphi, I, t) = f(\varphi_1 - \nu_1 t, \ \varphi_2 - \nu_2 t, \ \ldots; \ I_1, I_2, \ldots). \tag{46}$$

Выберем для f нормированную гаусс-функцию

$$f(\varphi, I) = \frac{1}{(2\pi)^n \sigma_1 \ldots \sigma_n \tau_1 \ldots \tau_n} e^{-\frac{1}{2} Q(\varphi, I)}, \tag{47}$$

где

$$Q(\varphi, I) = \sum_k \left\{ \left(\frac{\varphi_k - \overline{\varphi}_k}{\sigma_k} \right)^2 + \left(\frac{I_k - \overline{I}_k}{\tau_k} \right)^2 \right\}; \tag{48}$$

тогда $\overline{\varphi}_k$, σ_k суть среднее значение и рассеяние величины φ_k; а $\overline{I}_k$, τ_k — для величины I_k.

Если ввести безразмерные переменные

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{\sigma_k}(\varphi_k - \overline{\varphi}_k - \nu_k t), \\ y_k &= \frac{1}{\tau_k}(I_k - \overline{I}_k), \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

то решение (46) переходит в

$$P_1(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{1}{2} Q_1(x, y, t)}, \tag{50}$$

где

$$Q_1(x, y, t) = \sum_k \left\{ \left(x_k - t \sum_l M_{kl} y_l \right)^2 + y_k^2 \right\}, \tag{51}$$

$$M_{kl} = M_{lk} = \mu_{kl} \left(\frac{\tau_k}{\sigma_k} + \frac{\tau_l}{\sigma_l} \right). \tag{52}$$

Теперь используем матричный способ написания. Будем рассматривать x_k и y_k в качестве элементов одностолбцовых матриц x и y; соответственно $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ — как транспонированные однострочные матрицы. M — симметричная матрица с элементами M_{kl}, $(\tilde{M} = M)$. Тогда

$$\begin{aligned} Q_1 &= (\tilde{x} - t\tilde{y}M)(x - tMy) + \tilde{y}y \\ &= \tilde{x}x - 2t\tilde{x}My + \tilde{y}(1 + t^2M^2)y, \end{aligned} \tag{53}$$

причем следует учесть, что $\tilde{x}My$ и $\tilde{y}Mx$ оба способа написания представляют собой билинейные формы $\sum_{kl} M_{kl} x_k y_l$.

Пусть теперь x_k и y_k подвергнутся ортогональному преобразованию

$$x = Ux', \quad y = Uy'; \tag{54}$$

а именно U должно быть такой ортогональной матрицей, которая приводит симметричную матрицу M к диагональной форме

$$\tilde{U}U = U\tilde{U} = 1, \tag{55}$$

$$\tilde{U}MU = m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & m_n \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Тогда U преобразует каждую степень матрицы M, и поэтому преобразует также каждый полином M к диагональной форме с собственными значениями, которые представляют соответствующий полином m_j:

$$\tilde{U} f(M) U = f(m). \tag{57}$$

Тогда Q_1 посредством преобразования (55) переходит в

$$Q_2 = \tilde{x}'x' - 2t\tilde{x}'my' + \tilde{y}'(1 + t^2m^2)y', \tag{58}$$

или

$$Q_2 = \sum_j \{x_j'^2 - 2tm_j x_j' y_j' + (1 + t^2 m_j^2) y_j'^2\}. \tag{59}$$

В скобки можно вписать одно из двух других выражений, приведенных в (8).

Тем самым плотность вероятности может быть разложена на произведение, в котором каждый фактор имеет форму, принятую в предыдущем разделе. Таким образом все предыдущие выводы сохраняются, следует только заменить редуцированные переменные вполне определенными линейными комбинациями, которые представляют собой вращение в x-пространстве и такое же вращение в y-пространстве.

Рассеяния x', y' могли бы быть заменены первым членом в разложении по m, t, если $t \gg \frac{1}{m_j}$.

Периоды системы относительно φ_k равны единице; относительно x_k они равны $\frac{1}{\sigma_k}$. Если положим $\sigma^2 = \sum_k \sigma_k^2$, то σ можно рассматривать как меру расплывания системы; а так как $\sum_k x_k^2 = \sum_k x_2'^2$, то σ является также расплыванием и в x'-пространстве.

Если m есть наименьшее среди чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и полагают

$$t_c = \frac{1}{m\sigma}, \tag{60}$$

то для $t \gg t_c$ наверное наступает предельное состояние, в котором все I_k практически точны и равны своим средним значениям I_k, между тем как φ_k остаются совершенно неопределенными (в смысле, разъясненном в § 1). Выражение (60) есть правомерное обобщение (38) на многие степени свободы.

Предельное состояние точно соответствует стационарному состоянию квантовой теории Бора, которое описывается точным значением I (кратным целому числу h) между тем как это вовсе не имеет места в отношении φ.

Единственный исключительный случай — система осцилляторов. В этом случае уменьшается M и все m; поэтому t_c равно ∞, и любое начальное состояние плотности вероятности сохраняется неизменным. Все чисто полевые теории без связей эквивалентны системам осцилляторов; поэтому они относятся к этому исключению. Но если вводят (нелинейный) связующий член между различного рода полями, то здесь должно появиться расплывание угловой переменной и обострение переменной действия. Это должно быть исследовано более подробно.

5. ПРИМЕР: ТЯЖЕЛЫЙ МАЯТНИК

Чтобы на конкретном примере оценить величину критического времени, мы рассмотрим тяжелый маятник с гамильтоновой функцией:

$$\begin{aligned} H &= \frac{hp_\vartheta^2}{2A} + mgl(1-\cos\vartheta) \\ &= \frac{hp_\vartheta^2}{2A} + \frac{1}{2}mgl\left(\vartheta^2 - \frac{1}{12}\vartheta^4 + \ldots\right) \end{aligned} \tag{61}$$

(m — масса, l — длина маятника, A — момент инерции). Это ангармонический осциллятор. Если мы напишем гамильтонову функцию в нормированном виде

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + (2\pi\nu_0)^2 q^2) + aq^3 + bq^4 + \ldots \tag{62}$$

то (61) переходит в (62) через подстановку

$$\left.\begin{aligned} &q = \sqrt{A}\vartheta, \quad p = \frac{p_\vartheta}{\sqrt{A}}, \\ &\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{A}}, \quad a = 0, \quad b = -\frac{\pi^2\nu_0^2}{6A}. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Пересчет H на переменную действия вообще дает *):

$$H \to E = \nu_0 J + \frac{1}{2}\mu J^2 + \ldots, \tag{64}$$

где

$$\mu = \frac{15}{2}\frac{a^2}{(2\pi)^6\nu_0^4} + \frac{3b}{(2\pi)^4\nu_0^2}. \tag{65}$$

Если значение a и b заменяют здесь из (63), то получают

$$\mu = -\frac{1}{32\pi^2 A}. \tag{66}$$

Пусть $T_0 = \nu_0^{-1}$ — период гармонического колебания; тогда

$$\frac{t_c}{T_0} = \frac{\nu_0}{\mu\tau} = \frac{32\pi^2 A\nu_0}{\tau}. \tag{67}$$

Чтобы сделать эту формулу наглядной, рассмотрим случай, когда маятник выведен ударом из положения покоя до максимального отклонения ϑ_m, причем последнее достигается с относительным рассеянием $\gamma = \frac{\delta\vartheta_m}{\vartheta_m}$. Для $\vartheta = \vartheta_m$ будет $p = 0$, $q_m = \sqrt{A}\vartheta_m$, следовательно,

$$E = H \sim \frac{1}{2}(2\pi\nu_0)^2 q_m^2 = \frac{1}{2}(2\pi\nu_0)^2 A\vartheta_m^2. \tag{68}$$

Теперь

$$\tau = \sqrt{\overline{(J-\bar{J})^2}} = \delta J \sim \frac{dE}{\nu_0} = (2\pi)^2 A\nu_0\vartheta_m\delta\vartheta_m \tag{69}$$

и согласно (67)

$$\frac{t_c}{T_0} = \frac{8}{\vartheta_m^2\gamma}. \tag{70}$$

Если начальное отклонение составляет примерно $1/20$ окружности $\vartheta_m = \frac{\pi}{10} \sim \frac{1}{3}$, $\vartheta_m^2 \sim \frac{1}{9}$, то $\frac{t_c}{T_0} \sim \frac{72}{\gamma}$. Если точность ϑ_m примерно равна

*) См., например: M. Born, Atomtheorie des festen Zustandes, S. 671—674, Teubner 1923.

одной тысячной, т. е. $\gamma=\frac{1}{1000}$, то $\frac{t_c}{T_0}=72\,000$; следовательно, для $T_0=1$ сек., $t_c \sim 20$ час. При уменьшении начальной амплитуды это время возрастает в квадрате. Практически эта граница определенности не принимается во внимание, так как другие влияния (трение, сопротивление воздуха и т. д.) перекрывают его еще раньше. Часы не сбиваются в соответствии с этим примером, так как часовой маятник не свободен, а колеблется с подводом к нему энергии.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предыдущие соображения, конечно, никоим образом не должны стирать фундаментальное различие между классической и квантовой механикой. Они должны только показать, что философская идея детерминированности в классической механике покоится на физически бессмысленных предположениях и что поэтому отсутствие детерминированности в квантовой механике не может быть использовано как возражение против нее. Напротив, было бы разумно и классическую механику с самого начала формулировать статистически. Тогда была бы получена и дальнейшая польза, состоящая прежде всего в том, что вовсе не могли бы подниматься особые возражения против квантовой механики; речь идет о возражениях, касающихся переплетения объективной и субъективной точки зрения в теории. А именно, если и в классической теории каждое высказывание является вероятностным утверждением, то оно, как и в квантовой теории, представляет собой сочетание объективных данных (начального состояния) с субъективными чертами (ожидание конечного состояния). Именно к этому обороту приводят многие побуждения; прежде всего так называемая «редукция волновой функции» благодаря наблюдению: в квантовой механике вычисляют распространение волновой функции и находят таким образом вероятностное распределение для атомарного явления; и вот коль скоро это явление (например, появление электрона в определенном месте) подвергается наблюдению, вся волновая функция становится ничтожно малой, она, так сказать, исчезает, а новая должна вычисляться исходя из новых данных. Эйнштейн, Шредингер и другие истолковали это как «дальнодействие с бесконечной скоростью распространения» наблюдаемого действия и отвергли как бессмысленное. То же самое выступало уже и в классической механике, коль скоро она формулировалась на языке статистики, а в качестве величины, подлежащей определению, рассматривалась плотность вероятности. Тогда и здесь цель теории состоит в описании не реальности, а потенциальности (по терминологии Аристотеля), и каждый акт наблюдения до основания меняет ситуацию. Действительные особенности квантовой механики состоят не в этом, а в том, что первичная переменная не есть сама плотность вероятности, а волновая функция, из которой плотность вероятности получается через возведение ее в квадрат. Сюда же прежде всего относится гейзенберговское соотношение неопределенностей, которое ограничивает рассеяние сопряженных пар переменных, затем все интерференционные эффекты при суперпозиции волновых полей. Это те эффекты, которые определяются через планковскую константу. Их наличие приводит к статистической трактовке, в то время как в классической теории она зависит от того, считается ли понятие бесконечной точности физически осмысленным. Я стою за то, что этого сделать нельзя.