1959 г. Январь *Т. LXVII, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

АТМОСФЕРНАЯ ДИФФУЗИЯ *)

А. С. Монин

В теории атмосферной диффузии изучается распространение примесей в воздухе. Одной из важнейших практических проблем, стоящих перед теорией атмосферной диффузии, является вопрос о загрязнении воздуха промышленными предприятиями и транспортом, в первую очередь о загрязнении воздуха в городах. При отсутствии атмосферной диффузии загрязнения накапливались бы в нижнем слое воздуха, что затруднило бы нормальное существование людей. Не менее важной является проблема распространения в воздухе радиоактивных веществ, которая в последние годы тревожит все человечество. Благодаря атмосферной диффузии до нас доходит некоторая доля радиоактивности, образующейся при атомных взрывах. С явлением атмосферной диффузии мы сталкиваемся и в сельском хозяйстве, например, при опылении растений химическими веществами для борьбы с вредителями или при искусственных дымопусках для защиты растений от заморозков. Благодаря атмосферной диффузии в воздухе распространяются морская соль, вулканическая пыль, бактерии и вирусы, пыльца и семена растений, воздушные массы над морем насыщаются влагой, над пустынями — пылью.

Вследствие сложности и комплексности изучаемых явлений развитие теории атмосферной диффузии требует объединенных усилий специалистов по ряду отраслей науки. В первую очередь это относится к специалистам по гидромеханике и по геофизике, на долю которых падает наибольшее число вопросов, возникающих при изучении атмосферной диффузии.

1. Факторы, влияющие на атмосферную диффузию. Атмосферная диффузия является сложным явлением и зависит от многих факторов. Во-первых, нужно знать, как загрязнения поступают в воздух, т. е. каков характер источника загрязнения. Загрязнения могут попадать в воздух от промышленных предприятий, с поверхности Земли или от искусственных источников. Источники могут быть мгновенными или непрерывно действующими с постоянной или меняющейся со временем производительностью. Источники могут быть точечными (наземными или приподнятыми) или же распределенными по линии, поверхности или объему. Важно также знать, приобретают ли частицы загрязнения определенную скорость при выходе из источника (например, скорость выхлопа газов из дымовой трубы) и какова температура загрязненного воздуха при выходе из источника (нагретый по сравнению с окружающим воздухом газ будет подниматься вверх, охлажденный — опускаться вниз).

*) Расширенный текст доклада, зачитанного в Оксфорде (Англия) в августе 1958 г. на Международном симпозиуме по атмосферной диффузии и загрязнению воздуха.

Во-вторых, нужно знать закономерности распространения загрязнений в воздухе при различных метеорологических условиях. Загрязнения переносятся воздушными течениями и диффундируют в воздухе благодаря действию турбулентности. Описание этих процессов относится к области гидромеханики.

Для описания переноса загрязнений ветром нужно знать кинематику воздушных течений. В частности, для расчетов распространения загрязнений в приземном слое воздуха нужно иметь сведения о вертикальном профиле ветра при различных метеорологических условиях (в первую очередь при различном характере термической стратификации воздуха). Для расчета среднего загрязнения вокруг данного источника за большой промежуток времени нужно располагать статистическими данными о направлении и силе ветра в данном районе. Так, группируя значения силы ветра по интервалам с центрами u_i и значения азимута направления ветра по интервалам с центрами A_j и зная частоты p_{ij} осуществления соответствующих пар значений силы и направления ветра, можно подсчитать среднее распределение загрязнения по формуле

$$\bar{s}(x, y, z) = \sum_{i, j} p_{ij} s(x, y, z \mid u_i, A_j), \tag{1}$$

где $s(x, y, z \mid u_i, A_j)$ — рассчитанное распределение загрязнения при ветре силы u_i и направления A_j.

Для расчета распространения загрязнения от мгновенного источника в масштабах земного шара нужно знать кинематику воздушных течений, обусловленных синоптическими процессами, на большой части земного шара за достаточно длинный период времени (измеряемый неделями).

Кроме регулярных макроскопических течений, в воздухе имеются хаотические гидродинамические движения различных масштабов, вплоть до очень малых, порядка сантиметра, называемые турбулентностью. Создаваемое турбулентностью перемешивание воздуха является причиной турбулентной диффузии загрязнений. Для описания турбулентной диффузии нужно знать некоторые статистические характеристики турбулентного поля скорости. Эти характеристики, вообще говоря, оказываются зависящими от метеорологических условий, главным образом, от поля осредненной скорости ветра и от термической стратификации воздуха. Например, при устойчивой термической стратификации воздуха турбулентная диффузия происходит медленно, и загрязнения переносятся ветром, почти не рассеиваясь. В условиях конвекции, наоборот, турбулентная диффузия происходит интенсивно и приводит к быстрому рассеянию загрязнений.

Третья группа факторов, влияющих на атмосферную диффузию, относится к свойствам самого загрязнения. В первую очередь нужно знать, как влияет на загрязнение сила тяжести. Например, газы тяжелее воздуха, и достаточно крупные частицы будут оседать, причем скорость оседания частиц зависит от их размеров, удельного веса и формы. Нужно учитывать возможность химических и радиоактивных превращений загрязнения, а также таких физических превращений, как коагуляция, сублимация и адсорбция на аэрозолях. В частности, может быть существенным взаимодействие примеси с атмосферной влагой — водяным паром, каплями воды в облаках и туманах, частицами осадков. Так, дожди могут очищать воздух от загрязнений, приводя к их выпадению на поверхность Земли.

Четвертая группа факторов относится к условиям взаимодействия загрязнения с поверхностью земли (или воды). Загрязнение может либо задерживаться этой поверхностью, как бы «прилипая» к ней или поглощаясь ею (по отношению к большинству загрязнений таким свойством обладает поверхность воды), либо «отражаться» от нее и возвращаться обратно в воздух. Возможны и промежуточные случаи частичного поглощения и частичного отражения или же «прилипания» на некоторое (случайное) время, после которого загрязнение поднимается обратно в воздух. При математической формулировке краевых условий для загрязнения на поверхности земли нужно учитывать степень ее шероховатости и ее способность поглощать загрязнение данного вида. Очевидные осложнения будут создаваться неоднородностью земной поверхности — особенностями рельефа, наличием строений, деревьев и т. п.

Исследования по теории атмосферной диффузии посвящаются как разработке стандартной методики расчетов распространения загрязнений в воздухе при идеализированных средних условиях (обычно над плоской однородной местностью при стационарных атмосферных условиях), так и изучению влияния на атмосферную диффузию того или иного из перечисленных выше факторов (например, влияния термической стратификации воздуха).

Не ставя перед собой задачи дать сколько-нибудь исчерпывающий обзор литературы по теории атмосферной диффузии, мы упомянем имена лишь немногих авторов. Отметим, что большой вклад в теорию атмосферной диффузии сделан английскими учеными Л. Ричардсоном, Г. Тейлором, О. Сэттоном и Г. Бэтчелором.

2. Специфическая особенность турбулентной диффузии. Особенностью турбулентной диффузии является многомасштабность турбулентных движений, создающих перемешивание воздуха. Характер турбулентной диффузии определяется тем, как распределена энергия между турбулентными движениями различных масштабов. Наибольший из масштабов движений, на долю которых приходится почти вся энергия потока, можно назвать масштабом турбулентности l. Значения скорости движения воздуха в точках, расстояние между которыми не превосходит l, оказываются статистически связанными друг с другом. Поэтому частицы или порции загрязнения, расстояние между которыми не превосходит l, будут двигаться не независимо друг от друга. Это, вообще говоря, нарушает аналогию между турбулентной и молекулярной диффузией.

В ряде случаев масштаб турбулентности l оказывается малым по сравнению с размерами области, в которой фактически происходит диффузия (например, по сравнению с диаметром L облака загрязнения). В этих случаях можно говорить, что диффузия происходит в основном за счет мелкомасштабной турбулентности. При этом частицы загрязнения уже на относительно небольших (по сравнению с L) расстояниях будут двигаться независимо друг от друга. В подобных случаях, по-видимому, оправдано описание турбулентной диффузии по аналогии с молекулярной диффузией. Такой подход обычно применяется для описания турбулентной диффузии по вертикали в приземном слое воздуха.

3. Аналогия между диффузией в поле мелкомасштабной турбулентности и молекулярной диффузией. Хаотическое молекулярное движение можно охарактеризовать средней скоростью v_m движения молекул (зависящей от температуры газа) и длиной свободного пробега молекул l_m. Через эти величины может быть определен коэффициент молекулярной диффузии $k_m \sim v_m l_m$, понимаемый как коэффициент пропорциональности между диффузионным потоком S данной субстанции и градиентом ее концентрации ∇s: $S = -\rho k_m \nabla s$ (ρ — плотность газа). Аналогично, хаотическое турбулентное движение можно охарактеризовать средней величиной v турбулентных флуктуаций скорости (которая служит мерой интенсивности турбулентности) и масштабом турбулентнос
(Л. Прандтль[1] в качестве l вводил «путь перемешивания» — величину,

аналогичную длине свободного пробега молекул*)). Затем может быть введен коэффициент турбулентной диффузии $k \sim vl$, понимаемый как коэффициент пропорциональности между средним турбулентным потоком данной субстанции $S = \overline{\rho s' u'}$ и градиентом ее осредненной концентрации ∇s:

$$S = -\rho k \nabla \overline{s} \tag{2}$$

(черточка означает осреднение, штрих — отклонение от среднего значения, u — поле скорости). Допущение о пропорциональности между S и ∇s было сформулировано В. Шмидтом[3]. На основе этого допущения была развита так называемая полуэмпирическая теория турбулентной диффузии, в математическом отношении аналогичная теории молекулярной диффузии в неоднородной среде.

Масштабы молекулярных и турбулентных движений отличаются друг от друга во много раз. Так, в приземном слое воздуха для молекулярных движений $v_m \sim 10^4$ *см/сек*, $l_m \sim 10^{-5}$ *см*, $k_m \sim 10^{-1}$ *см*^{2}*/сек*, а для турбулентных движений $v \sim 10$ *см/сек*, $l \sim 10^2 \div 10^3$ *см*, $k \sim 10^3 \div 10^4$ *см*^{2}*/сек*. Из этих цифр ясно, что в большинстве задач атмосферной диффузии молекулярными процессами можно пренебрегать. В то же время различие в масштабах еще не приводит к качественному различию турбулентной и молекулярной диффузии. Более существенна разница в скоростях движений, так как пригодность параболического уравнения диффузии тем более ограничена, чем меньше реальные скорости движения диффундирующих частиц (к этому вопросу мы вернемся ниже). Существенно также, что в отличие от молекулярной диффузии турбулентный обмен в атмосфере, как правило, анизотропен. Однако соответствующее обобщение теории не представляет затруднений (именно, под l и k надо понимать тензоры).

4. **Полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии.** В полуэмпирической теории уравнение турбулентной диффузии для приземного слоя воздуха записывается в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial s}{\partial z}. \tag{3}$$

Это уравнение выражает в дифференциальной форме закон сохранения субстанции s. Здесь ось x направлена по направлению ветра, ось z — вертикально вверх; t — время; u — скорость ветра; k_x, k_y, k_z — коэффициенты турбулентной диффузии по направлениям x, y, z. Если необходимо учесть гравитационное оседание диффундирующих частиц (со скоростью w) и возможность экспоненциального убывания количества диффундирующего вещества $\left(\text{с периодом полураспада } \frac{\ln 2}{\alpha}\right)$, то в левой части уравнения (2) нужно добавить слагаемое $\left(-w\frac{\partial s}{\partial z} + \alpha s\right)$. Однако при составлении стандартной методики расчетов это слагаемое обычно не учитывается. Уравнение (3) формулируется для полупространства $z > z_0$, где z_0 — так называемая «высота шероховатости» поверхности земли, причем на уровне $z = z_0$ задается то или иное краевое условие для концентрации s.

В наиболее общей форме (при учете гравитационного оседания частиц загрязнения со скоростью w) краевое условие может быть записано в виде

$$k_z \frac{\partial s}{\partial z} + ws = \beta s \quad \text{при} \quad z = z_0, \tag{4}$$

*) Идея «пути перемешивания» еще ранее высказывалась Г. Тейлором[2].

где β — некоторая постоянная размерности скорости. При этом $k_z \frac{\partial s}{\partial z}$ есть вертикальный поток загрязнения благодаря турбулентной диффузии, а ws — благодаря гравитационному оседанию. При $\beta = 0$ условие (4) означает, что поток загрязнения на поверхности земли равен нулю, т. е. все загрязнение остается в воздухе, как бы «отражаясь» от поверхности земли. При $\beta = \infty$ условие (4) принимает вид $s = 0$ $(z = z_0)$ и означает, что загрязнение, попадающее на поверхность земли, как бы «исчезает», поглощаясь этой поверхностью или «прилипая» к ней. В промежуточных случаях $(0 < \beta < \infty)$ загрязнение частично «отражается» поверхностью земли и частично «прилипает» к ней. Обычно рассматриваются лишь две крайние возможности — «отражение» или «поглощение».

Типичные задачи заключаются в отыскании решений уравнения (3), соответствующих мгновенным или непрерывным источникам загрязнения $\left(\text{при изучении непрерывных источников слагаемым } \frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial s}{\partial x} \text{ обычно пренебрегают по сравнению с } u \frac{\partial s}{\partial x}\right)$.

Коэффициенты u, k_x, k_y, k_z уравнения (3) являются, вообще говоря, переменными. Аналитическое решение уравнения, пригодное для стандартных массовых расчетов, удается получить лишь при некоторых частных предположениях об этих коэффициентах. В случае постоянных коэффициентов решения уравнения (3), соответствующие основным типам источников, были изучены О. Робертсом[4].

Так, при наличии в точке $x = y = 0$, $z = h$ стационарного точечного источника загрязнения и при краевом условии «отражения» на уровне $z = 0$ решение уравнения (3) в пренебрежении слагаемым $\frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial s}{\partial x}$ имеет вид:

$$s(x, y, z) = \frac{c}{4\pi x \sqrt{k_y k_z}} e^{-\frac{uy^2}{4k_y x}} \left[e^{-\frac{u(z-h)^2}{4k_z x}} + e^{-\frac{u(z+h)^2}{4k_z x}} \right]. \tag{5}$$

Распределение загрязнения поперек направления ветра имеет здесь форму гауссовых кривых со средним квадратичным отклонением $\left(\frac{2k_y x}{u}\right)^{1/2}$, возрастающим с расстоянием x от источника. Большой практический интерес имеет распределение загрязнения у поверхности земли по направлению ветра от источника

$$s(x, 0, 0) = \frac{c}{2\pi x \sqrt{k_y k_z}} e^{-\frac{uh^2}{4k_z x}}. \tag{6}$$

Наибольшая концентрация $s_m = \frac{2c}{\pi e u h^2} \left(\frac{k_z}{k_y}\right)^{1/2}$ (обратно пропорциональная квадрату высоты источника) достигается на расстоянии от источника $x_m = \frac{uh^2}{4k_z}$ (пропорциональном h^2). При краевом условии «поглощения» распределение загрязнения в воздухе описывается формулой, отличающейся от (5) заменой знака плюс между слагаемыми в квадратных скобках знаком минус. Практически важной величиной в этом случае является скорость осаждения загрязнения на поверхность земли:

$$\sigma(x, y) = \left(k_z \frac{\partial s}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{cuh}{4\pi x^2 \sqrt{k_y k_x}} e^{-\frac{uy^2}{4k_y x} - \frac{uh^2}{4k_z x}}. \tag{7}$$

Эта функция характеризует скорость образования на поверхности земли «следа» из выпадающего загрязнения. След симметричен относительно направления ветра. Максимальная скорость осаждения загрязнения достигается на оси следа в точке $x_m^* = \frac{uh^2}{8k_z}$ и равняется $\sigma_m = \frac{4ck_z}{\pi e^2 uh^3}\left(\frac{k_z}{k_y}\right)^{1/2}$.

Решения Робертса дают правильное качественное описание процессов диффузии, однако количественно не согласуются с экспериментальными данными (скорость убывания концентрации примеси при удалении от источника оказывается слишком малой). Кроме того, как теория турбулентного режима в приземном слое воздуха, так и прямые измерения коэффициентов турбулентной диффузии показывают, что эти коэффициенты не являются постоянными, а возрастают с высотой (при безразличной стратификации — пропорционально высоте). Решения уравнения (3) при $u = \mathrm{const}$ и k_y, $k_z \sim z$ были изучены С. Бозанке и И. Пирсоном[5]. Наконец, рядом авторов рассмотрен случай, когда скорость ветра u и коэффициенты турбулентной диффузии задаются пропорциональными некоторым степеням высоты z. Формулы такого типа позволяют хорошо апроксимировать экспериментальные закономерности. В СССР подобная методика детально разработана в серии работ Д. Л. Лайхтмана[6–7]. Например, в одном из вариантов формул Д. Л. Лайхтмана полагается $u = \mathrm{const}$, $k_y = \mathrm{const}$, $k_z = k_1\left(\frac{z}{z_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}$, где p — параметр, характеризующий степень термической устойчивости воздуха (при безразличной стратификации $p = \infty$, при устойчивости $p > 0$, при конвекции $p < 0$), а значение k_1 при $z_1 = 1$ *м* может быть грубо определено по формуле $k_1 = \frac{u}{40}$ (u измеряется в *м/сек*, а k_1 — в *м²/сек*). При таких коэффициентах уравнения (3) вместо формулы Робертса (5) получается

$$s(x, y, z) = \\ = \frac{p+1}{p}\frac{cL}{2hx\sqrt{\pi u x k_y}} e^{-\frac{uy^2}{4k_y x} - \frac{L}{x}\left[\left(\frac{z}{h}\right)^{1+\frac{1}{p}}+1\right]}\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{2p}} I_{\pm\frac{1}{p+1}}\left[\frac{2L}{x}\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}\right], \tag{8}$$

где $L = \left(\frac{p}{p+1}\right)^2 \frac{uh^2}{k_z(h)}$. В индексе цилиндрической функции следует брать знак плюс при краевом условии «поглощения» и минус при условии «отражения». Аналогом формулы (6) будет

$$s(x, 0, 0) = \frac{c}{2h\Gamma\left(1+\frac{p}{p+1}\right)\sqrt{\pi u x k_y}}\left(\frac{L}{x}\right)^{\frac{p}{p+1}} e^{-\frac{L}{x}}. \tag{9}$$

Максимум этой функции достигается в точке $x_m = \frac{2p+2}{3p+1}L$. Абсцисса максимума пропорциональна $h^{1+\frac{1}{p}}$, значение максимума пропорционально $h^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}}$.

При использовании уравнения (3) для описания распространения в воздухе дымов и газов, выбрасываемых из дымовых труб, учет возможного всплывания дыма вследствие его нагретости и наличия скорости выхлопа дыма w_0 осуществляется на практике путем замены реальной высоты дымовой трубы h на некоторую «эффективную высоту» $h + \delta h$, где δh определяется, например, формулой

$$\delta h = 3{,}8\, R\,\frac{w_0}{u}\frac{T_1}{T}. \tag{10}$$

Здесь R — радиус отверстия трубы, u — скорость ветра, T_1 — температура дыма, T — температура воздуха на высоте трубы.

5. Статистический подход к турбулентной диффузии. Уравнение диффузии (3) может быть выведено из предположения, что каждая индивидуальная диффундирующая частица движется случайно, причем ее координаты меняются со временем по закону марковского случайного процесса. Уравнение (3) является уравнением А. Н. Колмогорова[8] для этого случайного процесса. Такой вывод приводит к статистической интерпретации коэффициентов турбулентной диффузии:

$$k_x = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_x^2(t)}{dt}, \quad \sigma_x^2(t) = \overline{[x(t) - x(0)]^2}, \tag{11}$$

где $x(t)$ — абсцисса диффундирующей частицы в момент t (аналогичные формулы справедливы для k_y и k_z). Отсюда видно, что первичным понятием является не коэффициент турбулентной диффузии, а дисперсия координаты диффундирующей частицы (зависящая от времени диффузии).

Целесообразность прослеживания за движущимися частицами (т. е. не эйлеров, а лагранжев метод описания движений среды) является специфической чертой теории турбулентной диффузии, в отличие от теории ряда других явлений, порождаемых турбулентностью. При этом наиболее удобной характеристикой турбулентности является лагранжева корреляционная функция поля скорости,

$$\overline{u_x(t)\, u_x(t+\tau)} = \overline{u_x^2} R_x(\tau), \tag{12}$$

где $u_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ — x-компонента скорости движения диффундирующей частицы в момент t, а черточка означает осреднение по времени t. Допущение о существовании мгновенной скорости движения частицы является существенным отличием излагаемой статистической теории турбулентной диффузии от теории молекулярной диффузии (т. е. безынерционного броуновского движения).

Заметим, что в турбулентной атмосфере, вообще говоря, имеет место «эволюция уровня» поля скорости: временны́е средние значения характеристик поля скорости существенно зависят от длины интервала осреднения. Поэтому определение корреляционной функции (12) законно, строго говоря, лишь в случаях мелкомасштабной турбулентности (в том смысле, как это было указано выше). В более общих случаях лучше исходить из лагранжевой корреляционной функции не для скрости, а для ускорения.

Дисперсия $\sigma_x^2(t)$ может быть выражена через корреляционную функцию (12) следующим образом:

$$\sigma_x^2(t) = \overline{u_x^2} \int_0^t \int_0^t R_x(|\tau_1 - \tau_2|)\, d\tau_1\, d\tau_2. \tag{13}$$

Эта важная формула была предложена Г. Тейлором[9]. О. Сэттон[10] предложил апроксимировать функцию $R(\tau)$ формулой $R(\tau) = \left(1 + \frac{\tau}{T}\right)^{-n}$, где T — некоторое характерное время, чему при больших t соответствует $\sigma^2(t) \approx \frac{c^2}{2}(ut)^{2-n}$, и получил на такой основе формулы для концентрации загрязнения, соответствующие основным типам источников.

В частности, вместо формул (5) и (8) Сэттон получил формулу

$$s(x, y, z) = \frac{C}{\pi c_y c_z u x^{2-n}} e^{-\frac{y^2}{c_y^2 x^{2-n}}} \left[e^{-\frac{(z-h)^2}{c_z^2 x^{2-n}}} + e^{-\frac{(z+h)^2}{c_z^2 x^{2-n}}} \right]. \tag{14}$$

Эта формула может быть получена как стационарное решение уравнения (3) при $u = \text{const}$; $k_x = 0$; $k_{y,z} = \frac{2-n}{4} c_{y,z}^2 u x^{1-n}$ (для параметра n принимаются значения между 0 и 0,2, а коэффициенты c_y и c_z рекомендуется выбирать в зависимости от высоты источника h, убывающими при возрастании h). Согласно формуле (14), максимум приземной концентрации загрязнения достигается на оси x в точке $x_m = \left(\frac{h}{c_z}\right)^{\frac{2}{2-n}}$ (не зависящей от скорости ветра); этот максимум равен $s_m = \frac{C}{\pi e u h^2} \frac{c_z}{c_y}$.

Формулы Сэттона оказались весьма удобными для описания экспериментальных данных и получили широкое распространение как основа для расчетов диффузии загрязнений в воздухе.

Из формулы Тейлора (13) следует, что при малых временах диффузии $\sigma^2 \sim t^2$ и $k \sim t$, а при больших временах $\sigma^2 \sim t$ и $k \to \text{const}$ (последняя закономерность аналогична случаю молекулярной диффузии). Используя эти сведения и описывая концентрацию загрязнения при наличии мгновенного точечного источника гауссовой функцией с дисперсиями $\sigma_x^2(t)$, $\sigma_y^2(t)$, $\sigma_z^2(t)$, Ф. Френкель [11] разработал методику расчета диффузии загрязнений, с успехом примененную им для описания загрязнений в городах.

6. В л и я н и е т е р м и ч е с к о й с т р а т и ф и к а ц и и в о з д у х а н а т у р б у л е н т н у ю д и ф ф у з и ю. Как уже упоминалось, турбулентная диффузия в нижних слоях атмосферы весьма существенно зависит от термической стратификации воздуха. При учете влияния стратификации на турбулентный режим удобно пользоваться безразмерным параметром

$$\mathrm{Ri} = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^{-2}, \tag{15}$$

где g — ускорение силы тяжести, а θ — так называемая потенциальная температура (в нижних слоях воздуха $\theta \approx T + \Gamma z$, где T — обычная температура, а $\Gamma \cong 1^\circ \mathrm{C}/100$ *м*). Этот параметр был введен Л. Ричардсоном [12]. При термической неустойчивости $\mathrm{Ri} < 0$, при устойчивой стратификации $\mathrm{Ri} > 0$. С помощью энергетических соображений Ричардсон установил, что при $\mathrm{Ri} > \mathrm{Ri}_{\text{кр}} > 0$ турбулентность затухает, теряя свою энергию на работу против архимедовых сил. В последние годы С. Пристли [13] и Е. Дикон [14] в Австралии, Г. Леттау [15] в США, А. М. Обухов и А. С. Монин [16-19] в СССР разработали близкие друг к другу методы учета влияния стратификации на турбулентный режим в приземном слое воздуха. Обухов и Монин развили теорию подобия, согласно которой турбулентный режим полностью определяется тремя размерными величинами: турбулентным напряжением трения, турбулентным потоком тепла по вертикали и параметром $\frac{g}{T_0}$, характеризующим влияние архимедовых сил. При этом влияние стратификации на характеристики турбулентного режима описывается зависящими от Ri безразмерными множителями, которые в ряде случаев удается эффективно определить. В частности, профили скорости ветра $\overline{u}(z)$ и температуры $\overline{T}(z)$ в приземном слое воздуха даются формулами

$$\left.\begin{aligned} \overline{u}(z) &= \frac{v_*}{\varkappa} \left[f\left(\frac{z}{L}\right) - f\left(\frac{z_0}{L}\right) \right], \\ \overline{T}(z) &= \overline{T}(z_0) + T_* \left[f\left(\frac{z}{L}\right) - f\left(\frac{z_0}{L}\right) \right], \\ L &= \frac{v_*^3}{\varkappa \frac{g}{T_0} \left(-\frac{q}{c_p \rho} \right)}, \quad T_* = -\frac{1}{\varkappa v_*} \frac{q}{c_p \rho}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где $v_* = \left(\frac{\tau}{\rho}\right)^{1/2}$ — так называемая «скорость трения» (τ — турбулентное напряжение трения, ρ — плотность воздуха); q — вертикальный турбулентный поток тепла; $\varkappa \cong 0{,}4$ — постоянная Кармана и $f(\zeta)$ — универсальная функция, связанная с числом Ричардсона (15) соотношением

$$\frac{\mathrm{Ri}(z)}{\mathrm{Ri}_{\text{кр}}} = \frac{1}{f'\left(\frac{z}{L}\right)}. \tag{17}$$

При малых ζ функция $f(\zeta)$ приближенно равна $\ln|\zeta| + \beta\zeta$ (β — число порядка единицы), при больших положительных ζ (случаи устойчивой стратификации) — асимптотически пропорциональна ζ, а при больших отрицательных ζ (случаи термической конвекции) — асимптотически приближается к константе по закону $c_1 + c_2\zeta^{-1/3}$.

7. Учет ограниченной скорости турбулентной диффузии. Излагавшаяся выше теория мелкомасштабной турбулентной диффузии имеет тот недостаток, что в ней не учитывается фактическая ограниченность скорости распространения загрязнений в турбулентной атмосфере, связанная с ограниченностью величины флуктуаций скорости ветра, создающих турбулентное перемешивание. Параболический характер полуэмпирического уравнения диффузии означает, что загрязнение при выходе из источника мгновенно распространяется по всему пространству и может быть немедленно обнаружено, хотя бы и в совершенно ничтожном количестве, на сколь угодно большом расстоянии от источника. Обычно с этим недостатком мирятся, так как объем, внутри которого концентрация загрязнения не слишком мала, всегда ограничен и распределение концентрации внутри этого объема описывается параболическим уравнением диффузии, как правило, удовлетворительно. Однако в некоторых случаях (в частности, вблизи от реальных границ облака загрязнения) использование параболического уравнения диффузии может приводить к существенным ошибкам. Например, дым, вышедший из трубы высоты h, достигает земли не ближе чем на расстоянии от трубы, равном $\frac{u}{v}h$, где u — скорость ветра, v — максимальная скорость распространения дыма по вертикали. В то же время согласно решению параболического уравнения диффузии дым обнаруживается у поверхности земли сколь угодно близко к трубе.

Советским ученым Г. Шелейховским [20] была предложена свободная от указанного недостатка методика расчета распространения дыма из труб, основанная на использовании теории свободной турбулентной струи. Согласно формуле Шелейховского, дым, выходящий из трубы, заполняет конус, осью которого является направление ветра а раствор которого зависит от интенсивности турбулентности. Формула Шелейховского позволяет определить лишь среднюю концентрацию в различных поперечных сечениях дымовой струи.

Более радикальным является такое обобщение уравнения диффузии, которое придало бы этому уравнению гиперболический характер. Такое обобщение предлагалось еще в 1926 г. В. А. Фоком [21], а затем Б. И. Давыдовым [22], Е. С. Ляпиным [23, 24], С. Гольдштейном [25], Р. Дэвисом [26], А. С. Мониным [27, 28]. Для вывода одномерного гиперболического уравнения диффузии можно исходить из следующих предположений: а) каждая индивидуальная диффундирующая частица движется случайно; б) мгновенная скорость движения частицы существует почти всюду и ограничена; в) координата частицы и направление ее движения образуют совместно марковский случайный процесс.

Уравнение диффузии получается в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial z}=0; \quad \frac{1}{2a}\frac{\partial S}{\partial t}+S=-\frac{v^2}{2a}\frac{\partial s}{\partial z}, \tag{18}$$

где s — концентрация частиц, S — турбулентный поток частиц, v — максимальная скорость движения частиц, a — характерная частота турбулентных пульсаций. Исключая турбулентный поток S, для концентрации частиц s из (18) можно получить так называемое телеграфное уравнение. В пределе при $a \to \infty$, $v \to \infty$, $\frac{v^2}{2a} \to k$ из (18) получается обычное параболическое уравнение диффузии.

Решение гиперболического уравнения вертикальной турбулентной диффузии для приземного слоя воздуха при безразличной термической стратификации в случае наземного мгновенного точечного источника загрязнения единичной интенсивности имеет следующий вид[27-28]:

$$s(z,\,t)=\frac{1}{\varkappa v_* t}\,\frac{(1-z/\lambda v_* t)^{\varepsilon-1}}{(1+z/\lambda v_* t)^{\varepsilon+1}}\,; \quad 0 \leqslant z \leqslant \lambda v_* t. \tag{19}$$

Здесь $\lambda=\frac{v}{v_*}$ – число, близкое к единице, а $\varepsilon=\frac{\lambda}{2\varkappa}$. Использование гиперболического уравнения диффузии вместо формулы (6) для наземной концентрации загрязнения при наличии на высоте h стационарного точечного источника приводит к формуле

$$s(x,\,0,\,0)=\frac{c\varepsilon}{uh}\sqrt{\frac{\lambda v_*}{\pi k_y h}}\,\frac{\xi^{-1/2}(\xi-1)^{\varepsilon}}{(\xi+1)^{\varepsilon+1}}\,; \quad \xi=\frac{\lambda v_* x}{uh} \geqslant 1 \tag{20}$$

(при $\xi < 1$ наземная концентрация равна нулю). Абсцисса максимума приземной концентрации пропорциональна высоте источника h, величина максимума обратно пропорциональна $h^{3/2}$.

8. Диффузия в поле крупномасштабной турбулентности. В случае, когда масштаб турбулентности l не мал по сравнению с размерами облака загрязнения, закономерности турбулентной диффузии существенно отличаются от случая молекулярной диффузии. Например, в отличие от случая молекулярной диффузии, скорость изменения расстояния L между двумя диффундирующими частицами зависит от самого расстояния L: эта скорость в среднем невелика, пока L мало, и становится большой, когда L велико. Это объясняется тем, что расстояние L изменяется существенно вследствие действия турбулентных движений, масштабы которых соизмеримы с L. Движения мелких масштабов мало меняют это расстояние, а крупномасштабные движения, захватывающие одновременно обе частицы, переносят их без существенного изменения расстояния между ними. Таким образом, увеличение размеров облака загрязнения приводит к увеличению эффективного «коэффициента диффузии».

На это явление впервые обратил внимание Л. Ричардсон[29]. Он предложил описывать это явление с помощью «функции расстояния между соседями» («distance neighbour function») $g(L,\,t)$ — плотности вероятностей для расстояния L между двумя диффундирующими частицами. Изменения функции $g(L,\,t)$ со временем Ричардсон предложил описывать параболическим уравнением диффузии с коэффициентом диффузии k, зависящим от L. С помощью эмпирических данных Ричардсон установил, что $k(L) \sim L^{4/3}$. Этот закон оправдывается для явлений самых разных масштабов.

Формулы Сэттона, в которых принимается, что коэффициент диффузии растет со временем диффузии, качественно учитывают эффект Ричардсона. Однако для диффузии по вертикали в приземном слое воздуха указанный эффект, возможно, не является существенным, так как вертикальная диффузия происходит, по-видимому, главным образом за счет мелкомасштабной турбулентности. В то же время в горизонтальном перемешивании воздуха принимают участие турбулентные движения от малых до весьма больших масштабов. Например, опыты по непрерывной регистрации направления ветра и наблюдения за струями дыма показывают, что турбулентные движения с масштабами в сотни метров и километры, приводящие к колебаниям направления ветра с периодами в несколько минут, оказывают существенное влияние на диффузию загрязнений. Поэтому при описании горизонтального перемешивания эффект Ричардсона учитывать необходимо.

Закон Ричардсона $k(L) \sim L^{4/3}$ был объяснен А. М. Обуховым[30] как следствие гипотез подобия А. Н. Колмогорова[31] для турбулентности при очень больших числах Рейнольдса. Согласно гипотезе Колмогорова существует так называемый инерционный интервал масштабов турбулентных движений, в котором статистический режим этих движений полностью определяется действием сил инерции, приводящих к передаче энергии от движений бо́льших масштабов к движениям меньших масштабов с постоянной в среднем скоростью ε. Величина ε, равная скорости диссипации турбулентной энергии, является единственным параметром, определяющим режим турбулентности в инерционном интервале. Если диффузия происходит в результате действия турбулентных движений с масштабами из инерционного интервала, то $k(L) = c\varepsilon^{1/3}L^{4/3}$, где c — число, т. е. получается закон Ричардсона. Приложения теории подобия к турбулентной диффузии были рассмотрены в работах Г. Бэтчелора[32-33].

Практически важно уметь рассчитывать в случае ричардсоновской диффузии концентрацию загрязнения s. Знания «функции расстояния между соседями» $g(L, t)$ для этого недостаточно, так как s может быть определено по g, лишь если движения диффундирующих частиц можно считать независимыми. Некоторые указания о концентрации s при наличии тех или иных источников загрязнения может дать теория подобия[34-35]. Так, в двумерном случае распределение концентрации относительно центра облака загрязнения при наличии мгновенного точечного источника мощности Q должно иметь вид

$$s(r, t) = \frac{Q}{\pi\varepsilon t^3} f_0\left(\frac{r^2}{\varepsilon t^3}\right), \tag{21}$$

r — расстояние от центра облака, диаметр облака $\sim t^{3/2}$. Для выяснения общего вида уравнения, описывающего ричардсоновскую диффузию, можно воспользоваться, кроме теории подобия, тем, что в системе отсчета, связанной со средним движением среды, турбулентность однородна и изотропна. В этой системе по начальной концентрации $s_0(\mathbf{r})$ концентрация в момент t определяется формулой[34-35]

$$\tilde{s}(\mathbf{p}, t) = a\left(\varepsilon^{1/3} p^{2/3} t\right) \tilde{s}_0(\mathbf{p}), \tag{22}$$

где значок $\sim$ означает преобразование Фурье по $\mathbf{r}$; $\mathbf{p}$ — волновой вектор (p — его модуль); $a(\theta)$ — некоторая безразмерная функция, равная единице при $\theta = 0$ и монотонно убывающая до нуля при $\theta \to \infty$. Выбор конкретного вида функции $a(\theta)$ приводит к конкретному уравнению диффузии. Например, при допущении, что изменения распределения концентрации со временем образуют полугруппу, следует положить $a(\theta) = e^{-c\theta}$. Такой апроксимации соответствует уравнение диффузии, дифференциальное по времени и интегральное по пространственным координатам; все решения этого уравнения содержатся среди решений уравнения

$$\frac{\partial^3 s}{\partial t^3} = c\varepsilon \Delta s. \tag{23}$$

Другой подход к описанию ричардсоновской диффузии предлагает А. М. Обухов. Уравнение диффузии предлагается записывать в шестимерном пространстве координат и скоростей, но при дополнительных требованиях инвариантности (турбулентность локально-однородная и изотропная).

9. Перспективы развития теории турбулентной диффузии. Возможности статистической теории турбулентной диффузии еще далеко не исчерпаны. Эта теория, несомненно, в ближайшие годы будет бурно развиваться вслед за развитием статистической теории турбулентности. Уже сейчас представляет интерес использовать в теории турбулентной диффузии ряд методов, предложенных для описания турбулентности. Укажем в качестве примера недавнюю работу П. Робертса [36], в которой при помощи уравнений гидродинамики составляются уравнения для корреляционных моментов концентрации загрязнения и поля скорости, причем для замыкания этих уравнений используется гипотеза М. Д. Миллионщикова [37] (т. е. четвертые моменты выражаются через вторые по формулам, справедливым для многомерного нормального распределения). Другим примером может служить метод характеристических функционалов, предложенный Э. Хопфом [38].

Наконец, весьма перспективным для теории турбулентной диффузии является развитие методов лагранжева описания турбулентного потока.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. L. Prandtl, Zeitschr. für angew. Math. und Mech. 5, 136 (1925).
2. G. I. Taylor, Phil. Trans. A 215, 1 (1915).
3. W. Schmidt, Probl. Kosm. Phys. Bd. 7, Hamburg, H. Grand 1925 (Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen).
4. O. F. T. Roberts, Proc. Roy. Soc. A 104, 640 (1923).
5. C. H. Bosanquet, J. I. Pearson, Trans. Faraday Soc. 32, 124 (1936).
6. Д. Л. Лайхтман, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1 (1944).
7. Д. Л. Лайхтман, Метеорология и гидрология, № 1 (1947).
8. А. Н. Колмогоров, Успехи матем. наук, № 5 (1938).
9. G. I. Taylor, Proc. London Math. Soc. 2, 196 (1921).
10. O. G. Sutton, Proc. Roy. Soc. A 146 (1934).
11. F. N. Frenkiel, Adv. in Appl. Mech. 3, 61 (1953).
12. L. F. Richardson, Phil. Mag. 49, 81 (1925).
13. C. H. B. Priestley, Quart. J. Roy. Met. Soc. 81, 139 (1955).
14. E. L. Deacon, Div. Met. Phys. CSIRO, Australia, Tech. Pap. № 4 (1955).
15. H. Lettau, Atmosphärische Turbulenz, Leipzig, 1939.
16. А. М. Обухов, Труды Ин-та теоретич. геофизики АН СССР, № 1 (1946).
17. А. С. Монин, Информ. сборник. ГУГМС, № 1 (1951).
18. А. С. Монин, А. М. Обухов, ДАН СССР 93, № 2 (1953).
19. А. С. Монин, А. М. Обухов, Тр. Геоф. ин-та АН СССР, № 24 (151), (1954).
20. Г. Шелейховский, Задымление городов, Изд. Мин-ва коммун. хоз. (1949).
21. В. А. Фок, Труды Гос. оптического ин-та, IV, вып. 34 (1926).
22. Б. И. Давыдов, ДАН СССР 2, № 7 (1935).
23. Е. С. Ляпин, Метеорология и гидрология, № 5 (1948).
24. Е. С. Ляпин, Труды Главн. геофиз. обсерватории, вып. 19(81) (1950).
25. S. Goldstein, Quart. J. Mech. a. Appl. Math. 4, 129 (1951).
26. R. W. Davies, Phys. Rev. 93, № 6, 1169 (1954).
27. А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3 (1955).
28. А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 12 (1956).
29. L. F. Richardson, Proc. Roy. Soc. A 100, 709 (1926).
30. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геофиз. № 4—5 (1941).
31. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР 30, 299 (1941).
32. G. K. Batchelor, Quart. J. Roy, Met. Soc. 76, 133 (1950).
33. G. K. Batchelor, Proc. Cambr. Phil. Soc. 48, 345 (1952).
34. А. С. Монин, ДАН СССР 105, № 2 (1955).
35. А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3 (1956).
36. P. H. Roberts, J. Math. and Mech. 6, № 6, 781 (1957).
37. М. Д. Миллионщиков, ДАН СССР 32, 615 (1941).
38. E. Hopf., J. Rat. Mech. 1, 87 (1952).