

ДИФРАКЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ С ЯДРАМИ

А. И. Ахиезер, И. Я. Померанчук

1. ВВЕДЕНИЕ

Поглощение, которым может сопровождаться рассеяние нуклонов ядрами, вызывает, как известно, добавочное возмущение нуклонной падающей волны и приводит к дополнительному упругому рассеянию нуклонов, не связанному с образованием составного ядра.

Сильное поглощение частиц имеет место в области больших энергий, когда длина волны частицы значительно меньше радиуса ядра. В этих условиях ядро ведет себя по отношению к падающим на него частицам как черное или как полупрозрачное тело, и упругое рассеяние частиц, связанное с возможностью их поглощения ядрами, аналогично дифракции света от черного (или полупрозрачного) тела. Такое дифракционное рассеяние быстрых частиц поглощающими ядрами в наиболее чистом виде проявляется в случае быстрых нейтронов—частиц, не обладающих зарядом. Однако оно может происходить в несколько модифицированном виде также и в случае быстрых заряженных частиц, например протонов. В этом случае, в отличие от нейтронов, мы имеем дело с дифракцией заряженных лучей¹⁰.

Дифракционным упругим рассеянием не исчерпываются явления, связанные с поглощением частиц. Если частица обладает зарядом, то дифракционное рассеяние может сопровождаться излучением фотона¹. Такое дифракционное излучение фотона может иметь место, например, в случае протонов, поглощаемых ядрами. Но гораздо более важное значение имеет это явление для заряженных π -мезонов, рассеиваемых ядрами или отдельными нуклонами, ввиду сравнительно небольшой массы π -мезонов.

π -мезоны больших энергий сильно взаимодействуют с нуклонами, и это взаимодействие приводит к большой вероятности таких столкновений между ними, при которых π -мезон и нуклон объединяются в сильно возбужденную короткоживущую систему, распадающуюся далее на несколько мезонов и, возможно, на несколько нуклонных пар. Нуклон при этом представляет собой, по отношению к π -мезону, черное тело (шарик), радиус которого R определяется сечением поглощения π -мезонов $\sigma_a = \pi R^2$.

Дифракционное излучение фотона π -мезоном или другой заряженной частицей не следует смешивать с излучением фотона, связанным с непосредственным поглощением этой частицы ядром. Такое излучение, которое мы будем называть излучением остановки, оказывается во многих случаях более вероятным чем дифракционное излучение¹.

Процессом, в некотором смысле обратным тормозному излучению, является образование пары частиц фотоном. Если, например, тормозное излучение фотона электроном в кулоновском поле ядра представляет

собой переход электрона из одного состояния с положительной энергией в другое состояние также с положительной энергией, сопровождающийся испусканием фотона, то образование электронно-позитронной пары фотоном в кулоновском поле ядра можно рассматривать как переход электрона из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией, сопровождающийся поглощением фотона. Такой процесс образования пары частиц фотоном не требует, однако, обязательно наличия кулоновского поля ядра. Он может происходить также в присутствии нейтральной частицы (или нуклона), обладающей свойством поглощать отдельные компоненты пары. В частности, может происходить образование фотонно- π -мезонных пар в присутствии поглощающего мезоны нуклона или образование фотонно-протонно-антипротонных пар в присутствии поглощающего ядра. Этот процесс можно назвать дифракционным образованием пар².

Дифракционное образование мезонных и нуклонных пар может происходить также при столкновении быстрой ядерно-активной частицы (мезона, нуклона) с ядром³.

До сих пор мы говорили о дифракционных явлениях, происходящих при рассеянии точечных частиц. Специфическими особенностями должно отличаться дифракционное рассеяние слабо связанных сложных частиц, таких, как дейтрон. В этом случае помимо чисто упругого рассеяния дейтронов, аналогичного дифракционному рассеянию точечных частиц, должно происходить еще дифракционное расщепление дейтронов^{15, 16, 17}. Действительно, благодаря малой энергии связи дейтрона сравнительно небольшое изменение его импульса при дифракционном рассеянии может привести к расщеплению дейтрона, происходящему вдали от ядра.

Наряду с реакцией срыва (stripping) дифракционное расщепление дейтрона приводит к освобождению нейтрона и протона, т. е. увеличивает выход нейтронов и протонов, возникающих при столкновении быстрых дейтронов с ядрами.

Чрезвычайно существенной особенностью указанных дифракционных процессов является то, что все они протекают вдали от ядра. Это связано с тем, что при больших энергиях частиц законы сохранения требуют малых передач импульса ядру, а малые передачи импульса соответствуют большим прицельным параметрам.

Рассмотрим, например, дифракционное излучение фотона π -мезоном. При больших энергиях π -мезонов мы имеем здесь такое же положение, как и в случае тормозного излучения фотона электроном в кулоновском поле ядра. С ростом энергии электрона уменьшается импульс, передаваемый ядру, и поэтому в релятивистской области, когда этот импульс очень мал, излучение происходит на больших расстояниях от ядра. Так как этот вывод основывается только на законах сохранения, то он, естественно, остается справедливым не только для тормозного излучения на кулоновских силах, но и в случае дифракционного излучения.

Аналогичная ситуация имеет место и при дифракционном образовании пар, а также при дифракционном расщеплении дейтронов—все эти процессы связаны в области больших энергий с малыми передачами импульса ядру и поэтому происходят вдали от ядра.

В области больших энергий частиц и малых углов рассеяния существует общая связь между вероятностью неупругих процессов и амплитудой упругого рассеяния. (Одной из иллюстраций этой связи является вывод формулы Бете—Гайтлера для вероятности тормозного излучения фотона ультрарелятивистским электроном в кулоновском поле ядра в случае малых углов рассеяния—см. п. 9.) Поэтому для исследования различных дифракционных процессов в области больших энергий фактически

достаточно знания амплитуды упругого рассеяния, которая определяется поведением волновой функции частицы вдали от рассеивателя (ядра).

Волновая функция частицы вдали от ядра имеет вид суперпозиции плоской падающей волны и волны, дифрагированной от ядра (черного или полупрозрачного). Последнюю можно найти оптическим методом с помощью принципа Гюйгенса. Поэтому возможно построение полуфеноменологической теории дифракционных явлений в области больших энергий, основанной на применении обобщенного принципа Гюйгенса. Изложению основных результатов такой теории и посвящена настоящая статья (ср. ¹⁴).

2. УПРУГОЕ ДИФРАКЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ

Начнем с рассмотрения простейшей задачи о дифракционном рассеянии нейтральных точечных частиц поглощающими ядрами, которые мы будем считать абсолютно черными.

Дифракционное рассмотрение справедливо только для быстрых частиц, длина волны которых λ мала по сравнению с радиусом ядра R . В этих условиях рассеяние происходит на малые углы, порядка $\vartheta \sim \frac{\lambda}{R}$. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением движения частиц в плоскости, перпендикулярной волновому вектору \mathbf{K} падающей частицы.

Свободное движение частиц в этой плоскости описывается волновой функцией

$$\psi_{\mathbf{x}} = L^{-1} e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}},$$

где L — нормировочная длина, \mathbf{x} и \mathbf{p} — проекции волнового вектора и радиус-вектора частицы на плоскость, перпендикулярную \mathbf{K} . Падающим частицам соответствует волновая функция

$$\psi_0 = L^{-1}.$$

Рассмотрим теперь, к чему приводит наличие ядра. Оно, очевидно, поглощает все те частицы, для которых прицельный параметр ρ меньше R . Если ввести величину $\Omega(\rho)$, равную

$$\Omega(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho \leq R, \\ 1 & \text{при } \rho > R, \end{cases} \quad (1)$$

то можно сказать, что дифракционная картина, обусловленная наличием поглощающего ядра, будет соответствовать разложению функции $\Psi = \Omega(\rho) \psi_0$ по волновым функциям свободного движения $\psi_{\mathbf{x}}$:

$$\Psi = \Omega(\rho) \psi_0 = \sum_{\mathbf{x}} a_{\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{x}}, \quad (2)$$

а именно, коэффициент $a_{\mathbf{x}}$ в этом разложении будет представлять собой амплитуду вероятности рассеяния, при котором поперечная составляющая волнового вектора частицы равна \mathbf{x} .

Вероятность дифракционного рассеяния, при котором поперечная составляющая волнового вектора \mathbf{x} лежит в интервале $d\mathbf{x}$, связана с $a_{\mathbf{x}}$ соотношением

$$d\omega = |a_{\mathbf{x}}|^2 \frac{L^2 d\mathbf{x}}{(2\pi)^2},$$

а соответствующее дифференциальное сечение рассеяния будет

$$d\sigma = L^2 d\omega = |a_{\mathbf{x}}|^2 L^4 \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^2}. \quad (3)$$

Так как функции $\psi_{\mathbf{x}}$ образуют полную ортонормированную систему, удовлетворяющую условиям нормировки

$$\int \psi_{\mathbf{x}}(\rho) \psi_{\mathbf{x}'}^*(\rho) d\rho = \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'},$$

то из (2) следует, что

$$a_{\mathbf{x}} = \int \psi_{\mathbf{x}}^* \Omega(\rho) \psi_0 d\rho = \int \psi_{\mathbf{x}}^* [1 - \Omega(\rho)] \psi_0 d\rho. \quad (4)$$

Подставляя сюда (1), получим

$$a_{\mathbf{x}} = -\frac{2\pi}{L^2} \frac{RJ_1(KR\vartheta)}{K\vartheta}, \quad (4')$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя. Величину \mathbf{x} можно связать с углом рассеяния ϑ :

$$\mathbf{x} = K \sin \vartheta \sim K\vartheta$$

(так как дифракционное рассмотрение справедливо только при малых углах рассеяния, то мы заменили $\sin \vartheta$ на ϑ). Замечая еще, что $d\mathbf{x} = K^2 do$, где $do = 2\pi\vartheta d\vartheta$ — элемент телесного угла, в котором рассеивается частица, найдем согласно (3) окончательно известное выражение для дифференциального сечения дифракционного рассеяния

$$d\sigma_e = R^2 \frac{J_1^2(KR\vartheta)}{\vartheta^2} do. \quad (5)$$

Полное сечение упругого дифракционного рассеяния равно

$$\sigma_e = \int \frac{R^2 J_1^2(KR\vartheta)}{\vartheta^2} do = \pi R^2. \quad (6)$$

Так как сечение поглощения частиц черным ядром также равно

$$\sigma_a = \pi R^2, \quad (7)$$

то интегральное сечение всех процессов, включающих как рассеяние, так и поглощение, будет

$$\sigma_t = \sigma_e + \sigma_a = 2\pi R^2. \quad (7')$$

Коэффициент разложения $a_{\mathbf{x}}$ можно связать с амплитудой рассеяния $f(\vartheta)$:

$$f(\vartheta) = -i \frac{L^2 K}{2\pi} a_{\mathbf{x}} \quad (8)$$

и сечением упругого рассеяния

$$d\sigma_t = |f(\vartheta)|^2 do. \quad (9)$$

Из (4') следует, что

$$f(\vartheta) = i \frac{RJ_1(KR\vartheta)}{\vartheta}. \quad (8')$$

В (8) фазовый множитель выбран равным i , так как при таком выборе справедлива оптическая теорема, согласно которой интегральное сечение всех процессов взаимодействия частиц с ядром связано с амплитудой упругого рассеяния на нулевой угол соотношением²⁴

$$\sigma_t = 4\pi\lambda \operatorname{Im} f(0). \quad (10)$$

Чтобы получить это соотношение, будем исходить²⁵ из следующего общего выражения для амплитуды рассеяния в центрально-сим-

метричном поле:

$$f(\vartheta) = -\frac{i\hbar}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(\beta_l - 1) P_l(\cos \vartheta), \quad (11)$$

где β_l — отношение амплитуд расходящейся и сходящейся волн с моментом l и $P_l(\cos \vartheta)$ — полиномы Лежандра. В отсутствии поглощения величина β_l равна по модулю единице

$$\beta_l = e^{2i\eta_l},$$

где η_l — вещественная величина, определяющая изменение фазы на бесконечности у волны с моментом l . При наличии поглощения модуль β_l меньше единицы.

Интегральное сечение упругого рассеяния равно

$$\sigma_e = 2\pi \int_0^\pi |f(\vartheta)|^2 \sin \vartheta d\vartheta.$$

Подставляя сюда вместо $f(\vartheta)$ выражение (11) и используя формулу

$$2\pi \int_0^\pi |P_l(\cos \vartheta)|^2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{4\pi}{2l+1},$$

получим

$$\sigma_e = \pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |\beta_l - 1|^2. \quad (12)$$

Для определения сечения поглощения частиц нужно найти поток частиц S в направлении к рассеивающему центру (началу координат):

$$S = \frac{i\hbar}{2m} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \right) d\Omega,$$

где m — масса частицы и ψ — ее волновая функция. Вместо ψ мы можем сюда подставить асимптотическое выражение волновой функции при больших r

$$\psi \sim e^{ikz} + \frac{1}{r} e^{ikr} f(\vartheta) = \frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) (e^{-ikr} - (-1)^l \beta_l e^{ikr}) P_l(\cos \vartheta).$$

В результате мы получим

$$S = \frac{\pi\hbar}{mk} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\beta_l|^2).$$

Разделив это выражение на плотность потока падающих частиц, равную $\frac{k\hbar}{m}$, найдем сечение поглощения частиц

$$\sigma_a = \pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\beta_l|^2). \quad (13)$$

Сложив сечения σ_e и σ_a , получим полное сечение для всех процессов

$$\sigma_t = \sigma_e + \sigma_a = 2\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \operatorname{Re} \beta_l). \quad (14)$$

Замечая, что

$$f(0) = -\frac{i\hbar}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(\beta_l - 1),$$

легко представить σ_l в виде (10).

3. УЧЕТ ПОЛУПРОЗРАЧНОСТИ ЯДРА

В области больших энергий длина свободного пробега частиц в ядерном веществе может стать сравнимой с размерами ядра. Если $\bar{\sigma}$ — среднее значение сечения рассеяния нейтрона отдельными нуклонами, то длина свободного пробега нейтрона в ядерном веществе L может быть определена по формуле

$$L = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{A\bar{\sigma}}, \quad (15)$$

где $R = r_0 A^{1/3}$ ($r_0 = 1,2 \cdot 10^{-13}$ см) — радиус ядра и A — массовое число. При энергии нейтронов $E \sim 100$ Мэв сечение рассеяния $\bar{\sigma} \approx 8,3 \cdot 10^{-26}$ см². Если взять $A = 100$, то мы получим $L \approx 4,5 \cdot 10^{-13}$ см и $R = 6 \cdot 10^{-13}$ см. Таким образом, в области энергий порядка 100 Мэв длина свободного пробега нейтронов в ядерном веществе становится сравнимой с размерами ядра. В этих условиях ядро уже нельзя рассматривать как абсолютно черное тело, а необходимо считать полупрозрачным⁹. Ядерное вещество при таких энергиях можно характеризовать коэффициентом поглощения

$$b = \frac{1}{L} = \bar{\sigma}n,$$

где n — плотность частиц в ядре и $\bar{\sigma}$ — среднее значение сечения рассеяния падающей частицы (нейтрона) ядерными нуклонами

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{A} (Z\sigma_{np} + (A-Z)\sigma_{nn})$$

(σ_{np} и σ_{nn} — сечения рассеяния нейтрона протоном и нейтрона нейтроном^{*}). Поскольку плотность частиц в ядре спадает от центра к периферии ядра, то b является функцией точки. Среднее значение коэффициента поглощения равно

$$\bar{b} = \frac{3A\bar{\sigma}}{4\pi R^3}.$$

Из приведенных выше оценок следует, что в области энергий $E \sim 100$ Мэв для тяжелых ядер ($A \sim 200$) среднее значение коэффициента поглощения составляет $\bar{b} \approx 2,4 \cdot 10^{+12}$ см⁻¹.

При исследовании рассеяния нуклонов ядрами нужно учитывать не только поглощение, но и преломление нуклонной волны в ядерном веществе. Поэтому ядерное вещество следует характеризовать комплексным коэффициентом поглощения B , вещественная часть которого равна b , а мнимая часть b' связана с коэффициентом преломления. Если ν — коэффициент преломления, то

$$b' = 2(\nu - 1)K,$$

где K — волновой вектор падающей частицы и

$$B = b - i(\nu - 1)K. \quad (16)$$

^{*}) Эти величины имеют, конечно, качественный характер.

Покажем теперь, как следует учитывать полупрозрачность ядра при исследовании дифракционных явлений.

Так как длина волны падающей частицы предполагается малой по сравнению с размерами ядра, то прохождение нуклонов через ядро можно сравнивать с распространением нуклонной волны в веществе с комплексным коэффициентом поглощения $B^{\text{э, в}}$. Направление распространения волны совпадает при этом с направлением движения частицы, которое мы можем считать прямолинейным. Выбирая направление движения частицы в качестве оси x и обозначая путь, пройденный в ядре, через $2s$, получим следующее выражение для отношения амплитуды нуклонной волны по выходе частицы из ядра к амплитуде падающей волны:

$$A = e^{-\int_0^s B(x) dx}.$$

Интегрирование в экспоненте производится здесь в интервале $(0, s)$, а не $(0, 2s)$, так как речь идет об амплитуде нуклонной волны, а не об ее интенсивности, пропорциональной $|A|^2$. При этом фаза волны учитывается правильно, так как формула для b' содержит добавочный множитель 2.

Величиной A мы должны, очевидно, заменить $\Omega(\rho)$ при $\rho < R$.

Замечая, что $x = \sqrt{r^2 - \rho^2}$ (см. рис. 1), можно представить $\Omega(\rho)$ в виде

$$\Omega_B(\rho) = e^{-\int_{\rho}^{\infty} B(r) \frac{dx}{dr} dr} = e^{-\int_{\rho}^{\infty} \sqrt{r^2 - \rho^2} B'(r) dr}. \quad (17)$$

Верхний предел в экспоненте положен равным бесконечности, чтобы учесть диффузность края ядра.

Для резкого края ядра

$$B'(r) = B_0 \delta(r - R)$$

и $\Omega(\rho)$ приобретает вид

$$\Omega_B(\rho) = \begin{cases} e^{-B_0 \sqrt{R^2 - \rho^2}} & \text{при } \rho \leq R, \\ 1 & \text{при } \rho > R. \end{cases} \quad (18)$$

Входящую в выражение для $\Omega(\rho)$ [экспоненту можно вычислить, если задаться зависимостью плотности ядерных частиц от рассеяния до центра ядра. Обычно принимается⁸, что распределение плотности определяется формулой

$$n(r) = n_0 \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{r - R}{d} \right), \quad (19)$$

где n_0 — плотность частиц в центре ядра и d — толщина диффузного края ядра. При таком предположении экспонента приобретает вид⁸

$$\int_0^s B dx = 2RB_0 \int_{\xi}^{\infty} dv \sqrt{v^2 - \xi^2} \sec h^2 \frac{v-1}{\delta} = 2RB_0 h(\xi, \delta), \quad (20)$$

где B_0 — значение B в центре ядра, $\xi = \frac{\rho}{R}$, $v = \frac{r}{R}$, $\delta = \frac{d}{R}$. На рис. 2 представлен вид функции $h(\xi, \delta)$ для различных значений δ .

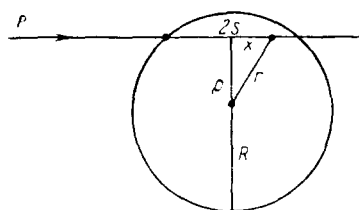


Рис. 1.

Определим теперь сечение упругого дифракционного рассеяния нейтронов ядрами. Используя указанные выше формулы (4) и (17), получим

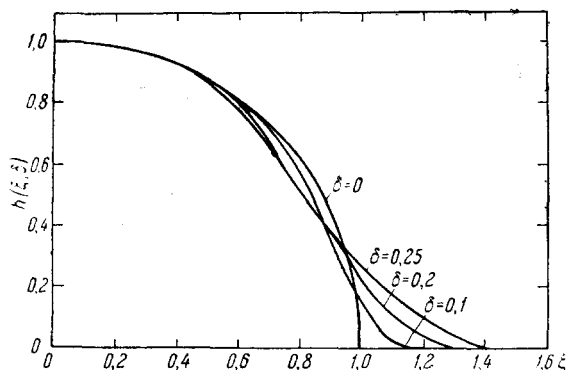


Рис. 2.

следующее выражение для амплитуды рассеяния:

$$f(\vartheta) = iK \int_0^{\infty} \left\{ 1 - e^{-\int_0^{\infty} V \sqrt{r^2 - \rho^2} B'(r) dr} \right\} J_0(x\rho) \rho d\rho, \quad x = K\vartheta. \quad (21)$$

Если считать, что ядро имеет резкий край, то справедлива формула (18) и

$$f(\vartheta) = iK \int_0^R (1 - e^{-B \sqrt{R^2 - \rho^2}}) J_0(x\rho) \rho d\rho, \quad d=0. \quad (22)$$

В предельных случаях большого и малого поглощения эта формула сильно упрощается

$$\left. \begin{aligned} f(\vartheta) &= iK \left\{ \frac{RJ_1(xR)}{x} - \frac{J_0(xR)}{B^2} \right\}, & x \ll R|B|^2, \\ f(\vartheta) &= iK \frac{RB}{x^2} \left\{ \frac{\sin xR}{xR} - \cos xR \right\}, & x \gg R|B|^2. \end{aligned} \right\} \quad (22')$$

Полное сечение упругого рассеяния равно

$$\sigma_e = \int |1 - \Omega(\rho)|^2 d\rho. \quad (23)$$

Считая край ядра резким, мы получим отсюда в случае сильного поглощения⁹

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \pi R^2 \left\{ 1 + \frac{1 - (1 + 2bR) e^{-2bR}}{2b^2 R^2} - \right. \\ &\quad - \frac{4}{(b^2 + b'^2) R^2} [b^2 - b'^2 + \{2bb' + b'R(b^2 + b'^2)\} e^{-bR} \sin b'R - \\ &\quad \left. - \{b^2 - b'^2 + bR(b^2 + b'^2)\} e^{-bR} \cos b'R] \right\}. \quad (23') \end{aligned}$$

Интегральное сечение для всех процессов (рассеяния и поглощения) может быть определено с помощью оптической теоремы¹⁰

$$\sigma_t = 4\pi\lambda \operatorname{Im} f(0).$$

При резком крае ядра и в случае сильного поглощения эта формула дает

$$\sigma_t = 2\pi R^2 \left\{ 1 - \frac{2}{(b^2 + b'^2) R^2} [b^2 - b'^2 + (2bb' + b'R(b^2 + b'^2)) \times \right. \\ \left. \times e^{-bR} \sin b'R - [b^2 - b'^2 + b'R(b^2 + b'^2) e^{-bR} \cos b'R] \right\}. \quad (24)$$

Заметим, что поскольку граница ядра всегда размыта, то формулы (23'), (24), выведенные в предположении резкости границы, справедливы, строго говоря, если $d \ll R$.

4. ВЛИЯНИЕ КУЛОНОВСКОГО ПОЛЯ ЯДРА

Выясним теперь, какое влияние оказывает кулоновское поле ядра на дифракционное рассеяние заряженных частиц. Будем сперва предполагать ядро абсолютно поглощающим и имеющим резкую границу. Тогда, если $\rho \leq R$ и энергия частицы E превосходит высоту кулоновского барьера $E_B = \frac{Ze^2}{R}$, то величина $\Omega(\rho)$ будет по-прежнему равна нулю. Если же параметр столкновения ρ будет больше R , то частица будет рассеиваться так же, как и в чисто кулоновском поле точечного ядра. Поэтому, при $\rho > R$ мы можем положить

$$\Omega(\rho) = e^{2i\eta(\rho)}, \quad \rho > R,$$

где $\eta(\rho)$ — фаза на бесконечности в кулоновском поле ядра, равная при $KR \gg 1$

$$\eta(\rho) = n \ln K\rho, \quad n = \frac{Ze^2}{\hbar v}$$

(v — скорость частицы на бесконечности).

Таким образом, для учета в дифракционных явлениях кулоновского поля ядра, предполагаемого абсолютно черным, нужно считать $\Omega(\rho)$ равным

$$\Omega^z(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho \leq R, \\ e^{2i\eta(\rho)} & \text{при } \rho > R. \end{cases} \quad (25)$$

В случае полупрозрачного ядра это выражение должно быть замечено, согласно (17) на

$$\Omega_B^z(\rho) = \begin{cases} - \int_{\rho}^{R'} \sqrt{R'^2 - \rho^2} B'(r) dr & \text{при } \rho \leq R', \\ e^{2i\eta(\rho)} & \text{при } \rho > R', \end{cases} \quad (26)$$

где под R' следует понимать некоторый эффективный радиус взаимодействия, несколько превышающий радиус ядра.

Если ширина диффузности края ядра мала по сравнению с радиусом ядра, то справедлива формула (18) и поэтому

$$\Omega_B^z(\rho) = \begin{cases} e^{-B\sqrt{R^2 - \rho^2}} & \text{при } \rho \leq R, \\ e^{2i\eta(\rho)} & \text{при } \rho > R. \end{cases} \quad (27)$$

Определим теперь сечение упругого рассеяния заряженных точечных частиц поглощающим ядром, которое мы будем предполагать абсолютно черным. Найдем прежде всего амплитуду рассеяния. Подставляя

в (4) вместо $\Omega(\rho)$ выражение (25), получим

$$f(\vartheta) = \frac{iK}{2\pi} \int e^{-ix\rho} \{1 - \Omega^z(\rho)\} = -iK \int_R^\infty e^{2i\vartheta_0(x)} J_0(x\rho) \rho d\rho, \quad (28)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя.

Интегрируя по частям, можно представить это выражение в виде¹⁰

$$f(\vartheta) = iK \left\{ l_0^{2in+1} \frac{J_1(l_0\vartheta)}{\vartheta} + in\vartheta^{-2in-2} \int_{l_0\vartheta}^\infty J_1(\zeta) \zeta^{2in} d\zeta \right\}, \quad (28')$$

где $l_0 = KR \gg 1$.

Дифференциальное сечение рассеяния связано с $f(\vartheta)$ соотношением

$$d\sigma_e = |f(\vartheta)|^2 d\vartheta \equiv \sigma_e(\vartheta) d\vartheta,$$

где

$$\sigma_e(\vartheta) = \left| \frac{RJ_1(KR\vartheta)}{\vartheta} + \frac{2in}{\vartheta} R \int_1^\infty J_1(KR\zeta) \zeta^{2in} d\zeta \right|^2. \quad (29)$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи. Если $n \ll \zeta$, то

$$f(\vartheta) = iK \left\{ \frac{RJ_1(xR)}{x} + 2in \frac{J_0(xR)}{x^2} \right\}$$

и

$$\sigma_e(\vartheta) = R^2 \frac{J_1^2(KR\vartheta)}{\vartheta^2} + \frac{4n^2}{K^2} \frac{J_0^2(KR\vartheta)}{\vartheta^4}. \quad (30)$$

Первое слагаемое в последнем выражении описывает дифракционное рассеяние частиц абсолютно черным ядром, а второе — рассеяние, обусловленное кулоновским полем ядра. Мы видим, что при $n \ll 1$ интерференция между обоими видами рассеяния отсутствует.

Отметим, что при $R = 0$ второе слагаемое в (30) переходит в сечение резерфордского рассеяния точечным ядром.

Легко показать^{10, 25}, что при $n \ll 1$ и углах рассеяния $\vartheta \lesssim \sqrt{2n}/l_0$ главную роль играет кулоновское рассеяние, а при углах $\vartheta > \sqrt{2n}/l_0$ — дифракционное рассеяние. Таким образом, величина $\sqrt{2n}/l_0$ при $n \ll 1$ разграничивает области углов с разными законами рассеяния.

Если $n \gg 1$, то при углах $\vartheta \lesssim \frac{2n}{l_0}$ главную роль играет кулоновское рассеяние, а при углах $\vartheta > \frac{2n}{l_0}$ — дифракционное рассеяние.

Сечение рассеяния в разных областях углов определяется следующими формулами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e(\vartheta) &= \frac{4n^2}{K^2 \vartheta^4}, & KR\vartheta &\ll 2n, \\ \sigma_e(\vartheta) &= \frac{R^2 J_1^2(KR\vartheta)}{\vartheta^2}, & KR\vartheta &\gg 2n. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Заметим, что при $n \ll 1$ амплитуды кулоновского и дифракционного рассеяния совпадают по порядку величины при $\vartheta \sim \sqrt{2n}/l_0$. Если же $n \gg 1$, то эти амплитуды при $\vartheta \sim 2n/l_0$ не совпадают, причем отношение амплитуд кулоновского и дифракционного рассеяния по порядку величины равно \sqrt{n} . Равенство амплитуд имеет место при $\vartheta \sim \frac{4n^2}{l_0}$ и лишь при больших углах амплитуда дифракционного рассеяния стано-

вится больше амплитуды кулоновского рассеяния. При $\vartheta \sim \frac{2n}{l_0}$ происходит резкое уменьшение сечения рассеяния по порядку величины в n раз.

Так как сечение дифракционного рассеяния в среднем обратно пропорционально кубу угла рассеяния, а не четвертой степени, как это имеет место при рассеянии в чисто кулоновском поле, то можно сказать, что благодаря наличию поглощающего ядра, рассеяние на большие углы становится более вероятным. В силу этого средний угол рассеяния оказывается значительно большим, чем в случае чисто кулоновского рассеяния.

5. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА

В предыдущих пунктах мы видели, что для определения сечений упругого рассеяния с учетом дифракционных эффектов фактически достаточно знания дифракционной картины в плоскости, перпендикулярной импульсу падающих частиц. Однако этой картины непосредственно уже недостаточно для определения сечения дифракционного излучения фотонов заряженными частицами, а также сечениями дифракционного образования пар, так как для вычисления соответствующих матричных элементов требуется знание волновых функций частиц. Но при больших энергиях частиц, которыми мы интересуемся, существенны малые передачи импульса ядру, т. е. большие прицельные параметры. Поэтому для вычисления матричных элементов достаточно знания волновых функций частиц вне ядра, в области волновой зоны. В этой области волновые функции могут быть найдены с помощью оптического принципа Гюйгенса, который мы теперь и сформулируем.

Принцип Гюйгенса устанавливает связь между значением волновой функции в некоторой точке r и значениями волновой функции на замкнутой поверхности S , окружающей эту точку.

Рассмотрим прежде всего частицы со спином нуль. Принцип Гюйгенса для скалярного уравнения *)

$$\Delta\psi + p^2\psi = 0$$

может быть сформулирован следующим образом:

$$\psi(r) = \frac{p}{2\pi i} \int_S \frac{e^{ip(r-\rho)}}{|r-\rho|} \psi(\rho) ds, \quad (32)$$

где ρ лежит на поверхности S (ds — элемент этой поверхности).

Мы будем всегда в дальнейшем выбирать в качестве S плоскость, проходящую через центр ядра и перпендикулярную импульсу p падающей частицы (см. рис. 3).

Предположим сначала ядро абсолютно черным. Тогда интегрирование в (32) должно производиться по плоскости S за вычетом круга радиуса R . Пусть волновая функция падающих частиц имеет вид

$$\psi_p^-(r) = e^{ipr_*}$$

Подставляя это выражение под знак интеграла в (32) и интегрируя по всей плоскости S , включая площадь круга радиуса R , мы получим, очевидно, функцию $\psi_p(r)$. Поэтому принцип Гюйгенса в случае

*) Мы пользуемся здесь и в дальнейшем системой единиц, в которой $c = \hbar = 1$; p обозначает импульс частицы.

абсолютно черного ядра можно сформулировать в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} - \frac{p}{2\pi i} \int \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} \{1 - \Omega(\boldsymbol{\rho})\} d\boldsymbol{\rho}, \quad (33)$$

где $\Omega(\boldsymbol{\rho})$ определяется формулой (1) и интегрирование производится по всей плоскости S .

Интеграл, входящий в это соотношение, представляет собой расходящуюся дифрагированную волну, амплитуда которой очень мала в области тени за ядром (эта область обозначена на рис. 4 через (+)).

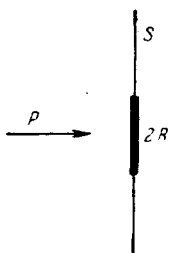


Рис. 3.

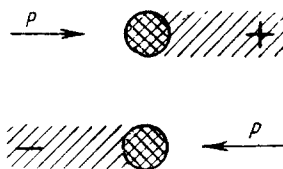


Рис. 4.

На больших расстояниях от ядра функцию $\psi(\mathbf{r})$ можно представить в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} + \frac{f(\vartheta)}{r} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}},$$

где

$$f(\vartheta) = \frac{ip}{2\pi} \int \{1 - \Omega(\boldsymbol{\rho})\} e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho} \quad (34)$$

(\mathbf{p}' — импульс рассеянной частицы). Эта величина представляет собой, очевидно, амплитуду упругого рассеяния. Она совпадает с полученным ранее иным способом выражением (4), если положить $L = 1$.

Формула (33) дает возможность учесть полупрозрачность и кулоновское поле ядра. Для этого следует заменить под знаком интеграла (33) величину $\Omega(\boldsymbol{\rho})$ на $\Omega_B^z(\boldsymbol{\rho})$:

$$\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} - \frac{p}{2\pi i} \int \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} \{1 - \Omega_B^z(\boldsymbol{\rho})\} d\boldsymbol{\rho}. \quad (35)$$

Мы обозначили здесь волновую функцию через $\psi_p^{(+)}(\mathbf{r})$ для того, чтобы подчеркнуть, что на больших расстояниях от ядра она представляет собой суперпозицию плоской падающей и расходящейся дифрагированной волны.

Такой асимптотикой, как известно^{26, 27}, должна обладать волновая функция частицы, исчезающей в процессе рассеяния. В частности, в процессе тормозного излучения такой асимптотикой должна обладать волновая функция начального состояния.

Если в процессе рассеяния частица возникает, то ее волновая функция должна асимптотически на больших расстояниях от ядра иметь вид суперпозиции падающей плоской и сходящейся сферической волн.

Заметим, что характер этой асимптотики допускает простую физическую интерпретацию. Если разложить плоскую волну на сходящиеся и расходящиеся волны, то в функции начального состояния при $r \rightarrow \infty$

только сходящиеся волны будут иметь амплитуды, не зависящие от природы рассеивателя, расходящиеся же волны будут полностью определяться силовым полем рассеивателя. Это соответствует тому, что частицы в начальном состоянии падают на рассеиватель. Аналогичным образом в функциях конечного состояния при $r \rightarrow \infty$ только расходящиеся волны могут иметь амплитуды, не зависящие от природы рассеивателя, сходящиеся же волны должны определяться силовым полем рассеивателя.

Приведем необходимое для дальнейшего выражение для волновой функции, дифрагированной от ядра и описывающей частицу, возникающую в результате рассеяния:

$$\psi_p^{(-)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} + \frac{p}{2\pi i} \int \{1 - \Omega_B^*(\rho)\} \frac{e^{-ip|\mathbf{r}-\rho|}}{|\mathbf{r}-\rho|} d\rho. \quad (36)$$

Эта функция отличается от $\psi_p^{(+)}$ тем, что под знаком интеграла здесь входит не $e^{ip|\mathbf{r}-\rho|}$, а $e^{-ip|\mathbf{r}-\rho|}$; кроме того, сюда входит не Ω_B^z , а Ω_B^{z*} . На больших расстояниях эта функция представляет собой суперпозицию падающей плоской и сходящейся сферической волн (с учетом полупрозрачности и кулоновского поля ядра).

Легко убедиться, что область тени для функции $\psi_p^{(-)}$ лежит перед ядром, как изображено на рис. 4 (область $(-)$).

Выражениями (35) и (36) формулируется обобщенный принцип Гюйгенса для скалярных частиц. Сформулируем теперь принцип Гюйгенса для частиц со спином, равным половине⁴.

Покажем, что для монохроматических спинорных волн, удовлетворяющих уравнению Дирака

$$\left(\gamma \frac{\partial}{\partial r} - \gamma_4 E + m \right) \psi(\mathbf{r}) = 0,$$

где m — масса частицы и γ_i — матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2\delta_{ik},$$

имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\gamma \frac{\partial}{\partial r} - \gamma_4 E - m \right) \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathbf{n} \psi(\mathbf{r}') ds' \equiv \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int_{\hat{S}(p)} (ip_\mu \gamma_\mu - m) \frac{e^{ip(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{p^2 + m^2 - E^2} \gamma \mathbf{n} \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{p} ds', \end{aligned} \quad (37)$$

где $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ и \mathbf{n} — единичный вектор в направлении внешней нормали к S .

Преобразуем для этого поверхностный интеграл в объемный и воспользуемся тем, что

$$\gamma \frac{\partial}{\partial r'} \psi(\mathbf{r}') = (E\gamma_4 - m) \psi(\mathbf{r}').$$

Правая часть (37) приобретает при этом вид

$$\begin{aligned} X &\equiv -\frac{1}{4\pi} \int \left(\gamma \frac{\partial}{\partial r'} + \gamma_4 E + m \right) \left(\gamma \frac{\partial}{\partial r'} + \gamma_4 E - m \right) \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int (\Delta_{\mathbf{r}} + p^2) \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \end{aligned}$$

но

$$(\Delta_r + p^2) \frac{e^{ipr}}{r} = -4\pi\delta(r).$$

Поэтому

$$X = \psi(r).$$

Соотношение (37) представляет собой принцип Гюйгенса для спинорных волн.

Перепишем (37) в виде, аналогичном (33). Пусть на абсолютно черное ядро падает спинорная волна

$$\psi(r) = u_p e^{ipr},$$

где u_p — спинорная амплитуда, удовлетворяющая условию нормировки

$$u_p^* u_p = 1.$$

Тогда принцип Гюйгенса (37) дает

$$\psi(r) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\gamma \frac{\partial}{\partial r} - \gamma_4 E - m \right) \gamma_n \frac{e^{ip|r-\rho|}}{|r-\rho|} \Omega(\rho) u_p e^{ip\rho} d\rho,$$

где интегрирование производится по всей плоскости S , перпендикулярной \mathbf{r} и проходящей через центр ядра. Это выражение можно переписать в виде

$$\psi(r) = u_p e^{ipr} - \frac{1}{4\pi} \int \left(\gamma \frac{\partial}{\partial r} - \gamma_4 E - m \right) \gamma_n \frac{e^{ip|r-\rho|}}{|r-\rho|} \{1 - \Omega(\rho)\} u_p d\rho. \quad (38)$$

Второе слагаемое в последней формуле представляет собой дифрагированную около ядра волну. На больших расстояниях от ядра $\psi(r)$ имеет вид суммы плоской и расходящейся сферической волн

$$\psi(r) = u_p e^{ipr} + \frac{e^{ipr}}{r} u_{p'} f(\vartheta),$$

где

$$f(\vartheta) = \frac{ip}{2\pi} u_p^* u_p \int \{1 - \Omega(\rho)\} e^{i(p-p')\rho} d\rho. \quad (39)$$

Эта величина представляет собой амплитуду упругого дифракционного рассеяния частиц со спином $1/2$. Дифференциальное сечение упругого рассеяния связано с $f(\vartheta)$ соотношением (9).

Просуммируем квадрат модуля $f(\vartheta)$ по конечным состояниям спина частицы и усредним по начальным состояниям. Это может быть сделано с помощью формулы

$$\frac{1}{2} \sum |u_p^* u_p|^2 = 1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

В результате мы получим следующее выражение для сечения упругого дифракционного рассеяния спинорных частиц абсолютно черным ядром¹¹:

$$d\sigma_e = \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \left| \int_0^\infty \{1 - \Omega(\rho)\} J_0(p\rho \sin \vartheta) \rho d\rho \right|^2 p^2 d\vartheta. \quad (40)$$

Это выражение отличается множителем $1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ от сечения рассеяния скалярных частиц.

Если в формуле (38) заменить $\Omega(\rho)$ на $\Omega_B^z(\rho)$, то мы получим формулировку принципа Гюйгенса для спинорных заряженных частиц, в кото-

рой учитывается как полупрозрачность, так и кулоновское поле ядра:

$$\psi^{(+)}(\mathbf{r}) = u_p e^{ipr} - \frac{1}{4\pi} \int \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E - m \right) \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} \{1 - \Omega_B^z(\boldsymbol{\rho})\} \gamma n u_p d\boldsymbol{\rho}. \quad (41)$$

Асимптотически при больших r эта функция представляет собой суперпозицию падающей плоской и расходящейся дифрагированной сферической волн.

Аналогично (41) можно написать также выражение для волновой функции $\psi^{(-)}(\mathbf{r})$, представляющей собой на больших расстояниях от ядра суперпозицию падающей плоской и сходящейся дифрагированной сферической волн:

$$\psi^{(-)}(\mathbf{r}) = u_p e^{ipr} - \frac{1}{4\pi} \int \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E m \right) \frac{e^{-ip|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} \{1 - \Omega_B^{z*}(\boldsymbol{\rho})\} \gamma n u_p d\boldsymbol{\rho}. \quad (42)$$

Такого типа функцией должно описываться конечное состояние протона в процессе дифракционного излучения фотона протоном, а также состояния протона и антипротона в процессе дифракционного образования фотонном пар протон — антипротон.

6. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНОВ π -МЕЗОНАМИ

Мы перейдем теперь к рассмотрению дифракционных процессов, в которых участвуют фотоны. Начнем с рассмотрения дифракционного излучения фотона скалярной заряженной частицей π -мезоном¹. Этот процесс можно исследовать с помощью теории возмущений, считая возмущением взаимодействие между π -мезоном и электромагнитным полем.

Если пользоваться «точными» волновыми функциями частицы, то, как известно, излучение фотона представляет собой эффект первого приближения теории возмущений. При исследовании тормозного излучения фотона электроном в кулоновском поле ядра такими функциями являются волновые функции электрона в кулоновском поле ядра, относящиеся к непрерывному спектру. В рассматриваемом нами случае «точными» функциями являются функции вида (35) и (36), учитывающие как дифракцию волн около поглощающего ядра, так и его кулоновское поле.

Матрица рассеяния первого приближения имеет, как известно, вид²⁷

$$S^{(1)} = i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x,$$

где $j_\mu(x)$ — оператор плотности тока частицы и $A_\mu(x)$ — оператор потенциала электромагнитного поля. Для скалярных частиц плотность тока связана с оператором поля соотношением²⁷

$$j_\mu(x) = ie \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (43)$$

Мы будем рассматривать сопровождаемый излучением фотона переход π -мезона из состояния с импульсом p и энергией E в состояние с импульсом p' и энергией E' . Волновые функции этих состояний согласно результатам п. 5 имеют вид

$$\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2E}} \left\{ e^{ipr} - \frac{r}{2\pi i} \int (1 - \Omega(\boldsymbol{\rho})) \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} d\boldsymbol{\rho} \right\}, \quad (44)$$

$$\psi_{p'}^{(-)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2E'}} \left\{ e^{ip'r} + \frac{p'}{2\pi i} \int (1 - \Omega^*(\boldsymbol{\rho})) \frac{e^{-ip'|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} d\boldsymbol{\rho} \right\}. \quad (44')$$

Первая функция представляет собой при $r \rightarrow \infty$ суперпозицию плоской падающей и сферической расходящейся волн, а вторая — суперпозицию плоской и сферической сходящейся волн. Такая асимптотика соответствует исчезновению частицы в начальном и появлению частицы в конечном состояниях.

Функции нормированы таким образом, чтобы в единичном объеме находился один мезон (по этой причине перед плоской волной стоит множитель $\frac{1}{\sqrt{2E}}$).

В качестве $A_\mu(x)$ нужно подставить в выражение $S^{(1)}$ потенциал, соответствующий излучению фотона. Если обозначить через ω , \mathbf{k} и e_μ частоту, импульс и поляризацию фотона, то

$$A_\mu(x) = \frac{e_\mu}{\sqrt{2\omega}} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (45)$$

(нормировочный объем предполагается равным единице).

Замечая, далее, что ток, связанный с переходом $\psi_p^+(r) \rightarrow \psi_{p'}^{(-)}(r)$, равен согласно (43)

$$j_\mu(x) = -2ie\psi_{p'}^{(-)*} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_p^{(+)},$$

получим после интегрирования по t следующее выражение для матричного элемента перехода:

$$S_{i \rightarrow f}^{(1)} = 2\pi i U_{i \rightarrow f} (E - E' - \omega),$$

где

$$U_{i \rightarrow f} = \frac{2e}{\sqrt{2\omega}} \int \psi_{p'}^{(-)*}(\mathbf{r}) (e\nabla) \psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (46)$$

Вероятность перехода в единицу времени равна

$$\omega = 2\pi |U_{i \rightarrow f}|^2 (E - E' - \omega).$$

Умножая это выражение на $\frac{d\mathbf{k} d\mathbf{p}'}{(2\pi)^6}$ и устраняя δ -функцию интегрированием по энергии мезона в конечном состоянии, получим, после деления на плотность потока мезонов в начальном состоянии $v = \frac{p}{E}$, дифференциальное сечение излучения фотона π -мезоном:

$$d\sigma_\gamma^0 = \frac{e^2}{2\omega} \frac{p'}{p} \left| \int \psi_{p'}^{(-)*}(\mathbf{r}) (e\nabla) \psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r} \right|^2 \frac{\omega^2 d\omega}{(2\pi)^5} d\omega_\gamma d\omega', \quad (47)$$

где $d\omega_\gamma$ и $d\omega'$ — элементы телесных углов, в которых лежат \mathbf{k} и \mathbf{p}' .

При вычислении входящего сюда интеграла следует иметь в виду, что, как было разъяснено в предыдущих пунктах, дифракционное рассмотрение законно только в области малых углов рассеяния. В рассматриваемом случае должны быть малы угол между импульсами π -мезона в начальном и конечном состояниях и угол между импульсом фотона и начальным импульсом π -мезона. При этих условиях интеграл от произведения дифрагированных волн в (47) (вторые слагаемые в (44) и (44')) обращается в нуль. Действительно, области тени в функциях $\psi_{p'}^{(-)}(r)$ и $\psi_p^{(+)}(r)$ при малых углах не перекрываются. Поэтому дифрагированные функции отличны от нуля в разных областях (не заштрихованных на рис. 4) и интеграл от их произведения равен нулю.

Далее обращается в нуль интеграл от произведения плоских волн, так как такой интеграл отличается от нуля только в том случае, если $\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k} = 0$, но это условие не может, очевидно, выполняться из-за передачи импульса ядру. Таким образом, интеграл в (47) сводится к

$$M \equiv \int \psi_{\mathbf{p}'}^{(-)*}(\mathbf{r})(e\nabla)\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}d\mathbf{r} = \\ = \frac{i}{2\pi} \left\{ p' \iint \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} (1 - \Omega(\boldsymbol{\rho}))(e\nabla)e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{r}}d\boldsymbol{\rho}d\mathbf{r} - \right. \\ \left. - p \iint \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} (1 - \Omega(\boldsymbol{\rho}))(e\nabla)e^{-i(\mathbf{p}'+\mathbf{k})\mathbf{r}}d\boldsymbol{\rho}d\mathbf{r} \right\}. \quad (47')$$

Используя соотношение

$$\int \frac{e^{ipr}}{r} e^{iqr} d\mathbf{r} = -\frac{2\pi}{p} \frac{1}{p-q}, \quad (48)$$

можно переписать M в виде

$$M = \frac{ep'}{p - |\mathbf{p}' + \mathbf{k}|} \int e^{-i(\mathbf{p}'+\mathbf{k})\boldsymbol{\rho}} \{1 - \Omega(\boldsymbol{\rho})\} d\boldsymbol{\rho} + \\ + \frac{ep}{p' - |\mathbf{p} - \mathbf{k}|} \int e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\boldsymbol{\rho}} \{1 - \Omega(\boldsymbol{\rho})\} d\boldsymbol{\rho}. \quad (49)$$

Будем считать ядро абсолютно черным заряженным шариком. Воспользовавшись выражением (25) для $\Omega(\boldsymbol{\rho})$ и учитывая малость углов между \mathbf{p} , \mathbf{k} и \mathbf{p}' , получим следующее выражение для M ¹¹:

$$M = \left(\frac{ep'}{p - |\mathbf{p}' + \mathbf{k}|} + \frac{ep}{p' - |\mathbf{p} - \mathbf{k}|} \right) \left\{ \frac{RJ_1(|\mathbf{p}'\boldsymbol{\vartheta}' + \mathbf{k}\boldsymbol{\vartheta}|R)}{|\mathbf{p}'\boldsymbol{\vartheta}' + \mathbf{k}\boldsymbol{\vartheta}|} e^{2i\eta(R)} + \right. \\ \left. + \frac{2in}{|\mathbf{p}'\boldsymbol{\vartheta}' + \mathbf{k}\boldsymbol{\vartheta}|} \int_R^\infty e^{2i\eta(\rho)} J_1(|\mathbf{p}'\boldsymbol{\vartheta}' + \mathbf{k}\boldsymbol{\vartheta}|\rho) d\rho \right\}, \quad (49')$$

где $\boldsymbol{\vartheta}$ и $\boldsymbol{\vartheta}'$ — двумерные угловые векторы, определяемые с помощью соотношений

$$\mathbf{p}' = \frac{\mathbf{p}'\mathbf{p}}{p^2} \mathbf{p} + p'\boldsymbol{\vartheta}', \\ \mathbf{k} = \frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{p^2} \mathbf{p} + k\boldsymbol{\vartheta}.$$

Просуммированное по поляризациям фотона сечение дифракционного излучения равно¹¹

$$d\sigma_Y^0 = \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{p'}{p} \left| \frac{RJ_1(\mu|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|R)}{|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|} + \frac{2in}{|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|} \int_0^\infty e^{2i(\gamma(\rho) - \eta(R))} \times \right. \\ \left. \times J_1(\mu|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|\rho) d\rho \right|^2 \left(\frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta, \quad (50)$$

где μ — масса мезона и

$$\xi = \frac{E}{\mu} \boldsymbol{\vartheta}, \quad \eta = \frac{E'}{\mu} (\boldsymbol{\vartheta}' - \boldsymbol{\vartheta}).$$

Вясним теперь условия применимости этой формулы. Оценим для этого область эффективных расстояний от ядра, вносящих основной вклад в интеграл M .

Из формулы (48) следует, что эффективными в (47') являются расстояния порядка

$$r_{\text{eff}} \sim \frac{1}{p - |\mathbf{p}' + \mathbf{k}|}.$$

Воспользовавшись законом сохранения энергии, можно представить это выражение в виде

$$r_{\text{eff}} \approx \frac{2pp'}{k(\mu^2 + p^2\vartheta^2)}, \quad (51)$$

где μ — масса π -мезона. Отсюда следует, что если $E \gg \mu$ и $\vartheta \leq \mu/E$, то $r_{\text{eff}} \gg E/\mu^2 \gg R$. Это оправдывает пренебрежение областью внутри ядра или нуклона. Заметим, что нуклон можно считать черным при $E \gg \mu$.

Выражение для сечения дифракционного излучения получено нами в предположении, что π -мезон является точечной частицей. Между тем сильное взаимодействие π -мезона с нуклонным фоном должно приводить к «размазыванию» заряда π -мезона по области, имеющей размеры порядка или меньшие чем $1/\mu$. При выполнении условия $r_{\text{eff}} \gg R$ излучение происходит на больших расстояниях от ядра. Поэтому влияние электрических «размеров» π -мезона на излучение фотона должно в этих условиях приводить к появлению «форм-фактора» π -мезона¹. Этот «форм-фактор», который мы будем обозначать через F_π , является функцией инвариантной частоты фотона в системе покоя π -мезона

$$F_\pi = F_\pi \left(\frac{E\omega - \mathbf{p}\mathbf{k}}{\mu^2} \right). \quad (52)$$

Если $E \gg \mu$, $\vartheta \ll 1$, то

$$F_\pi = F_\pi \left(\frac{\omega}{2E} + \frac{E\omega}{2\mu^2} \vartheta^2 \right). \quad (52')$$

При малых значениях аргумента «форм-фактор» равен единице; при больших значениях аргумента он стремится к нулю.

При введении «форм-фактора» необходимо иметь в виду следующие обстоятельства¹:

1. Излучение фотона не зависит от деталей, характеризующих столкновение π -мезона с ядром. Существенным является только знание волновой функции π -мезона вдали от ядра; поэтому ядро не может оказать серьезного влияния на свойства нуклонного вакуума, окружающего π -мезон и, следовательно, в излучении проявляется структура невозмущенной частицы.

2. В случае дифракционного излучения необходимо, чтобы инвариантные частоты фотона в системах покоя, связанных с падающим и дифрагированным мезоном, мало отличались друг от друга. Это приводит при малых углах к условию

$$\left| \vartheta^2 E - (\vartheta - \vartheta')^2 E' - \frac{\mu^2 \omega}{EE'} \right| \frac{\omega}{2\mu^2} \ll 1. \quad (53)$$

3. Необходимо, наконец, предполагать, чтобы в процессе дифракции π -мезоны не испытывали слишком больших ускорений, так как в противном случае это ускорение сможет повлиять на форму π -мезона. Отсюда можно заключить, что введение «форм-фактора» налагает условие

$$\frac{\omega^2}{2EE'} + \frac{EE'}{2\mu^2} \vartheta'^2 \ll 1. \quad (53')$$

Это условие вместе с условием (53) показывает, что для введения «форм-фактора» должны выполняться неравенства

$$\omega \ll E, \vartheta' < \frac{\mu}{2E}, \vartheta \ll \frac{\mu^2}{E\omega\vartheta'}. \quad (54)$$

При этом «форм-фактор» будет зависеть только от $\omega\vartheta^2$:

$$F_{\pi} = F_{\pi} \left(\frac{E\omega\vartheta^2}{2\mu^2} \right). \quad (55)$$

Если условие (53) не выполнено, то простое понятие «форм-фактора» теряет смысл и вместо него в формулы для интенсивности излучения будет входить более сложная величина, связанная с двумя инвариантными частотами фотона и учитывающая влияние ускорения, т. е. содержащая еще инвариант

$$\frac{\omega^2}{2EE'} + \frac{EE'\vartheta'^2}{2\mu^2}.$$

Таким образом, при выполнении условий (53), (53'), (54) сечение излучения должно вместо (50) определяться следующей формулой^{1,11}:

$$d\sigma_{\gamma} = \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{p'}{p} \left| F_{\pi} \left(\frac{E\omega - \mathbf{p}\mathbf{k}}{\mu^2} \right) \right|^2 \left| \frac{RJ_1(\mu |\xi + \eta| R)}{|\xi + \eta|} + \frac{2in}{|\xi + \eta|} \int_R^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2in} J_1(\mu |\xi + \eta| \rho) d\rho \right|^2 \left(\frac{\xi}{1+\xi^2} + \frac{\eta}{1+\eta^2} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (56)$$

Полагая здесь $n=0$, мы получим чисто дифракционное излучение¹ (без «форм-фактора»)

$$d\sigma_{\gamma}^0 = \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{p'}{p} \frac{R^2 J_1^2(\mu |\xi + \eta| R)}{|\xi + \eta|^2} \left(\frac{\xi}{1+\xi^2} + \frac{\eta}{1+\eta^2} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (57)$$

Если же положить $R=0$, то, учитывая формулу

$$\int_0^{\infty} e^{2i\eta(\rho)} J_1(\mu |\xi + \eta| \rho) d\rho = \frac{2^{2in} p^{2in}}{(\mu |\xi + \eta|)^{2in+1}} \frac{\Gamma(1+in)}{\Gamma(1-in)},$$

мы получим известное выражение для сечения излучения фотона ультрарелятивистским π -мезоном в кулоновском поле ядра (при малых углах рассеяния)²⁸:

$$d\sigma_{\gamma}^c = \frac{e^2 n^2}{\pi^3} \frac{p'}{p} \frac{1}{\mu^2 |\xi + \eta|^4} \left(\frac{\xi}{1+\xi^2} + \frac{\eta}{1+\eta^2} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (58)$$

Мы видим таким образом, что обобщенный принцип Гюйгенса, справедливый, строго говоря, при $R \gg \lambda$, приводит к правильному значению сечения излучения фотона в чисто кулоновском поле точечного ядра ($R=0$) в области ультрарелятивистских энергий и малых углов рассеяния. Это связано с тем обстоятельством, что при малых углах рассеяния излучение происходит вдали от ядра, а в этой области волновые функции практически могут быть определены из рассмотрения дифракционной картины с помощью принципа Гюйгенса.

Так как излучение происходит вдали от ядра, то при вычислении матричного элемента M можно с самого начала пользоваться асимптотическими выражениями для функций $\psi_{\mathbf{p}}^+(\mathbf{r})$ и $\psi_{\mathbf{p}'}^-(\mathbf{r})$ при $r \rightarrow \infty$:

$$\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{\sqrt{2E}} \left\{ e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} + \frac{f^+(\mathbf{p})}{r} e^{i\mathbf{p}r} \right\},$$

$$\psi_{\mathbf{p}'}^{(-)}(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{\sqrt{2E'}} \left\{ e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}} + \frac{f^-(\mathbf{p}')}{r} e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}} \right\},$$

где $f^+(\mathbf{p})$ и $f^-(\mathbf{p}')$ представляют собой, очевидно, амплитуды упругого рассеяния мезонов. Вычислив M с такими функциями, получим с учетом «форм-фактора» F_π следующее выражение для сечения излучения фотона⁷:

$$d\sigma_\gamma = \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{p'}{p} |F_\pi|^2 \left| \frac{\xi}{1+\xi^2} f^-(\mathbf{p}') + \frac{\eta}{1+\eta^2} f^+(\mathbf{p}) \right|^2 \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (59)$$

Это выражение показывает, что сечение излучения фотона по существу определяется амплитудой упругого рассеяния (и, конечно, «форм-фактором» мезона).

Сравним сечение излучения (50) с сечением упругого рассеяния мезонов. Представив последнее в виде

$$d\sigma_e = \sigma_e(\zeta) d\zeta, \quad \zeta = \frac{p}{\mu} \vartheta,$$

где

$$\sigma_e(\zeta) = \left| \frac{RJ_1(\mu\zeta R)}{\zeta} + \frac{2in}{\zeta} \int_R^\infty \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2in} J_1(\mu\zeta\rho) d\rho \right|^2, \quad (60)$$

мы видим, что

$$d\sigma_\gamma^0 = \sigma_e(\xi + \eta) \frac{e^2 p'}{4\pi^3 p} \left(\frac{\xi}{1+\xi^2} + \frac{\eta}{1+\eta^2} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (61)$$

Таким образом, сечение излучения отличается от сечения упругого рассеяния множителем

$$dN = \frac{e^2 p'}{4\pi^3 p} \left(\frac{\xi}{1+\xi^2} + \frac{\eta}{1+\eta^2} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (62)$$

Подчеркнем еще раз, что соотношение (61), связывающее сечения упругого рассеяния и рассеяния с излучением фотона, справедливо при ультрарелятивистских энергиях и малых углах рассеяния. Далее мы увидим, что соотношение такого же типа справедливо и для частиц со спином $\frac{1}{2}$.

Перейдем теперь к определению спектрального распределения дифракционного излучения. Проинтегрируем для этого (56) по ξ и η . Если предполагать, что «форм-фактор» не отличается от единицы, то в результате интегрирования мы получим¹¹

$$d\sigma_\gamma(\omega) = \frac{e^2}{\pi} \frac{p'}{p} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^\infty \varphi(q) \left| \frac{RJ_1(2\mu Rq)}{q} + \frac{in}{\mu} \frac{(2\mu Rq)^{-2in}}{q^2} \times \right. \\ \left. \times \int_{2\mu Rq}^\infty J_1(\zeta) \zeta^{2in} d\zeta \right|^2 q dq, \quad (63)$$

где

$$\varphi(q) = \frac{2q^2 + 1}{q \sqrt{1+q^2}} \ln(q + \sqrt{1+q^2}) - 1.$$

В предельном случае $n \ll 1$ это сечение имеет вид суммы сечения чисто дифракционного излучения ($d\sigma_\gamma^d(\omega)$) и сечения тормозного излучения в кулоновском поле протяженного ядра ($d\sigma_\gamma^c(\omega)$):

$$d\sigma_\gamma(\omega) = d\sigma_\gamma^d(\omega) + d\sigma_\gamma^c(\omega), \quad n \ll 1. \quad (64)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_{\gamma}^{\partial}(\omega) &= \frac{e^2 R^2}{\pi} \frac{p'}{p} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{\infty} J_1^2(2\mu R q) \frac{\varphi(q)}{q} dq \equiv \frac{e^2}{\pi} \frac{p'}{p} \frac{d\omega}{\omega} R n^{\partial}(\mu R), \\ d\sigma_{\gamma}^c(\omega) &= \frac{e^2 n^2}{\pi \mu^2} \frac{p'}{p} \frac{d\omega}{\omega} \int_{q_m}^{\infty} J_0^2(2\mu R q) \frac{\varphi(q)}{q^3} dq \equiv \frac{e^2}{\pi} \frac{p'}{p} \frac{d\omega}{\omega} \frac{n^2}{\mu^2} n^c(\mu R, q_m). \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Интегрирование в последней формуле производится от некоторого минимального значения $q_m = \frac{\mu \omega}{4EE'}$, определяемого из законов сохранения. В случае полного экранирования поля ядра электронами в качестве нижнего предела следует взять $q_m = Z^{1/3} m_e / 137\mu$ (m_e — масса электрона). При этом величина $n^c(\mu R, q_m)$ не будет зависеть от ω . Интегральное сечение излучения фотона с частотой, большей ω , будет равно в этом случае

$$\int_{\omega}^E d\sigma_{\gamma}(\omega) = \frac{e^2}{\pi} \left(R^2 n^{\partial} + \frac{n^2}{\mu^2} n^c \right) \left(\ln \frac{E}{e\omega} + \frac{\omega}{E} \right), \quad (66)$$

а полная потеря энергии частицей определится формулой

$$\int_0^E \omega d\sigma_{\gamma}(\omega) = \frac{e^2}{2\pi} E \left(R^2 n^{\partial} + \frac{n^2}{\mu^2} n^c \right). \quad (67)$$

В предельном случае $R\mu \gg 1$ (для тяжелых ядер) приведенные выражения сильно упрощаются:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\gamma}^{\partial}(\omega) &= \frac{2,3}{4\pi} \frac{e^2 R}{\mu} \frac{p'}{p} \frac{d\omega}{\omega}, \\ d\sigma_{\gamma}^c(\omega) &= \frac{4e^2 n^2}{3\pi \mu^2} \frac{p'}{p} \ln \frac{2EE'}{\mu^2 R \omega} \frac{d\omega}{\omega}. \end{aligned} \quad (68)$$

При полном экранировании поля ядра электронами интегральное сечение излучения фотона с частотой, превосходящей ω , равно

$$\int_{\omega}^E d\sigma_{\gamma}(\omega) = \frac{2,3}{4\pi} \frac{e^2 R}{\mu} \left(1 + 2,4 \frac{n^2}{\mu R} \ln \frac{137}{2m_e R Z^3} \right) \left(\ln \frac{E}{e\omega} + \frac{\omega}{E} \right). \quad (69)$$

Приведенные формулы для сечения излучения выведены в предположении абсолютно черного ядра. Для того чтобы учесть полупрозрачность ядра, нужно, как уже разъяснялось ранее при формулировке принципа Гюйгенса, пользоваться функцией $\Omega_B(\rho)$ вместо $\Omega(\rho)$. Если ядро можно считать имеющим резкую границу, то $\Omega_B(\rho)$ определяется формулой (18).

В этом случае результат замены $\Omega(\rho)$ на $\Omega_B(\rho)$ сводится к замене в (63) величины $RJ_1(2\mu Rq)/q$ на

$$2\mu R^2 \int_0^1 (1 - e^{-BRV\sqrt{1-y^2}}) J_0(2\mu Rq y) y dy.$$

Мы не будем рассматривать более подробно это выражение.

7. ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНА, СВЯЗАННОЕ С ПОГЛОЩЕНИЕМ π -МЕЗОНА ЯДРОМ ИЛИ НУКЛОНОМ

Наряду с дифракционным излучением фотона π -мезоном, проходящим вдали от ядра, существует второй механизм излучения, связанный с непосредственным захватом π -мезона нуклоном или ядром. Такое излучение мы будем называть излучением остановки¹.

Для определения вероятности излучения остановки нельзя пользоваться методами обычной теории возмущений, так как в конечном состоянии π -мезон поглощается ядром. Поэтому нахождение этой вероятности требует специального рассмотрения. Оно может быть проведено следующим образом¹.

Будем исходить из уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \mu^2 \right) \psi = -2ieA\nabla\psi, \quad (70)$$

описывающего состояние π -мезона (вне ядра) при наличии электромагнитного поля A . В качестве A мы возьмем потенциал, соответствующий излученному фотону, с волновым вектором \mathbf{k} , частотой ω и поляризацией ϵ и определяемый формулой (45). Так как заряд $e \ll 1$, то в члене, содержащем электромагнитное поле, можно заменить ψ на волновую функцию падающего π -мезона:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2E}} e^{i(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et)}.$$

Таким образом, мы получим неоднородное уравнение для определения функции $\psi = \Phi(\mathbf{r}) e^{-iE't}$, $E' = E - \omega$

$$(-E'^2 + \mu^2 + \Delta)\Phi(\mathbf{r}) = -ie \frac{\epsilon\mathbf{p}}{\sqrt{E\omega}} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{r}}. \quad (70')$$

Замечая, что функция Грина уравнения $(p'^2 + \Delta)\Phi(\mathbf{r}) = 0$ имеет вид

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

получим, используя (48), следующее решение (70')

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{ie}{4\pi} \frac{\epsilon\mathbf{p}}{\sqrt{E\omega}} \int \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' = \\ &= \frac{ie}{2} \frac{\epsilon\mathbf{p}}{\sqrt{E\omega} p'} \frac{1}{p' - |\mathbf{p}-\mathbf{k}|} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{r}}, \quad p' = \sqrt{(E-\omega)^2 - \mu^2}. \end{aligned} \quad (71)$$

Найдя $\Phi(\mathbf{r})$ на поверхности ядра, которое мы будем предполагать абсолютно черным, можно определить поток π -мезонов, поглощаемых ядром, когда на бесконечности имеется один фотон. Этот поток определяется формулой (43) (без множителя e) и равен

$$J = \pi R^2 \frac{e^2}{2} \frac{(\epsilon\mathbf{p})^2}{E\omega p'^2} \frac{p'}{(p' - |\mathbf{p}-\mathbf{k}|)^2}.$$

Разделив его на плотность потока падающих π -мезонов, равную $v = \frac{p}{E}$, и суммируя по поляризациям фотона, найдем дифференциальное сечение излучения остановки

$$d\sigma_S = \frac{e^2}{\pi} R^2 \frac{\vartheta^2}{(\mu^2 + \vartheta^2)^2} \frac{E-\omega}{E} F_\pi \left(\frac{E\omega\vartheta^2}{2\mu^2} \right) \frac{d\omega}{\omega} d\vartheta, \quad (72)$$

причем по тем же соображениям, которые были приведены при рассмотрении дифракционного излучения, мы ввели «форм-фактор» π -мезона $F_\pi \left(\frac{E\omega\vartheta^2}{2\mu} \right)$ (ϑ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{p}).

Если $\omega \ll E$, то это выражение соответствует классическому остановочному излучению, возникающему при внезапной остановке заряда, когда время остановки мало.

Проинтегрировав (72) по частотам ω , превосходящим некоторую минимальную частоту ω_m , и по углам, меньшим некоторого максимального значения ϑ_M , получим

$$\sigma_{\gamma_{\omega \geq \omega_m}, \vartheta \leq \vartheta_M}^S = e^2 R^2 \left(\ln \frac{E}{\omega_m} - 1 \right) \ln \frac{E^2 \vartheta_M^2}{e\mu^2}. \quad (73)$$

В отличие от дифракционного излучения, в котором главную роль играют углы ϑ порядка μ/E , в излучении остановки область эффективных углов гораздо больше, но при $\vartheta > \sqrt{\frac{2\mu^2}{E\omega}}$ «форм-фактор» может значительно уменьшить сечение. Поэтому для получения полной вероятности излучения остановки с частотой фотона, превосходящей ω_m , нужно проинтегрировать (72) по ϑ при $F_\pi = 1$ от $\vartheta = 0$ до $\vartheta \sim \sqrt{\frac{2\mu^2}{E\omega}}$ и по ω от ω_m до E :

$$\sigma_{\gamma_{\omega_m \leq \omega}}^S = \int_{\omega=\omega_m}^E \int_{\vartheta=0}^{\sqrt{2\mu^2/E\omega}} d\sigma_\gamma^S = \frac{1}{2} R^2 e^2 \ln^2 \frac{E}{\omega_m}. \quad (74)$$

Сравнение этого выражения с (69) показывает, что остановочное излучение несколько больше дифракционного.

Полная излученная энергия равна¹

$$E_\gamma = \int_{\omega=0}^E \omega d\sigma_\gamma^S = e^2 R^2 E. \quad (75)$$

При столкновении быстрого π -мезона с нуклоном или ядром наряду с излучением фотона может происходить также образование электронно-позитронной пары. Сечение такого процесса по порядку величины в $1/\alpha = 137$ раз меньше сечения излучения фотона. Однако рассмотрение этого эффекта представляет определенный интерес, так как регистрация фотонов может оказаться более сложной чем регистрация пар. Мы приведем здесь окончательный результат для интегрального сечения дифракционного образования электронно-позитронных пар в случае тяжелых ядер, когда $\mu R \gg 1$ ²³

$$\sigma_{\pm}^{\partial} = \frac{e^4 R^2}{3\pi} \frac{2,6}{\mu R} \left(\ln \frac{E}{m_e} \right)^2 \left[1 - \frac{11}{3 \ln \frac{E}{m}} \right], \quad (76)$$

где m_e — масса электрона.

Кроме дифракционного образования электронно-позитронной пары π -мезоном может происходить также образование таких пар при поглощении π -мезона ядром. Этот процесс можно назвать остановочным образованием пары. Сечение процесса определяется формулой²³

$$\sigma_{\pm}^S = \frac{2}{3\pi} e^4 R^2 \ln \frac{E}{\mu} \left(\ln \frac{E}{m} \right)^2 \left(1 - \frac{11}{3 \ln \frac{E}{m_e}} \right) \left(1 - \frac{1}{\ln \frac{E}{\mu}} \right). \quad (77)$$

8. ДИФРАКЦИОННОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ФОТОНОМ π-МЕЗОННЫХ ПАР

Перейдем теперь к рассмотрению дифракционного образования фотон-мезонных пар ^{2, 12, 7}. При больших энергиях фотонов образование пары происходит на больших расстояниях от ядра, поэтому мы, так же, как и при рассмотрении дифракционного излучения, можем в качестве волновых функций π⁺- и π⁻-мезонов взять функции, получаемые с помощью принципа Гюйгенса и учитывающие как поглощение мезонов ядрами, так и кулоновское поле ядра.

Пользуясь теорией возмущений, легко получить следующее выражение для матричного элемента образования фотон-мезонной пары π⁺ и π⁻:

$$M_{\pm} = ie \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \int \{ \psi_{+}^{*} (e\nabla) \psi_{-}^{*} - \psi_{-}^{*} (e\nabla) \psi_{+}^{*} \} e^{ikr} dr, \quad (78)$$

где **k**, ω, **e** — волновой вектор, частота и поляризация фотона ψ₊ и ψ₋ — волновые функции π⁺- и π⁻-мезонов. Так как обе эти частицы образуются в результате процесса рассеяния, то асимптотически на больших расстояниях от ядра функции ψ₊ и ψ₋ должны представляться суммами плоской падающей и сходящейся сферической волн. Согласно (36) функции с такой асимптотикой имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_{+}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2E_{+}}} \left\{ e^{ip_{+}r} + \frac{p_{+}}{2\pi i} \int \frac{e^{-ip_{+}|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} \{1 - \Omega_{B}^{+*}(\boldsymbol{\rho})\} d\boldsymbol{\rho}, \right. \\ \psi_{-}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2E_{-}}} \left\{ e^{ip_{-}r} + \frac{p_{-}}{2\pi i} \int \frac{e^{-ip_{-}|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} \{1 - \Omega_{B}^{-*}(\boldsymbol{\rho})\} d\boldsymbol{\rho}. \right. \end{aligned} \quad (78')$$

Легко убедиться, что главную роль в интеграле M_{\pm} играют большие расстояния, порядка $r_{eff} \sim \frac{2p_{+}p_{-}}{\mu^2\omega} \gg R$. Иными словами, образование пары происходит вдали от ядра. Поэтому при вычислении матричного элемента M_{\pm} можно сразу пользоваться асимптотическими выражениями для ψ₊(**r**) и ψ₋(**r**), справедливыми при $r \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \psi_{+}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2E_{+}}} \left\{ e^{ip_{+}r} + f_{+}(p_{+}) \frac{e^{ip_{+}r}}{r} \right\}, \\ \psi_{-}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2E_{-}}} \left\{ e^{ip_{-}r} + f_{-}(p_{-}) \frac{e^{ip_{-}r}}{r} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $f_{+}(p_{+})$ и $f_{-}(p_{-})$ — амплитуды упругого рассеяния π⁺- и π⁻-мезонов, определяемые общей формулой (28):

$$\begin{aligned} f_{+}(p_{+}) &= ip_{+} \int_0^{\infty} \{1 - \Omega_{B}^{+z}(\rho)\} J_0(p_{+}\vartheta\rho) \rho d\rho, \\ f_{-}(p_{-}) &= ip_{-} \int_0^{\infty} \{1 - \Omega_{B}^{-z}(\rho)\} J_0(p_{-}\vartheta\rho) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (79)$$

Предполагая ядро абсолютно черным, мы должны положить здесь

$$\Omega^{\pm z}(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho \leq R \\ e^{2i\eta_{\pm}(\rho)} & \text{при } \rho > R, \end{cases}$$

где

$$\eta_{\pm}(\rho) = n_{\pm} \ln p_{\pm}\rho, \quad n_{\pm} = \pm \frac{Ze^2E_{\pm}}{p_{\pm}}.$$

Если $|n_{\pm}| \ll 1$, то мы получим в области ультрарелятивистских энергий и малых углов рассеяния следующее выражение для M_{\pm} :

$$M_{\pm} = ie \sqrt{8\pi^3 p_+ p_- / \omega^3} \left(\frac{e\xi}{1+\xi^2} - \frac{e\eta}{1+\eta^2} \right) \frac{R}{2\mu^2 q} J_1(2\mu R q) + \\ + e \sqrt{8\pi^3 p_+ p_- / \omega^3} \frac{n^2}{\mu^3 q^3} \left\{ \frac{e\xi}{1+\xi^2} [J_0(2\mu R q) + 2\mu R q J_1(2\mu R q) \ln p_- R] + \right. \\ \left. + \frac{e\eta}{1+\eta^2} [J_0(2\mu R q) + 2\mu R q J_1(2\mu R q) \ln p_+ R] \right\}, \quad (80)$$

где ξ и η определяются соотношениями

$$p_+ = p_+ (1 - \xi^2 \mu^2 / 2p_-^2) \frac{k}{\omega} + \mu \xi, \quad k\xi = 0, \\ p_- = p_- (1 - \eta^2 \mu^2 / 2p_-^2) \frac{k}{\omega} + \mu \eta, \quad k\eta = 0$$

и

$$q = \frac{1}{2}(\xi + \eta).$$

Усредненное по поляризациям фотона с учетом «форм-фактора» мезона сечение образования пары равно ^{27, 12}

$$d\sigma_{\pm} = \frac{e^2 p_+ p_-}{32\pi^2 \omega^3} \left\{ \frac{R^2 J_1^2(2\mu R q)}{q^2} \left[\frac{\xi}{1+\xi^2} - \frac{\eta}{1+\eta^2} \right]^2 + \right. \\ + \frac{4n^2}{\mu^2 q^4} \left[\frac{\xi}{1+\xi^2} (J_0(2\mu R q) + 2\mu R q J_1(2\mu R q) \ln p_- R) + \right. \\ \left. \left. + \frac{\eta}{1+\eta^2} (J_0(2\mu R q) + 2\mu R q J_1(2\mu R q) \ln p_+ R) \right]^2 \right\} |F_{\pi}|^2 dE_+ d\xi d\eta. \quad (81)$$

Первое слагаемое в этой формуле определяет сечение чисто дифракционного образования пар ($d\sigma_{\pm}^{\partial}$), а второе — сечение образования пар в кулоновском поле ядра ($d\sigma_{\pm}^c$). Интерференция между обоими механизмами при образовании пары при $n \ll 1$ отсутствует.

Полагая $F_{\pi} = 1$ и интегрируя по ξ и η , получим при $\mu R \gg 1$ следующие выражения для $d\sigma_{\pm}^{\partial}$ и $d\sigma_{\pm}^c$:

$$d\sigma_{\pm}^{\partial} = \frac{e^2 R^2}{2} \varepsilon (1 - \varepsilon) d\varepsilon \left[\ln \frac{1 + \xi_{\max}^2}{e} + \frac{1}{1 + \xi_{\max}^2} \right], \\ d\sigma_{\pm}^c = \frac{2e^2 n^2}{\mu^2} \varepsilon (1 - \varepsilon) d\varepsilon \int_{q_{\min}}^{\infty} \frac{J_0^2(2\mu R q)}{q^3} \varphi(q) dq, \quad (82)$$

где

$$\varphi(q) = \frac{2q^2 + 1}{q} (1 + q^2)^{-\frac{1}{2}} \ln(q + \sqrt{1 + q^2}) - 1, \quad \varepsilon = \frac{E_+}{\omega}, \quad q_{\min} = \frac{\mu}{4\varepsilon(1 - \varepsilon)\omega}.$$

Максимальные значения $\xi_{\max} = \eta_{\max}$ определяются характером взаимодействия мезонов с ядром, а величина q_{\min} — законами сохранения.

Интегральные сечения σ_{\pm}^{∂} и σ_{\pm}^c равны

$$\sigma_{\pm}^{\partial} = \frac{e^2 R^2}{12} \left\{ \ln \frac{1}{e} (1 + \xi_{\max}^2) + \frac{1}{1 + \xi_{\max}^2} \right\}, \\ \sigma_{\pm}^c = \frac{4}{9} \frac{e^2 n^2}{\mu^3} \ln \frac{2\omega}{\mu^2 R}. \quad (83)$$

Мы видим, что сечение дифракционного образования пары π^+ и π^- , не сопровождающегося возбуждением ядра, в крайне релятивистском

случае не зависит от энергии фотона и оказывается пропорциональным квадрату радиуса ядра. По порядку величины оно равно

$$\sigma_{\pm}^{\partial} \sim \frac{e^2}{10} R^2. \quad (83')$$

При больших Z сечение образования пары π^+ и π^- под действием кулоновского поля ядра всего лишь в несколько раз меньше сечения σ_{\pm}^{∂} .

Полученные соотношения справедливы для абсолютно черного ядра. Полупрозрачность ядра уменьшает упругое рассеяние, а следовательно, и сечение образования пар. Соответствующие формулы, однако, очень сложны, и мы их здесь не приводим.

Заметим в заключение, что виртуально родившаяся пара π^+ и π^- не может превратиться в два π^0 -мезона². Это связано с законом сохранения зарядовой четности. Действительно, система, состоящая из двух π^0 -мезонов, зарядово-четна, а фотон — зарядово-нечетен. Что же касается ядра, то оно выполняет только функции черного тела, и должно считаться зарядово-четным. Поэтому процесс $\gamma \rightarrow 2\pi^0$ не может иметь места в рассматриваемых условиях, т. е. при $E \gg \mu$, и в предположении, что ядро является абсолютно черным. Отсюда следует, что вероятность процесса $\gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ значительно больше вероятности процесса $\gamma \rightarrow 2\pi^0$.

До сих пор мы рассматривали дифракционное образование π -мезонных пар фотоном. Однако дифракционное образование π -мезонных, а также и нуклонных пар может иметь место и при рассеянии ядром быстрых π -мезонов и нуклонов (с энергиями $E > 10^9$ эв)³. Такие частицы сильно поглощаются ядром, в результате чего возникают дифрагированные волны. Дифракционное же рассеяние может сопровождаться испусканием π -мезонов, а возможно, и нуклонных пар. Так как при этом генерация новых частиц осуществляется частицей, не проникающей внутрь ядра, то этот процесс можно назвать внешней генерацией.

Импульс, передаваемый в таком процессе ядру, относительно мал, порядка или меньше μ (μ — масса мезона); поэтому ядро не возбуждается, и в процессе генерации не должно возникать медленных нуклонов. Возникающие частицы должны в основном двигаться вдоль направления скорости первичной частицы.

Если первичная частица с массой M генерирует мезон с энергией E , то ее энергия должна значительно превосходить величину $A^{2/3}M^2/\mu$. По порядку величины сечение образования пары составляет

$$\sigma_{\pm} \sim g^2 A^{1/3} / M^2,$$

где g — константа псевдоскалярной связи.

9. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНОВ ЧАСТИЦАМИ СО СПИНОМ $1/2$ ДИФРАКЦИОННОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ФОТОНОМ НУКЛОННЫХ ПАР

Перейдем теперь к рассмотрению дифракционного и остановочного излучения фотона частицей со спином $1/2$ ⁴. Такой процесс может иметь место в случае протонов, рассеиваемых и поглощаемых ядрами. Мы будем предполагать, что протоны подчиняются уравнению Дирака, причем в начале не будем учитывать аномального магнитного момента протона.

Для определения сечения дифракционного излучения фотонов протонами можно воспользоваться тем же методом, с помощью которого изучалось дифракционное излучение фотонов π -мезонами. При этом волновую функцию протона в начальном состоянии следует взять, как было разъяснено в п. 5, в виде (41), а волновую функцию конечного состояния в виде (42). Ядро будем предполагать абсолютно черным заряженным шариком.

Матричный элемент, соответствующий излучению фотона, может быть записан в виде

$$S_{i \rightarrow f}^{(1)} = -2\pi i U_{i \rightarrow f} \delta(E - E' - \omega),$$

где

$$U_{i \rightarrow f} = \frac{e}{\sqrt{2\omega}} \int \bar{\psi}_{\mathbf{p}'}^{(-)}(\mathbf{r}) \hat{e} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{p}}^{(+)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

и \mathbf{p} и \mathbf{p}' — импульсы протона в начальном и конечном состояниях.

В релятивистском случае, который мы рассматриваем, главную роль играют малые углы между \mathbf{p} и \mathbf{k} и \mathbf{p} и \mathbf{p}' . При этом выражение для $U_{i \rightarrow f}$ сильно упрощается:

$$U_{i \rightarrow f} = \frac{e}{\sqrt{2\omega}} \int_0^\infty (1 - e^{2i\eta(\rho)}) J_0(|\mathbf{k}\boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{p}'\boldsymbol{\vartheta}'| \rho) \rho d\rho \times \\ \times \bar{u}_{\mathbf{p}'} \left\{ \frac{\hat{e} (i\hat{f}' - m) \hat{n}}{\mathbf{p}^2 - \mathbf{f}'^2} + \frac{\hat{n}' (i\hat{f} - m) \hat{e}}{\mathbf{p}'^2 - \mathbf{f}^2} \right\} u_{\mathbf{p}},$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{p}$, $\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{p}'}{p'}$, $f = p - k$, $f' = p' + k$, а двумерные угловые векторы $\boldsymbol{\vartheta}$ и $\boldsymbol{\vartheta}'$ определяются соотношениями

$$\mathbf{p}' = (\mathbf{p}'\mathbf{n})\mathbf{n} + p'\boldsymbol{\vartheta}', \quad \mathbf{k} = (\mathbf{k}\mathbf{n})\mathbf{n} + k\boldsymbol{\vartheta}.$$

Дифференциальное сечение излучения фотона равно

$$d\sigma_\gamma = \frac{2\pi}{v} |U_{i \rightarrow f}|^2 \delta(E - E' - \omega) \frac{d\mathbf{p}' d\mathbf{k}}{(2\pi)^6},$$

где v — скорость падающего протона.

Усредняя сечение излучения по ориентациям спина протона в начальном состоянии и суммируя по ориентациям спина в конечном состоянии, получим¹¹

$$d\sigma_\gamma = \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{p'}{p} \left| m \int_0^\infty (1 - e^{2i\eta(\rho)}) J_0(m|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}| \rho) \rho d\rho \right|^2 \times \\ \times \left\{ \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{1 + \boldsymbol{\xi}^2} + \frac{\boldsymbol{\eta}}{1 + \boldsymbol{\eta}^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{2pp'} \frac{(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta})^2}{(1 + \boldsymbol{\xi}^2)(1 + \boldsymbol{\eta}^2)} \right\} \frac{d\omega}{\omega} d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta}, \quad (84)$$

где

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{p}{m} \boldsymbol{\vartheta}, \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{p'}{m} (\boldsymbol{\vartheta}' - \boldsymbol{\vartheta}).$$

При $n \ll 1$ это выражение приобретает вид

$$d\sigma_\gamma = d\sigma_\gamma^\partial + d\sigma_\gamma^c,$$

где

$$d\sigma_\gamma^\partial = \frac{e^2 p'}{4\pi^3 p} \frac{R^2 J_1^2(m|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}| R)}{|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|^2} \left\{ \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{1 + \boldsymbol{\xi}^2} + \frac{\boldsymbol{\eta}}{1 + \boldsymbol{\eta}^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2}{2pp'} \frac{|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|^2}{(1 + \boldsymbol{\xi}^2)(1 + \boldsymbol{\eta}^2)} \right\} \frac{d\omega}{\omega} d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta}, \quad (85)$$

$$d\sigma_\gamma^c = \frac{e^2 n^2}{\pi^3 m^3} \frac{p'}{p} \frac{J_0^2(m|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}| R)}{|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|^4} \left\{ \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{1 + \boldsymbol{\xi}^2} + \frac{\boldsymbol{\eta}}{1 + \boldsymbol{\eta}^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2}{2pp'} \frac{|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|^2}{(1 + \boldsymbol{\xi}^2)(1 + \boldsymbol{\eta}^2)} \right\} \frac{d\omega}{\omega} d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta}. \quad (86)$$

Величина $d\sigma_Y^\partial$ представляет собой сечение дифракционного излучения, а $d\sigma_Y^c$ — сечение излучения в кулоновском поле ядра.

Таким образом, при $n \ll 1$ процессы дифракционного излучения и излучения в кулоновском поле не интерферируют и соответствующие им сечения складываются.

Сравнение выражения для $d\sigma_Y^\partial$ с выражением (57) для сечения дифракционного излучения фотона скалярной частицей показывает, что в $d\sigma_Y^\partial$, по сравнению с (57), входит добавочный член

$$\frac{e^2}{4\pi^3} \frac{p'}{p} \frac{\omega^2}{2pp'} \frac{(\xi + \eta)^2}{(1 + \xi^2)(1 + \eta^2)}.$$

Мы видим, что влияние спина сказывается только в области больших частот. Однако при этом частицу (протон) нельзя, строго говоря, рассматривать как точечную и необходимо учитывать ее «размазанность», обусловленную взаимодействием протона с мезонным вакуумом. Как мы видели в предыдущих пунктах, влияние размеров частицы в некоторых условиях приводит к появлению «форм-фактора» F_p , зависящего от инвариантной частоты $\frac{1}{m}(E\omega - \mathbf{p}\mathbf{k})$.

Преполагая, что размеры протона порядка $\frac{1}{\mu}$ (μ — масса мезона), мы можем рассматривать протон как точечную частицу только в том случае, если $\frac{1}{m\mu}(E\omega - \mathbf{p}\mathbf{k}) \ll 1$, т. е. если $\omega \ll \frac{\mu}{m}E$. С учетом «форм-фактора» протона выражение (84) должно быть умножено на $|F_p|^2$.

Проинтегрированное по углам сечение излучения $d\sigma_Y^\partial$ без фактора $|F_p|^2$ равно

$$d\sigma_Y^\partial(\omega) = d\sigma_Y^{\partial_0}(\omega) + \frac{e^2}{\pi} R^2 \frac{\omega d\omega}{p^2} \int_0^\infty \frac{J_1^2(2mRx)}{\sqrt{1+x^2}} \ln \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{-x + \sqrt{1+x^2}} dx, \quad (87)$$

где $d\sigma_Y^{\partial_0}$ — сечение дифракционного излучения фотона частицей со спином нуль.

Мы считали ядро абсолютно черным. «Серость» ядра может быть учтена заменой множителя $\frac{R}{|\xi + \eta|} J_1(mR|\xi + \eta|)$ в (85) выражением

$$R^2 m \int_1^\infty (1 - e^{-(b-2i(\nu-1)K)(R\sqrt{1-z^2})}) J_0(mR|\xi + \eta|z) z dz. \quad (85')$$

Отметим, что независимость сечений от деталей диффузности края ядра имеет место только в том случае, если передаваемый ядру импульс не превосходит по порядку величины $1/\mu$. Поэтому диффузность края ядра в процессах с участием нуклонов имеет более важное значение, чем в процессах с участием π -мезонов.

Положив в (85') радиус ядра R равным нулю, мы получим формулу Бете — Гайтлера для сечения тормозного излучения фотона протоном в чисто кулоновском поле ядра в области ультрарелятивистских энергий и малых углов рассеяния

$$d\sigma_Y^{BH} = \frac{e^2 n^2}{\pi^3 m^2} \frac{p'}{p} \frac{1}{|\xi + \eta|^4} \left\{ \left(\frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{2pp'} \frac{(\xi + \eta)^2}{(1 + \xi^2)(1 + \eta^2)} \right\} \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (86')$$

То обстоятельство, что, используя при вычислении $d\sigma_\gamma$ волновые функции протона, определяемые обобщенным принципом Гюйгенса, мы получаем в области больших энергий и малых углов рассеяния правильную формулу Бете — Гайтлера, связано с тем, что излучение фотона происходит вдали от ядра, где волновые функции практически могут быть заменены своими асимптотическими представлениями.

Сечение излучения фотона в области больших энергий и малых углов рассеяния фактически определяется амплитудой упругого рассеяния. Легко связать сечение излучения фотона с сечением упругого рассеяния $d\sigma_e$. Положив

$$d\sigma_e = \sigma_e(\xi) d\xi, \quad \xi = \frac{p}{m} \vartheta,$$

можно представить $d\sigma_\gamma$ в виде¹³

$$d\sigma_\gamma = \sigma_e(\xi + \eta) \frac{e^2 p'}{4\pi^3 p} \left\{ \left(\frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{2pp'} \frac{(\xi + \eta)^2}{(1 + \xi^2)(1 + \eta^2)} \right\} \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (88)$$

Интегрируя $d\sigma_\gamma$ по углам ξ и η , найдем спектральное распределение излучения:

$$d\sigma_\gamma(\omega) = \frac{4e^2 p' d\omega}{\pi p \omega} \int_{q_0}^{\infty} \sigma_e(2q) \left\{ \frac{2q^2 + 1}{q \sqrt{1 + q^2}} \ln(q + \sqrt{1 + q^2}) - 1 + \frac{\omega^2}{pp'} \frac{q}{\sqrt{1 + q^2}} \ln(q + \sqrt{1 + q^2}) \right\} q dq, \quad (88')$$

где $q = \frac{1}{2} |\xi + \eta|$ и минимальное значение q определяется из законов сохранения: $q_0 = \frac{m\omega}{4EE'}$.

Наряду с дифракционным излучением фотона протоном может происходить процесс дифракционного образования фотоном пар протон — антипротон²². Матричный элемент этого процесса равен

$$S_{i \rightarrow f}^{(2)} = - \frac{e}{\sqrt{2\omega}} \int \bar{\psi}_p^{(-)}(\gamma e) e^{ikh} \psi_{p'}^{(-)} d^4x,$$

где $\psi_p^{(-)}$ и $\psi_{p'}^{(-)}$ — волновые функции протона и антипротона с импульсами p и p' . Так как обе эти частицы образуются, то асимптотически на больших расстояниях от ядра функции $\psi_p^{(-)}$ и $\psi_{p'}^{(-)}$ должны иметь вид суммы плоской и сходящейся волн.

Мы приведем здесь только результат вычисления сечения образования пары в случае малых углов между p и k и p' и k и ультрарелятивистских энергий частиц, $E, E' \gg m$ (m — масса протона); ядро предполагается абсолютно черным²²:

$$d\sigma_{p\bar{p}} = \frac{e^2 EE' R^2 J_1^2(mR |\xi + \eta|)}{32\pi^3 \omega^3 |\xi + \eta|^2} \left\{ \frac{2(\xi + \eta)^2}{(1 + \xi^2)(1 + \eta^2)} + \frac{\omega^2}{EE'} \left(\frac{\xi}{1 + \xi^2} - \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 + \left(2 + \frac{\omega^2}{EE'} \right) \left(\frac{1}{1 + \xi^2} + \frac{1}{1 + \eta^2} \right)^2 \right\} dE' d\xi d\eta, \quad (89)$$

где ξ и η связаны с p и p' соотношениями

$$p = (p\mathbf{x})\mathbf{x} + m\xi, \quad p' = (p'\mathbf{x})\mathbf{x} + m\eta;$$

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad \xi\mathbf{x} = \eta\mathbf{x} = 0;$$

$$d\xi = \left(\frac{E}{m} \right)^2 d\phi, \quad d\eta = \left(\frac{E'}{m} \right)^2 d\phi'$$

($d\phi$ и $d\phi'$ — телесные углы, в которых лежат p и p').

10. ОСТАНОВОЧНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНОВ ЧАСТИЦАМИ СО СПИНОМ $1/2$

Рассмотрим теперь излучение фотонов, сопровождающееся непосредственным поглощением быстрых протонов ядрами^{5,6}. Будем по-прежнему предполагать, что для оценки вероятности излучения остановки протон можно описывать уравнением Дирака, однако теперь мы будем учитывать аномальный магнитный момент протона μ'

$$\left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - ie\gamma_\nu A_\nu - i\mu' \gamma_\nu \gamma_5 F_{\nu\rho} + m \right) \psi = 0;$$

здесь $F_{\nu\rho}$ — тензор электромагнитного поля и A_ν — потенциал поля, связанный с излучением фотона k . Так же, как и при рассмотрении излучения остановки в случае π -мезона, мы заменим в членах, содержащих поле, ψ на $\phi_0 = ue^{i(p\mathbf{r} - Et)}$, где u — спинорная амплитуда падающей протонной волны. Таким образом мы получим неоднородное уравнение для $\phi = \Phi(\mathbf{r})e^{-iE't}$, имеющее вид

$$\left(\gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E' + m \right) \Phi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (ie\hat{e} + 2\mu'\hat{k}\hat{e}) \Phi_0(\mathbf{r}) e^{-ik\mathbf{r}},$$

где

$$E' = E - \omega, \quad \Phi_0(\mathbf{r}) = ue^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad \hat{a} = \gamma_\nu a_\nu.$$

Найдя из этого уравнения $\Phi(\mathbf{r})$ на поверхности ядра, которое мы предполагаем абсолютно черным, можно определить поток протонов, поглощаемых ядром, когда на бесконечности имеется один фотон. Плотность этого потока определяется выражением

$$j = \left(\bar{\Phi} \frac{\gamma \mathbf{p}}{p} \Phi \right)_{r=R}, \quad \hat{\Phi} = \Phi^* \gamma_4,$$

а сечение излучения остановки равно

$$d\sigma_\gamma^S = \frac{j\pi R^2 \omega^2 d\omega d^2\theta}{v (2\pi)^3},$$

где v — скорость протонов и $d\theta$ — элемент телесного угла, в котором испускается фотон.

Решение уравнения для $\Phi(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\sqrt{2\omega}} \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (ie\hat{e} + 2\mu'\hat{k}\hat{e}) e^{-ik\mathbf{r}} \Phi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

где $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функция Грина уравнения Дирака

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E' - m \right) \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad p' = \sqrt{E'^2 - m^2}.$$

Используя это выражение, получим

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\sqrt{2\omega}} [i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\gamma - E'\gamma_4 - m] [ie\hat{e} + 2\mu'\hat{k}\hat{e}] u \frac{e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{r}}}{p'(|\mathbf{p}'| - |\mathbf{p}-\mathbf{k}|)}.$$

Приведем результат вычислений дифференциального сечения излучения остановки⁶

$$d\sigma_\gamma^S = \frac{R^2}{(2\pi)^2} \frac{d\omega}{\omega} \frac{p^2}{(m^2 + p^2\theta^2)^2} \left\{ e^2 \left[p(p-\omega)\theta^2 + \frac{\omega^2}{2p^2}(m^2 + p^2\theta^2) \right] + \right. \\ \left. + 2\mu'^2 \frac{\omega^2}{p^2}(m^2 + p^2\theta^2)^2 - m\mu' \frac{\omega^2}{p^2}(m^2 + p^2\theta^2) \right\} d^2\theta. \quad (90)$$

Здесь первое слагаемое в квадратных скобках определяет излучение остановки для частиц со спином нуль, а второе обусловлено спином

протона. Последние два слагаемых связаны с наличием аномального магнитного момента протона.

Мы видим, что влияние спина и аномального магнитного момента существенно только в области больших частот. При этом, как уже отмечалось выше, протон нельзя, строго говоря, рассматривать как точечный заряд, и необходимо учитывать «форм-фактор» протона F_p .

Сечение излучения с учетом «форм-фактора» протона определяется произведением (90) на $|F_p|^2$. Величина F_p является функцией инвариантной частоты фотона

$$F_p = F_p \left(\frac{E\omega - \mathbf{p}\mathbf{k}}{m\mu} \right) = F_p \left[\frac{\omega}{2E} \left(1 + \frac{E^2\theta^2}{m^2} \right) \frac{m}{\mu} \right]. \quad (90')$$

Отметим в заключение, что изучение излучения фотона протоном так же, как и π -мезоном, может дать важные сведения о «форм-факторах» частиц, т. е. об их структуре.

11. ДИФРАКЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ БЫСТРЫХ ДЕЙТРОНОВ ЯДРАМИ

Мы рассматривали до сих пор дифракционные явления, в которых участвовали точечные частицы. Как указывалось во введении, специфическими особенностями должно отличаться дифракционное рассеяние слабо связанных сложных частиц, таких, например, как дейтроны.

Помимо чисто упругого рассеяния дейтронов, аналогичного дифракционному рассеянию точечных частиц, в случае дейтронов должно иметь место еще дифракционное расщепление, происходящее вдали от ядра ^{15, 16, 17}. Этот эффект обусловлен малой энергией связи дейтрона, благодаря чему сравнительно небольшое изменение импульса дейтрона при рассеянии может привести к его развалу.

Дифракционное рассеяние и расщепление дейтрона может быть исследовано аналогично исследованию дифракционного рассеяния точечных частиц.

Пусть на ядро падают дейтроны с волновым вектором \mathbf{K} . Движение центра инерции дейтрона в плоскости, перпендикулярной \mathbf{K} (ось z), описывается функцией

$$\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}_d) = e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}_d},$$

где \mathbf{x} и \mathbf{r}_d — проекции волнового вектора рассеянного дейтрона и радиус-вектора центра инерции дейтрона на плоскость, перпендикулярную z (нормировочную длину мы предполагаем здесь и в дальнейшем равной единице). Падающим дейтронам соответствует волновая функция

$$\psi_0(\mathbf{r}_d) = 1.$$

Для исследования дифракции дейтронов нужно, кроме движения центра инерции, учитывать еще относительное движение нейтрона и протона в дейтроне.

Связанное состояние дейтрона описывается функцией

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad \alpha = \frac{1}{2R_d},$$

где R_d — радиус дейтрона. Относительное движение нейтрона и протона, освобождающихся в результате расщепления, может быть описано функциями

$$\varphi_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{r}\mathbf{r}} + \frac{a}{r} e^{-i\mathbf{r}\mathbf{r}},$$

где $\hbar f$ — импульс относительного движения частиц и $a = -1/a - if$ — длина рассеяния нейтрона протоном в S -состоянии (предполагается, что взаимодействие между нейтроном и протоном имеет место только в S -состоянии; сумма плоской и сходящейся сферической волн соответствует рождению частиц). Функции $\varphi_f(\mathbf{r})$ вместе с функцией $\varphi_0(r)$, описывающей связанное состояние системы, образуют полную систему ортонормированных функций, удовлетворяющих соотношению

$$\varphi_0(r)\varphi_0(r') + \int \varphi_f^*(\mathbf{r})\varphi_f(\mathbf{r}') \frac{df}{(2\pi)^3} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Так как дейтрон представляет собой слабо связанную систему, в которой нейтрон и протон проводят большую часть времени вне области действия ядерных сил, то картина дифракции дейтронов на абсолютно черном ядре определяется разложением функции

$$\Psi = \Omega(\rho_n)\Omega(\rho_p)\varphi_0(r)\psi_0(\rho_d),$$

описывающей дейтрон при наличии поглощающего ядра, по полной системе функций $\psi_{\mathbf{x}}(\rho_d)\varphi_0(r)$, $\psi_{\mathbf{x}}(\rho_d)\varphi_f(\mathbf{r})$. При этом множители $\Omega(\rho_n) \equiv \Omega_n$ и $\Omega(\rho_p) \equiv \Omega_p$, где ρ_n и ρ_p — проекции радиус-векторов нейтрона и протона на плоскость, перпендикулярную оси z учитывают «исчезновение» дейтрона как целого, если по крайней мере одна из частиц, т. е. нейтрон или протон, попадает в сферу действия ядра.

Коэффициенты $A_{\mathbf{x}}$ и $A_{\mathbf{x}f}$ этого разложения

$$\Psi = \sum_{\mathbf{x}} A_{\mathbf{x}}\psi_{\mathbf{x}}(\rho_d)\varphi_0(r) + \sum_{\mathbf{x},f} A_{\mathbf{x}f}\psi_{\mathbf{x}}(\rho_d)\varphi_f(\mathbf{r})$$

имеют смысл амплитуд вероятности дифракционного рассеяния и дифракционного расщепления дейтрона.

Так как функции $\psi_{\mathbf{x}}$ и φ_f образуют ортонормированные системы функций, то

$$A_{\mathbf{x}} = \iint \varphi_0(r)\psi_{\mathbf{x}}^*(\rho_d)\Omega_n\Omega_p\psi_0(\rho_d)\varphi_0(r)d\rho_d dr, \quad (91)$$

$$A_{\mathbf{x}f} = \iint \varphi_f^*(\mathbf{r})\psi_{\mathbf{x}}^*(\rho_d)\Omega_n\Omega_p\psi_0(\rho_d)\varphi_0(r)d\rho_d dr. \quad (91')$$

Амплитуда упругого рассеяния связана с $A_{\mathbf{x}}$ соотношением (8). Ее можно представить в виде

$$f(\theta) = iK \left\{ 2 \frac{4\alpha}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{4x} \frac{RJ_1(xR)}{x} - \frac{1}{2\pi} \int \frac{4\alpha}{|2\mathbf{g} - \mathbf{x}|} \operatorname{arctg} \frac{|2\mathbf{g} - \mathbf{x}|}{4x} \frac{RJ_1(gR)}{g} \frac{RJ_1(|\mathbf{x} - \mathbf{g}|R)}{|\mathbf{x} - \mathbf{g}|} d\mathbf{g} \right\}. \quad (92)$$

Легко убедиться на основании (91), что амплитуда рассеяния на нулевой угол равна

$$f(0) = i \frac{K}{2\pi} \iint \varphi_0^2(r) \{\omega_n + \omega_p - \omega_n\omega_p\} d\rho_d dr, \quad (92')$$

где

$$\omega_n = 1 - \Omega_n, \quad \omega_p = 1 - \Omega_p.$$

Зная эту величину, можно найти полное сечение всех процессов взаимодействия дейтрона с ядром, а именно; упругого рассеяния, дифракционного расщепления, реакции срыва протона и нейтрона и, наконец, поглощения дейтрона ядром. Это полное сечение связано с $f(0)$ соотношением $\sigma_t = 4\pi\lambda \operatorname{Im} f(0)$, где λ — длина волны дейтрона.

Подставляя в (92') выражение для $\varphi_0(r)$, можно показать, что

$$\sigma_t = 4\pi R^2 \left\{ 1 - \int_0^\infty \frac{p}{\xi} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{p} \frac{J_1^2(\xi)}{\xi} d\xi \right\}, \quad (93)$$

где $p = \frac{R}{R_d}$. При $p \rightarrow \infty$ суммарное сечение, как и следовало ожидать, равно

$$\sigma_t = 2\pi R^2, \quad p \rightarrow \infty.$$

С учетом членов порядка $\frac{1}{p}$ сечение σ_t равно

$$\sigma_t = 2\pi R^2 + \pi R R_d, \quad R \gg R_d. \quad (93')$$

При любом значении p имеют место соотношения

$$\sigma_e + \sigma_d = \frac{1}{2} \sigma_t,$$

$$\sigma_n + \sigma_p + \sigma_a = \frac{1}{2} \sigma_t, \quad \checkmark$$

где σ_n и σ_p — сечения срыва нейтрона и протона, σ_a — сечение поглощения обеих частиц ядром и σ_d — сечение дифракционного расщепления.

12. СЕЧЕНИЯ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ ДИФРАКЦИОННОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЕЙТРОНОВ. СЕЧЕНИЯ РЕАКЦИЙ СРЫВА ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Приведем выражения для сечений различных процессов взаимодействия быстрых дейтронов с ядрами¹⁷.

Дифференциальное сечение дифракционного упругого рассеяния быстрых дейтронов при $p \gg 1$ в предположении, что ядро является абсолютно черным, равно

$$d\sigma_e = 2\pi R^2 \left\{ \left(\frac{2p}{x'} \operatorname{arctg} \frac{x'}{2p} \right)^2 \frac{J_1^2(x')}{x'} + \frac{1}{2p} J_1(x') J_0(x') \right\} dx', \quad x' \ll p, \quad (95)$$

где $x' = xR$.

Интегральное сечение упругого дифракционного рассеяния при $p \gg 1$ равно

$$\sigma_e = \pi R^2 + \frac{2\pi}{3} (1 - \ln 2) R R_d, \quad R_d \gg R. \quad (95')$$

Дифференциальное сечение дифракционного расщепления дейтрона связано с A_{xf} соотношением

$$d\sigma_d = |A_{xf}|^2 \frac{dx df}{(2\pi)^5}.$$

Предполагая, что ядро является абсолютно черным, и считая $p \gg 1$, получим следующее выражение для полного сечения дифракционного расщепления дейтрона:

$$\sigma_d = \frac{\pi}{3} \left(2 \ln 2 - \frac{1}{2} \right) R R_d, \quad R_d \ll R, \quad \lambda \ll R_d. \quad (96)$$

Распределение продуктов расщепления по энергиям в этих же предполо-

жениях имеет следующий вид:

$$\sigma_d = \frac{2}{3} R R_d \int_0^{\infty} u F(u) du, \quad u = \frac{f}{a},$$

$$F(u) = \frac{3}{(1+u^2)^2} \left\{ 1 + \frac{2u}{1+u^2} - \arcsin \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right\} - 16(1 - \ln 2) \frac{u}{(1+u^2)^3}. \quad (97)$$

Как указывалось выше, помимо упругого рассеяния и дифракционного расщепления дейтрона возможны также реакции срыва нейтрона и протона, а также поглощение обеих частиц ядром.

Рассмотрим прежде всего реакцию, в результате которой нейтрон освобождается, а протон поглощается ядром. Этот процесс можно описать волновой функцией $\Psi = \Omega_n \psi_0(\mathbf{r}_p) \varphi_0(r)$, где $\varphi_0(r)$ — волновая функция основного состояния дейтрона, $\psi_0(\mathbf{r}_p)$ — часть волновой функции, описывающая движение центра тяжести дейтрона в плоскости, перпендикулярной импульсу падающего дейтрона.

Разложив Ψ в интервал Фурье по функциям $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_n}$ (\mathbf{r}_n — радиус-вектор нейтрона), найдем амплитуду вероятности $a_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_p)$ того, что нейтрон будет обладать волновым вектором \mathbf{k} , а протон будет находиться в точке \mathbf{r}_p :

$$a_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_p) = \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_n} \Omega_n \varphi_0(r) d\mathbf{r}_n.$$

Интегрируя $|a_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_p)|^2$ по $d\mathbf{r}_p$ в пределах от $\mathbf{r}_p = 0$ до $\mathbf{r}_p = R$, найдем дифференциальное сечение срыва, при котором волновой вектор нейтрона лежит в интервале $d\mathbf{k}$ ²¹:

$$d\sigma_n = \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{r}_p} |a_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_p)|^2 d\mathbf{r}_p = \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r}_p (1 - |\Omega_p|^2) |a_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_p)|^2, \quad (98)$$

где $\Omega_p = \Omega(\mathbf{r}_p)$.

Полное сечение срыва равно ²¹

$$\sigma_n = \int \int d\mathbf{r}_p d\mathbf{r}_n (2 - |\Omega_p|^2) |\Omega_n|^2 \varphi_0^2(r). \quad (98')$$

Разлагая $1 - |\Omega(\mathbf{r})|^2$ в интеграл Фурье

$$1 - |\Omega(\mathbf{r})|^2 = \int \frac{R J_1(gR)}{2\pi g} e^{ig\mathbf{r}} dg,$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя, найдем

$$\sigma_n = \pi R^2 \left\{ 1 - 2 \int_0^{\infty} \frac{p}{\xi} \arctg \frac{\xi}{p} \frac{J_1^2(\xi)}{\xi} d\xi \right\}. \quad (99)$$

В предельном случае больших p эта формула переходит в формулу Сербера

$$\sigma'_n = \pi \frac{R R_d}{2}, \quad R_d \ll R. \quad (99')$$

Зависимость σ_n от p представлена на рис. 5. В случае свинца $p = 4,2$ и формула (99) дает $\sigma_n = 3,2 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$, в то время как формула Сербера дает $\sigma'_n = 2,7 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$. При $p = 1$

$$\sigma_n = 5,8 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2 \text{ и } \sigma'_n = 6,9 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2.$$

Формулой (99) определяется также сечение срыва протона σ_p . Чтобы найти распределение освобождающихся нейтронов по энергиям, нужно проинтегрировать (98) по перпендикулярным составляющим вектора k :

$$d\sigma_n(k_z) = \frac{dk_z}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{p}_p \{1 - |\Omega_p|^2\} \times \\ \times \left| \int d\mathbf{p}_n e^{-i\mathbf{x}\mathbf{p}_n} \Omega_n \int dz e^{i\mathbf{h}z} \varphi_0(r) \right|^2, \quad (100)$$

где \mathbf{x} — проекция вектора k на плоскость, перпендикулярную p_0 . Используя полноту функций $e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}_n}$ и раскладывая $|\Omega_n|^2$, $|\Omega_p|^2$ в интегралы Фурье, получим окончательно:

$$d\sigma_n(k_z) = F(k_z) dk_z, \quad k_z = \frac{E - \frac{E_0}{2}}{\hbar \sqrt{\frac{E_0}{M}}}, \quad (100')$$

$$F(k_z) = \frac{8pR^3}{\pi} \int_0^1 K_0^2 \left(p \sqrt{1 + \frac{k_z^2}{a^2}} \zeta \right) (\arcsin \zeta + \\ + \zeta \sqrt{1 - \zeta^2}) \zeta d\zeta,$$

где $K_0(\zeta)$ — модифицированная функция Бесселя, E_0 — энергия падающего дейтрона и M — масса нейтрона.

В предельном случае $p \gg 1$ эта формула переходит в формулу Сербера

$$d\sigma'_n(k_z) = \frac{\pi}{4} RR_d \frac{a^2 dk_z}{(a^2 + k_z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (101)$$

Определим теперь сечение поглощения дейтрона σ_a . Так как

$$\sigma_a + \sigma_n + \sigma_p = \frac{1}{2} \sigma_t,$$

то, используя (93) и (99), мы получим

$$\sigma_a = 2\pi R^2 \int_0^\infty \frac{p}{\xi} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{p} \frac{J_1^2(\xi)}{\xi} d\xi. \quad (102)$$

При $p \gg 1$

$$\sigma_a = \pi R^2 - \pi \frac{RR_d}{2}. \quad (102')$$

Учтем теперь влияние кулоновского поля ядра на рассеяние и расщепление дейтрона. Для этого нужно заменить в формулах (91), (91') $\Omega(\rho_p)$ на $\Omega_B^z(\rho_p)$.

Если ядро считать по-прежнему абсолютно черным, то дифференциальное сечение упругого рассеяния дейтронов, энергия которых значительно больше высоты кулоновского барьера, определится следующей общей формулой:

$$d\sigma_e = |f(\vartheta)|^2 d\vartheta, \\ f(\vartheta) = -iK \left\{ \frac{4\alpha}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{4\alpha} \int_R^\infty e^{2i\eta(\rho)} J_0(x\rho) \rho d\rho - \frac{RJ_0(xR)}{8\alpha} e^{2i\eta(R)} \right\}, \quad (103)$$

где $x = K\vartheta$; при этом предполагается, что $E \gg \frac{Ze^2}{R}$, $p \gg 1$.

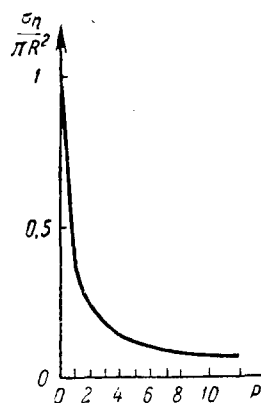


Рис. 5.

Приведем некоторые асимптотические формулы ¹⁷.
Если $n \ll 1$ и $1 \ll p \ll l_0 \equiv KR$, то

$$\begin{aligned}\sigma(\vartheta) &\equiv |f(\vartheta)|^2 = \frac{4n^2 \lambda^2}{\vartheta^4}, \quad \vartheta \ll \frac{\sqrt{2n}}{l_0}, \\ \sigma(\vartheta) &= l \lambda^2 \frac{J_1^2(l_0 \vartheta)}{\vartheta^2}, \quad \frac{\sqrt{2n}}{l_0} \ll \vartheta \ll \frac{2p}{l_0}, \\ \sigma(\vartheta) &= \frac{l_0^3 \lambda^2}{8\pi p^2} \frac{\cos^2\left(l_0 \vartheta - \frac{\pi}{4}\right)}{\vartheta}, \quad \frac{2p}{l_0} \ll \vartheta \ll 1.\end{aligned}\quad (104)$$

Таким образом, в случае $n \ll 1$ и $1 \ll p \ll l_0$ чисто кулоновское рассеяние имеет место только в области углов $\vartheta \ll \frac{\sqrt{2n}}{l_0}$. В области углов $\frac{\sqrt{2n}}{l_0} \ll \vartheta \ll \frac{2p}{l_0}$ рассеяние дейтронов носит такой же характер, как и дифракционное рассеяние нейтральных частиц. Наконец, в области углов $\frac{2p}{l_0} \ll \vartheta \ll 1$ в дифракционном рассеянии дейтронов проявляется их пространственная структура.

Если $n \gg 1$ и $n \ll p \ll l_0$, то

$$\begin{aligned}\sigma(\vartheta) &= \frac{4\pi^2 \lambda^2}{\vartheta^4}, \quad \vartheta \ll \frac{2n}{l_0}, \\ \sigma(\vartheta) &= \frac{2}{\pi} l \lambda^2 = \frac{\sin^2\left(l_0 \vartheta - \frac{\pi}{4}\right)}{\vartheta^3}, \quad \frac{2n}{l_0} \ll \vartheta \ll \frac{2p}{l_0}, \\ \sigma(\vartheta) &= \frac{l_0^3 \lambda^2}{8\pi p^2} \frac{\cos^2\left(l_0 \vartheta - \frac{\pi}{4}\right)}{\vartheta}, \quad \frac{2p}{l_0} \ll \vartheta \ll 1.\end{aligned}\quad (105)$$

Таким образом, в этом случае область чисто кулоновского рассеяния расширяется по сравнению с предыдущим случаем вплоть до углов порядка $2n/l_0$. При $\vartheta \sim \frac{2n}{l_0}$ происходит резкое уменьшение сечения рассеяния по порядку величины в n раз. В интервале углов $\frac{2n}{l_0} \ll \vartheta \ll \frac{2p}{l_0}$ рассеяние дейтронов носит характер дифракционного рассеяния точечных нейтральных частиц. Пространственная структура дейтрона проявляется в области углов $\frac{2p}{l_0} \ll \vartheta \ll 1$.

Если, наконец, $1 \ll p \ll n \ll l_0$, то

$$\begin{aligned}\sigma(\vartheta) &= \frac{4\pi^2 \lambda^2}{\vartheta^4}, \quad \vartheta \ll \frac{2p}{l_0}, \\ \sigma(\vartheta) &= \frac{4\pi^2 p^2 n^2 \lambda^2}{l_0^3 \vartheta^6}, \quad \frac{2p}{l_0} \ll \vartheta \ll \frac{2(\pi^3 n^2 p^4)^{\frac{1}{5}}}{l_0}, \\ \sigma(\vartheta) &= \frac{l_0^3 \lambda^2}{8\pi p^2} \frac{\cos^2\left(l_0 \vartheta - \frac{\pi}{4}\right)}{\vartheta}, \quad \frac{2(\pi^3 n^2 p^4)^{\frac{1}{5}}}{l_0} \ll \vartheta \ll 1.\end{aligned}\quad (106)$$

Мы видим, что в этом случае область кулоновского рассеяния простирается не до углов $2n/l_0$, а до углов порядка $2p/l_0$. Область дифракционного рассеяния точечных частиц вообще исчезает. Конечные размеры дейтрона начинают сказываться при углах порядка $2p/l_0$. В интервале

углов $2p/l_0 \ll \theta \ll 2(\pi^3 n^2 p^4)^{1/5}/l_0$ сечение убывает, как $1/\theta^6$, а затем изменяется, как $1/\theta$.

Перейдем теперь к рассмотрению расщепления дейтрона.

Полное сечение расщепления дейтрона с учетом кулоновского взаимодействия имеет вид

$$\sigma_f = \sigma_d + \sigma_c + \sigma',$$

где σ_d — сечение чисто дифракционного расщепления, определяемое формулой (96), σ_c — сечение расщепления, обусловленного кулоновским полем ядра, и σ' — часть сечения расщепления, обусловленного интерференцией дифракционного и кулоновского рассеяния.

Сечение σ_c определяется формулой

$$\sigma_c = 8\pi n^2 R^2 p^2 \int_{p^2 m}^{\infty} \left\{ \frac{x^2}{p^2} - 4 \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{2p} \right)^2 \right\} \left| \int_x^{\infty} J_1(\zeta) \zeta^{2in} d\zeta \right|^2 \frac{dx}{x^5}, \quad (107)$$

где $z_m \sim \frac{a}{K}$, а σ' — формулой

$$\sigma' = 4\pi R^2 p^2 Re \int_0^{\infty} \left\{ \frac{x^2}{p^2} - 4 \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{2p} \right)^2 \right\} \frac{J_1(x)}{x} 2inx^{-2in-2} \int_x^{\infty} J_1(\zeta) \zeta^{2in} d\zeta \frac{dx}{x}.$$

Если $p \gg 1$, то интерференционным слагаемым можно пренебречь, так как области, в которых эффективны оба процесса рассеяния, практически не перекрываются.

При $p \gg 1$ и $n \ll 1$ сечение σ_c имеет вид

$$\sigma_c = \frac{4\pi}{3} n^2 R_d^2 \ln \frac{R_d^2}{R\lambda}, \quad n \ll 1. \quad (108)$$

(Это выражение было получено Данковым с помощью теории возмущений^{19,20}.)

При $n \gg 1$ сечение σ_c равно

$$\sigma_c \approx \frac{4\pi}{3} n^2 R_d^2 \ln \frac{R_d}{\lambda}. \quad (109)$$

В этом случае $\sigma_c \gg \sigma_d$, в то время как при $n \ll 1$ справедливо обратное неравенство $\sigma_c \ll \sigma_d$.

Приведем, наконец, формулы, учитывающие «серость» ядра по отношению к падающим на него дейтронам.

Обозначим через $B = B_n + B_p = B_1 - iB_2$ комплексный коэффициент поглощения дейтронов ядерным веществом (B_n и B_p — комплексные коэффициенты поглощения нейтрона и протона). Тогда, если можно пренебречь диффузностью края ядра, то в случае большого поглощения частиц ($|B_n|^2 R^2 \gg p$, $|B_p|^2 R^2 \gg p$) полное сечение всех процессов и сечение упругого рассеяния и дифракционного расщепления дейтрона определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= 2\pi R^2 \left\{ 1 - 2 \frac{B_1^2 - B_2^2}{(B_1^2 + B_2^2)^2 R^2} \right\} + \pi R R_d, \\ \sigma_e &= \pi R^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2B_1^2 R^2} - \frac{4(B_1^2 - B_2^2)}{(B_1^2 + B_2^2)^2 R^2} \right\} + \frac{2\pi}{3} (1 - \ln 2) R R_d, \\ \sigma_d &= \frac{\pi}{3} \left(2 \ln 2 - \frac{1}{2} \right) R R_d. \end{aligned} \quad (110)$$

В случае малого поглощения ($|B_n|^2 R^2 \ll p$, $|B_p|^2 R^2 \ll p$) справедливы формулы

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \sigma_t^0 + \frac{2\pi}{3} R_d^2 \operatorname{Re}(B_n B_p) R^2 \ln \frac{R}{R_d}, \quad \sigma_t^0 = \frac{4\pi}{3} R^3 B_1, \\ \sigma_e &= \sigma_e^0 - \frac{\pi}{6} R_d^2 |B|^2 R^2 \ln \frac{R}{R_d}, \quad \sigma_e^0 = \frac{\pi}{2} R^4 |B|^2, \\ \sigma_d &= \frac{\pi}{6} R^2 |B|^2 R_d^2 \ln \frac{R}{R_d},\end{aligned}\tag{111}$$

где σ_t^0 — полное сечение всех процессов взаимодействия быстрой точечной частицы с ядром, комплексный коэффициент поглощения которого равен сумме комплексных коэффициентов поглощения нейтрона и протона и σ_e^0 — сечение упругого рассеяния точечной частицы ядром с таким же коэффициентом поглощения.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Ландау, И. Померанчук, ЖЭТФ 24, 505 (1953).
2. И. Померанчук, ДАН СССР 96, 265, 481 (1954).
3. И. Померанчук, Е. Фейнберг, ДАН СССР 93, 439 (1953).
4. А. Ахиезер, ДАН СССР 94, 651 (1954).
5. А. Ахиезер, И. Померанчук, ДАН СССР 94, 821 (1954).
6. А. Ахиезер, И. Померанчук, ЖЭТФ 30, 201 (1956).
7. Ю. Вдовин, ДАН СССР 105, 947 (1955).
8. C. Porter, Phys. Rev. 99, 1400 (1955).
9. S. Fernbach, R. Serber, T. Taylor, Phys. Rev. 75, 1352 (1949).
10. А. Ахиезер, И. Померанчук, ЖЭТФ 16, 396 (1946).
11. А. Ситенко, ДАН СССР 109, 1119 (1956).
12. А. Ситенко, ЖЭТФ 31, 348 (1956).
13. А. Ситенко, ЖЭТФ 32, 1506 (1957).
14. Е. Фейнберг, УФН 58, 193 (1956).
15. R. Clauber, Phys. Rev. 99, 1515 (1955).
16. Е. Фейнберг, ЖЭТФ 29, 115 (1955).
17. А. Ахиезер, А. Ситенко, ЖЭТФ 32, 794 (1957).
18. R. Serber, Phys. Rev. 72, 1008 (1947).
19. S. Dancoff, Phys. Rev. 72, 1017 (1947).
20. C. Mullin, E. Guth, Phys. Rev. 82, 141 (1951).
21. А. Ахиезер, А. Ситенко, ЖЭТФ 33, 1040 (1957).
22. А. Ситенко, Л. Розенцвейг, ЖЭТФ 32, 383 (1957).
23. Е. Рабинович, ЖЭТФ 32, 1583 (1957).
24. B. Lippmann, J. Schwinger, Phys. Rev. 79, 481 (1950).
25. А. Ахиезер, И. Померанчук, Некоторые вопросы теории ядра. Гостехиздат, 1951.
26. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Квантовая механика. Гостехиздат, 1948.
27. А. Ахиезер, В. Берестецкий, Квантовая электродинамика. Гостехиздат, 1954.
28. R. Christy, S. Kusaka, Phys. Rev. 59, 414 (1941).