



Редакция журнала «Успехи физических наук» с глубоким прискорбием извещает читателей о кончине 14 августа с. г. выдающегося французского ученого и общественного деятеля, патемного борца за мир, лауреата Ленинской премии «За укрепление мира между народами», председателя Всемирного Совета Мира, профессора

ФРЕДЕРИКА ЖОЛИО-КЮРИ

№ 101

1958 г. Август

т. LXV, вып. 4

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

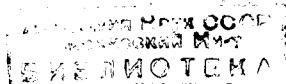
A. Абрикосов и И. Халатников

Явление сверхпроводимости было открыто Камерлинг-Оннесом в 1911 г. С тех пор в течение почти пятидесятилетия происходило интенсивное изучение его и накопление экспериментальных фактов. Однако в понимании физической сущности этого явления не было существенного прогресса. Первый шаг на пути к пониманию явления сверхпроводимости был сделан в связи с открытием (Капица, 1938) явления сверхтекучести и созданием его теории (Ландау, 1941). Тогда же была указана глубокая аналогия между явлениями сверхтекучести и сверхпроводимости, позволившая говорить о сверхпроводимости как о сверхтекучести электронного газа в металле¹.

Вторым важным шагом в понимании явления сверхпроводимости было открытие² изотопического эффекта, т. е. зависимости критической температуры от массы изотопа сверхпроводника. Этот эффект прямо указывал на существенную роль колебаний кристаллической решетки³ в явлении сверхпроводимости. В связи с этим Фрелих и Бардин⁴ указали на возможность нового типа взаимодействия между электронами, осуществляемого путем обмена фононами. Однако до самого последнего времени такой подход не давал удовлетворительных результатов, и, по существу, причина сверхпроводимости так и оставалась неразгаданной. С другой стороны, всем было ясно⁴, что экспериментальных фактов вполне достаточно для построения теории сверхпроводимости и что нужна лишь некоторая фундаментальная идея, которая позволила бы с помощью ортодоксальных методов квантовой механики объяснить все явление.

Эта недостающая идея содержалась в небольшом письме Л. Купера, опубликованном в ноябре 1956 г. в *Physical Review*⁵. Купер показал, что для частиц, подчиняющихся статистике Ферми, при сколь угодно слабом притяжении между ними, возникает связанное состояние пары частиц. Этот крайне нетривиальный результат является ключом к пониманию явления сверхпроводимости. Действительно, без учета эффекта Купера в основном состоянии металла электроны заполняют (в изотропном случае) фермиевскую сферу в импульсном пространстве. Если предположить, что в металле имеет место некоторое эффективное притяжение между электронами, то должно произойти спаривание электронов. При этом основное состояние будет лежать ниже, чем у свободных электронов, на величину энергии связи этих пар. Электронные пары обладают целым спином и поэтому подчиняются статистике Бозе. А бозе-газ при абсолютном нуле, как известно, обладает свойством сверхтекучести. В применении к бозе-газу заряженных частиц это свойство проявится в форме сверхпроводимости. Приведенные соображения не претендуют на строгость, однако они, безусловно,

¹ УФН, т. LXV, вып. 4



указывают на то, что полное объяснение явления сверхпроводимости может быть получено на базе эффекта Купера.

Полная и последовательная теория сверхпроводимости была построена Бардином, Купером и Шрифером. Ими была предложена техника, позволившая рассмотреть основное состояние сверхпроводника ($T = 0$) и получить спектр возбуждений⁶. На этой базе были вычислены термодинамические величины и выведены уравнения электродинамики сверхпроводников (в слабых полях). Из области термодинамики заслуживает быть отмеченным получение конечного скачка теплоемкости в точке перехода между нормальным и сверхпроводящим состояниями. Для характеристики поведения сверхпроводников в магнитном поле существенным параметром оказалась величина, характеризующая размер пары электронов. Если глубина проникновения поля велика по сравнению с этим параметром, то имеет место локальная связь между током и потенциалом поля. И в этом случае справедливы старые уравнения Лондона. В обратном случае, когда глубина проникновения мала по сравнению с указанным параметром, имеет место ялокальная связь между током и потенциалом поля. В этом случае свойства сверхпроводника описываются другими уравнениями, ранее полученными Пиппартом⁷ из полуинтуитивных соображений.

Н. Н. Боголюбов предложил несколько оригинальных методов, позволяющих получить результаты Бардина, Купера и Шрифера. Один из них^(8, 8a) очень сходен с техникой трех авторов. Другой, который кажется нам наиболее естественным, подобен методу, примененному Н. Н. Боголюбовым при изучении спектра возбуждения в бозе-газе.

Авторы настоящей статьи, пользуясь этой методикой Н. Н. Боголюбова, провели вычисления, аналогичные работе Бардина, Купера, Шрифера⁶. В настоящей статье, на базе эффекта Купера и указанной методики, излагается современная теория сверхпроводимости. Проводятся также некоторые результаты, не содержащиеся в работе трех авторов. В частности, в работе⁶ не была выяснена роль кулоновского взаимодействия электронов. Следует сказать, что строгое решение этой проблемы в настоящее время отсутствует. Однако имеется интересная работа В. Толмачева^(8a), который указал на ослабление эффекта кулоновского отталкивания, возникающее при наличии взаимодействия электронов через поле фононов. На основе новой теории будут также изложены результаты, полученные Л. П. Горьковым и авторами настоящей статьи, касающиеся поведения сверхпроводников в высокочастотном электромагнитном поле⁹.

§ 1. ФЕНОМЕН КУПЕРА

Для того чтобы понять основное содержание идеи Купера, мы рассмотрим следующий пример: газ из ферми-частиц с непосредственным взаимодействием между частицами, распространенным на какую-то небольшую область энергий ω в окрестности ферми-сферы ($-\omega \leq \varepsilon(k) - \varepsilon(k_0) \leq \omega$) и постоянным внутри этой области¹⁰). Гамильтониан такого взаимодействия будет иметь вид

$$H' = g \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2} a_{k'_1}^+ a_{k'_2}^+ a_{k'_2 - \frac{1}{2}}^- a_{k_1 + \frac{1}{2}}^- a_{k_2 - \frac{1}{2}}^- \quad (|\xi(\mathbf{k})| \leq \omega). \quad (1,1)$$

Операторы $a_{k_z}^+$ и a_{k_z} соответствуют возникновению и уничтожению частиц с заданным импульсом и направлением спина; $\xi(\mathbf{k})$ — энергия

^{*)} В дальнейшем мы увидим, какое отношение имеет такое взаимодействие к реальному взаимодействию электронов в металле.

частиц, отсчитанная от поверхности Ферми. Суммирование в (1,1) происходит с учетом сохранения импульса. Константу g мы будем предполагать настолько малой, чтобы была применима теория возмущений.

Рассмотрим рассеяние двух частиц с почти противоположными импульсами, т. е. такими, что $|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| \ll k_0$. В первом приближении амплитуда рассеяния просто равна g , если частицы имеют противоположные спины, и равна нулю, если спины их параллельны. Это же, естественно, относится и к произвольному углу между \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 . Однако в следующем приближении уже оказывается особенность рассматриваемого случая. В то время как при произвольном угле между \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 второе приближение дает лишь малую поправку к амплитуде рассеяния, в случае почти противоположных импульсов «поправка» может стать сколь угодно большой. Действительно, рассмотрим члены в амплитуде перехода, соответствующей переходу двух частиц вне ферми-сферы ($\xi(\mathbf{k}) > 0$) без участия частиц внутри ферми-сферы. Такой член возникает только для частиц с противоположными спинами и имеет вид^{*)}

$$\frac{g^2}{(2\pi)^3} \int d^3 q \frac{1}{\xi(k_1) + \xi(k_2) - \xi(k_1 + k_2 - q) - \xi(q)}, \quad (1,2)$$

$$0 < \xi(q) < \omega, \quad 0 < \xi(k_1 + k_2 - q) < \omega.$$

В этой формуле ввиду близости всех импульсов к k_0 можно считать $\xi(k) = v(k - k_0)$ (v — скорость частиц на границе Ферми). Если, кроме того, ввести обозначения $\lambda = \xi_1 + \xi_2$ и $\mu = v|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|$, то, принимая во внимание малость λ и μ , получаем

$$\frac{g^2 2\pi k_0^2}{(2\pi)^3 v} \int_0^\omega d\xi \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{1}{\lambda + \mu \cos\theta - 2\xi}. \quad (1,3)$$

Этот интеграл является логарифмическим по ξ . В случае $\lambda \ll \omega$ и $\mu \ll \omega$ нетрудно видеть, что с точностью до малых членов это выражение равно

$$-\frac{g^2 k_0^2}{4\pi^2 v} \ln \frac{2\omega}{\max\{\lambda, \mu\}}. \quad (1,4)$$

Нетрудно видеть, что такую же величину имеет член, соответствующий переходу двух других частиц, находящихся внутри ферми-сферы, в конечное состояние k'_1, k'_2 и последующему переходу начальных частиц на освободившиеся места. Если же рассматривать переходы, в которых участвуют одна из начальных или конечных частиц и одна из частиц ферми-сферы, то логарифмические множители отсутствуют. (Только такого типа виртуальные переходы могут иметь место для случая параллельных спинов.)

Следовательно, с точностью до малых членов, амплитуда рассеяния частиц с антипараллельными спинами и почти противоположными импульсами во втором порядке имеет вид

$$A^{(2)} \rightarrow g + \frac{g^2 k_0^2}{2\pi^2 v} \ln \frac{2\omega}{\max\{\lambda, \mu\}}. \quad (1,5)$$

Однако это выражение нельзя считать правильным для случая очень малых μ и λ , когда второй член формулы (1,5) может стать больше первого. В этом случае надо учесть следующие члены ряда теории возмущений. При этом нам достаточно ограничиваться только теми членами, которые на каждую лишнюю степень g содержат соответствующую степень большого логарифма. Нетрудно видеть, что такого рода члены

^{*)} Здесь и в дальнейшем будем полагать $\hbar = 1$.

возникают при таких виртуальных переходах, когда первоначальная пара не разрывается, т. е. обе частицы одновременно перемещаются или внутри или вне ферми-сферы. Возникающий при этом ряд представляет собой геометрическую прогрессию, первые два члена которой даются формулой (1,5). Сумма всего ряда, очевидно, равна

$$A = \frac{g}{1 - \frac{g k_0^2}{2\pi^2 v} \ln \frac{2\omega}{\max\{\mu, \lambda\}}} . \quad (1,6)$$

В гамильтониане H' константа g может быть как отрицательной, так и положительной. В первом случае (отталкивание) при малых λ и μ амплитуда рассеяния обращается в нуль. Однако во втором случае (притяжение) возникает совершенно новое положение. Именно, при достаточно малых λ и μ амплитуда рассеяния имеет полюс. Это, как известно, соответствует появлению связанного состояния. Отметим, что образование такого состояния не было бы возможным без наличия других частиц, находящихся вместе с рассматриваемыми в основном состоянии, т. е. образующих ферми-сферу. Величина λ соответствует энергии связи этого состояния. Разным значениям μ , т. разным углам между k_1 и k_2 и будут, вообще говоря, соответствовать разные λ , однако вычисление этой зависимости находится за пределами нашей точности. Естественно считать из соображений симметрий, что основным будет состояние, когда k_1 и k_2 противоположны. В этом случае λ , соответствующее полюсу (мы назовем его Δ_0), будет равно

$$\Delta_0 = 2\omega \exp \left\{ -\frac{2\pi^2 v}{g k_0^2} \right\} . \quad (1,7)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что при наличии сколь угодно малого притяжения между частицами в ферми-газе образуются связанные состояния.

вакуум, будет порождать квазичастицу: при действии же оператора a_k на вакуум получаем нуль. Условие, запрещающее рождение пар, получается приравнением нулю коэффициентов при членах, содержащих произведение двух операторов $a_{k1}^+ a_{-k0}^+$. Таким путем получаем

$$2\xi_k u_k v_k = g(u_k^2 - v_k^2) \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} . \quad (2,6)$$

Вводим обозначение

$$\Delta(0) = g \sum_k u_k v_k \quad (2,7)$$

и далее выражаем из (2,6) и (2,7) u_k и v_k через ξ_k и $\Delta(0)$:

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{\sqrt{\Delta^2(0) + \xi_k^2}} \right) , \quad (2,8)$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{\sqrt{\Delta^2(0) + \xi_k^2}} \right) . \quad (2,9)$$

Подставив полученные выражения для u_k и v_k в соотношение (2,6), получаем уравнение, определяющее константу $\Delta(0)$,

$$1 = \frac{1}{2} g \sum_{-\omega}^{\omega} \frac{1}{\sqrt{\Delta^2(0) + \xi_k^2}} . \quad (2,10)$$

После перехода от суммы (2,10) к интегралу и несложного интегрирования получаем

$$1 = \frac{1}{2} g \nu \ln \frac{2\omega}{\Delta(0)} , \quad (2,11)$$

где $\nu = \frac{k_0^2}{\omega}$. Полученное уравнение определяет константу $\Delta(0)$. Как мы

мы видим, что благодаря второму отрицательному члену энергия полученного основного состояния лежит ниже нулевой энергии, соответствующей заполненной сфере Ферми для свободных электронов. Заметим, что уравнение (2,11) имеет решение лишь при $g > 0$, т. е. при наличии притяжения между частицами.

О роли кулоновского взаимодействия электронов^{8а}

Для возникновения сверхпроводимости необходимо, чтобы суммарный эффект взаимодействия через фононы и кулоновского взаимодействия соответствовал притяжению, т. е. приводил к образованию пар электронов. Остановимся теперь несколько подробнее на роли кулоновского взаимодействия. Поскольку проблема точного учета кулоновского взаимодействия не решена, то мы попытаемся учесть его некоторым модельным путем.

Гамильтониан системы, из которого мы исходили, включал некоторое эффективное притяжение, которое действовало в области импульсов от $-\omega$ до ω , где ω соответствовало дебаевской частоте решетки. Это модельное взаимодействие эквивалентно взаимодействию через фононы. Учет кулоновского взаимодействия можно приближенно провести также модельным путем, включив в гамильтониан постоянное отталкивательное взаимодействие, действующее в области импульсов $-\omega_1$ до ω_1 , превосходящую первую область*).

Таким образом, исходный гамильтониан имеет следующий вид:

$$H = \sum_k \xi_k a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} + \sum_{k, k_1} g_{kk_1} a_{k_1}^+ a_{k_1}^+ a_{k_2}^- a_{k_2}^- ,$$

$$g_{kk_1} = \begin{cases} g + g_1 |\xi(k)|, & |\xi(k_1)| < \omega \\ g_1 & |\xi(k)| \text{ или } |\xi(k_1)| > \omega, \end{cases} \quad (2,15)$$

причем $g > 0$, $g_1 < 0$.

Далее все вычисления производятся, как и раньше, т. е. вводятся операторы a_{k_1} и a_{k_0} по соотношению (2,3), производится диагонализация гамильтониана (15) и находятся коэффициенты преобразования u_k и v_k из условия минимума энергии. Таким путем получаем

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}} \right), \quad (2,16)$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}} \right), \quad (2,17)$$

причем величина Δ_k теперь есть функция от k , определяемая из соотношения

$$\Delta_k = \sum_{k_1} g_{kk_1} u_{k_1} v_{k_1}. \quad (2,18)$$

Пользуясь этим соотношением, получим два уравнения, определяющие величину Δ в двух областях импульсов:

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta_0 & |\xi(k)| < \omega, \\ \Delta_1 & \omega < |\xi(k)| < \omega_1, \end{cases}$$

$$\Delta_0 = \frac{1}{2} (g + g_1) \Delta_0 \ln \frac{2\omega}{\Delta_0} + \frac{1}{2} g_1 \Delta_1 \ln \frac{\omega_1}{\omega},$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} g_1 \Delta_0 \ln \frac{2\omega}{\Delta_0} + \frac{1}{2} g_1 \Delta_1 \ln \frac{\omega_1}{\omega}. \quad (2,19)$$

*.) Это соответствует тому, что кулоновское взаимодействие экранируется на расстояниях порядка периода решетки.

Исключив из этих уравнений Δ_1 , находим уравнение Δ_0

$$\frac{1}{2} \ln \frac{2\omega}{\Delta_0} \left[g + \frac{g_1}{1 - \frac{1}{2} g_1 \ln \frac{\omega_1}{\omega}} \right] = 1. \quad (2,20)$$

Это уравнение имеет решение только в том случае, когда

$$g + \frac{g_1}{1 - \frac{1}{2} g_1 \ln \frac{\omega_1}{\omega}} > 0. \quad (2,21)$$

Полученное условие есть критерий того, что в системе могут возникать связанные состояния, а следовательно, будет иметь место сверхпроводимость. Любопытно, что взаимодействие g_{kk} может быть отталкивающим во всей области импульсов ($g + g_1 < 0$) и тем не менее условие для возможности сверхпроводимости может быть выполнено. Это связано с тем, что действующее в более широкой области импульсов кулоновское взаимодействие перенормируется, причем перенормировка содержит значительный логарифм $\ln \frac{\omega_1}{\omega}$.

§ 3. ТЕРМОДИНАМИКА СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Рассмотрим теперь свойства сверхпроводников при температурах, отличных от абсолютного нуля. В этом случае система электронов уже не будет находиться в основном состоянии, следовательно средние значения произведений операторов $a_k^+ a_k$ не будут равны нулю (как это имеет место при $T = 0$), а будут равны соответствующим числам заполнения n_k .

Операторы u_k и v_k мы определим, аналогично предыдущему, таким образом, чтобы в гамильтониане компенсировались все члены, приводящие к порождению пар. Соответствующее условие имеет вид

$$2\xi_k u_k v_k = g (u_k^2 - v_k^2) \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} (1 - n_{k'1} - n_{k'0}). \quad (3,1)$$

Введя обозначение

$$\Delta = g \sum_k u_k v_k (1 - n_{k1} - n_{k0}), \quad (3,2)$$

мы выражаем u_k и v_k через ξ_k и Δ и находим следующее уравнение для Δ :

$$1 = \frac{g}{2} \sum_k \frac{1 - n_{k1} - n_{k0}}{\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}}. \quad (3,3)$$

Для u_k и v_k имеем прежние формулы (2,8), (2,9)

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\xi_k}{\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}} \right\}, \quad (3,4)$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\xi_k}{\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}} \right\}. \quad (3,5)$$

Вычислим теперь энергию системы в возбужденном состоянии как функционал распределения возбуждений. Взяв диагональный матричный элемент от гамильтониана (2,5), получаем:

$$E = 2 \sum_k \xi_k v_k^2 + \sum_k \xi_k (u_k^2 - v_k^2) (n_{k1} + n_{k0}) - g \sum_{kk'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} (1 - n_{k1} - n_{k0}) (1 - n_{k'1} - n_{k'0}). \quad (3,6)$$

Система возбуждений может быть рассмотрена как система квазинезависимых частиц. В этом случае имеет место хорошо известная формула для энтропии

$$S = - \sum_k [n_{k0} \ln n_{k0} + (1 - n_{k0}) \ln (1 - n_{k0}) + n_{k1} \ln n_{k1} + (1 - n_{k1}) \ln (1 - n_{k1})]. \quad (3,7)$$

Из условия экстремальности энтропии при заданной энергии, подобно тому, как это было сделано в теории ферми-жидкости Л. Д. Ландау¹¹, можно определить функции распределения n_{k1} и n_{k0} . Они оказываются равными функции Ферми

$$n_k = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon(k)}{T}} + 1}, \quad (3,8)$$

где $\varepsilon(k)$ есть функциональная производная

$$\varepsilon(k) = \frac{\delta E}{\delta n_k}. \quad (3,9)$$

Варьирование энергии E по n_k можно производить при постоянных u_k и v_k . Дело в том, что условие (3,4) может быть получено из (3,6) как условие экстремума энергии E относительно u_k . Действительно, варьируя E по u_k и используя условие

$$u_k^2 + v_k^2 = 1,$$

мы легко получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta u_k} = - \frac{2}{v_k} \left\{ 2\xi_k u_k v_k - (u_k^2 - v_k^2)(1 - n_{k1} - n_{k0}) \times \right. \\ \left. \times g \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} (1 - n_{k'1} - n_{k'0}) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3,10)$$

Это условие, очевидно, совпадает с условием (3,1). Учитывая это обстоятельство, находим энергию возбуждения $\varepsilon(k)$

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) = \left(\frac{\delta E}{\delta n_k} \right)_{u_k v_k} = \\ = \xi_k (u_k^2 - v_k^2) + 2u_k v_k g \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} (1 - n_{k'0} - n_{k'1}). \end{aligned} \quad (3,11)$$

Используя теперь условия (3,1) и формулы (3,5), окончательно получаем

$$\varepsilon(k) = \sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}. \quad (3,12)$$

По форме эта энергия совпадает с энергией возбуждений при $T = 0$. Однако при этом не надо забывать, что величина Δ , играющая роль «энергетической щели», зависит от температуры и определяется уравнением (3,4).

Подставляя формулу (3,8) в это уравнение, получаем соотношение, определяющее величину энергетической щели

$$\frac{g}{2} \sum_k \frac{\tanh \frac{\varepsilon}{2T}}{\varepsilon} = 1. \quad (3,13)$$

Изменение энергетической щели с температурой

Рассмотрим подробное уравнение (3,13). При температуре $T = 0$, $\operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2T} \rightarrow 1$; и интегрируя по $d\xi$ в пределах от $-\omega$ до ω , находим

$$\frac{1}{2} g v \ln \frac{2\omega}{\Delta(0)} = 1, \quad (3,14)$$

где $v = \frac{k_0^2}{\pi^2 \nu}$. Это условие (3,11), найденное ранее для определения $\Delta(0)$. Уравнение (3,13) теперь может быть записано в виде

$$\ln \frac{2\omega}{\Delta(0)} = \int_{\Delta}^{\omega} \frac{\operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2T}}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} d\varepsilon = \ln \frac{2\omega}{\Delta} + \int_{\Delta}^{\omega} \frac{\operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2T} - 1}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} d\varepsilon. \quad (3,15)$$

Последний интеграл является сходящимся, ввиду чего верхний предел в нем может быть устремлен к ∞ . Вводя новую переменную по формуле $\varepsilon = \Delta \operatorname{ch} \varphi$, получаем:

$$\ln \frac{\Delta(0)}{\Delta} = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\varphi}{e^{\frac{\Delta \operatorname{ch} \varphi}{T}} + 1}. \quad (3,16)$$

Из этой формулы можно найти Δ во всем интервале температур. Для этой цели удобно представить правую часть этого уравнения в виде ряда по функциям Ханкеля K_0 ,

$$\ln \frac{\Delta(0)}{\Delta} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} K_0 \left(\frac{\Delta m}{T} \right). \quad (3,17)$$

Вблизи $T = 0$ мы можем ограничиться первым членом этого ряда и воспользоваться асимптотическим представлением функции K_0 . Это дает

$$\Delta = \Delta(0) - \sqrt{2\pi T \Delta(0)} e^{-\frac{\Delta(0)}{T}}. \quad (3,18)$$

Переход в нормальное состояние соответствует обращение Δ в нуль. Из этого условия и уравнения (3,15) можно найти связь между $\Delta(0)$ и температурой перехода T_c . Для малых значений $\frac{\Delta}{T}$ удобно воспользоваться формулой суммирования ряда (3,17):

$$\ln \frac{\Delta(0)}{\Delta} = \ln \frac{\pi T}{\gamma \Delta} + 2\pi \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2l-1)\pi} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta}{T}\right)^2 + (2l-1)^2\pi^2}} \right], \quad (3,19)$$

где $\ln \gamma$ равен постоянной Эйлера 0,577. Для точки перехода отсюда имеем

$$\frac{\Delta(0)}{T_c} = \frac{\pi}{\gamma} = 1,76. \quad (3,20)$$

Разлагая формулу (3,19) по $\frac{\Delta}{T}$, находим соотношение

$$\ln \frac{T}{T_c} = -\frac{7}{8\pi^2} \zeta(3) \left(\frac{\Delta}{T} \right)^2 + \frac{93\zeta(5)}{128\pi^4} \left(\frac{\Delta}{T} \right)^4. \quad (3,21)$$

В первом порядке по $T - T_c$:

$$\frac{\Delta}{T_c} = 3,06 \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}. \quad (3,22)$$

Формулы (3,21) и (3,19) позволяют вычислить зависимость $\Delta(T)$. Полный график этой зависимости изображен на рис. 1.

Коэффициент ω в формуле (3,14) порядка максимальной дебаевской частоты. Величина этой частоты обратно пропорциональна корню квадратному из массы атомов (M). Таким образом, величина щели в спектре возбуждений обратно пропорциональна \sqrt{M} . С другой стороны, величина щели отличается лишь постоянным множителем от температуры перехода T_c , поэтому имеем

$$T_c \sim \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Следовательно, температура перехода T_c обратно пропорциональна корню из массы атомов (изотопический эффект). Сделаем замечание о возможном соотношении между величиной щели и дебаевской температурой. Это соотношение согласно (3,14) равно

$$\frac{\Delta_0}{\omega} = 2e^{-\frac{2}{g\gamma}}.$$

Исследование устойчивости решетки¹² приводит к некоторому критерию, ограничивающему величину, состоящую в экспоненте, следующим неравенством:

$$\frac{2}{g\gamma} > 2.$$

Таким образом, величина щели примерно на порядок будет меньше дебаевской температуры.

Теплоемкость

Мы начнем с вычисления энтропии. Исходим из известной формулы (3,7), интегрируя по частям и воспользовавшись формулой (3,8), находим:

$$S = -\frac{2\gamma}{T} \int_{\Delta}^{\infty} \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2} \varepsilon \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} d\varepsilon. \quad (3,23)$$

Подстановкой $\varepsilon = \Delta \operatorname{ch} \varphi$ эту формулу можно привести к виду

$$S = \frac{2\Delta^2}{T} \gamma \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} 2\varphi}{e^{\frac{\Delta \operatorname{ch} \varphi}{T}} + 1} d\varphi = \frac{2\Delta^2 \gamma}{T} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} K_2 \left(\frac{\Delta}{T} m \right). \quad (3,24)$$

При $T = 0$ получаем асимптотическое значение

$$S = \sqrt{\frac{2\pi\Delta^3(0)}{T}} \gamma e^{-\frac{\Delta(0)}{T}}. \quad (3,25)$$

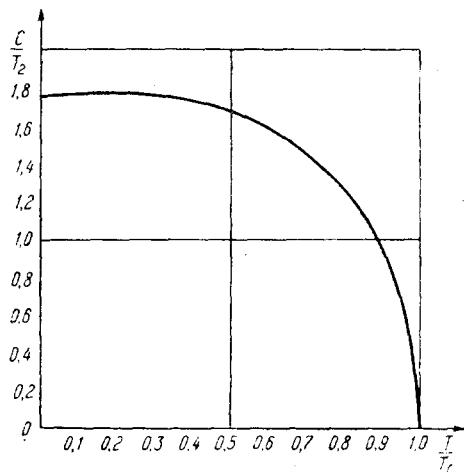


Рис. 1.

Вблизи точки перехода разложение формулы (3,23) приводит к следующему результату:

$$S = \frac{\pi^3}{3} T^q \left[1 - \frac{3}{2\pi^2} \left(\frac{\Delta}{T} \right)^2 + \frac{3q}{8\pi^2} \left(\frac{\Delta}{T} \right)^4 \right], \quad (3,26)$$

где

$$q = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}^2 x}{x^2} dx \simeq 0,8.$$

Вычислим теперь теплоемкость.

Дифференцируя формулу (3,25) и воспользовавшись разложением (3,21), получаем

$$\frac{C_s(T)}{C_n(T_c)} = 2,4 + 7,3 \frac{T-T_c}{T_c}. \quad (3,27)$$

Здесь мы отнесли теплоемкость к ее значению в нормальном состоянии при $T = T_c$, равному $C_n(T_c) = \frac{\pi^2}{3} \nu T_c$.

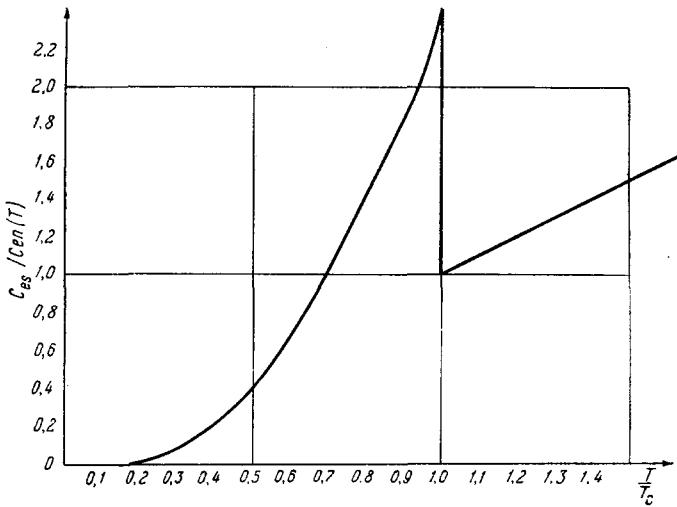


Рис. 2.

Из формулы (3,27) следует, что при $T = T_c$ теплоемкость имеет конечный скачок и ее левая производная в этой точке остается конечной. Более подробный анализ показывает, что следующий член разложения по $T - T_c$ пропорционален $(T_c - T)^{3/2}$.

Дифференцируя формулу (3,25), находим асимптотическое значение теплоемкости при $T \rightarrow 0$

$$\frac{C_s(T)}{C_n(T_c)} = \frac{3}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\Delta(0)}{T} \right)^{3/2} e^{-\frac{\Delta(0)}{T}}. \quad (3,28)$$

Полная кривая теплоемкости приведена на рис. 2.

Несмотря на то, что рассмотренная модель, не учитывающая анизотропии, является довольно грубым приближением, интересно сравнить полученные теоретические результаты с экспериментальными данными для ряда сверхпроводников. Это сделано на рис. 3. Данные для Sn, Zn и Al получены Н. В. Заваричким¹³, а данные по V и Nb взяты из работ¹⁴. Из этого рисунка видно, что в большинстве случаев экспери-

ментальные данные неизменно воспроизводятся теорией. Хуже всего обстоит дело для цинка в низкотемпературной области. Это может происходить оттого, что теплоемкость в этой области очень

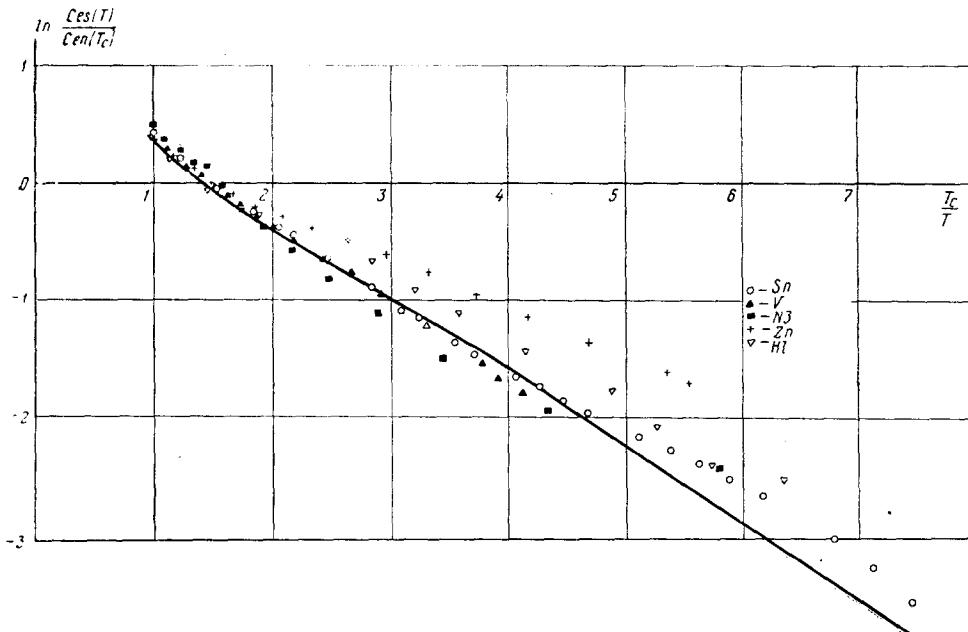


Рис. 3.

чувствительна к значению $\Delta(0)$. Логарифмический масштаб плохо передает величину скачка теплоемкости. Ввиду этого соответствующие значения мы помещаем в отдельную таблицу.

Из приведенного сравнения видно, что несмотря на грубоść модели, она довольно хорошо соответствует экспериментальным данным.

Здесь уместно отметить некоторую характерную особенность реального анизотропного случая. Ширина щели, вообще говоря, зависит от направления. При $T = T_c$ щели по всем направлениям одновременно закрываются. При измерении теплоемкости в низкотемпературной области, естественно, проявляется минимальная щель. С другой стороны, значение $\Delta(0)$, найденное с помощью соотношения (3,20), справедливого для изотропного случая, дает некоторую усредненную величину щели. Отсюда ясно, что теоретическая кривая для изотропной модели в низкотемпературной области обязательно даст заниженное значение теплоемкости, что полностью соответствует рис. 3.

Вещество	$C_s(T_c)/C_n(T_c)$
Sn	2,82
Zn	2,32
Al	2,5
V	2,52
Nb	3,07

Критическое магнитное поле

Величина критического магнитного поля может быть найдена с помощью известного термодинамического соотношения

$$\frac{H_0^2}{8\pi} = F_n - F_S. \quad (3,29)$$

Вычислим свободную энергию F_S в сверхпроводящем состоянии, равную

$$F_S = E - TS. \quad (3,30)$$

Энергия E определяется формулой (3,6), а энтропия формулой (3,7). Прежде чем подставить выражение для E и S в (3,30), несколько преобразуем их. Энергия (3,6) после подстановки выражений (3,5) для u_k и v_k и несложных преобразований с учетом (3,3) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} E = \sum_k & \left\{ \left[\xi_k - \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2} \right] + \frac{\Delta^2}{2} \frac{1}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}} \right\} + \\ & + \sum_k \left\{ 2n_k \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2} - \Delta^2 n_k \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (3,31)$$

Энтропия (3,7) после несложного интегрирования по частям может быть записана в виде*)

$$S_S = \frac{2}{T} \sum_k \left[2n_k \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2} - \Delta^2 n_k \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}} \right]. \quad (3,32)$$

Подставив (3,31) и (3,32) в формулу для F_S , получаем

$$F_S = \sum_k \left\{ \xi_k - \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2} + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}} \right\} - \frac{1}{2} S_S T. \quad (3,33)$$

Сумма в формуле может быть переписана в виде

$$\sum \rightarrow 2 \sum_{\xi_k < 0} \xi_k + \sum \left\{ |\xi_k| - \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2} + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}} \right\}. \quad (3,34)$$

Первая сумма в (3,34) не зависит от щели Δ и есть некоторая константа, общая для сверхпроводящего и нормального состояний, которую можно просто опустить. Вторая же сумма может быть переписана в виде сходящегося интеграла, величина которого равна $-\frac{1}{4} \nu \Delta^2$. Таким образом, окончательно получаем

$$F_S = -\frac{1}{4} \nu \Delta^2 - \frac{1}{2} S_S T. \quad (3,35)$$

Свободная энергия в нормальном состоянии, как известно, равна

$$F_n = -\frac{1}{2} S_n T. \quad (3,36)$$

Из (3,35) и (3,36) находим соотношение, определяющее величину критического поля,

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{1}{4} \nu \Delta^2 + \frac{1}{2} (S_S - S_n) T. \quad (3,37)$$

Эта формула связывает критическое магнитное поле с шириной щели и разностью энтропий в сверхпроводящем и нормальном состояниях. При температуре $T = 0$ отсюда получаем связь между шириной щели $\Delta(0)$ и критическим полем H_{c0}

$$H_{c0} = \Delta(0) \sqrt{2\pi\nu} = T_c \frac{\pi}{\gamma} \sqrt{2\pi\nu}. \quad (3,38)$$

*) Здесь энтропию в сверхпроводящем состоянии отмечаем индексом S .

При T , близких к нулю, энтропия S_S является экспоненциально малой, энтропия же S_n равна $S_n = \frac{\pi^2}{3} vT$. Учитывая это, находим закон изменения H_c с температурой вблизи $T = 0$:

$$H_c = H_{c0} \left(1 - \frac{\gamma^2 T^2}{3 T_c^2} \right), \quad \gamma = 1,78. \quad (3,39)$$

Характер изменения H_c вблизи температуры перехода мы найдем, подставив в формулу (3,37) выражение (3,26) для энтропии. При этом квадратичные по Δ члены сократятся и мы получим в первом неисчезающем приближении

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{q v \Delta^4}{16 T_c^6}, \quad q \approx 0,8. \quad (3,40)$$

Воспользовавшись теперь формулой (3,22) и формулой (3,38), выразим H_c через H_{c0} вблизи точки перехода

$$H_c = H_{c0} \cdot 2,35 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right). \quad (3,41)$$

Полученная температурная зависимость для H_c вблизи T_c находится в согласии с экспериментальными данными¹⁵, которые обычно описываются во всей области температур формулой

$$H_c = H_{c0} \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right). \quad (3,42)$$

Очевидно, что обе формулы дают не слишком далекие значения H_c для T вблизи T_c . Что же касается области температур, близких к $T = 0$, то здесь так же, как это видно из сравнения формул (3,41) и (3,42), имеется хорошее согласие теории с экспериментом.

В заключение этого параграфа приведем несколько соотношений, получающихся после дифференцирования формулы (3,37):

$$(S_S - S_n) - (C_S - C_n) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \Delta^2, \quad (3,43)$$

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{v}{4T} \frac{\partial}{\partial T} (T \Delta^2) + \frac{1}{2} T (C_S - C_n). \quad (3,44)$$

Соотношение (3,43) замечательно тем, что оно позволяет выразить энтропию в сверхпроводящем состоянии в виде некоторого интеграла от производной $\frac{\partial \Delta}{\partial T}$. Действительно, записав в (3,43) C_S в виде $T \frac{\partial S_S}{\partial T}$ и проинтегрировав полученное соотношение, мы находим

$$S_S = T \int_0^T \frac{1}{T^2} \frac{d\Delta^2}{dT} dT. \quad (3,43')$$

Число «нормальных» электронов

Для характеристики поведения сверхпроводников в магнитных полях в некоторых случаях (в так называемой лондоновской области) важно так называемое «число нормальных электронов». Эта величина может быть определена как коэффициент пропорциональности между полным импульсом возбуждений и их макроскопический скоростью. Полный импульс возбуждений равен

$$P = \sum_k \mathbf{k} (n_{k0} + n_{k1}). \quad (3,4)$$

При наличии макроскопического движения аргументом функции n_k будет уже не $\varepsilon(k)$, а $\varepsilon(k) - \mathbf{k}\mathbf{u}$. Считая u малым и разлагая $n(\varepsilon - \mathbf{k}\mathbf{u})$

в ряд по $\mathbf{k}u$, находим

$$P = -\frac{2}{T} \sum \mathbf{k}(\mathbf{k}u) \frac{\partial n_k}{\partial \varepsilon(k)} = -\frac{k_0^2 v}{3T} u \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial n}{\partial \xi} d\xi. \quad (3,46)$$

Отсюда без труда находим отношение числа нормальных электронов в сверхпроводящем состоянии к полному числу «свободных» электронов

$$\frac{N_n}{N_0} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial n}{\partial \xi} d\xi. \quad (3,47)$$

Введя новую переменную $\xi = \Delta \operatorname{ch} \varphi$, эту формулу можно переписать в виде

$$\frac{N_n}{N_0} = 2 \frac{\Delta}{T} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \varphi d\varphi}{(e^{\frac{\Delta \operatorname{ch} \varphi}{T}} + 1)(e^{-\frac{\Delta \operatorname{ch} \varphi}{T}} + 1)}. \quad (3,48)$$

Продифференцировав соотношение (3,16) по температуре, мы замечаем, что отношение $\frac{N_n}{N_0}$ выражается через производную $\frac{\partial \Delta}{\partial T}$:

$$\frac{N_n}{N_0} = - \frac{\frac{1}{T} \frac{\partial \Delta}{\partial T}}{\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\Delta}{T} \right)}. \quad (3,49)$$

Отсюда находим следующее простое соотношение, определяющее число «сверхпроводящих» электронов $N_S = N_0 - N_n$,

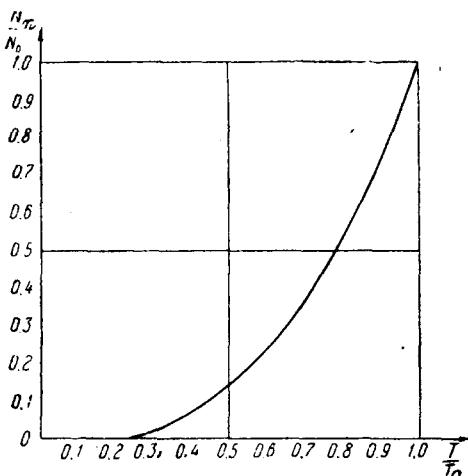


Рис. 4.

$$\frac{N_S}{N_0} = - \frac{1}{\frac{\partial \ln \Delta/T}{\partial \ln T}}. \quad (3,50)$$

Приведем результаты для двух предельных случаев. При $T \rightarrow 0$ имеем

$$\frac{N_n}{N_0} = \sqrt{2\pi \frac{\Delta(0)}{T}} e^{-\frac{\Delta(0)}{T}}. \quad (3,51)$$

В обратном предельном случае $T \rightarrow T_c$ находим

$$\frac{N_n}{N_0} = 2 \frac{T_c - T}{T_c}. \quad (3,52)$$

Так же, как и в теплоемкости, следующий член разложения по $T_c - T$ будет пропорционален $(T_c - T)^{3/2}$. Полная кривая $N_n(T)/N_0$ изображена на рис. 4.

§ 4. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Температура $T = 0$

Рассмотрим сверхпроводник, находящийся в постоянном (не зависящем от времени) магнитном поле, векторный потенциал которого равен

$$\mathbf{A}(r) = \sum_q \mathbf{A}_q e^{iqr}. \quad (4,1)$$

Вычислим ток, возникающий под действием такого поля. Вначале найдем изменение энергии δE системы при наличии поля, а затем,

воспользовавшись известным соотношением

$$\delta E = -\frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}, \quad (4,2)$$

найдем ток Гамильтониан системы при наличии поля равен

$$H_f = H + \frac{1}{2m} \sum a_{k_0}^* a_{k'_0} \left[-\frac{e}{c} (\mathbf{k} + \mathbf{k}') \mathbf{A} + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \right], \quad (4,3)$$

где H — невозмущенный гамильтониан задачи (2,1). Далее производим переход от операторов частиц $a_{k_0}^*$ и a_{k_0} к операторам возбуждений α_{k_1} и α_{k_0} согласно (2,3). В результате получаем преобразованный гамильтониан

$$\begin{aligned} H_f &= H + H', \\ H' &= \frac{1}{2m} \sum \left[-\frac{e}{c} (\mathbf{k} + \mathbf{k}') \mathbf{A} + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \right] \times \\ &\quad \times [u_k u_{k'} (\alpha_{k_1}^* \alpha_{k'_1} + \alpha_{k_0}^* \alpha_{k'_0}) + v_k v_{k'} (\alpha_{-k_0} \alpha_{-k'_0} + \alpha_{-k_1} \alpha_{-k'_1}) + \\ &\quad + u_k v_{k'} (\alpha_{k_1}^* \alpha_{-k'_0} - \alpha_{k_0}^* \alpha_{-k'_1}) + v_k u_{k'} (\alpha_{-k_0} \alpha_{k'_1} - \alpha_{-k_1} \alpha_{k'_0})]. \end{aligned} \quad (4,4)$$

Очевидно, что изменение энергии системы будет происходить лишь во втором порядке по \mathbf{A} , так как потенциал \mathbf{A} не имеет диагональных матричных элементов. Для нахождения изменения энергии необходимо взять первое приближение теории возмущений от членов, квадратичных по \mathbf{A} , и второе приближение от членов, линейных по \mathbf{A} , в H' . При $T=0$ неисчезающие диагональные матричные элементы имеют только члены, содержащие произведение операторов $\alpha \alpha^*$. Таким образом, беря диагональные матричные элементы от H' , находим изменение энергии в первом порядке теории возмущений

$$\delta E_I = \sum_{k,q} H'_{kk} = \frac{e^2}{mc^2} \sum_{k,q} \mathbf{A}_{-q} \mathbf{A}_q v_k^2. \quad (4,5)$$

При вычислении второго приближения теории возмущений возможны переходы такого типа, в которых вначале рождаются два возбуждения с противоположными спинами, а затем они уничтожаются. Матричный элемент от H' , соответствующий рождению пары возбуждений согласно (4,4), равен

$$(u_k v_{k-q} - v_k u_{k-q})(2\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{A}_q).$$

Разность энергий между основным состоянием и состоянием с двумя возбуждениями равна

$$-(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-q}).$$

Учитывая это, находим во втором приближении теории возмущения

$$\delta E_I = -\frac{e^2}{4m^2 c^2} \sum \frac{(u_k v_{k-q} - v_k u_{k-q})^2 (2\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{A}_q) (2\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{A}_{-q})}{\varepsilon_k + \varepsilon_{k-q}}. \quad (4,6)$$

Воспользовавшись теперь соотношением (4,2), варьированием суммы $\delta E_I + \delta E_{II}$ находим фурье-компоненту тока:

$$\mathbf{j}_q = \frac{e^2}{mc} \left\{ - \sum 2v_k^2 \mathbf{A}_q + \frac{1}{2m} \sum \frac{(2\mathbf{k} - \mathbf{q}) (2\mathbf{k} - \mathbf{p}, \mathbf{A}_q) (v_k u_{k-q} - v_{k-q} u_k)^2}{\varepsilon_k + \varepsilon_{k-q}} \right\}. \quad (4,7)$$

Полученное выражение для \mathbf{j}_q обладает одним большим недостатком: оно не является градиентно инвариантным. В этом можно убедиться, если вычислить $\operatorname{div} \mathbf{j}$, которая согласно условию непрерывности должна быть равна нулю. В фурье-компонентах это требование сводится к условию $\mathbf{q} \mathbf{j}_q = 0$. Легко видеть, что выражение (4,7) в общем случае не

удовлетворяет этому условию. Это обстоятельство, не замеченное авторами работы⁶, не является удивительным, поскольку примененная техника теории возмущений не является градиентно инвариантной. В действительности в формуле (4,7) под A_q следует понимать лишь поперечную часть потенциала. Преобразование (2,3) от операторов a_{kz} к паре операторов a_{k1} и a_{-k0} производится таким образом, что образующиеся пары связанных электронов всегда имеют равный нулю импульс. Это последнее свойство теории, очевидно, не является инвариантным, поскольку пары в поле могут двигаться. Более подробный анализ этого вопроса показывает, что вклад в ток дает только поперечная часть векторного потенциала, удовлетворяющая условию $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

Выражение (4,7) для тока j_q обладает важным для дальнейшего понимания свойством. Именно, при больших значениях волнового вектора q роль щели $\Delta(0)$ будет несущественной. Таким образом, в этой области энергий возбуждения должны вести себя подобно свободным электронам. Но свободные электроны не обладают свойством сверхпроводимости. Следовательно, ток j_q должен стремиться к нулю при стремлении величины вектора q к бесконечности. Даваймся в том, что при больших значениях q первый и второй члены в (4,7) компенсируют друг друга. Для этого воспользуемся симметричной формой записи для второго члена в фигурной скобке (4,7):

$$\sum \rightarrow \frac{2}{m} \sum \frac{k(kA_q) \left(\begin{matrix} v_{k-\frac{q}{2}} u_{k+\frac{q}{2}} - v_{k+\frac{q}{2}} u_{k-\frac{q}{2}} \\ \varepsilon_{k-\frac{q}{2}} + \varepsilon_{k+\frac{q}{2}} \end{matrix} \right)^2}{\varepsilon_{k-\frac{q}{2}} \varepsilon_{k+\frac{q}{2}}}. \quad (4,8)$$

Выразив теперь $v_{k \pm \frac{q}{2}}$ и $u_{k \pm \frac{q}{2}}$ через $\xi_{\pm} = v \left(\left| k \pm \frac{q}{2} \right| - k_0 \right)$ согласно соотношению (3,5), получаем для больших значений q $\xi_{\pm} = \xi \pm \frac{q}{2} \cos \theta$ (θ — угол, образованный векторами k и q ; q велико, однако $|q| \ll k_0$).

$$\sum \rightarrow \frac{2}{m} \sum k(kA_q) \frac{1}{|\xi_+| + |\xi_-|} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_+}{|\xi_+| + |\xi_-|} \right). \quad (4,9)$$

В этой сумме отличны от нуля лишь члены, в которых ξ_+ и ξ_- имеют различные знаки. Переходя от суммы к интегралу, имеем

$$\sum \rightarrow \frac{2}{m} \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_{k_0 - \frac{q}{2} \cos \theta}^{k_0 + \frac{q}{2} \cos \theta} \frac{1}{q \cos \theta} \cdot \frac{2\pi k^2 dk}{v(2\pi)^3} k(kA_q) = \frac{8\pi k_0^4}{3(2\pi)^3 mv} A_q = N A_q. \quad (4,10)$$

Здесь N есть полное число электронов (в cm^3), равное

$$N = \frac{8\pi k_0^3}{3(2\pi)^3}. \quad (4,11)$$

Первый член в фигурной скобке в выражении (4,7) для j_q , очевидно, равен $-NA_q$, и поэтому указанная выше компенсация обоих членов в j_q при больших q имеет место.

Связь между током j_q и поперечной частью потенциала A_q мы в дальнейшем будем записывать в виде

$$j_q = -\frac{e}{4\pi} K(q) A_q \quad (4,12)$$

с ядром $K(q)$, равным, согласно (4,7) и (4,8),

$$K(q) = \frac{Ne^2}{mc^2} \left\{ 1 - \frac{k_0^4}{Nm v (2\pi)^3} \int \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi d\cos \theta d\varphi d\xi}{\varepsilon_+ + \varepsilon_-} \left(1 - \frac{\xi_+ \xi_- + \Delta^2(0)}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \right) \right\}. \quad (4,13)$$

В этом выражении можно выполнить интегрирование по $d\xi$ от $-\infty$ до $+\infty$ и по углу φ . В результате получаем ($\mu = \cos \theta$)

$$\begin{aligned} K(q) &= \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \left\{ 1 - \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) d\mu \left[1 - \frac{2\Delta^2(0) \arg \operatorname{sh} \frac{q\mu v}{2\Delta(0)}}{q\mu v \sqrt{\Delta^2(0) + \frac{q^2 \mu^2 v^2}{4}}} \right] \right\} = \\ &= \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \frac{3\Delta(0)}{2|\mathbf{q}|v} \int_{-1}^1 \frac{\arg \operatorname{sh} \frac{q\mu v}{2\Delta(0)}}{\sqrt{1 + \frac{q^2 \mu^2 v^2}{4\Delta^2(0)}}} (1 - \mu^2) d\mu. \end{aligned} \quad (4,14)$$

Таким образом, мы получили выражение для ядра $K(q)$ при $T = 0$. В соответствии со сказанным выше оно стремится к нулю для достаточно больших волновых векторов \mathbf{q} . Распределение поля в сверхпроводнике (эффект Майснера) может быть найдено, если к уравнению (4,14) присоединить уравнение Максвелла ($\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$)

$$\Delta \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j}. \quad (4,15)$$

Формула (4,12) устанавливает связь между фурье-компонентами тока \mathbf{j}_q и потенциала поля A_q для произвольных значений волнового вектора \mathbf{q} . Полученная связь в общем случае оказывается нелокальной, т. е. коэффициент $K(q)$ при A_q оказывается зависящим от величины вектора \mathbf{q} . В координатном пространстве этому соответствует некоторая интегральная связь между $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ вида $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$.

Таким образом, значение тока в некоторой точке определяется интегралом от значений потенциала поля в некоторой окрестности от этой точки. Такую связь мы и называем нелокальной. В старой теории Лондона функция $K(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ имела характер δ -функции ($K(q) = \text{const}$), так что $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ было пропорционально $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Мы увидим, что такая пропорциональность имеет место лишь для малых значений волнового вектора. Нелокальный характер связи между \mathbf{j} и \mathbf{A} был предсказан Пиппардом⁷.

Глубина проникновения

Применим уравнения (4,14), (4,15) к полупространству, т. е. будем рассматривать металлы, заполняющие полупространство. При этом, естественно, возникает вопрос о том, насколько справедливо в этом случае уравнение (4,14), выведенное для бесконечного пространства. К счастью, ситуация в этом вопросе оказывается благоприятной, и наличие границы не влияет на ядро $K(q)$. Дело в том, что длина волны возбуждений мала и по порядку величины равна

$$\lambda \sim \frac{1}{k_0}, \quad (4,16)$$

т. е. порядка межатомных расстояний. Поэтому наличие границы будут замечать лишь возбуждения, находящиеся в узком слое у границы, ширина которого порядка межатомных расстояний. Поскольку, как известно, глубина проникновения на несколько порядков превышает эту область, то естественно, что выражение (4,12) с $K(q)$, определенным

соотношением (4,14), будет справедливо во всех случаях, т. е. для любых конфигураций в пространстве.

Второй вопрос, который возникает при наличии границы, связан с характером отражения возбуждений от границы. Как известно, в некоторых задачах, например в задаче об аномальном скин-эффекте¹⁶, в двух предельных случаях — зеркальном и диффузном — получаются незначительно различающиеся результаты. Можно надеяться, что и в данном случае характер отражения возбуждений от границы не сказывается существенно на величине глубины проникновения. Поэтому мы вначале разберем случай зеркального отражения. Наличие зеркально-отражающей границы позволяет нам четным образом продолжить потенциал на вторую половину пространства, т. е. положить $A(z) = A(-z)$ (z — направление нормали к границе, векторный потенциал A берется параллельным границе). Это требование записывается в виде

$$A_q = A_{-q}. \quad (4,17)$$

Поскольку на границе металла имеется магнитное поле, то отсюда следует, что производные $\frac{\partial A}{\partial z}$ не будут равны по обе стороны от границы $z = 0$. Действительно, если бы производная $\frac{\partial A}{\partial z}$ была непрерывна, то для четной функции на границе ($z = 0$) эта производная, а следовательно и поле, равнялась бы нулю. Поскольку производная $\frac{\partial A}{\partial z}$ при $z = +0$ и $z = -0$ не равны, то вторая производная $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$ при $z = 0$ содержит δ -функцию от координаты z . Поэтому для полупространства в правой части уравнения (4,15) необходимо добавить член $C\delta(z)$ с коэффициентом C , величина которого легко определяется из граничных условий. Действительно, производная $\frac{\partial A}{\partial z}$ при $z = 0$ равна значению магнитного поля H_0 на границе. Поэтому вторая производная $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$ равна $2H_0\delta(z)$. Таким образом, $C = 2H_0$. В случае полупространства все величины зависят только от координаты z . Переписав (4,15) в фурье-компонентах с учетом δ -функции, получаем

$$q^2 A_q = \frac{4\pi}{c} j_q + \frac{1}{\pi} H_0. \quad (4,18)$$

Подставив теперь сюда выражение (4,12) для тока j_q и решив полученное уравнение относительно A_q , находим

$$A_q = \frac{H_0}{\pi} \frac{1}{q^2 + K(q)}. \quad (4,19)$$

В координатном представлении имеем

$$A(z) = \frac{2H_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos qz dq}{q^2 + K(q)}. \quad (4,20)$$

Дифференцируя это выражение по z и учитывая граничное условие при $z = 0$ $H = H_0$, находим выражение для магнитного поля в заполняющем пространство металле:

$$H(z) = H_0 - \frac{2H_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin qz dq}{q^2 + K(q)}. \quad (4,21)$$

Наконец, вычислим глубину проникновения δ , которая определяется соотношением

$$\delta = \frac{\int_0^\infty H dz}{H_0} = \frac{A(0)}{H_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{q^2 + K(q)}. \quad (4,22)$$

Остановимся подробнее на анализе полученного выражения для глубины проникновения. Предварительно выясним вид функции $K(q)$ в пределе больших и малых значений q . Несложные вычисления с помощью формулы (4,14) дают следующий результат:

$$K(q) = \begin{cases} \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \left(1 - \frac{1}{30} \frac{q^2 v^2}{\Delta^2(0)} \right), & \\ \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \frac{3\pi^2 \Delta(0)}{4qv} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{\ln qv/\Delta(0)}{qv/\Delta(0)} \right). & \end{cases} \quad (4,23a)$$

$$K(q) = \begin{cases} \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \left(1 - \frac{1}{30} \frac{q^2 v^2}{\Delta^2(0)} \right), & \\ \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \frac{3\pi^2 \Delta(0)}{4qv} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{\ln qv/\Delta(0)}{qv/\Delta(0)} \right). & \end{cases} \quad (4,23b)$$

Оба выражения для $K(q)$ смыкаются приближительно при

$$q_0 \approx \frac{3\pi^2 \Delta(0)}{4} \frac{1}{v}.$$

В случае, когда глубина проникновения δ мала по сравнению с $\frac{1}{q_0}$ (случай Пиппарда), в интеграле (4,22) играют роль большие значения q . Воспользовавшись второй формулой (4,23), получаем

$$\delta = \frac{2}{\pi \sqrt[3]{\frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \frac{3\pi^2 \Delta_0}{4v}}} \int_0^\infty \frac{q dq}{q^3 + 1} = \frac{4}{3\sqrt[3]{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3\pi^3 \pi e^2}{mc^2} \frac{\Delta_0}{v}}}. \quad (4,24)$$

В обратном предельном случае (случай Лондона), когда $\delta \gg \frac{1}{q_0}$, пользуемся первой формулой (4,23) и получаем

$$\delta = \frac{2}{\pi \sqrt[3]{\frac{4\pi Ne^2}{mc^2}}} \int_0^\infty \frac{dq}{q^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{4\pi Ne^2}{mc^2}}}. \quad (4,25)$$

Таким образом, в этом предельном случае мы получаем старую хорошо известную формулу теории Лондона. Следует заметить, что при $N \sim 10^{22}$ и $\Delta(0) \sim 5^\circ\text{K}$ обе формулы дают численно примерно совпадающие результаты для величины глубины проникновения. Встречаются сверхпроводники как пиппардовского, так и лондонского типов. Так, алюминий и ртуть являются пиппардовскими металлами, свинец и индий — лондонскими. Существуют и промежуточные случаи (олово).

Температура $T \neq 0$

Рассмотрим теперь находящийся в магнитном поле сверхпроводник при не равной нулю температуре T . Магнитное поле задается, как и раньше, вектором-потенциалом A . Так же, как и при $T = 0$, мы вычислим добавку к энергии, пользуясь гамильтонианом (4,4). Однако теперь вклад во второе приближение теории возмущений будут давать не только члены, содержащие по два оператора α^+ или α' , но и члены, содержащие произведение $\alpha^+ \alpha$. В данном случае произведения $\alpha_k^+ \alpha_{k'}$, соответствующие рождению возбуждения в состоянии k и уничтожению возбуждения в состоянии k' , могут давать необходимые матричные элементы перехода, поскольку система не находится в основном состоянии. При

в этом действие операторов a_k^+ и a_k на ϕ -функцию невозмущенного состояния определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} a_k^+ \phi(\dots n_k \dots) &= \sqrt{1 - n_k} \phi(\dots n_k - 1 \dots), \\ a_k \phi(\dots n_k \dots) &= \sqrt{n_k} \phi(\dots n_k + 1 \dots). \end{aligned} \quad (4,26)$$

Добавка к энергии в первом приближении теории возмущений равна

$$\delta E_I = \sum H'_{kk} = \frac{e^2}{mc^2} \sum_k \mathbf{A}_q \mathbf{A}_{-q} [v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2) n_k]. \quad (4,27)$$

Поскольку, однако, разность $u_k^2 - v_k^2$ согласно (3,5) есть нечетная функция ξ , то сумма $\sum (u_k^2 - v_k^2) n_k$ равна нулю. Поэтому для δE_I получается прежняя (см. (4,5)) формула

$$\delta E_I = \frac{Ne^2}{mc^2} \sum \mathbf{A}_q \mathbf{A}_{-q}. \quad (4,28)$$

Вычисление добавки δE_{II} второго приближения теории возмущений производится так же просто. Матричный элемент от H' , соответствующий рождению пары возбуждений, согласно (4,4) и (4,26) равен

$$(v_k u_{k-q} - u_k v_{k-q}) (2\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{A}_q) \sqrt{1 - n_{k-q}} \sqrt{1 - n_k}.$$

Матричный элемент, соответствующий уничтожению пары в невозмущенном состоянии, равен

$$(u_k v_{k-q} - v_k u_{k-q}) (2\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{A}_q) \sqrt{1 - n_{k-q}} \sqrt{n_k}.$$

Наконец, матричный элемент, соответствующий одновременному уничтожению и рождению возбуждения, равен

$$(u_k u_{k-q} + v_k v_{k-q}) \sqrt{1 - n_k} \sqrt{n_{k-q}}.$$

Теперь без труда записываем добавку к энергии второго приближения

$$\begin{aligned} \delta E_{II} = - \frac{e^2}{4m^2 c^2} \sum & \frac{(u_k v_{k-q} - v_k u_{k-q})^2 (2\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{A}_q) (2\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{A}_{-q})}{\varepsilon_k + \varepsilon_{k-q}} \cdot (1 - n_k - n_{k-q}) + \\ & + \frac{(u_k u_{k-q} + v_k v_{k-q})^2 (2\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{A}_q) (2\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{A}_{-q})}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q}} (-n_k + n_{k-q}). \end{aligned} \quad (4,29)$$

Переходя от переменной \mathbf{k} к переменной $\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}$ и учитывая выражение (3,8) для n_k , получаем симметричную формулу для δE

$$\begin{aligned} \delta E = \delta E_I + \delta E_{II} = \frac{e^2}{2mc^2} \Big[& \sum 2v_k^2 \mathbf{A}_q \mathbf{A}_{-q} - \frac{1}{m} \sum \frac{\left(u_{k-\frac{q}{2}} v_{k+\frac{q}{2}} - v_{k-\frac{q}{2}} u_{k+\frac{q}{2}} \right)^2}{\varepsilon_{k-\frac{q}{2}} + \varepsilon_{k+\frac{q}{2}}} \times \\ & \times (\mathbf{k} \mathbf{A}_q) (\mathbf{k} \mathbf{A}_{-q}) \left[\operatorname{th} \frac{\varepsilon_{k-\frac{q}{2}}}{2T} + \operatorname{th} \frac{\varepsilon_{k+\frac{q}{2}}}{2T} \right] - \\ & - \frac{\left(u_{k-\frac{q}{2}} u_{k+\frac{q}{2}} + v_{k-\frac{q}{2}} v_{k+\frac{q}{2}} \right)^2}{\varepsilon_{k+\frac{q}{2}} - \varepsilon_{k-\frac{q}{2}}} (\mathbf{k} \mathbf{A}_q) (\mathbf{k} \mathbf{A}_{-q}) \left[\operatorname{th} \frac{\varepsilon_{k+\frac{q}{2}}}{2T} - \operatorname{th} \frac{\varepsilon_{k-\frac{q}{2}}}{2T} \right] \Big]. \end{aligned} \quad (4,30)$$

Варьируя полученную формулу по \mathbf{A}_{-q} , находим выражение для фурье-компоненты тока

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_q = -c \frac{\delta E}{\delta \mathbf{A}_{-q}} = \frac{e^2}{mc} \left[-\sum 2v_k^2 \mathbf{A}_q + \frac{1}{m} \sum (\mathbf{k} \mathbf{A}_q) k \right] \times \\ \times \left\{ \frac{\left(\frac{v}{k-\frac{q}{2}} \frac{v}{k+\frac{q}{2}} - \frac{v}{k-\frac{q}{2}} \frac{u}{k+\frac{q}{2}} \right)^2}{\frac{\varepsilon}{k-\frac{q}{2}} + \frac{\varepsilon}{k+\frac{q}{2}}} \left[\operatorname{th} \frac{\frac{\varepsilon}{k-\frac{q}{2}}}{2T} + \operatorname{th} \frac{\frac{\varepsilon}{k+\frac{q}{2}}}{2T} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\left(\frac{u}{k-\frac{q}{2}} \frac{u}{k+\frac{q}{2}} + \frac{v}{k-\frac{q}{2}} \frac{v}{k+\frac{q}{2}} \right)^2}{\frac{\varepsilon}{k-\frac{q}{2}} - \frac{\varepsilon}{k+\frac{q}{2}}} \left[\operatorname{th} \frac{\frac{\varepsilon}{k-\frac{q}{2}}}{2T} - \operatorname{th} \frac{\frac{\varepsilon}{k+\frac{q}{2}}}{2T} \right] \right\}. \quad (4,31) \end{aligned}$$

Далее, воспользуемся выражениями (3,5) для u_k и v_k и учтем, что $\xi_{k \pm \frac{q}{2}} = \xi \pm \frac{1}{2}qv \cos \theta$. После несложных преобразований получаем (\mathbf{A}_q — ноперечная часть потенциала)

$$\begin{aligned} K(q) = \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \left\{ -1 + \frac{3}{16\pi} \int \sin^2 \theta d \cos \theta \int d\varphi \int d\xi \times \right. \\ \times \left[\frac{1}{\varepsilon_+ + \varepsilon_-} \left(1 - \frac{\xi_+ \xi_- + \Delta^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \right) \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon_+}{2T} + \operatorname{th} \frac{\varepsilon_-}{2T} \right) + \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon_+ - \varepsilon_-} \left(1 + \frac{\xi_+ \xi_- + \Delta^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \right) \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon_+}{2T} - \operatorname{th} \frac{\varepsilon_-}{2T} \right) \right] \right\}, \quad (4,32) \end{aligned}$$

$$\mathbf{j}_q = \frac{c}{4\pi} K(q) \mathbf{A}_q.$$

Здесь индексом (+) обозначен аргумент $k + \frac{q}{2}$, а индексом (-) аргумент $\mathbf{k} - \frac{q}{2}$. Полученная связь (4,32) между фурье-компонентами тока и векторного потенциала так же, как и при $T=0$, имеет нелокальный характер. Значение тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ в некоторой точке пространства определяется значениями потенциала поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в некоторой области вокруг этой точки. Преобразуем несколько полученное выражение для $K(q)$. Вначале собираем члены с $\operatorname{th} \varepsilon_+$ и $\operatorname{th} \varepsilon_-$ в (4,32), а затем выполняем интегрирование по $d\varphi$ (и в части членов — интегрирование по $d\xi$). В результате часть членов сокращается, и мы находим

$$K(q) = \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \left(\frac{3}{8} \frac{\Delta^2}{qv} \right) \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \theta d \cos \theta}{\xi \cos \theta} \left[\frac{\operatorname{th} \frac{\varepsilon_+}{2T}}{\varepsilon_+} - \frac{\operatorname{th} \frac{\varepsilon_-}{2T}}{\varepsilon_-} \right] d\xi. \quad (4,33)$$

В общем случае в интеграле (4,33) не удается провести дальнейшего интегрирования. Поэтому мы рассмотрим предельные случаи больших и малых значений q . В пределах больших значений q в интеграле (4,33) существенна область малых (близких к нулю) значений ξ и $\mu = \cos \theta$. Поэтому в интеграле (4,33) в медленно меняющейся функции $\operatorname{th} \varepsilon/2T$ можно положить ξ и μ равными нулю. Таким образом, получаем

$$K(q) = \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \left(\frac{3\Delta}{2qv} \right) \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \left(\frac{1}{\varepsilon_+} - \frac{1}{\varepsilon_-} \right) \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}. \quad (4,34)$$

Дальнейшие вычисления уже производятся элементарно. После замены переменных $\xi \rightarrow \frac{1}{\eta}$ производится интегрирование по $d\eta$. В полученном интеграле по $d\xi$ делается замена $\frac{qv\xi}{2\Delta} = \operatorname{sh} \chi$, и в результате имеем

$$K(q) = \frac{12\pi Ne^2}{mc^2} \frac{\Delta}{qv} \int_0^\infty \frac{\chi d\chi}{\operatorname{sh} \chi} \cdot \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}. \quad (4,35)$$

Наконец, выполнив последнее несложное интегрирование, находим

$$K(q) = \frac{3\pi^3 Ne^2}{mc^2} \frac{\Delta}{qv} \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}. \quad (4,36)$$

Эта формула отличается от формулы (4,23) лишь заменой

$$\Delta_0 \rightarrow \Delta \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}.$$

Получим теперь формулу для предельного случая малых q . Указанную предельную формулу для $q \rightarrow 0$ легче всего получить, если исходить из первоначальной формулы (4,32). В этом случае она дает

$$K(q) = \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \left[1 - \frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2T} \right) d\xi \right]. \quad (4,37)$$

Но $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2T}$ есть просто $-\frac{\partial n}{\partial \varepsilon}$; согласно (3,47) интеграл $= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} d\xi$ равен отношению числа нормальных электронов к полному числу электронов. Таким образом, при $q \rightarrow 0$ имеем

$$K(q) = \frac{4\pi N_s e^2}{mc^2}, \quad (4,38)$$

где число сверхпроводящих электронов равно

$$N_s = N \left[1 + \int \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} d\xi \right]. \quad (4,39)$$

Вблизи $T = T_c$ N_s меняется с температурой по линейному закону. Ядро $K(q)$ в этой области согласно (3,52) и (4,38) равно

$$K(q) = \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \left(2 \frac{T_c - T}{T_c} \right), \quad q \rightarrow 0. \quad (4,40)$$

Для больших значений q согласно (3,22) и (4,36) $K(q)$ равно

$$K(q) = \frac{3\pi^3 Ne^2}{mc^2} \frac{\Delta_0}{qv} \left(2,65 \cdot \frac{T_c - T}{T_c} \right). \quad (4,41)$$

Значение q_0 , при котором смыкаются обе формулы, равно

$$q_0 = \frac{3\pi^2}{8} 2,65 \cdot \frac{\Delta_0}{v} \simeq 10 \frac{\Delta_0}{v}. \quad (4,42)$$

Величина граничного волнового вектора q_0 при $T = 0$ согласно (4,23) равна примерно $7,5 \frac{\Delta_0}{v}$. Таким образом, мы получаем фундаментально важный, как мы увидим сейчас, факт, состоящий в том, что величина граничного волнового вектора q_0 , разделяющая области больших и малых значений волновых векторов, не зависит от температуры.

Величина глубины проникновения при $T \neq 0$ определяется так же, как и при $T = 0$, формулой (4,22).

В этом случае, когда глубина проникновения мала: $\delta \ll \frac{1}{q_0}$, пользуясь формулой (4,36), получаем

$$\delta = \frac{4}{3\sqrt{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{3\pi^3 Ne^2}{mc^2} \frac{\Delta}{v} \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}}} = \delta_{T=0} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{\Delta}{\Delta_0} \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}}}. \quad (4,43)$$

В обратном предельном случае $\delta \gg \frac{1}{q_0}$ пользуемся формулой (4,38) и получаем хорошо известную формулу теории Лондонов

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi N_s e^2}{mc^2}}}. \quad (4,44)$$

Очевидно, что достаточно близко от $T = T_c$ всегда осуществляется этот последний случай, т. е. имеет место формула для δ , даваемая теорией Лондонов. Обычно температурную зависимость глубины проникновения описывают эмпирической формулой

$$\delta = \delta_{0L} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{T^4}{T_c^4}}}, \quad \delta_{0L} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{mc^2}}}. \quad (4,45)$$

Теоретическая формула вблизи T_c имеет вид

$$\delta = \delta_{0L} \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}}. \quad (4,46)$$

Как мы знаем, энергия связи пары связанных электронов примерно равна Δ_0 . Поэтому ширина области в импульсном пространстве, характеризующая пару, равна $\frac{\Delta_0}{v}$. А следовательно, размер пары по порядку величины равен $\frac{v}{\Delta_0}$. Границный волновой вектор q_0 можно рассматривать как более точную характеристику размера пары. Соответствующая волновому вектору q_0 длина

$$\lambda_0 \sim \frac{1}{q_0} \sim \frac{1}{8} \frac{v}{\Delta_0} \quad (4,47)$$

является характерным параметром теории.

Итак, старая теория Лондона имеет место лишь в том случае, когда глубина проникновения больше λ_0 . В этом случае в ядре $K(q)$ существенны лишь волновые векторы $q < q_0$ и связь между j и A становится локальной (коэффициент пропорциональности между j_q и A_q не зависит от q). Таким образом, теория Лондона имеет место тогда, когда размер пары мал по сравнению с глубиной проникновения. Наоборот, когда размер пар велик по сравнению с глубиной проникновения (случай Пиппарда), имеет место новая теория, в которой связь между j и A уже нелокальна. Любопытно, что характерная длина λ_0 не зависит от температуры.

Диффузное рассеяние

До сих пор мы при вычислении глубины проникновения предполагали, что отражение электронов от поверхности металла происходит зеркальным образом. Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда электроны отражаются диффузно. Что происходит в этом случае,

можно легко выяснить, если воспользоваться результатами работы¹⁶ по аномальному скин-эффекту. Если бы мы переписали уравнение (4,18), определяющее потенциал \mathbf{A} в координатном представлении, то, как мы уже говорили, оно имело бы следующий вид:

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = - \int K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (4,48)$$

с ядром $K(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, фурье-компоненты которого равны $K(q)$. В случае зеркального отражения область интегрирования простирается от $-\infty$ до $+\infty$ (\mathbf{A} в этом случае четным образом продолжена на вторую половину пространства). В случае диффузного отражения область интегрирования, очевидно, простирается от 0 до ∞ . В этом случае при решении уравнения метод Фурье не применим, а необходимо пользоваться методом Хопфа — Винера. Мы прямо воспользуемся результатами работы¹⁶ и напишем формулу для глубины проникновения в диффузном случае

$$\delta = \frac{\pi}{\int_0^\infty dq \ln \left(1 + \frac{1}{q^2} K(q) \right)} \quad (4,49)$$

В лондонской области $K(q)$ определяется формулой (4,38) и после интегрирования по частям мы получаем

$$\delta = \frac{\pi}{2 \int dq \frac{K(q)}{q^2 + K(q)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi N_s e^2}{mc^2}}} \quad (4,50)$$

В обратном предельном случае (пиппардовская область) $K(q)$ определяется формулой (4,36). Подставив $K(q)$ в формулу (4,50) и проинтегрировав по частям, получаем

$$\delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{3\pi^3 Ne^2}{mc^2} \frac{\Delta}{v} \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}}} \quad (4,51)$$

Как и следовало ожидать, в лондонской области глубина проникновения не зависит от характера отражения, в пиппардовской же области (малые глубины проникновения), сравнив формулы (4,43) и (4,51), находим отношение

$$\frac{\delta_{\text{диф}}}{\delta_{\text{зер}}} = \frac{9}{8} \quad (4,52)$$

Таким образом, и в этом случае зависимость от характера отражения в общем невелика.

Замечания о свойствах сверхпроводников конечных размеров

В рассмотренном нами случае, когда сверхпроводник заполняет полупространство, векторный потенциал \mathbf{A} автоматически удовлетворял условию $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Тогда, как указывалось, согласно (4,7) имело место необходимое в стационарных условиях условие $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Для сверхпроводников конечных размеров и произвольной формы в этом пункте требуется некоторое уточнение. Действительно, условие $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ является достаточным, но не необходимым для того, чтобы выполнялось условие сохранения $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Поэтому в общем случае для сверхпроводников произвольной конфигурации необходимо решить следующую

полную систему, состоящую из уравнения Максвелла и уравнения (4,32) для сверхпроводящего тока:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (4,53)$$

$$\mathbf{j}_q = \frac{c}{4\pi} K(q) \mathbf{A}_q. \quad (4,54)$$

Согласно (4,54) имеет место условие сохранения для тока

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (4,55)$$

Векторный потенциал при этом, в общем случае, не будет удовлетворять условию $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

В качестве примера задачи о сверхпроводнике конечных размеров вычислим магнитный момент шарообразного сверхпроводника в постоянном магнитном поле \mathbf{H}_0 ^{*)}. Размер шара предполагаем малым по сравнению с глубиной проникновения. Для лондоновской области эта задача решалась и ответ хорошо известен:

$$\mathbf{M} = -\frac{a^5}{308\pi} \mathbf{H}_0 \quad (4,56)$$

(a — радиус шара).

Решим ее для цилиндровской области. В координатном представлении уравнение (4,32) в этом случае может быть записано в следующем виде⁶:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = B_p \int \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}'))}{R^2} d^3 \mathbf{r}'. \quad (4,57)$$

Здесь $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, \mathbf{n} — единичный вектор по направлению \mathbf{R} и B_p — константа, равная

$$B_p = \frac{3}{4} \frac{Ne^2}{mc} \frac{\Delta}{v} \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}. \quad (4,57')$$

Малость размеров тела по сравнению с глубиной проникновения позволяет не решать в данном случае уравнение Максвелла, поскольку вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ мало отличается от его значения в отсутствие тела в поле. В постоянном магнитном поле \mathbf{H}_0 вектор-потенциал равен

$$A(r) = \frac{1}{2} [\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}]. \quad (4,58)$$

В рассматриваемом специальном случае $\mathbf{n}(\mathbf{A}(\mathbf{r}') - \mathbf{A}(\mathbf{r})) = 0$ и поэтому $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ в (4,57) можно заменить на $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Закон сохранения $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ можно также записать в виде граничного условия для нормальной компоненты тока на поверхности тела

$$j_n = 0. \quad (4,59)$$

Для шара, из соображений симметрии, это условие, очевидно, будет выполняться автоматически.

Воспользуемся теперь следующим простым преобразованием:

$$\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{A})}{R^2} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\mathbf{A} \operatorname{div} \frac{\mathbf{n}}{R} - (\mathbf{A}\nabla) \frac{\mathbf{n}}{R} \right), \quad (4,60)$$

и перейдем в (4,57) к интегрированию на поверхности. Таким путем находим:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = B_p \left\{ \mathbf{A}(\mathbf{r}) \int \frac{\mathbf{n} dS}{R} - \int (\mathbf{A} dS) \frac{\mathbf{n}}{R} \right\}. \quad (4,61)$$

^{*)} Эта задача рассматривалась ранее¹⁷.

Введем углы: χ — между направлением вектора \mathbf{n} и нормалью к поверхности, полярный угол θ (направление \mathbf{r} выберем за направление полярной оси) и азимутальный угол φ . Тогда имеем

$$\cos \theta = \frac{r^2 + a^2 - R^2}{2ar}, \quad \cos \chi = \frac{R^2 + a^2 - r^2}{2aR}. \quad (4,62)$$

При этом ток \mathbf{j} согласно (4,61) будет равен

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2} B_p \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^2}{R} [\cos \chi - \sin(\theta + \chi) \sin \theta \sin^2 \varphi] d\cos \theta d\varphi \right\}. \quad (4,63)$$

После несложного интегрирования отсюда получаем окончательное выражение для тока

$$\mathbf{j} = \frac{\pi}{4} B_p [\mathbf{H}_0 \mathbf{r}] \frac{1}{r} \left\{ \frac{(a^2 - r^2)(a^2 + 3r^2)}{4r^2} \ln \frac{a+r}{a-r} + \frac{3ar}{2} - \frac{1}{2} \frac{a^3}{r} \right\}. \quad (4,64)$$

Дальнейшее вычисление магнитного момента шара

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{j} \mathbf{r}] dv \quad (4,65)$$

производится элементарно. Подставляем выражение (4,64) для j в (4,65) и после несложного интегрирования находим

$$\mathbf{M} = -\mathbf{H}_0 \frac{\pi^2}{96\pi} a^6 B_p. \quad (4,66)$$

Выразив B_p через глубину проникновения δ_p , согласно (4,52) получаем выражение для магнитного момента шара в пинпардовском случае ($a \ll \delta_p$)

$$\mathbf{M} = -\mathbf{H}_0 \frac{\sqrt{3}}{96\pi} \frac{a^6}{\delta_p^3}. \quad (4,67)$$

В то время, как в лондоновском случае магнитная восприимчивость шара пропорциональна квадрату отношения $\frac{a}{\delta_L}$, в пинпардовском случае она пропорциональна кубу отношения $\frac{a}{\delta_p}$.

§ 5. ПОВЕДЕНИЕ СВЕРХПРОВОДНИКОВ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ (ВЫСОКОЧАСТОТНОМ) ПОЛЕ *

Свойства сверхпроводников в высокочастотном поле могут быть выяснены таким же путем, как это было сделано в случае постоянного поля. Мы рассмотрим сверхпроводник, находящийся в магнитном поле, которое изменяется с частотой ω . Вектор-потенциал поля запишем в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum \mathbf{A}_q e^{iq\mathbf{r} - i\omega t}. \quad (5,1)$$

Далее найдем оператор тока. Согласно (4,4) имеем

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{j}} = & -\frac{e}{2mc} \sum \left(\mathbf{k} + \mathbf{k}' - \frac{e}{c} 2\mathbf{A} \right) \left\{ u_k v_{k'} (\alpha_{k1}^+ \alpha_{k'1}^- + \alpha_{k0}^+ \alpha_{k'0}^-) + \right. \\ & + v_k v_{k'} (\alpha_{-k0}^+ \alpha_{-k'0}^- + \alpha_{-k1}^+ \alpha_{-k'1}^-) + u_k v_{k'} (\alpha_{k1}^+ \alpha_{-k'0}^- - \alpha_{k0}^+ \alpha_{-k'1}^-) + \\ & \left. + v_k u_{k'} (\alpha_{-k0}^+ \alpha_{k'1}^- - \alpha_{-k1}^+ \alpha_{k'0}^-) \right\}. \quad (5,2) \end{aligned}$$

Матричный элемент оператора тока может быть найден по известным формулам теории возмущений для случая периодического во времени

возмущения¹⁸. Таким путем находим

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_q = -\frac{e^2}{2m^2c^2} \sum \left\{ \left(u_{k-\frac{q}{2}} v_{k+\frac{q}{2}} - v_{k-\frac{q}{2}} u_{k+\frac{q}{2}} \right)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{k+\frac{q}{2}} + \varepsilon_{k-\frac{q}{2}} + \omega} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon_{k+\frac{q}{2}} + \varepsilon_{k-\frac{q}{2}} - \omega} \right) \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon_{k-\frac{q}{2}}}{2T} + \operatorname{th} \frac{\varepsilon_{k+\frac{q}{2}}}{2T} \right) + \left(u_{k+\frac{q}{2}} u_{k-\frac{q}{2}} - v_{k+\frac{q}{2}} v_{k-\frac{q}{2}} \right)^2 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{1}{\varepsilon_{k+\frac{q}{2}} - \varepsilon_{k-\frac{q}{2}} + \omega} + \frac{1}{\varepsilon_{k+\frac{q}{2}} - \varepsilon_{k-\frac{q}{2}} - \omega} \right) \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon_{k+\frac{q}{2}}}{2T} - \operatorname{th} \frac{\varepsilon_{k-\frac{q}{2}}}{2T} \right) \right) \right\} k(kA_q). \end{aligned} \quad (5,3)$$

Воспользовавшись теперь выражением (3,5), окончательно получаем

$$\mathbf{j}_q = \frac{c}{4\pi} K(q, \omega) \mathbf{A}_q, \quad (5,4)$$

$$\begin{aligned} K(q, \omega) = \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2mN} \sum k_i k_k \left[\left(1 - \frac{\xi_- \xi_+ + \Delta^2}{\varepsilon_- \varepsilon_+} \right) \times \right. \right. \\ \times \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon_+}{2T} + \operatorname{th} \frac{\varepsilon_-}{2T} \right) \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_+ + \varepsilon_- + \omega} + \frac{1}{\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \omega} \right) + \left(1 + \frac{\xi_- \xi_+ + \Delta^2}{\varepsilon_- \varepsilon_+} \right) \times \\ \times \left. \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon_+}{2T} - \operatorname{th} \frac{\varepsilon_-}{2T} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon_+ - \varepsilon_- + \omega} + \frac{1}{\varepsilon_+ - \varepsilon_- - \omega} \right) \right] \} \quad \begin{cases} + \rightarrow k + \frac{q}{2} \\ - \rightarrow k - \frac{q}{2} \end{cases}. \end{aligned} \quad (5,5)$$

Далее учтем поперечность потенциала $\mathbf{A}_q (\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}_q = 0)$ и вычтем из $K(q, \omega)$ значение $K(q, 0)$ при $\omega = 0$, которое определяется формулой (4,32). Кроме того, заметим, что функция $K(q, \omega)$ является комплексной. Мнимая часть этой функции может быть найдена из условия затухания, которое учитывается в формуле (5,5), добавлением к ω небольшой мнимой положительной добавки $i\delta_1$. Таким путем находим

$$\begin{aligned} \tilde{K}(q, \omega) = K(q, \omega) - K(q, 0) = \frac{3}{4} \frac{\pi Ne^2}{mc^2} \int_0^1 \sin^2 \theta d\cos \theta \int d\xi \left\{ \left(1 - \frac{\xi_+ \xi_- + \Delta^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \right) \times \right. \\ \times \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon_+}{2T} + \operatorname{th} \frac{\varepsilon_-}{2T} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon_+ + \varepsilon_- + \omega + i\delta} + \frac{1}{\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \omega - i\delta} - 2 \frac{1}{\varepsilon_+ + \varepsilon_-} \right) + \\ + \left(1 + \frac{\xi_+ \xi_- + \Delta^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \right) \left(\operatorname{th} \frac{\varepsilon_+}{2T} - \operatorname{th} \frac{\varepsilon_-}{2T} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon_+ - \varepsilon_- + \omega + i\delta} + \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon_+ - \varepsilon_- - \omega - i\delta} - 2 \frac{1}{\varepsilon_+ - \varepsilon_-} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5,6)$$

Воспользовавшись теперь известным соотношением

$$\frac{1}{x \pm i\delta} = \frac{1}{x} \mp i\beta(x), \quad (5,7)$$

мы можем найти отсюда мнимую и вещественную часть $\tilde{K}(q, \omega)$. Введем следующее обозначение:

$$K(q, \omega) = \frac{3e^2 N \Delta}{4mc^2 q} Q(q, \omega) \quad (5,8)$$

и перейдем от переменных ξ и θ к переменным $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_+}{\Delta}$, $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_-}{\Delta}$. Таким

путем находим для случая больших значений q

$$\begin{aligned}
 Q(\omega) - Q(0) = & \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{d\varepsilon_1}{V_{\varepsilon_1^2-1}} \int_1^\infty \frac{d\varepsilon_2}{V_{\varepsilon_2^2-1}} \left[(1-\varepsilon_1\varepsilon_2) \left(\operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} \varepsilon_1 + \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} \varepsilon_2 \right) \times \right. \\
 & \times \left(\frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \tilde{\omega} + i\delta} + \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \tilde{\omega} - i\delta} - \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) - \\
 & - (1+\varepsilon_1\varepsilon_2) \left(\operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} \varepsilon_1 - \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} \varepsilon_2 \right) \left(\frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \tilde{\omega} + i\delta} + \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \tilde{\omega} - i\delta} - \frac{2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right) \Big] \\
 & \left(\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\Delta} \right). \tag{5,9}
 \end{aligned}$$

Пиппардовский предельный случай

Дальнейшие вычисления невозможны произвести без более конкретных предположений о величинах параметров, существенных в рассматриваемой задаче. Наиболее важным для нас обстоятельством является то, что, по-видимому, для большинства сверхпроводников глубина проникновения поля гораздо меньше величины v/Δ , т. е. $vq \gg \Delta^*$). Это неравенство нарушается лишь в окрестности точки перехода T_c , где возникает область с $vq \ll \Delta^{**}$.

В случае переменного поля лондоновская область сужается. Это ясно хотя бы из того обстоятельства, что нормальный металл всегда является «пиппардовским», так как в нем $\Delta = 0$, откуда следует, что лондоновская область не может продолжаться до самой точки перехода. Оставляя пока детальный разбор этого вопроса, мы рассмотрим здесь, как упрощается уравнение (5,6) в пиппардовской области.

Будем теперь для определенности считать $\omega > 0$ и выделим из интеграла (5,5) мнимую часть. При этом путем небольших преобразований можно убедиться в том, что действительная часть выражения (5,9) всегда имеет такой вид, как и при $T = 0$, но с Δ , зависящим от температуры. Окончательное выражение имеет вид

$$\begin{aligned}
 Q(\omega) - Q(0) = & \int_1^\infty \frac{d\varepsilon_1}{V_{\varepsilon_1^2-1}} \int_1^\infty \frac{d\varepsilon_2}{V_{\varepsilon_2^2-1}} \left[(1-\varepsilon_1\varepsilon_2) \left(\frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \tilde{\omega}} + \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \tilde{\omega}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \right] - \frac{i\pi}{2} \theta \left(\frac{\tilde{\omega}}{2} - 1 \right) \int_1^{\tilde{\omega}-1} \frac{d\varepsilon}{V_{\varepsilon^2-1} V_{(\tilde{\omega}-\varepsilon)^2-1}} [\varepsilon (\tilde{\omega} - \varepsilon) - 1] \times \\
 & \times \left[\operatorname{th} \Delta \left(\frac{\tilde{\omega} - \varepsilon}{2T} \right) + \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} \varepsilon \right] - i\pi \int_0^\infty \frac{d\varepsilon [\varepsilon (\tilde{\omega} + \varepsilon) + 1]}{V_{\varepsilon^2-1} V_{(\tilde{\omega} + \varepsilon)^2-1}} \times \\
 & \times \left[\operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} (\tilde{\omega} + \varepsilon) - \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} \varepsilon \right], \tag{5,10}
 \end{aligned}$$

*) Строго говоря, сильное неравенство $vq \gg \Delta$ не имеет места. Но применимость формул, получающихся в этом предельном случае, обеспечивается возникновением значительных числовых факторов.

**) Случай, когда при $\omega=0$ сверхпроводник описывается уравнением Ф. и Г. Лондонов во всей области температур, является, по-видимому, более редким, и мы не будем его рассматривать.

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases} \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\Delta}.$$

Одно интегрирование в действительной части может быть выполнено. После этого остается:

$$\operatorname{Re}[Q(\omega) - Q(0)] = I(\tilde{\omega}) + I(-\tilde{\omega}) - 2I(0), \quad (5.11)$$

$$I(\tilde{\omega}) = \int_1^{\infty} \frac{d\varepsilon [\varepsilon(\varepsilon + \tilde{\omega}) + 1]}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sqrt{(\varepsilon + \tilde{\omega})^2 - 1}} \operatorname{arch}(\varepsilon + \tilde{\omega}). \quad (5.12)$$

Хотя каждый из интегралов в формуле (5.6) расходится, но в сумме они дают конечное выражение. В интеграле $I(-\tilde{\omega})$ в области, где $0 < \varepsilon - \tilde{\omega} < 1$, следует вместо $\operatorname{arch}(\varepsilon - \tilde{\omega})/\sqrt{(\varepsilon - \tilde{\omega})^2 - 1}$ брать $\arccos(\varepsilon - \tilde{\omega})/\sqrt{1 - (\varepsilon - \tilde{\omega})^2}$, а в области, где $\varepsilon - \tilde{\omega}$ отрицательно, следует брать $-\operatorname{Arch}(\tilde{\omega} - \varepsilon)$ или, соответственно, $\frac{\pi}{2} + \arcsin(\tilde{\omega} - \varepsilon)$. Предельное значение этого выражения в области малых частот имеет вид

$$\operatorname{Re}[Q(\tilde{\omega}) - Q(0)] = \frac{5\pi^2}{12}(\tilde{\omega})^2. \quad (5.13)$$

В области $\tilde{\omega} \gg 1$ получаем

$$\operatorname{Re}[Q(\omega) - Q(0)] = -2 \ln 2\tilde{\omega} - \pi^2. \quad (5.14)$$

Выражение для $Q(0)$ согласно (4.36) равно

$$Q(0) = \pi^2 \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}. \quad (5.15)$$

Мнимая часть формулы (5.9) существенно зависит от соотношения между Δ , ω и T . Рассмотрим прежде всего случай $T=0$. При этом остается лишь первый член мнимой части в формуле (5.6) (мы будем называть его парным), который отличен от нуля лишь при $\omega > 2\Delta$. Физически это совершенно понятно. Ведь мнимая часть тока определяет поглощение, а в отсутствие возбуждений такое поглощение может происходить только благодаря разрыву пар. Величина 2Δ определяет с учетом статистики необходимую для этого энергию.

Совершая небольшое преобразование интеграла, находим

$$\operatorname{Im} Q(\omega) = -2\pi\theta\left(\frac{\tilde{\omega}}{2} - 1\right) \int_0^{\frac{\tilde{\omega}}{2}-1} \frac{d\varepsilon \frac{(\tilde{\omega}^2 - \varepsilon^2 - 1)}{\sqrt{(\tilde{\omega} - \varepsilon)^2 - 1} \sqrt{(\varepsilon + \tilde{\omega})^2 - 1}}}{\sqrt{(\tilde{\omega} - \varepsilon)^2 - 1} \sqrt{(\varepsilon + \tilde{\omega})^2 - 1}}. \quad (5.16)$$

Этот интеграл может быть сведен к эллиптическим. Вблизи порога, т. е. при $\frac{\tilde{\omega}}{2} - 1 \ll 1$, он имеет вид:

$$\operatorname{Im} Q(\omega) = -\pi^2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{2} - 1\right). \quad (5.17)$$

В предельном случае больших частот $\tilde{\omega} \gg 1$ он становится равным

$$\operatorname{Im} Q(\omega) = -\pi\tilde{\omega}. \quad (5.18)$$

В случае отличной от нуля температуры, как мы увидим в следующем параграфе, наибольший интерес представляют некоторые предельные случаи:

а) Случай $T \sim \omega \ll \Delta$.

Здесь, естественно, участвует только второй член мнимой части формулы (5,10) (мы будем называть его электронным). Преобразуя его, находим

$$\operatorname{Im} Q(\omega) = -4\pi \operatorname{sh} \frac{\omega}{2T} K_0 \left(\frac{\omega}{2T} \right) e^{-\frac{\Delta}{T}}, \quad (5,19)$$

где K_0 — функция Ханкеля от мнимого аргумента. В частности, имеем при $T \ll \omega \ll \Delta$

$$\operatorname{Im} Q(\omega) = -2\pi \sqrt{\frac{\pi T}{\omega}} e^{-\frac{\Delta}{T}}, \quad (5,20)$$

при $\omega \ll T \ll \Delta$

$$\operatorname{Im} Q(\omega) = -2\pi \frac{\omega}{T} \ln \frac{4T}{\gamma \omega} e^{-\frac{\Delta}{T}} \quad (\gamma = e^c = 1,76). \quad (5,21)$$

б) Случай $\omega \ll T \sim \Delta$.

Опять участвует только электронный член. Путем ряда преобразований находим

$$\operatorname{Im} Q(\omega) = -\pi \left[\frac{\omega}{T} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\Delta}{2T}} \ln 2 \sqrt{\frac{2\Delta}{\omega}} + \frac{\omega}{\Delta} \left(1 - \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} \right) - 2 \frac{\omega}{T} P \left(\frac{\Delta}{T} \right) \right], \quad (5,22)$$

где функция $P(x)$ есть интеграл

$$P(x) = \int_1^\infty \frac{dz}{z^2 - 1} \frac{\operatorname{ch} xz - \operatorname{ch} x}{(\operatorname{ch} xz + 1)(\operatorname{ch} x + 1)}. \quad (5,23)$$

Предельные значения этой функции равны

$$\begin{aligned} \text{при } x \gg 1 \quad P(x) &= e^{-x} \ln 2\gamma x, \\ \text{при } x \ll 1 \quad P(x) &= \frac{4x}{\pi^2} \zeta(3). \end{aligned} \quad (5,24)$$

Из выражения (5,23) находим

при $\omega \ll T \ll \Delta$ результат совпадает с (5,21),

при $\omega \ll \Delta \ll T$

$$\operatorname{Im} Q(\omega) = -\pi \frac{\omega}{\Delta}. \quad (5,25)$$

в) Случай $\omega \sim \Delta \ll T$.

Хотя парный член в принципе участвует в $\operatorname{Im} Q$, но вклад его оказывается малым. Что же касается электронного члена, то из него опять получается формула (5,25).

г) Случай $T \ll \omega \sim \Delta$.

Здесь имеются две возможности. Если $\omega < 2\Delta$, то участвует только электронный член, который дает

$$\operatorname{Im} Q(\omega) = -2\pi \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{T}{2\Delta} + \frac{T}{\omega}} e^{-\frac{\Delta}{T}}. \quad (5,26)$$

В частности, при $T \ll \omega \ll \Delta$ получается формула (5,20). Если же $\omega \gg 2\Delta$, то выражение (5,22) экспоненциально мало по сравнению с вкладом от парного члена (конечно отступая от порога).

Ввиду малости температуры мы можем при этом пользоваться формулами (5,16) – (5,17).

д) Случай $\Delta \ll T \sim \omega$.

Здесь в равной степени участвуют как парный, так и электронный член. Вычисление приводит к результату

$$\operatorname{Im} Q(\omega) = -\pi \left(\frac{\omega}{\Delta} - 2\operatorname{th} \frac{\omega}{2T} \right). \quad (5,27)$$

Хотя в этой формуле второй член много меньше первого, мы его оставляем по причинам, которые будут изложены ниже.

е) Случай $T \sim \Delta \ll \omega$.

Здесь главный вклад дает парный член, причем достаточно учесть только основное выражение, которое совпадает с формулой (5,22).

Отметим, что во всех случаях, когда $\omega \gg \Delta$, действительная часть $Q(\omega)$ мала по сравнению с мнимой, равной $-\frac{\pi\omega}{\Delta}$ независимо от величины T .

Таким образом, в случае $\omega \gg \Delta$ соотношение между током и векторным потенциалом имеет вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) = i \frac{3\pi e^2 N \omega}{4mcvq} \mathbf{A}(\mathbf{q}, \omega). \quad (5,28)$$

Это соотношение не содержит Δ и в точности совпадает с тем, что получается из теории аномального скин-эффекта в нормальном металле. Такой результат является естественным.

Однако в случае $\omega \gg \Delta$ мы не можем ограничиться только основным членом. Для того чтобы обнаружить отличие сверхпроводящего состояния от нормального, необходимо учесть также члены следующего порядка. В случае $\Delta \ll T \sim \omega$ эти члены происходят как от действительной, так и от мнимой частей $Q(\omega)$. Именно поэтому в формуле (5,27) основное выражение дополнено малым членом. В последнем случае $T \sim \Delta \ll \omega$ основную поправку дает только действительная часть $Q(\omega)$.

Лондоновская область

Теперь мы выясним, в каких условиях появляется лондоновская область $vq \ll \Delta$. При этом, как уже сказано, мы не будем рассматривать возможный, но практически, видимо, более редкий случай, когда в статических условиях сверхпроводник является лондоновским во всей области температур.

Как уже было отмечено, лондоновская область может появиться только вблизи T_c . С другой стороны, вблизи T_c величина щели Δ делается очень малой, а так как при $\frac{\omega}{\Delta} \gg 1$ металл мало отличается от нормального проводника, то лондоновская область не может продолжаться до самой критической температуры и, во всяком случае, ограничена сверху условием $\omega \ll \Delta$.

Для нахождения более точного расположения лондоновской области мы найдем прежде всего связь между током и векторным потенциалом в случае $\Delta \gg vq$. При этом мы учтем отмеченное ранее обстоятельство, что во всей интересной области частот можно считать $\omega \ll vq$, а также

и то, что лондоновская область возникает лишь в ближайшей окрестности T_c , т. е. можно считать $\Delta \ll T$. Необходимое уравнение получается из формулы (5,6). При этом существенным является лишь интеграл с разностью тангенсов и последний член в этой формуле.

Таким образом, находим

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{e^2 N A_q(\omega)}{mc} \left\{ \frac{7}{4\pi^2} \zeta(3) \frac{\Delta^2}{T^2} - \frac{3i\pi\omega}{4vq} \right\}. \quad (5,29)$$

Если ограничиться действительной частью этого соотношения, то получается уравнение Лондонов, причем выражение в фигурной скобке играет роль отношения числа «сверхпроводящих электронов» N_s к полному числу электронов N .

Мнимая часть соответствует поглощению.

Отметим, что это выражение получается в предположении $\omega \ll \Delta \ll T$ и $\omega \ll vq$, но соотношение между vq и Δ и между vq и T может быть любым. Именно этим и объясняется тот факт, что это выражение с точностью до малой поправки совпадает с соответствующей формулой для пиппардовского случая.

В качестве критерия перехода от пиппардовской области к лондоновской может быть взято равенство коэффициентов при \mathbf{A} в выражении для тока.

Для пиппардовского случая, считая $\omega \ll \Delta \ll T$, из формул (5,13), (5,15), (5,25) находим

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 N}{mc} \mathbf{A}_q(\omega) \left\{ \frac{3\pi^2}{8} \frac{\Delta^2}{vqT_c} - i \frac{3}{4} \pi \frac{\omega}{vq} \right\}. \quad (5,30)$$

Сравним эту формулу с формулой (5,29). Предположим, что мнимые части в обеих формулах малы по сравнению с действительными. В этом случае критерий совпадает с критерием для статического случая. Лондоновская область возникает при

$$vq \ll vq_0 = \frac{3\pi^4 T_c}{14\zeta(3)} \approx 18T_c. \quad (5,31)$$

Считая $q \approx \frac{1}{\delta}$, где δ — глубина проникновения, можно, воспользовавшись известной лондоновской формулой для глубины проникновения $\delta_L = \sqrt{mc^2/4\pi N_s e^2}$ и формулой (5,29), можно показать, что это соответствует условию

$$\Delta \ll 2\pi^{3/2} \left(\frac{mc^2}{Ne^2 v^2} \right)^{1/2} T_c^2. \quad (5,32)$$

Из этого неравенства следует, что, например, для алюминия лондоновская область наступает при $\frac{T-T_c}{T_c} \sim 4 \cdot 10^{-4}$, а для олова $\frac{T-T_c}{T_c} \sim 3 \cdot 10^{-2}$.

По мере увеличения температуры действительная часть в выражении (5,29) становится малой по сравнению с мнимой. Но так как в последнем случае сверхпроводник мало отличается от нормального металла, то мы обязательно получим пиппардовскую ситуацию (вспомним, что мнимая часть в (5,29) относится и к этому случаю). Таким образом, можно считать, что лондоновская область ограничена условием

$$vq \gg vq_1 = \frac{3\pi\omega}{4\alpha\Delta^2} T_c^2, \quad \alpha = \frac{7}{4\pi^2} \zeta(3) \approx 0,2 \quad (5,33)$$

или, после подстановки лондоновской глубины проникновения,

$$\Delta \gg \frac{3^{1/3}\pi^{1/6}}{(4\alpha)^{1/2}} \left(\frac{mc^2}{Ne^2v^2} \right)^{1/6} T_c \omega^{1/3}. \quad (5,34)$$

Сравнивая формулы (5,30) и (5,31), получаем условие возникновения лондоновской области

$$\omega \ll \omega_c = \frac{9\pi^4}{(8\alpha)^3} \left(\frac{mc^2}{Ne^2v^2} \right) T_c^3. \quad (5,35)$$

Такое ограничение может означать совершенно разные частоты для разных веществ. Например, для алюминия эта частота соответствует $2 \cdot 10^{-2} T_c$ или примерно $3 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$. Для олова она равна $0,5 T_c = 2 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$. Впрочем, олово очень условно можно относить к сверхпроводникам пинпардовского типа, так как для него даже при $T=0$ $vq \approx vq_0$.

Ввиду того что наиболее интересной является область частот, не слишком далекая от $\Delta(0)$, которая для пинпардовского металла практически всегда находится за пределами области, ограниченной неравенством (5,35), то мы вообще не будем рассматривать лондоновскую область.

Здесь уместно отметить также, что, кроме ограничения по частотам, применимость уравнения Ф. и Г. Лондонов в форме (5,30) ограничена со стороны высоких температур условием, что размеры пар, имеющие порядок $\frac{v}{\Delta}$, должны быть малы в сравнении с длиной пробега. В противном случае положение радикально меняется. Так как длину пробега можно в среднем считать порядка 10^{-3} см , а $\frac{v}{\Delta(0)} \sim 10^{-4} \text{ см}$, то область применимости формулы (5,30), вообще говоря, невелика. Что касается случая $\frac{v}{\Delta} \gg l$, то для него электродинамика не построена, и мы не будем его разбирать.

В заключение этого параграфа отметим, что, как легко увидеть, для частот, больших ω_c , непосредственная оценка дает $vq \gg T_c$ во всей области температур, включая окрестность T_c , где глубина проникновения максимальна. Такое соотношение между vq и T было существенно для вывода, проделанного ранее.

И м п е д а н с

Соотношение между j и A можно подставить в уравнение Максвелла и получить выражение для зависимости векторного потенциала от координаты.

В рассматриваемом нами пинпардовском случае соответствующие выкладки не отличаются от статического случая. Для случая зеркального отражения электронов от поверхности векторный потенциал надо считать продолженным симметрично через границу. Считая внешнее поле на границе равным $H(0)$, получаем

$$A = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\hat{H}(0) \cos kz dk}{k^2 + \frac{3\pi e^2 N \Delta}{mc^2 v} \frac{1}{k} Q(\omega)},$$

$$\hat{\delta} = \frac{\int_0^\infty H dz}{H(0)} = \frac{\operatorname{Re} A(0)}{H(0)} = \frac{8}{3\pi\sqrt{3}} \sqrt[3]{\frac{mc^2 v}{3\pi e^2 N \Delta}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{Q(\omega)}} \right]. \quad (5,36)$$

Импеданс определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} Z = R + iX &= \frac{E(0)}{\int_0^\infty f dz} = -\frac{4\pi}{c} \frac{E(0)}{H(0)} = -\frac{4\pi i\omega}{c^2} \frac{A(0)}{H(0)} = \\ &= -\frac{16\pi i\omega}{3\sqrt[3]{3c^2}} \sqrt[3]{\frac{mc^2v}{3\pi e^2 N\Delta}} \frac{1}{\sqrt[3]{Q(\omega)}}. \end{aligned} \quad (5,37)$$

При комплексном Q значение корня определяется как аналитическое продолжение действительного корня при действительном $Q(\omega)$.

В случае диффузного отражения надо считать $A(z) = 0$ вне металла. Согласно теории Ройтера и Зондхаймера¹⁸ это дает

$$Z = -\frac{4\pi^2 i\omega}{c^2} \left\{ \int_0^\infty dk \ln \left[1 + \frac{3\pi e^2 N\Delta}{mc^2 v k^3} Q(\omega) \right] \right\}^{-1}. \quad (5,38)$$

Это выражение отличается от (5,37) только коэффициентом $8/9$.

Величину импеданса удобно относить к значению активного сопротивления R в нормальном состоянии, равному для зеркального случая

$$R_n = \frac{8}{3\sqrt[3]{3}} \frac{\omega^{2/3}}{c^2} \sqrt[3]{\frac{mc^2 v \pi}{3N e^2}}. \quad (5,39)$$

Такое выражение получается при подстановке в (5,37) значения $Q = -i\pi \frac{\omega}{\Delta}$. Отношение Z/R_n одинаково для диффузного и зеркального случаев и определяется формулой

$$\frac{Z(\omega)}{R_n} = -2i \sqrt[3]{\frac{\pi\omega}{\Delta Q(\omega)}}. \quad (5,40)$$

Для случая $T = 0$ частотная зависимость импеданса получается из уравнений (5,11), (5,14) и (5,16).

В случае отличных от нуля температур мы произведем анализ температурной зависимости импеданса при разных частотах.

А) $\omega \ll \Delta(0)$

При самой низкой температуре возникает область $T \ll \omega \ll \Delta$, затем T становится порядка ω и, наконец, мы переходим в область $\omega \ll T \ll \Delta$. Описание этого перехода дается формулами (5,14), (5,19). Подставляя их в (5,40), принимая во внимание, что $\text{Re } Q(\omega) \gg \text{Im } Q(\omega)$, получаем:

$$\frac{Z(\omega)}{R_n} 2 \sqrt[3]{\frac{\omega}{\Delta\pi}} \left[\frac{4}{3\pi} \sinh \frac{\omega}{2T} K_0 \left(\frac{\omega}{2T} \right) e^{-\frac{\Delta}{T}} - i \right]. \quad (5,41)$$

При дальнейшем повышении температуры мы попадаем в область $\omega \ll \Delta \sim T$, которая затем переходит в область $\omega \ll \Delta \ll T$. Этот переход описывается формулами (5,14) и (5,22). До тех пор, пока $\frac{\Delta}{T} \gg \frac{\omega}{\Delta}$, минимая часть будет по-прежнему мала в сравнении с действительной и,

таким образом, получим

$$\frac{Z(\omega)}{R_n} = 2 \sqrt[3]{\frac{\omega}{\pi \Delta \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}}} \left[\frac{2}{3\pi} \frac{\omega}{T \operatorname{sh} \frac{\Delta}{T}} \ln 2 \sqrt{\frac{2\Delta}{\omega}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3\pi} \frac{\omega}{\Delta} \left(\operatorname{cth} \frac{\Delta}{2T} - 1 \right) - \frac{2}{3\pi} P \left(\frac{\Delta}{T} \right) \operatorname{cth} \frac{\Delta}{2T} - i \right], \quad (5.42)$$

где $P \left(\frac{\Delta}{T} \right)$ дается выражением (5.23).

При еще более высокой температуре Δ уменьшается настолько, что становится сравнимой, а затем меньшей чем ω . Эта область описывается формулами (5.14), (5.11) и (5.24); при $\omega \sim \Delta$ действительная и мнимая части $Q(\omega)$ имеют сравнимую величину, а при $\omega \gg \Delta$ действительная часть оказывается малой по сравнению с мнимой. В этом предельном случае формула для импеданса имеет вид

$$\frac{Z(\omega)}{R_n} = 1 + \frac{1}{V^3 \pi} \frac{\Delta}{\omega} \left(2 \ln \frac{2\omega}{\Delta} + \pi^2 \right) - i V^3 \left[1 - \frac{1}{3V^3 \pi} \frac{\Delta}{\omega} \left(2 \ln \frac{2\omega}{\Delta} + \pi^2 \right) \right]. \quad (5.43)$$

B) $\omega \sim \Delta(0)$

1) При низких температурах имеем $T \ll \omega \sim \Delta$. В этой области применимы формулы (5.11), (5.14) и (5.26) в случае, если $\omega < 2\Delta(0)$, или (5.16), если $\omega > 2\Delta(0)$. В первом случае мнимая часть будет мала по сравнению с действительной, и выражение для импеданса имеет вид

$$\frac{Z(\omega)}{R_n} = 2 \sqrt{\frac{\omega \pi}{\Delta \operatorname{Re} Q(\omega)}} \left[\frac{2\pi V^{\frac{1}{2}}}{3 \operatorname{Re} Q(\omega)} \sqrt{\frac{T}{2\Delta} + \frac{T}{\omega}} e^{-\frac{\Delta}{T}} - i \right], \quad (5.44)$$

где $\operatorname{Re} Q(\omega)$ дается выражением (5.11) с добавлением π^2 . При $\omega > 2\Delta(0)$ пригодны формулы для случая $T=0$.

2) При повышении температуры мы переходим область $\omega \sim \Delta \sim T$ и попадаем в область $\Delta \ll T \sim \omega$. Здесь можно воспользоваться формулами (5.14) и (5.27). Поскольку действительная часть $Q(\omega)$ меньше мнимой, то можно воспользоваться разложением. В результате находим:

$$\frac{Z(\omega)}{R_n} = 1 + \frac{1}{V^3 \pi} \frac{\Delta}{\omega} \left(2 \ln \frac{2\omega}{\Delta} + \pi^2 + \frac{2}{V^3} \pi \operatorname{th} \frac{\omega}{2T} \right) - \\ - i V^3 \left[1 - \frac{1}{3V^3 \pi} \frac{\Delta}{\omega} \left(2 \ln \frac{2\omega}{\Delta} + \pi^2 - 2 V^3 \pi \operatorname{th} \frac{\omega}{2T} \right) \right]. \quad (5.45)$$

При уменьшении температуры, начиная с T_c , действительная часть импеданса сначала не падает, а слегка увеличивается.

B) $\omega \gg \Delta(0)$

В этом случае меняется лишь соотношение между T и Δ , а ω все время велико по сравнению с ними. Здесь применимы формулы (5.14), (5.15) и (5.24). Принимая опять во внимание малость действительной части, находим

$$\frac{Z(\omega)}{R_n} = 1 + \frac{1}{V^3 \pi} \frac{\Delta}{\omega} \left(2 \ln \frac{2\omega}{\Delta} + \pi^2 \left(1 - \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} \right) \right) - \\ - i V^3 \left\{ 1 - \frac{1}{3V^3 \pi} \frac{\Delta}{\omega} \left(2 \ln \frac{2\omega}{\Delta} + \pi^2 \left(1 - \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} \right) \right) \right\}. \quad (5.46)$$

Полученные формулы позволяют произвести детальное сравнение теории с многочисленными экспериментальными данными.

§ 6. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СВЕРХПРОВОДНИКОВ ¹⁹

Перенос тепла в сверхпроводниках может осуществляться как электронными возбуждениями, так и фононами. При не слишком низких температурах основной вклад в теплопроводность будут давать электронные возбуждения. При этом для них возможны несколько механизмов рассеяния, из которых обычно важнейшим является рассеяние возбуждений на примесях. Лишь для очень чистых металлов будет играть роль также рассеяние возбуждений на фононах. Мы вычислим теплопроводность сверхпроводника для случая, когда существенно лишь рассеяние возбуждений на примесях.

Запишем кинетическое уравнение для возбуждений:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{k}} = I(n). \quad (6,1)$$

Здесь $I(n)$ — интеграл столкновений для рассеяния возбуждений на примесях. Выясним вначале вид этого интеграла. В него входит вероятность рассеяния возбуждений на примесях. Гамильтониан взаимодействия электрона с примесью можно записать в виде

$$H^{\text{частиц}} = \sum a_k^+ a_{k'} V_{kk'}. \quad (6,2)$$

Перейдем в этом выражении от операторов частиц к операторам возбуждений. Согласно (2,3) члены, описывающие рассеяние возбуждений, будут иметь следующий вид:

$$H^{\text{возб}} = \sum \alpha_k^+ \alpha_{k'} V_{kk'} (u_k^2 - v_k^2) \quad (6,3)$$

или, согласно (3,5),

$$H^{\text{возб}} = \sum \alpha_k^+ \alpha_{k'} V_{kk'} \frac{\xi_k}{\varepsilon_k}. \quad (6,4)$$

Вероятность упругого перехода $k \rightarrow k'$ для возбуждений будет равна

$$w_{kk'} = 2\pi \left| V_{kk'} \frac{\xi_k}{\varepsilon_k} \right|^2 \rho_{\varepsilon_k}. \quad (6,5)$$

Плотность состояний ρ_{ε_k} находится интегрированием энергетической δ -функции по $d\xi$:

$$\rho_{\varepsilon_k} = \frac{1}{\left| \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \xi_k} \right|} = \frac{\varepsilon_k}{|\xi_k|}.$$

Таким образом, вероятность указанного перехода равна

$$w_{kk'} = 2\pi |V_{kk'}|^2 \frac{|\xi_k|}{\varepsilon_k}. \quad (6,6)$$

Для нормального состояния отношение $\frac{|\xi_k|}{\varepsilon_k}$ равно единице, так как $|\xi_k| = \varepsilon_k$. В сверхпроводящем состоянии это отношение является некоторой функцией k (или ξ). Хорошо известно, что в нормальном состоянии рассеяние электронов можно характеризовать независящим от температуры временем τ и записывать интеграл столкновений в виде

$$I(n) \rightarrow -\frac{n - n_0}{\tau}. \quad (6,7)$$

В сверхпроводящем состоянии, согласно (6,6), необходимо учесть множитель $\frac{|\xi_k|}{\varepsilon_k}$, т. е. вместо старого τ в (6,7) следует писать новое τ' ,

отличающееся от τ множителем $\frac{\epsilon_k}{|\xi_k|}$. Поэтому в кинетическом уравнении (5,1) правую часть будем писать в дальнейшем в виде

$$I(n) = -\frac{n-n_0}{\tau} \frac{|\xi_k|}{\epsilon_k}, \quad (6,8)$$

где τ есть постоянное время, фигурирующее в классической теории электропроводности. Кинетическое уравнение (6,1) запишем в виде*)

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial k} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \frac{\partial n}{\partial k} = -\frac{n-n_0}{\tau} \frac{|\xi|}{\epsilon}. \quad (6,9)$$

Как известно, в несверхпроводящих металлах при наличии градиента температуры возникает некоторое электрическое поле такой величины, что результирующий электрический ток равен нулю. В случае сверхпроводника при наличии градиента температуры суммарный электрический ток также будет равен нулю. Однако в этом случае возникает два противоположно направленных тока — сверхпроводящий и нормальный, компенсирующие друг друга. Наличие сверхпроводящего тока со скоростью u можно учесть, заменив в уравнении (6,1) (14) $\epsilon \rightarrow \epsilon + ku$.

В дальнейшем мы будем иметь в виду эту замену. Переидем к решению уравнения (6,1).

Подставим в левую часть равновесную функцию

$$n_0 = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon}{T}} + 1}. \quad (6,10)$$

После несложного сокращения получаем

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial k} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} e^{\frac{\epsilon}{T}} = \frac{n-n_0}{\tau} \frac{|\xi|}{\epsilon}. \quad (6,11)$$

Любопытно, что производная $\nabla \epsilon$ сократилась в уравнении, и в результате не возникает членов, связанных с дифференцированием энергетической щели $\Delta(T)$. Поток энергии равен

$$Q = \int \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial k} n d\tau_k. \quad (6,12)$$

Поскольку равновесная функция n_0 зависит только от ϵ , интеграл $\int \epsilon \frac{\partial n_0}{\partial k} d\tau_k$ равен нулю, и поток Q полностью определяется разностью $n - n_0$. Подставив в выражение для Q разность $n - n_0$, найденную из уравнения (6,11), получаем

$$Q = \nabla T \frac{1}{3T^2} \tau \int \epsilon^2 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\epsilon}{|\xi|} n'_0 d\tau_k. \quad (6,13)$$

Отсюда находим величину коэффициента теплопроводности

$$\kappa = \frac{\tau}{3T^2} \int \epsilon^2 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} \right) \frac{1}{e^{\frac{\epsilon}{T}} + 1} \frac{1}{e^{-\frac{\epsilon}{T}} + 1} d\tau. \quad (6,14)$$

*) Замена τ на τ' происходит, как легко видеть, умножением на отношение скорости возбуждений $\frac{\partial \epsilon}{\partial \xi_k} = \frac{\xi_k}{\epsilon}$ к скорости электронов на границе Ферми v . Следовательно, имеет место соотношение $tv = \tau' \frac{\xi_k}{\epsilon}$, свидетельствующее о равенстве свободных пробегов для электронов в нормальном состоянии и возбуждении в сверхпроводящем состоянии.

Если ввести переменную интегрирования $\xi = \operatorname{ch} \varphi \Delta$, то формула (5,14) приобретает вид, удобный для вычисления температурной зависимости

$$\chi = \frac{2\pi}{3T^2} \nu \Delta^3 \int_0^\infty \operatorname{ch}^2 \varphi \operatorname{sh} \varphi d\varphi \frac{1}{e^{\frac{\Delta}{T} \operatorname{ch} \varphi} + 1} \frac{1}{e^{-\frac{\Delta}{T} \operatorname{ch} \varphi} + 1}. \quad (6,15)$$

Н. В. Заварицким произведено сравнение температурной зависимости χ , даваемой формулой (6,15) с экспериментальными данными. Согласие оказывается хорошим. Заметим, что формула (6,15) в точке перехода ($\Delta \rightarrow 0$) дает значение χ , соответствующее нормальному металлу и получаемое из обычной теории электропроводности металлов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, одно из самых загадочных явлений природы — сверхпроводимость, — наконец, получило свое объяснение. Согласие теории Бардина, Купера и Шрифера с экспериментом оказалось даже лучше, чем можно было ожидать от теории, базирующейся на модельном гамильтониане с четырехфермионным взаимодействием. В то же время, хотя явление сверхпроводимости можно считать полностью объясненным, остаются отдельные вопросы, подлежащие рассмотрению на базе этой теории. Так остается нерассмотренным вопрос о поведении сверхпроводников в сильных магнитных полях (близких к H_c). В связи с этим, по-видимому, необходимо разработать отличную от теорий возмущений методику, которая была бы градиентно инвариантной. Заслуживает внимания поэтоому имеющая значительный методический интерес работа Л. Горькова, в которой он применил градиентно инвариантную технику квантовой теории поля в теории сверхпроводимости²¹.

Может возникнуть вопрос о возможности существования в сверхпроводниках возбуждений бозевского типа^{8a}. Рассмотренные выше возбуждения фермиевского типа имели характерный спектр с энергетической щелью. Наличие, например, звуковых колебаний типа фононов (со спектром без щели) не помешало бы существованию сверхпроводимости подобно тому, как фононы не мешают сверхтекучести. Но если бы в спектре имелась такая ветвь, это существенным образом отразилось бы на температурной зависимости всех термодинамических величин. Нетрудно, однако, видеть, что вопрос о бозевских колебаниях рассматриваемой системы ферми-частиц не является сколько-нибудь важным для теории сверхпроводимости. Дело в том, что такие колебания будут связаны с колебаниями плотности электрического заряда, которые благодаря большому кулоновскому взаимодействию будут находиться в оптической области частот. Для их возбуждения понадобятся энергии порядка электрон-вольта. Таким образом, весь вопрос о бозевской ветви в спектре ферми-частиц имеет лишь академический характер.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Ландау, ЖЭТФ 11, 592 (1941).
2. W. Allen, R. Dawton, M. Bärg, K. Mendelsohn, J. Olsen Nature 166, 1071 (1950), W. Allen, R. Dawton, J. Lock, A. B. Pippard, D. Shoenberg, Nature 166, 1071 (1950).
3. J. Bardeen, Phys. Rev. 80, 567 (1950); H. Fröhlich, Phys. Rev. 79, 845 (1950).
4. R. Feynman, Rev. Mod. Phys. 29, 205 (1957).
5. L. Cooper, Phys. Rev. 104, 1189 (1956).

6. J. Bardeen, L. Cooper, J. Schrieffer, Phys. Rev. **106**, 162 (1957); Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
7. A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc. **A216**, 547 (1953).
8. Н. Н. Боголюбов, ЖЭТФ **34**, 58, 73 (1958).
- 8а. Н. Н. Боголюбов, В. Толмачев и Д. Ширков, Новый метод в теории сверхпроводимости. Литографированное издание Объединенного института ядерных исследований, 1958.
9. А. А. Абрикосов, Л. Горьков, И. Халатников, ЖЭТФ **35**, 265, 1958.
10. А. Абрикосов, И. Халатников, ЖЭТФ **33**, 1154 (1957).
11. Л. Ландау, ЖЭТФ **30**, 1058 (1956).
12. С. Тябликов, В. Толмачев, ЖЭТФ **34**, 1254, 1958.
13. Н. Заваризкий, ЖЭТФ **34**, 1116, 1958.
14. W. Craggs, B. Goodman, C. Satterworth, A. Wexler, Phys. Rev. **102**, 656 (1956); A. Brown, M. Zemansky, H. Boorse, Phys. Rev. **92**, 52 (1953).
15. Д. Шенберг, Сверхпроводимость, ИЛ, Москва, 1955.
16. G. Reuter, E. Sondheimer, Proc. Roy. Soc. **A195**, 336 (1948).
17. C. Whithead, Proc. Roy. Soc. **A238**, 175 (1956).
18. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Квантовая механика, Гостехиздат, Москва, 1948.
19. Б. Гейликман, ЖЭТФ **34**, 1042, (1958).
20. И. Халатников, УФН, вып. 4, 673 (1956).
21. Л. Горьков, ЖЭТФ **34**, 735, (1958).