1958 г. Июнь *Т. LXV, вып. 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ГИРОМАГНИТНОЙ СРЕДЕ *)

П. Эпштейн

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы начато массовое производство новых магнитных материалов — ферритов; роль этих материалов в различных приложениях все возрастает.

Химический состав ферритов выражается формулой $MO \cdot Fe_2O_3$, где символ M обозначает металл. Так, например, еще с древних времен известен природный феррит — магнетит $FeO \cdot F_2O_3$. Но важный шаг — замена FeO окислами других металлов — был сделан лишь недавно; таким путем было получено большое число искусственных ферритов. Практически все эти новые материалы обладают такой же кристаллической структурой, что и магнетит (объемно-центрированная кубическая решетка типа минерала шпинели). По своим электрическим свойствам ферриты — полупроводники. Именно их низкая электропроводность в сочетании с высокой магнитной проницаемостью, делающая ферриты наиболее подходящим материалом для сердечников высокочастотных трансформаторов, впервые привлекла к ферритам внимание физиков и инженеров [1].

Затем, однако, исследования Робертса [2] обнаружили в ферритах также значительный эффект Фарадея, что открывает возможности для применения ферритов в технике сверхвысоких частот. Именно эта сторона электродинамики ферритов и послужит предметом настоящей статьи.

Ферриты можно причислить к гиромагнитным средам. Гиромагнитная среда — это среда, обладающая следующими свойствами. Вектор электрической индукции D не отличается в гиромагнитной среде какими-либо особенностями. Он связан с вектором напряженности электрического поля обычным соотношением:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{1.1}$$

где диэлектрическая постоянная ε — скалярная величина, вещественная или комплексная. Пусть теперь в такой среде внешние источники создают постоянное во времени магнитное поле $\mathbf{H}_0$. Это поле (назовем его подмагничивающим или постоянным полем) делает среду анизотропной: индукция $\mathbf{B}$ и напряженность $\mathbf{H}$ добавочного периодического во времени магнитного поля, возбуждаемого в среде наряду с $\mathbf{H}_0$, связаны между собой соотношением

$$\mathbf{B} = (\mu)\, \mathbf{H}, \tag{1.2}$$

---

*) Rev. Mod. Phys. 28, 3, 1956. Перевод М. А. Гинцбурга.

где через (μ) обозначен тензор:

$$(\mu)=\begin{pmatrix} \mu_1 & i\varkappa & 0 \\ -i\varkappa & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.2) равносильно трем уравнениям для составляющих вектора **B**:

$$B_x=\mu_1 H_x+i\varkappa H_y, \quad B_y=-i\varkappa H_x+\mu_1 H_y, \quad B_z=\mu_3 H_z \tag{1.4}$$

(ось Oz совпадает с направлением постоянного поля $\mathbf{H}_0$).

Обычно составляющие тензора (1.3) считаются вещественными и положительными величинами. Отметим, однако, что в излагаемой ниже теории нигде не предполагается, что тензор (1.3) эрмитов. Следовательно, все наши результаты останутся в силе, если считать диагональные элементы μ_1, μ_3 комплексными величинами.

Реальные ферриты следуют соотношениям (1.1) и (1.2) если и не абсолютно точно, то с достаточной степенью точности. Поэтому исследование гиромагнитной среды имеет важное практическое значение.

Наше рассмотрение будет носить феноменологический характер. Физической природы ферритов мы касаться не будем[3]. Однако следует сразу же упомянуть о двух обстоятельствах, важных и для такой феноменологической теории.

1) Соотношения (1.1) и (1.2) справедливы только для полей, периодических во времени. Соответственно диэлектрическая постоянная ε и все компоненты тензора (μ) будут некоторыми функциями частоты ω. Мы принимаем, таким образом, что векторы поля содержат временной множитель $e^{-i\omega t}$. Этот множитель мы писать не будем, но такой вид зависимости от времени позволяет получить равенства

$$\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t}=-i\omega u=-ick_0 u, \tag{1.5}$$

где u — любая линейная функция поля, t — время, c — скорость света в вакууме и

$$k_0=\frac{\omega}{c} \tag{1.6}$$

— волновое число.

2) Величины ε, μ_1, μ_3 и $\varkappa$ являются функциями постоянного поля $\mathbf{H}_0$. Следовательно, считать их постоянными в пространстве можно только в случае однородного поля[4] $\mathbf{H}_0$. Мы будем всегда считать поле $\mathbf{H}_0$ однородным и ε, (μ) постоянными.

В разреженных и ионизированных газах (например, в верхних слоях атмосферы или в разряде низкого давления) внешнее постоянное магнитное поле приводит к анизотропии диэлектрической постоянной ε:

$$(\varepsilon)=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon' & 0 \\ -i\varepsilon' & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

В то же время магнитная проницаемость остается скалярной величиной и близка к 1. Среду с такими свойствами мы назовем гироэлектрической[5]. В силу симметрии уравнений Максвелла теория гиромагнитных явлений, развитая в настоящей работе, может быть непосредственно перенесена и на случай гироэлектрической среды простой заменой

$$\varepsilon \to \mu, \quad (\mu) \to (\varepsilon), \quad E \to H, \quad H \to -E.$$

В литературе исследуется иногда и более общий случай, но мы его рассматривать не будем. Речь идет, во-первых, о так называемых гиротропных средах, где тензорный характер носят обе величины, как диэлектрическая, так и магнитная проницаемость, так что одновременно выполняются оба равенства (1.3) и (1.7) [6]. Однако в природе не известно ни одного вещества, которое обладало бы такими свойствами; в то же время соответствующий математический аппарат весьма громоздок, и удается рассмотреть лишь сравнительно простые случаи.

Во-вторых, Теллегеном [7] рассматривался еще более общий случай, когда электрическое поле вызывает намагничивание, а магнитное поле — электрическую поляризацию. Тогда составляющие вектор **B** и **D** связаны с составляющими **E** и **H** линейным преобразованием с матрицей из 6 строк и 6 столбцов [7]. Подобного рода случаи известны (например, эффект Холла), но исследование общих свойств среды Теллегена не представляет собой достаточного интереса, чтобы преодолевать ради этого значительные математические трудности.

ЧАСТЬ I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

§ 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теория распространения электромагнитных волн в гиромагнитной среде рассматривалась рядом авторов. Волны в волноводах, заполненных гиромагнитной средой, рассмотрены Кэйлсом [8] и Гамо [9] и более подробно Ван-Триром [10] и Сулом и Уокером [11]. Некоторые закономерности распространения плоских волн рассматривались Гинцбургом [12]. Однако мы построим свое изложение несколько иначе.

При условиях, указанных в § 1, уравнения Максвелла принимают вид

$$\left.\begin{aligned} -i\varepsilon k_0\mathbf{E} &= \nabla\times\mathbf{H}, \quad ik_0\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{E}, \\ \nabla\cdot\mathbf{E} &= 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{B}\cdot 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Нас будет интересовать случай, когда свободные заряды отсутствуют. Тогда самый простой путь — считать напряженность электрического поля своего рода вектором-потенциалом, из которого, пользуясь соотношением

$$\mathbf{H} = -\left(\frac{i}{k_0}\right)(\mu^{-1})\ \nabla\times\mathbf{E}, \tag{2.2}$$

вычисляем магнитное поле. В (2.2) через (μ^{-1}) обозначен тензор, обратный (μ):

$$(\mu^{-1}) = \begin{pmatrix} M & iK & 0 \\ -iK & M & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где

$$M=\frac{\mu_1}{d}, \quad K=-\frac{\varkappa}{d}, \quad M_3=\frac{1}{\mu_3}, \quad d=\mu_1^2-\varkappa^2. \tag{2.4}$$

Остальные два уравнения системы можно рассматривать как основные уравнения поля, служащие для определения вектора $\mathbf{E}$.

Подставляя в них $\mathbf{H}$ из (2.2), получаем:

$$\varepsilon k_0^2\mathbf{E}=\nabla\times[(\mu^{-1})\nabla\times\mathbf{E}], \tag{2.5}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0. \tag{2.6}$$

Уравнение $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ удовлетворяется при этом тождественно.

Желательно, однако, преобразовать эти уравнения к более удобному виду. Для этой цели выпишем (2.5) в декартовых координатах:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\varepsilon k_0^2+M_3\nabla^2-(M_3-M)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]E_x+\\
&\qquad+iK\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left[(M_3-M)\frac{\partial E_z}{\partial x}-iK\frac{\partial E_z}{\partial y}\right]=0,\\
&\left[\varepsilon k_0^2+M_3\nabla^2-(M_3-M)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]E_y-\\
&\qquad-iK\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left[(M_3-M)\frac{\partial E_z}{\partial y}+iK\frac{\partial E_z}{\partial x}\right]=0,\\
&\qquad[\varepsilon k_0^2+M\nabla^2]E_z-iK\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Теперь целесообразно произвести замену неизвестных:

$$Q_{1,2}=E_x\pm E_y, \tag{2.8}$$

где индексам 1 или 2 соответствует верхний или нижний знак. Умножаем второе уравнение (2.7) на $\pm i$ и прибавляем к первому. К третьему уравнению прибавляем член

$$\mp K\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)=0.$$

В результате находим:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[k_0^2\varepsilon+M_3\nabla^2+(M-M_3\pm K)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]Q_{1,2}=\\
&\qquad=(M-M_3\pm K)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\pm i\frac{\partial}{\partial y}\right)E_z,\\
&\left[k_0^2\varepsilon+M\nabla^2\mp K\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]E_z=\pm K\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mp i\frac{\partial}{\partial y}\right)Q_{1,2},
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

где верхний знак относится к Q_1, а нижний к Q_2. Координата z соответствует «главному направлению» — направлению постоянного поля $\mathbf{H}_0$. Целесообразно несколько изменить обозначения, выделив z:

$$\nabla^2=\nabla_p^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{2.10}$$

где

$$\nabla_p^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.11}$$

— оператор Римана в плоскости $(x,\ y)$. Аналогичным образом оператор

$$\nabla_p = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{2.12}$$

— двумерный градиент в плоскости $(x,\ y)$. Уравнения (2.9) примут более компактный вид:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\varepsilon k_0^2 + M_3\nabla_p^2 + (M \pm K)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] Q_{1,2} = (M - M_3 \pm K)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y}\right] E_z, \\ &\left[\varepsilon k_0^2 + M\nabla_p^2 + (M \mp K)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] E_z = \pm K\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x} \mp i\frac{\partial}{\partial y}\right) Q_{1,\,2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Эти выражения совместно с уравнением (2.6) равносильны основным уравнениям поля (2.5).

§ 3. ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ФОРМА ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Из уравнений (2.13) можно исключить одну из неизвестных, Q или E_z. Применяя к обеим частям второго уравнения оператор

$$(M - M_3 \pm K)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

находим

$$L(Q) = 0,$$

где знаком L обозначен оператор:

$$L \equiv \left\{\varepsilon^2 k_0^4 + \varepsilon k_0^2\left[(M + M_3)\nabla_p^2 + 2M\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + MM_3\nabla_p^4 + \right.$$
$$\left. + [M(M + M_3) - K^2]\nabla_p^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (M^2 - K^2)\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right\}. \tag{3.1}$$

С другой стороны, применяя оператор $\pm K\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x} \mp i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ к первому уравнению, получаем совершенно такое же соотношение для E_z:

$$L(E_z) = 0.$$

Следует заметить, что если уравнения (2.13) для Q_1 и для Q_2 имеют разный вид (знаки $\pm$ в уравнении), то оператор (3.1) одинаков для Q_1 и Q_2, так что Q_1 и Q_2 удовлетворяют одному и тому же уравнению четвертого порядка. Поскольку

$$E_x = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2), \qquad E_y = -\frac{1}{2}i(Q_1 - Q_2),$$

постольку этому уравнению будут удовлетворять и обе составляющие E_x и E_y. Мы пришли, таким образом, к окончательному результату — векторным уравнениям:

$$L(\mathbf{E}) = 0, \tag{3.2}$$

$$\nabla\mathbf{E} = 0. \tag{3.3}$$

Эта система содержит столько же уравнений, сколько исходная система (2.5) — (2.6), т. е. четыре уравнения.

Было бы, однако, ошибкой полагать, что эти две системы полностью эквивалентны. Различие между ними состоит в том, что уравнение (2.5) — второго порядка, а уравнение (3.2) — четвертого. Следовательно, система (3.2) — (3.3) имеет большее число интегралов: решением системы (3.2) — (3.3) будут все решения исходной системы (2.5) — (2.6) и, кроме того, некоторое число «ложных» решений.

Мы имеем право пользоваться лишь такими решениями системы (3.2) — (3.3), которые удовлетворяют одновременно и уравнениям системы (2.5) — (2.6) или эквивалентному уравнению (2.13). Достаточно потребовать, чтобы решения (3.2) — (3.3) удовлетворяли только одному из уравнений (2.13), поскольку тогда другое уравнение (2.13) получится как следствие (3.2). Мы выбираем, таким образом, второе уравнение (2.13) как дополнительное условие, которому должны удовлетворять решения системы (3.2) — (3.3), имеющие физический смысл.

Это уравнение целесообразно упростить. Для этой цели исключим из него составляющую E_z с помощью соотношения (3.3). Развертывая (3.3), имеем

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right). \tag{3.4}$$

Дифференцируем дополнительное условие (2.13) по z и подставляем вместо $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ его выражение (3.4); в результате находим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(\varepsilon k_0^2 + M\nabla^2) E_x + iK\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left[-iK\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x + (\varepsilon k_0^2 + M\nabla^2) E_y\right] = 0. \tag{3.5}$$

Таков окончательный вид нашего дополнительного условия. По сравнению с (2.13) уравнение (3.5) обладает тем преимуществом, что оно не содержит двойного знака и представляет собой, таким образом, одно уравнение.

§ 4. ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Пусть Φ — некоторая функция, удовлетворяющая уравнению

$$L(\Phi) = 0, \tag{4.1}$$

где L — оператор (3.1). Как уже указывалось, координата z относится к направлению в пространстве, выделенному самой природой гиромагнитной среды. Напротив, координатная система в плоскости, перпендикулярной z, может быть выбрана произвольно. Мы нисколько не потеряем в общности рассмотрения, если ограничимся в первую очередь цилиндрическими системами координат с образующей, параллельной направлению Oz. Оператор ∇_p^2 в (3.1) не зависит от координаты z, которая становится, таким образом, циклической координатой, т. е. входит в уравнение только как оператор дифференцирования. Поэтому решение можно построить в виде

$$\Phi(x, y, z) = \Phi'(x, y)\exp(i\gamma z), \tag{4.2}$$

где γ — некоторая постоянная, т. е. можно написать

$$\frac{\partial}{\partial z} = i\gamma \tag{4.3}$$

и записать L в более простом виде:

$$L \equiv \{MM_3\nabla_p^4 + [(M+M_3)(\varepsilon k_0^2 - M\gamma) + K^2\gamma^2]\,\Delta_p^2 + [(\varepsilon k_0^2 - M\gamma^2)^2 - K^2\gamma^4]\}.$$

Нетрудно видеть, что этот оператор можно разложить на два сомножителя:

$$L \equiv MM_3 [\nabla_p^2 + k_1^2] [\nabla_p^2 + k_2^2], \tag{4.4}$$

где

$$k_1^2 + k_2^2 = [(\varepsilon k_0^2 - M\gamma^2)(M + M_3) + K^2\gamma^2]/MM_3,$$

$$k_1^2 k_2^2 = [(\varepsilon k_0^2 - M\gamma^2)^2 - K^2\gamma^4]/MM_3.$$

Введем обозначение

$$f = [(M - M_3)^2 (\varepsilon k_0^2 - M\gamma^2)^2 + 2(M + M_3)(\varepsilon k_0^2 - M\gamma^2)K^2\gamma^2 + K^2(K^2 + 4MM_3)\gamma^4]^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\left.\begin{matrix} k_1^2 \\ k_2^2 \end{matrix}\right\} = [(\varepsilon k_0^2 - M\gamma^2)(M + M_3) + K^2\gamma^2 \pm f]/2MM_3. \tag{4.5}$$

Поскольку k_1 и k_2 всегда различны, то общее решение (4.2) равно сумме решений

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \tag{4.6}$$

каждое из которых удовлетворяет своему уравнению второго порядка — обычному волновому уравнению

$$(\nabla_p^2 + k_1^2)\Phi_1 = 0, \quad (\nabla_p^2 + k_2^2)\Phi_2 = 0. \tag{4.7}$$

Необходимо сделать еще дополнительное замечание о векторе **E**, удовлетворяющем уравнению (4.1). В соответствие с (4.6) потенциал **E** может быть представлен в виде суммы двух векторов:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

При заданной частоте ω векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ характеризуются различными волновыми числами (k_1 и k_2) и соответственно разными фазовыми скоростями. Поэтому уравнению (3.3) должен удовлетворять каждый из векторов $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ в отдельности:

$$\nabla \cdot E_1 = 0, \qquad \nabla \cdot E_2 = 0.$$

То же относится и к дополнительному условию (3.5).

Таким образом, волны E_1 и E_2 в безграничной среде распространяются совершенно независимо друг от друга. Но как только волна встречает граничную поверхность, эта независимость кончается: краевые условия, вообще говоря, устанавливают некоторую связь между обоими потенциалами.

§ 5. ВОЛНА ТЕМ. ЭФФЕКТ ФАРАДЕЯ

Прежде чем рассматривать проблему распространения волн во всей ее общности, следует найти частные решения, соответствующие простейшим условиям.

Интересен случай, когда тождественно обращается в нуль составляющая векторного потенциала E_z. Поскольку наши конечные уравнения (3.2), (3.5) были получены путем исключения из (2.13) величин E_z и $\frac{\partial E_z}{\partial z}$, то совсем не очевидно, что они останутся справедливыми и при $E_z = 0$. Во всяком случае нам надо вернуться к исходной системе (2.6), (2.13), которая примет в этом случае следующий вид:

$$\left[\varepsilon k_0^2 + M_3\nabla_p^2 + (M \pm K)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] Q = 0, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x} \mp i\frac{\partial}{\partial y}\right) Q = 0, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0. \tag{5.3}$$

Имея в виду определение величины Q (уравнение (2.8)) и соотношение (5.3), мы можем переписать уравнение (5.2) в виде

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = 0. \tag{5.4}$$

Координата z — циклическая координата (см. предыдущий параграф), так что решение (5.5) имеет вид

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{C}(x, y) \exp i\gamma z \tag{5.5}$$

и (5.4) переходит в

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0. \tag{5.6}$$

Отсюда, используя (5.3), находим

$$\nabla_p^2 E_x = \nabla_p^2 E_y = \nabla_p^2 Q = 0. \tag{5.7}$$

Соответственно, уравнения (5.1) принимают вид

$$[\varepsilon k_0^2 - (M + K)\gamma^2](E_x + iE_y) = 0,$$
$$[\varepsilon k_0^2 - (M - K)\gamma^2](E_x - iE_y) = 0.$$

Они должны удовлетворяться одновременно. Для этого существуют две возможности:

$$\text{а)} \quad \left.\begin{aligned} &\varepsilon k_0^2 - (M + K)\gamma^2 = 0, \\ &E_x - iE_y = 0; \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

и

$$\text{б)} \quad \left.\begin{aligned} &\varepsilon k_0^2 - (M - K)\gamma^2 = 0, \\ &E_x + iE_y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

Рассмотрим вначале случай, когда составляющие E_x и E_y не зависят ни от x, ни от y, т. е. коэффициент C в уравнении (5.5) — некоторый постоянный вектор. В этом случае вектор Е выражает некоторую плоскую волну, распространяющуюся в направлении z. Наши соотношения (5.8), (5.9) показывают, что в гиромагнитной среде могут распространяться две такие плоские волны с постоянными распространения

$$\gamma_а = [\varepsilon k_0^2/(M + K)]^{\frac{1}{2}}, \qquad \gamma_б = [\varepsilon k_0^2/(M - K)]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.10}$$

Из (5.7), (5.8) следует, что составляющие E_x и E_y одинаковы по амплитуде, но различны по фазе. В случае а) E_y опережает E_x на $\frac{\pi}{2}$, в случае б) $-E_y$ отстает от E_x на тот же угол. Это означает, что волны а) и б) поляризованы по кругу с противоположным направлением вращения (эффект Фарадея).

В ферритах величины ε и μ_1 велики (§ 1), $\varkappa$ приближается по порядку величины к μ_1, так что M и K, определяемые соотношениями (2.4), малы. Наоборот, обе постоянные распространения γ_a и $\gamma_б$ велики и сильно отличаются друг от друга; поэтому разница в оптической длине пути между обеими волнами также значительна. Большая величина фарадеева вращения — одна из самых замечательных и важных особенностей ферритов. На значение этой особенности для практических применений впервые указал Хоган[3]. Большое фарадеево вращение в ферритах позволяет построить в волноводе новый элемент — циркулятор, аналогичный пластинкам в четверть волны и полволны в оптике.

Как это следует из уравнений (5.8) и (5.9), направление вращения вектора $\mathbf{E}$ в пространстве не зависит от направления распространения волны. Это свойство позволяет осуществить системы, в которых волны распространяются только в одну сторону (однонаправленные системы), комбинируя для этой цели циркулятор с соответствующими поляризаторами[13].

Из уравнений Максвелла (2.1) следует, что в плоской волне электрический вектор $\mathbf{E}$ и вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ перпендикулярны направлению распространения. В частном случае, когда волна распространяется вдоль оси z, в соответствии с основными соотношениями (1.2) или (1.3), в плоскости, перпендикулярной z, лежат оба вектора, как $\mathbf{B}$ так и $\mathbf{H}$. Пользуясь терминологией теории волноводов, мы можем назвать наши плоские волны волнами типа ТЕМ, т. е. волнами, у которых оба вектора, как электрический так и магнитный, перпендикулярны направлению распространения. Возвращаясь к волнам типа ТЕ, о которых шла речь в начале данного параграфа (обозначение ТЕ указывает, что вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен Oz), нетрудно видеть, что никаких других ТЕ-волн, кроме только что рассмотренных двух плоских волн, не существует. Действительно, когда коэффициент C в уравнении (5.5) зависит от координат, компоненты E_x и E_y удовлетворяют уравнениям (5.7) и являются гармоническими функциями переменных x и y. Однако это не соответствует физической картине поля нормальной волны. Гармонические функции для безграничной среды не подходят, так как они имеют в какой-то точке поля особенность. Не подходят они и для волноводов с осью, направленной по Oz. В этом случае касательная составляющая должна обращаться в нуль на границе, но тогда, согласно (5.8) и (5.9.), нормальная составляющая также обращается в нуль. Из теории потенциала известно, что подобным краевым условиям одновременно удовлетворить нельзя. В § 7 мы увидим, что волны TM в гиромагнитной среде тоже возникнуть не могут. Точно так же, в волноводах, заполненных гиромагнитной средой, не может существовать и волна ТЕМ обычной коаксиальной линии.

§ 6. РЕШЕНИЕ, ЗАВИСЯЩЕЕ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Уравнением четвертого порядка целесообразно пользоваться также и в том случае, когда поле не зависит от координаты z. Тогда $\gamma = 0$, так что подобные решения выражают собой цилиндрические волны, распространяющиеся в плоскости, перпендикулярной направлению постоянного поля $\mathbf{H}_0$. Уравнения (2.13) приобретают вид

$$(M\nabla_p^2 + \varepsilon k_0^2)\, E_z = 0, \quad (M_3\nabla_p^2 + \varepsilon k_0^2)\, Q = 0. \tag{6.1}$$

Последнее уравнение эквивалентно следующим двум:

$$(M_3\nabla_p^2 + \varepsilon k_0^2)\, E_x = 0, \quad (M_3\nabla_p^2 + \varepsilon k_0^2)\, E_y = 0, \tag{6.2}$$

с дополнительным условием ортогональности (2.6)

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0. \tag{6.3}$$

Очевидно, что поле, определяемое этими уравнениями, можно представить в виде суперпозиции двух независимых систем нормальных волн.

1) Продольные нормальные волны ($E_x = E_y = 0$)

$$E_z \neq 0, \tag{6.4}$$

$$(M\nabla_p^2 + \varepsilon k_0^2)\, E_z = 0. \tag{6.5}$$

Так как в этом случае

$$\nabla_p \equiv (S_p)\, \nabla_p, \quad (S_p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.6}$$

то вектор магнитного поля, согласно (2.2), лежит в плоскости (x,y) и равен

$$H = (P_L)\, \nabla_p E_z, \tag{6.7}$$

где

$$(P_L) = -(i/k_0)\,(\mu^{-1})\,(S_p) = (i/k_0) \begin{pmatrix} iK & -M \\ M & iK \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

Эти нормальные волны, как мы увидим в §§ 11, 12 и 13, представляют определенный практический интерес.

2) Поперечные нормальные волны ($E_z = 0$).

Уравнение (6.3) показывает, что составляющие **E** могут быть получены из функции Герца с помощью операции $(S_p)\nabla_p$, т. е.

$$E_x = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{6.9}$$

где функция Φ удовлетворяет уравнению

$$(M_3\nabla_p^2 + \varepsilon k_0^2)\, \Phi = 0. \tag{6.10}$$

Магнитное поле направлено по оси z:

$$H_x = H_y = 0, \quad H_z = -ik_0 \varepsilon M_3 \Phi. \tag{6.11}$$

§ 7. ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ПОЛЯ

Рассмотрим теперь следствия, вытекающие из уравнений (3.2) и (3.3),

$$L(E) = 0, \quad \nabla \cdot E = 0, \tag{7.1}$$

и дополнительного условия (3.5). Учитывая (4.3) и (4.7), мы можем записать (3.5) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\tau E_x + i\sigma E_y\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[-i\sigma E_x + \tau E_y\right] = 0, \tag{7.2}$$

где введены обозначения

$$\tau = M\,(k^2 + \gamma^2) - \varepsilon k_0^2, \quad \sigma = K\gamma^2. \tag{7.3}$$

Как было показано в предыдущих параграфах, составляющая E_z отлична от нуля и зависят от z. Соотношение (7.2) показывает, что можно ввести функцию Герца. Оба выражения в квадратных скобках получаются из этой функции простым дифференцированием. Поскольку функция Герца определяется с точностью до произвольного постоянного множителя, то ее можно записать в виде $(\tau^2-\sigma^2)\Pi$:

$$\left.\begin{aligned} \tau E_x + i\sigma E_y &= (\tau^2-\sigma^2)\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \\ -i\sigma E_x + \tau E_y &= -(\tau^2-\sigma^2)\frac{\partial \Pi}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

Разрешая эту систему относительно E_x, E_y, находим

$$\left.\begin{aligned} E_x &= i\sigma\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \tau\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \\ E_y &= -\tau\frac{\partial \Pi}{\partial x} + i\sigma\frac{\partial \Pi}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

Подставляя (7.5) в (7.1), получаем

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = i\gamma E_z = -i\sigma\nabla_p^2\Pi.$$

Функция Герца Π должна удовлетворять тому же уравнению, что и ее производные, т. е. уравнению $L(\Pi)=0$, где оператор L имеет вид (4.4). Отсюда следует, что

$$\nabla_p^2\Pi = k^2\Pi, \tag{7.6}$$

где k^2 равно либо k_1^2, либо k_2^2; $k_{1,2}^2$ определяется уравнением (4.5), так что

$$E_z = -\left(\frac{\sigma k^2}{\gamma}\right)\Pi = -i\left(\frac{\sigma k^2}{\gamma^2}\right)\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \tag{7.7}$$

Соотношения (7.5) и (7.7) можно объединить в одно тензорное уравнение

$$\mathbf{E} = (S_E)\nabla\Pi, \tag{7.8}$$

где

$$(S_E) = \begin{pmatrix} i\sigma & \tau & 0 \\ -\tau & i\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -i\sigma k^2/\gamma^2 \end{pmatrix}. \tag{7.9}$$

Этот результат получен в предположении, что зависимость от z экспоненциальная ($\exp i\gamma z$). Но поскольку тензор (7.9) содержит только четные степени γ, то уравнения (7.8) и (7.9) справедливы и при множителе $\cos z$ или $\sin z$.

Магнитное поле вычисляем из соотношения (2.2), которое приводит также к тензорному уравнению:

$$\mathbf{H} = \gamma(S_H)\nabla\Pi, \tag{7.10}$$

$$(S_H) = \begin{pmatrix} a & ib & 0 \\ -ib & a & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}, \tag{7.11}$$

где введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} a &= [M\tau - K^2(\gamma^2 + k^2)]/k_0, \quad b = -K\varepsilon k_0, \\ g &= -M_3 k^2 \tau / k_0 \gamma^2. \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

Используя выражения (7.3) для τ и (4.5) для k^2, можно далее показать, что

$$a - g = \tau\varepsilon k_0. \tag{7.13}$$

Это соотношение полезно для проверки (оно указывает, что все уравнения Максвелла удовлетворены).

Применимость формулы (7.10) ограничена экспоненциальной формой множителя, зависящего от z. Однако это ограничение можно устранить, записав $\mathbf{H}$ в другом виде:

$$\mathbf{H} = -i\left(S_H \nabla\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)\right). \tag{7.14}$$

Это уравнение такое же общее, как и (7.8). Следует иметь в виду, что соотношения (7.8) и (7.14) определяют собой две системы решений соответственно двум возможным значениям параметра $k (k = k_1$ или $k_2)$.

§ 8. ПОЛНОТА СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ

Перед читателем встает существенный вопрос: представляют ли собой решения, полученные в предыдущем параграфе, всю совокупность решений, возможных при сделанных нами предположениях (т. е. при $E_z \neq 0$, $\frac{\partial E_z}{\partial z} \neq 0$)? Ответ на этот вопрос может быть получен переходом к пределу при $\varkappa = 0$ (или $K = 0$): если система (7.8) или (7.10) полная, то при переходе к пределу она должна дать все решения, возможные в среде, не обладающей гиромагнитными свойствами.

При $\varkappa \to 0$ среда, описанная в § 1, приобретает свойства одноосного кристалла с главными значениями тензора магнитной проницаемости μ_1, μ_1, μ_3. Электромагнитное поле в этой среде описывается уравнениями, следующими из (2.5) и (2.6) при $\varkappa = K = 0$. Свойства такой среды подробно исследовались и хорошо известны, поэтому достаточно будет их лишь кратко перечислить. Уравнения поля имеют в этой анизотропной среде два решения:

1. Система ТЕ-волн

Соответствующая функция Герца удовлетворяет уравнению

$$\nabla_p^2 \Phi_1 + \bar{k}_1^2 \Phi_1 = 0, \quad \bar{k}_1^2 = (\varepsilon k_0^2 - M\gamma^2)/M_3. \tag{8.1}$$

И далее:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \quad E_z = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \quad E_z = 0, \\ H_x &= -\left(\frac{\gamma}{\mu k_0}\right)\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \quad H_y = -\left(\frac{\gamma}{\mu k_0}\right)\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \quad H_z = \left(\frac{i\bar{k}^2}{\mu_3 k_0}\right)\Phi_1. \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

2. Система ТМ-волн

Соответствующая функция Герца удовлетворяет уравнениям

$$\nabla_p^2 \Phi_2 + \bar{k}_2^2 \Phi_2 = 0, \quad \bar{k}_2^2 = (\varepsilon k_0^2 - M\gamma^2)/M, \tag{8.3}$$

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \quad E_y = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \quad E_z = -\left(\frac{i\bar{k}_2^2}{\gamma}\right)\Phi_2, \\ H_x &= -\left(\frac{k_0\varepsilon}{\gamma}\right)\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \quad H_y = \left(\frac{k_0\varepsilon}{\gamma}\right)\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \quad H_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Формулами (7.8) и (7.10) поле в гиромагнитной среде дается единым аналитическим выражением, а не двумя разными аналитическими выражениями, как в (8.2), (8.4). Однако следует иметь в виду, что в выражениях (7.8) и (7.10) надо взять сумму двух членов, соответствующих разным значениям волнового числа k (согласно (4.5) $k = k_1$ или k_2).

При малых k параметр f в уравнении (4.5) принимает вид

$$f = (M - M_3)(\varepsilon k_0^2 - \mu\gamma^2) + K^2\gamma^2 (M + M_3 + 2M_3\gamma^2/\bar{k}_2^2)(M - M_3)^{-1},$$

откуда для k^2 получаем:

$$\left.\begin{aligned} k_1^2 &= \bar{k}_1^2 + K^2\gamma^2 (1 + \gamma^2/\bar{k}_1^2)/(M - M_3)\, M_3, \\ k_2^2 &= \bar{k}_2^2 - K^2\gamma^2 (1 + \gamma^2/\bar{k}_2^2)/(M - M_3)\, M. \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Постоянная τ, определяемая уравнением (7.3), равна соответственно

$$\tau = M(k^2 - \bar{k}_2^2). \tag{8.6}$$

Теперь мы можем перейти к пределу при $K = 0$. Достаточно при этом рассмотреть лишь «вектор-потенциал» **E**, поскольку **E** определяет собой также магнитное поле **H** (уравнение (2.2)).

Мы рассмотрим, таким образом, лишь уравнение (7.8).

1) $k = k_1$. Предельное значение для τ_1:

$$\tau_1 = M(\bar{k}_1^2 - \bar{k}_2^2). \tag{8.7}$$

Это выражение отлично от нуля; величиной $\sigma = K\gamma^2$ можно по сравнению с ним пренебречь. Положив $\sigma = 0$, находим:

$$E_x = ik_0\tau_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial y}, \quad E_y = -ik_0\tau_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}, \quad E_z = 0.$$

Эти выражения при

$$\Pi_1 = (i/\tau_1 k_0)\,\Phi_1$$

переходят в (8.2).

2) $k = k_2$. Предельные значения равны в этом случае:

$$\tau_2 = K^2\gamma^2 (1 + \gamma^2/\bar{k}_2^2)/(M - M_3), \tag{8.8}$$

т. е. $\tau_2 \ll \sigma$, так что мы должны положить $\tau_2 = 0$. Тогда выражение (7.8) перейдет в

$$E_x = ik_0 \frac{\partial(\sigma\Pi_2)}{\partial x}, \quad E_y = ik_0 \frac{\partial(\sigma\Pi_2)}{\partial y}, \quad E_z = \frac{\sigma k_0 \bar{k}_2^2}{\gamma}\Pi_2,$$

т. е. при переходе к пределу $\sigma \to 0$ произведение $\sigma\Pi_2$ остается конечной величиной. Сравнивая полученные выражения для составляющих вектора **E** с (8.4), мы видим, что эти равенства переходят друг в друга, если положить

$$\sigma\Pi_2 = -ik_0\Phi_2.$$

Проведенное выше рассуждение доказывает, что уравнения (7.8) и (7.10) действительно содержат все возможные типы нормальных волн (за исключением случаев вырождения, рассмотренных в §§ 5 и 6). Интересно отметить, что обе компоненты E_z и H_z всегда отличны от нуля. В среде, не обладающей гиромагнитными свойствами (т. е. при $\varkappa=0$), любая волна может быть представлена в виде суперпозиции ТЕ-волн и ТМ-волн; в гиромагнитной среде это не так. В § 5 было показано, что единственная волна, в которой **E** и **H** перпендикулярны к оси z, — это плоская волна в безграничной среде (волна ТЕМ).

ЧАСТЬ II

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ

§ 9. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

На практике гиромагнитная среда (феррит) по необходимости не безгранична, она ограничена поверхностями, прилегающими либо к металлическому проводнику, либо к более или менее совершенному изолятору (таким изолятором может быть вакуум, какой-либо диэлектрик или некоторый другой феррит). В диапазоне сверхвысоких частот металлы можно считать идеальными проводниками, так что граничное условие на поверхности, граничащей с металлом, имеет вид

$$E_t=0, \tag{I}$$

где индексом t обозначена тангенциальная составляющая вектора **E**. На поверхности, граничащей с изолятором или с несовершенным проводником, тангенциальные составляющие **E** или **H** должны быть непрерывны при переходе из гиромагнитной среды через эту поверхность:

$$E_t=E_t', \quad H_t=H_t' \tag{II}$$

(нештрихованные буквы в левой части (II) относятся к рассматриваемой гиромагнитной среде, штрихованные — к граничащей с нею области).

Система равенств (7.6), (7.8) и (7.10) выражает собой решение электродинамической задачи в обобщенных цилиндрических координатах, при этом на выбор координатной сетки в плоскости, перпендикулярной к оси Oz (т. е. к направлению поля $\mathbf{H}_0$), не накладывается никаких ограничений. Но необходимость удовлетворить краевым условиям (I) (II) уже вносит некоторые ограничения. Прежде всего, основной, можно даже сказать, единственно практически осуществимый метод — это метод разделения переменных. Пусть u и v — криволинейные ортогональные координаты в плоскости (x, y). Элемент длины dl запишется, как обычно, в виде

$$dl^2=U^2\,du^2+V^2\,dv^2.$$

Под термином «разделение переменных» подразумевается, что функция Герца, удовлетворяющая уравнению (7.6), может быть представлена в виде суммы частных решений, каждое из которых представляет собой произведение функций, зависящих каждая только от одной из координат u, v или z.

Известно, что такое разделение переменных возможно только в эллиптических координатах[14] и системах координат, получающихся из эллиптических путем вырождения (декартовы, полярные и параболические координаты). Если переменные разделяются и граничные поверхности описываются уравнениями $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $z = \text{const}$, то методом разделения переменных можно удовлетворить краевым условиям. Однако даже в случае изотропной среды метод разделения переменных в эллиптических координатах всех типов приводит к решению в замкнутой форме только при граничных условиях типа (I).

При граничных условиях (II) удается рассмотреть только два вида границ: плоскость или круглый цилиндр. При границе в виде эллиптического или параболического цилиндра для определения амплитуд отдельных нормальных волн получается бесконечная система уравнений, и метод разделения переменных уже не столь полезен.

Во-вторых, свойства гиромагнитной среды, выражаемые соотношениями (7.8), (7.10), вносят дополнительные ограничения, из-за которых удовлетворять краевым условиям становится еще труднее. Именно общее выражение для поперечных составляющих **E** и **H** имеет, согласно (7.8) и (7.10), следующий вид:

$$E_v = \left[(C_1/U) \frac{\partial \Phi (u)}{\partial u} \Psi (v) + (C_2/V) \Phi (u) \frac{\partial \Psi (v)}{\partial v} \right] \exp i\gamma z, \tag{9.1}$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные. Рассмотрим произвольную цилиндрическую поверхность (например, $u = u_0$), на которой для составляющих E_v падающей, отраженной и преломленной волн выполняются условия (I) или (II). Для того чтобы эти граничные условия удовлетворялись, множители, зависящие от v (и поэтому меняющиеся вдоль границы), должны быть в обеих слагаемых (9.1) одинаковы, т. е. требуется, чтобы $\frac{\partial \Psi}{\partial v}$ и Ψ представлялись одинаковыми аналитическими выражениями, а это возможно лишь в случае, когда $\Psi (v)$ — экспонента. Для любой другой функции $\Psi (v)$ граничное условие (I) или (II) приводит к бесконечной системе уравнений.

В семействе эллиптических координат существуют две системы, в которых множитель $\Psi (v)$ — экспонента:

1. Декартовы координаты, где множитель, зависящий от x и y, может иметь вид $\exp i\alpha x$, $\exp i\beta y$.

2. Цилиндрические координаты, где азимутальный множитель может иметь вид $\exp (in\varphi)$ (n — некоторое целое число, φ — азимут). Таким образом, число физических систем, которые поддаются расчету, невелико и ограничивается тремя случаями:

1) плоские волны, отражение плоских волн от плоских границ;

2) прямоугольные волноводы,

3) круглые волноводы, ось которых совпадает с направлением внешнего магнитного поля H_0. Кроме того, условия распространения должны быть таковы, чтобы $\Psi (v)$ выражалось не тригонометрической, а именно экспоненциальной функцией.

Повторяем, что все приведенные выше соображения относятся только к цилиндрическим границам, параллельным выделенному направлению Oz. Граничных условий на плоскостях $z = \text{const}$ мы коснемся при рассмотрении частных примеров.

§ 10. ПЛОСКАЯ ВОЛНА

Частные случаи плоских волн мы уже рассматривали в § 5. Теперь мы хотим рассмотреть общий случай плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении z', составляющем с главным направлением z некоторый угол ϑ. Направим ось Ox декартовой системы x, y, z перпендикулярно плоскости (z, z'). Тогда волновой вектор будет лежать в плоскости YZ и вектор Герца П, описывающий такую волну (равенства (7.6) и (7.8)), не будет зависеть от x:

$$\Pi = \exp i\,(ky + \gamma z) = \exp ik'z'. \tag{10.1}$$

Из соотношения $z' = y \sin\vartheta + z\cos\vartheta$ получаем

$$k = k' \sin\vartheta, \qquad \gamma = k' \cos\vartheta \tag{10.2}$$

или

$$k = \gamma \operatorname{tg}\vartheta, \qquad k' = \gamma/\cos\vartheta. \tag{10.3}$$

Длина волны в направлении распространения равна

$$\lambda = 2\pi/k' = 2\pi \cos\vartheta/\gamma \tag{10.4}$$

и параметр τ (уравнение (7.3))

$$\tau = (M\gamma^2/\cos^2\vartheta) - \varepsilon k_0^2. \tag{10.5}$$

Равенство (4.5), определяющее k, позволяет вычислить γ в функции угла ϑ. В результате находим

$$\gamma^2 = \varepsilon k_0^2 \frac{2M - (M - M_3)\sin^2\vartheta \pm [4K^2\cos^2\vartheta + (M - M_3)^2 \sin^4\vartheta]^{\frac{1}{2}}}{2\,[M^2 - K^2 + MM_3 \operatorname{tg}^2\vartheta]}. \tag{10.6}$$

Двойной знак в формуле (10.6) указывает, что в каждом направлении в среде могут распространяться две различные плоские волны. Предельные случаи этой формулы нам уже встречались: при $\vartheta = 0$ получаем уравнение (5.10), при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0$, $k'^2 = \varepsilon k_0^2/M$ или $k'^2 = \varepsilon k_0^2/M_3$, в соответствии с (6.1) и (6.2).

Составляющие электрического вектора **E** определяются из соотношения (7.8):

$$E_x = i\tau\gamma\Pi \operatorname{tg}\vartheta, \quad E_y = -\sigma\gamma\Pi \operatorname{tg}\vartheta, \quad E_z = \sigma\gamma\Pi \operatorname{tg}^2\vartheta. \tag{10.7}$$

Особый интерес представляют собой составляющие вектора **E** по осям x', y', z', связанным с направлением распространения волны z' (ось y' расположена в плоскости (y, z), ось x' совпадает с осью x). Имеем

$$E_{y'} = E_y \cos\vartheta - E_z \sin\vartheta,$$

$$E_{z'} = E_y \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta,$$

откуда

$$E_{x'} = E_x, \; E_{y'} = -(\sigma/\sin\vartheta)\,\gamma\Pi, \; E_{z'} = 0. \tag{10.8}$$

Составляющие $E_{x'}$ и $E_{y'}$, вообще говоря, различны по амплитуде и сдвинуты по фазе друг относительно друга на $\pi/2$. Поэтому соответствующие им волны имеют эллиптическую поляризацию. Направление вращения по эллипсу в обеих волнах различное: можно показать, что в одной волне параметр τ положителен, а в другой — отрицателен, в соответствии с двойным знаком в формуле (10.6). Как известно, из уравнений Максвелла (2.1) следует, что в плоской волне электрический вектор **E** и вектор магнитной индукции **B** оба перпендикулярны к направлению распространения и расположены под прямым углом друг к другу, так что характер эллиптической поляризации у вектора **B** тот же, что и у вектора **E**.

Вектор напряженности магнитного поля **H** связан с **B** тензорным уравнением (1.2), поэтому поляризация вектора **H** иная, чем **E** и **B**.

Из (1.2) следует, что вектор **H** не перпендикулярен направлению распространения и имеет составляющую по оси z'. Помимо вращения вектора **B** вокруг оси z', вектор **H** вращается еще вокруг оси z (это вращение определяется тензором (μ^{-1})).

Наиболее существенное различие между только что рассмотренными эллиптически поляризованными волнами и аналогичными волнами в изотропной среде таково. В изотропной среде эллиптически поляризованную плоскую волну всегда можно представить в виде суперпозиции двух независимых линейно поляризованных волн. В гиромагнитной среде это невозможно. Выражения (10.1) или (10.7) описывают наиболее простой тип волнового движения. Это обстоятельство существенно в проблеме отражения плоских волн от бесконечной проводящей плоскости или от другой плоской границы раздела.

Если обе среды изотропны, то все сводится к отражению линейно поляризованных волн с фиксированными направлениями векторов **E** и **H**. На плоской границе достаточно рассмотреть одну компоненту E_t или одну компоненту H_t; таким образом, краевые условия сводятся в случае (I) к одному уравнению, в случае (II) — к двум уравнениям и удовлетворяются одной отраженной волной (случай I) или одной отраженной и одной преломленной волной (случай II). По-иному обстоит дело в гиромагнитной среде, где волна с эллиптической поляризации «неразложима» и направления векторов **E** и **H** в пространстве беспрерывно меняются. Необходимо поэтому рассматривать две составляющие **E** (направленные под прямым углом друг к другу) и две составляющие **H**. Краевые условия дают два (в случае I) или четыре (в случае II) уравнения. Чтобы им удовлетворить, нужны две или соответственно четыре волны. Такое число волн как раз имеется в нашем распоряжении, так как в гиромагнитной среде могут распространяться плоские волны двух типов ($k=k_1$ и $k=k_2$). Таким образом, падающая волна порождает две отраженные волны ($k=k_1$ и $k=k_2$) в самой среде и две преломленные волны в соседней среде.

Если не считать этого усложнения, математическая сторона задачи остается столь же элементарной, поскольку вектор Герца в декартовых координатах имеет простой вид: $\Pi \approx \exp i(\alpha x+\beta y+\gamma z)$. При переходе от одной декартовой системы к другой он преобразуется как ковариантный вектор и выражается всегда в виде произведения трех экспонент, что позволяет сразу же удовлетворить краевым условиям на любой плоской границе раздела аналогично тому, как это было сделано в предыдущих параграфах для граничных поверхностей, параллельных направлению распространения волны.

Вычисление амплитуд отраженных и преломленных волн во всех этих случаях совершенно элементарно, хотя подчас и довольно громоздко. Однако практически коэффициенты отражения плоских волн столь мало существенны, что их вычисление не оправдывает собой даже места, необходимого для расчета[15].

Достаточно рассмотреть здесь лишь один простой случай, который представляет собой некоторый теоретический интерес в связи с содержанием последующего параграфа, — это отражение двухмерного волнового поля (определение этого термина см. в § 6). Рассмотрим линейно поляризованную плоскую волну:

$$\left.\begin{aligned} E_z^{(i)} &= \exp ik_0 (x\cos\zeta + y\sin\zeta), \\ H_x^{(i)} &= \sin\zeta E_z^{(i)}, \quad H_y^{(i)} = -\cos\zeta E_z^{(i)}. \end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

Отрицательное полупространство ($x<0$) заполнено воздухом, положительное — гиромагнитной средой (внешнее магнитное поле $H_0 \| Oz$). Волна (10.9) падает на границу раздела $x=0$ под углом ζ к нормали. Преломленная волна описывается уравнениями (6.4), (6.5) и (6.7) и, следовательно, также линейно поляризована. Существенного отличия от изотропной среды тут нет: появляется только одна отраженная волна и одна преломленная. Поле отраженной волны имеет вид

$$\left.\begin{aligned} E_z^{(R)} &= R\exp ik_0(-x\cos\zeta + i\sin\zeta), \\ H_x^{(R)} &= \sin\zeta E_z^{(R)}, \quad H_y^{(R)} = \cos\zeta E_z^{(R)}. \end{aligned}\right\} \tag{10.10}$$

Обозначив

$$k_3 = (\varepsilon/M)^{\frac{1}{2}} k_0 = n_3 k_0, \tag{10.11}$$

получаем из (6.6) и (6.7) компоненты поля преломленной волны:

$$\left.\begin{aligned} E_z^{(T)} &= T\exp ik_3(x\cos\zeta' + y\sin\zeta'), \\ H_x^{(T)} &= (-iK\cos\zeta' + M\sin\zeta')\, n_3 E_z^{(T)}, \\ H_y^{(T)} &= -(M\cos\zeta' + iK\sin\zeta')\, n_3 E_z^{(T)}. \end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

Краевое условие (II) приобретает в этом случае при $x=0$ следующий вид: $E_z^{(i)} + E_z^{(R)} = E_z^{(T)}$; $H_y^{(i)} + H_y^{(R)} = H_y^{(T)}$. Из уравнений Максвелла следует:

$$n_3 \sin\zeta' = \sin\zeta. \tag{10.13}$$

Из краевых условий находим

$$\left.\begin{aligned} 1 + R &= T, \\ \cos\zeta(1-R) &= (M\cos\zeta' + iK\sin\zeta')\, n_3 T. \end{aligned}\right\} \tag{10.14}$$

Итак, мы дополнили выражения (10.10) и (10.12) для отраженной и преломленной волн значениями коэффициентов R и T:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\cos\zeta - n_3(M\cos\zeta' + iK\sin\zeta')}{\cos\zeta + n_3(M\cos\zeta' + iK\sin\zeta')}, \\ T &= \frac{2\cos\zeta}{\cos\zeta + n_3(M\cos\zeta' + iK\sin\zeta')}. \end{aligned}\right\} \tag{10.15}$$

Существенно отметить асимметрию R и T по отношению к $\pm\zeta$ (а следовательно, и по отношению к $\pm\zeta'$).

§ 11. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Выберем продольную ось волновода, заполненного гиромагнитной средой, за ось x. Пусть, далее, координаты y, z поперечного сечения этого волновода лежат в пределах

$$0 < y < l, \quad 0 < z < h; \tag{11.1}$$

z, как обычно, — направление постоянного поля H_0. В волноводе может тогда распространяться двухмерная волна (типа, рассмотренного в § 6) и справедливы соотношения (6.5) и (6.7). Действительно, нормальные волны

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \sin \beta y \exp i\alpha x, \tag{11.2}$$

где

$$\alpha^2 + \beta^2 = k_3^2 = (\varepsilon/M)\, k_0^2, \tag{11.3}$$

удовлетворяют всем краевым условиям на всех четырех стенках волновода. На стенках $z=0$ и $z=h$ краевые условия имеют вид: $E_x = E_y = 0$, они удовлетворяются тождественно. Граничные условия на стенках $y=0$, $y=l$, $E_x = E_z = 0$ требуют выполнения равенства

$$\beta = n\pi/l, \tag{11.4}$$

где n — целое число. Соответственно окончательные выражения для электрического поля:

$$E_z = \sin(n\pi y/l) \exp i\alpha_n x, \tag{11.5}$$

$$\alpha_n = \pm\, (k_3^2 - n^2\pi^2/l^2)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{11.6}$$

Из уравнений (6.7) находим магнитное поле:

$$\left.\begin{aligned} H_x &= -ik_0^{-1}\,[K\alpha \sin\beta y + M\beta\cos\beta y]\exp i\alpha x,\\ H_y &= -k_0^{-1}\,[M\alpha\sin\beta y + K\beta\cos\beta y]\exp i\alpha x. \end{aligned}\right\} \tag{11.7}$$

Постоянные распространения α_n имеют, таким образом, дискретный спектр (11.6). Для заданного значения k_3 постоянные α_n действительны при $n < \pi k_3/l$, за этим критическим значением постоянные распространения — мнимые величины и нормальные волны (11.5) затухают. На практике стремятся иметь в волноводе только одну нормальную волну. Для этого выбирают частоту из соотношения $\frac{\pi}{l} < k_3 < \frac{2\pi}{l}$; тогда все нормальные волны, кроме основной ($n=1$), затухают. Если почему-либо возникает одна из волн высших порядков, то она быстро затухает на небольшом участке длины волновода, и остается только основная волна.

Поскольку первый множитель $\left(\sin\frac{\pi n y}{l}\right)$ в выражении (11.5) не зависит от α_n, можно решить также задачу об отражении волны в волноводе от плоской проводящей пластины, помещенной, например, в точке $x=0$. Краевые условия на поверхности пластинки суть $E_y = 0$, $E_z + E_z^{(R)} = 0$. Этим условиям, очевидно, удовлетворяет отраженная волна, отличающаяся от падающей только знаками при α_n и $E_z^{(R)}$ (т. е. $\alpha_n < 0$, $E_z^{(R)} < 0$). Результирующее поле падающей и отраженной волн равно

$$E_z^{(\text{рез})} = 2\sin(n\pi y/l)\sin\alpha x.$$

Отсюда следует также решение краевой задачи для прямоугольного резонатора. Пусть длина резонатора в направлении оси x равна L. Краевые условия на обоих основаниях резонатора удовлетворятся при

$\alpha = \frac{m\pi}{l}$, где m — любое целое число; собственная частота такого резонатора ($\omega = ck_3M^{\frac{1}{2}}/\varepsilon^{\frac{1}{2}}$) равна

$$\omega^2 = (\pi c)^2 (M/\varepsilon) [(n/l)^2 + (m/L)^2]. \tag{11.8}$$

Не следует, однако, забывать, что величины M и ε обе зависят от ω (§ 1), так что (11.8) содержит ω также в неявной форме. Решением второго типа, рассмотренным в § 6 ($E_x = E_y = 0$, уравнение (6.9)), в прямоугольном волноводе воспользоваться нельзя, ибо, положив $E_x = E_y = 0$ на стенках волновода (при $z = 0$ и $z = h$), получаем тривиальны случай: вектор **E** тождественно равен нулю во всех точках.

§ 12. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫЙ ФЕРРИТОМ

Мы рассмотрим теперь волновод такой же формы и тех же размеров, что и в предыдущем параграфе, но заполненный ферритом лишь частично, не по всему поперечному сечению. Феррит имеет форму плоского слоя и заполняет собой сечение волновода от $y = 0$ и до $y = d$. Остальная часть сечения волновода $d < y < l$ заполнена воздухом.

В области внутри феррита справедливы выражения (11.2), (11.3) и (11.7) § 11. Вне феррита

$$\left.\begin{aligned} E_z^{(0)} &= C \sin \beta_0 (y - l), \\ H_z^{(0)} &= ik_0^{-1} C\beta_0 \cos \beta_0 (y - l), \\ H_y^{(0)} &= -k_0^{-1} C\alpha \sin \beta_0 (y - l), \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

$$\alpha^2 + \beta_0^2 = k_0^2 \tag{12.2}$$

(множитель $\exp i\alpha x$ в выражениях (12.1), (12.2) опущен).

Выражения (12.1), (12.2) удовлетворяют краевым условиям на стенках волновода. Остается удовлетворить краевым условиям на границе раздела $y = d$, т. е. условиям $E_z = E_z^{(0)}$, $H_x = H_x^{(0)}$, или в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned} \sin \beta d &= C \sin \beta_0 (d - l), \\ K\alpha \sin \beta d + M\beta \cos \beta d &= C\beta_0 \cos \beta_0 (d - l). \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

Оба уравнения (12.3) совместны при

$$\operatorname{tg} \beta_0 (d - l) = \beta_0 [M\beta \operatorname{ctg} \beta d + K\alpha]^{-1}. \tag{12.4}$$

Величины β и β_0 в функции α задаются уравнениями (11.3) и (12.2), так что соотношение (12.4) представляет собой уравнение для определения постоянной распространения α. Это уравнение трансцендентное и имеет бесконечное множество решений — спектр собственных значений α. Вычислять эти корни мы здесь не будем.

Следует указать, однако, что в системе, рассматриваемой в настоящем параграфе, задача об отражении от проводящей пластинки, закорачивающей волновод, уже совсем непростая. Уравнение (12.4) не симметрично относительно $+\alpha$ и $-\alpha$, так что волны с положительным направлением распространения ($\alpha > 0$) имеют другие α и соответственно иные β и β_0, чем волны с отрицательным направлением распространения ($\alpha < 0$). Поэтому метод вычисления отраженного поля, которым мы воспользовались в предыдущем параграфе, здесь уже непригоден.

Для феррита в прямоугольном волноводе (при поперечном намагничивании) можно поставить и решить также ряд других краевых задач: а) продольные ферритовые пластинки, касающиеся двух противоположных стенок волновода и параллельные двум другим его стенкам (поперечное намагничивание)[11,16]; б) круглый ферритовый стержень, радиус которого мал по сравнению с расстоянием до стенок, параллельных его оси[17].

§ 13. ОТРАЖЕНИЕ ОТ ФЕРРИТА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Мы рассматриваем по-прежнему бесконечный волновод той же формы и тех же размеров, что и в § 11. Теперь, однако, гиромагнитная среда, намагниченная по направлению Oz, заполняет лишь половину волновода (при $x > 0$), другая его половина ($x < 0$) заполнена воздухом. Падающая волна движется в положительном направлении оси x.

Рассмотрим задачу об отражении и преломлении падающей волны на границе раздела $x = 0$. Мы здесь не ставим своей целью найти практически полезные выражения для коэффициентов отражения и преломления. Ниже мы хотим дать лишь пример тех математических трудностей, которые встречаются почти во всех задачах о распространении электромагнитных волн в гиромагнитной среде (за исключением нескольких простейших случаев, которые решаются элементарно).

Для удобства выберем единицу длины таким образом, чтобы ширина волновода равнялась вместо l числу π, т. е. пределы изменения y были бы $0 < y < \pi$. Для падающей волны в воздухе

$$\left.\begin{aligned} E_z^{(i)} &= \sin my \exp i\alpha_{0m}x, \\ H_y^{(i)} &= -k_0^{-1}\alpha_{0m}\sin my \exp i\alpha_{0m}x, \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

где

$$\alpha_{0m} = (k_0^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

С другой стороны, возможны следующие отраженные ($\mathbf{E}^{(R)}$) и преломленные ($\mathbf{E}^{(T)}$) нормальные волны:

$$\left.\begin{aligned} E_{nz}^{(R)} &= \sin ny \exp(-i\alpha_{0n}x), \\ H_{ny}^{(R)} &= k_0^{-1}\alpha_{0n}\sin ny \exp(-i\alpha_{0n}x), \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

$$\left.\begin{aligned} E_{nz}^{(T)} &= \sin ny \exp i\alpha_n x, \\ H_{ny}^{(T)} &= -k_0^{-1}[M\alpha_n \sin ny + Kn\cos ny]\exp i\alpha_n x. \end{aligned}\right\} \tag{13.3}$$

(Выражения (13.3) следуют из формул (11.5)—(11.7).)

Граничные условия на поверхности раздела ($x = 0$) гласят:

$$E_z^{(i)} + E_z^{(R)} = E_z^{(T)}, \quad H_y^i + H_y^{(R)} = H_y^{(T)}. \tag{13.4}$$

Условиям (13.4) нельзя удовлетворить с помощью отраженных и преломленных волн только одного типа. Математически это ясно уже из самого вида сомножителя, зависящего от y; в выражении $H_{ny}^{(T)}$ этот сомножитель состоит из членов с $\sin ny$ и $\cos ny$, а в $H_{ny}^{(i)}$ и $H_{ny}^{(R)}$ содержит лишь $\sin ny$, так что составить линейную комбинацию из $H_{ny}^{(T)}$, $H_{ny}^{(i)}$ и $H_{ny}^{(R)}$ с коэффициентами, не зависящими от y, нельзя. Почему это нельзя сделать, можно также пояснить следующими физическими соображениями. Ограничиваясь электрическим вектором E_z, (13.1), (13.2) и (13.3) можно рассматривать как суперпозицию двух плоских волн, например:

$$E_z^{(i)} = -\frac{1}{2} i \exp i (my + \alpha_{0m} x) + \frac{1}{2} i \exp i (-my + \alpha_{0m} x).$$

Каждая из нормальных волн волновода состоит из двух плоских волн равной амплитуды и противоположной фазы, углы падения которых на плоскость раздела $x=0$ одинаковы по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Но, как это было уже показано в § 10, вследствие гиротропных свойств феррита отражение плоской волны такого типа асимметрично. С помощью нормальной волны только одного типа невозможно обеспечить непрерывность полей на границе раздела.

Поэтому представим отраженную и преломленную волны в самом общем виде как суперпозицию нормальных волн всех возможных типов:

$$E_z^{(R)} = \sum_{n=1}^{\infty} R_n E_{nz}^{(R)}, \quad E_z^{(T)} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n E_{nz}^{(T)}. \tag{13.5}$$

Аналогичные выражения имеют место и для $H_y^{(R)}$ и $H_y^{(T)}$. Мы рассмотрим случай, который только и представляет практический интерес: когда на феррит падает основная волна волновода, причем частота столь низка, что все волны высших порядков затухают, т. е. мы полагаем, что

$$m = 1, \quad \alpha = i|\alpha| \quad (\text{при } n > 1). \tag{13.6}$$

Тогда из краевых условий (13.4) получается следующая система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \sin y + \sum_{n=1}^{\infty} (R_n - T_n) \sin ny = 0, \\ \alpha_{01} \sin y - \sum_{n=1}^{\infty} [(\alpha_{0n} R_n + M\alpha_n T_n) \sin ny + Kn \cos ny] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

Уравнения (13.7) справедливы для всех значений y от 0 до π. В дальнейшем мы воспользуемся следующими соотношениями:

$$\int_0^{\pi} \sin my \sin ny dy = \int_0^{\pi} \cos my \cos ny \, dy = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m \neq n, \\ \frac{1}{2}\pi & \text{при} \quad m = n; \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin my \cos ny \, dy = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad (m-n) \text{ четном}, \\ 2m/(m^2 - n^2) & \text{при} \quad (m-n) \text{ нечетном}. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение (13.7) на $\sin my$ и интегрируя от 0 до π, находим

$$T_1 = R_1 + 1, \qquad T_n = R_n \quad (\text{при } n > 1).$$

Тогда второе уравнение можно преобразовать к виду

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_{01} - M\alpha_1) \sin y - H \cos y, \\ - \sum_{n-1}^{\infty} R_n [(\alpha_{0n} + M\alpha_n) \sin ny + Kn \cos ny] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13.8}$$

При малых K ($K \ll 1$) эту систему можно разрешить относительно R_n методом последовательных приближений.

Положим

$$R_n = R_n^0 + KR_n' + K^2R_n'' + \ldots,$$

где введены обозначения

$$A = \alpha_{01} - M\alpha_1, \quad B_n = \alpha_{0n} + M\alpha_n.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &R_1^0 = A/B_1, \quad R_1' = 0, \\ &R_1'' = -\left(\frac{8}{\pi}\right)^2 \frac{A+B_1}{B_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{B_{2n}} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (13.9)$$

Практически в отраженной волне существенна лишь амплитуда волны основного типа H_{01}, так как затухающие волны высших типов ($n > 1$) не несут с собой никакой энергии. Так как в ферритах K не является малой величиной, расчет отражения очень труден. Умножив обе части равенства (13.8) на $\sin my$ ($m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$) или на $\cos my$ и интегрируя от 0 до π, можно получить бесконечную систему линейных уравнений. Однако эта система сходится довольно медленно, и мы не будем ее здесь выписывать, поскольку никакого практически полезного метода решения этой системы мы не знаем.

§ 14. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

При продольном намагничивании удовлетворить краевым условиям на стенках прямоугольного волновода с помощью отдельных нормальных волн невозможно. Действительно, требования равенства нулю составляющей E_z одновременно при $x = 0$, $x = l_1$ и $y = 0$, $y = l_2$ будут противоречить друг другу. Как мы показали в § 9, из условия $x = 0$, $x = l_1$ следует, что множитель, зависящий от y, должен выражаться обязательно экспонентой: $\exp i\beta y$. Однако такой множитель не может удовлетворить краевым условиям при $y = 0$, $y = l_2$. В круглом волноводе эта трудность, напротив, не имеет места.

Введем систему цилиндрических координат r, φ, z; за ось z выберем ось волновода. Уравнение (7.6) для функции Герца принимает вид

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Pi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} + k^2\Pi = 0, \qquad (14.1)$$

так что функция Герца равна

$$\Pi = C_n(kr)\exp i(n\varphi + \gamma z), \qquad (14.2)$$

где $C_n(kr)$ — цилиндрическая функция порядка n, а k может принимать два значения, k_1 и k_2, определяемые выражением (4.5).

Электрическое и магнитное поля определяются из (7.8), (7.10):

$$\left.\begin{aligned} E_r &= i\,[k\sigma C_n'(kr) + (n\tau/r)\,C_n(kr)], \\ E_\varphi &= -\,[k\tau C_n'(kr) + (n\sigma/r)\,C_n(kr)], \\ E_z &= (k^2\sigma/\gamma)\,C_n(kr); \end{aligned}\right\} \qquad (14.3)$$

$$\left.\begin{aligned} H_r &= \gamma\,[k_a C_n'(kr) = (nb/r)\,C_n(kr)], \\ H_\varphi &= -i\gamma\,[kb\,C_n'(kr) - (na/r)\,C_n(kr)], \\ H_z &= i\gamma^2 g C_n(kr) \end{aligned}\right\} \qquad (14.4)$$

(множитель $\exp i(n\varphi + \gamma z)$ в (14.3) и (14.4) опущен).

Эта волна принципиально отличается от плоской волны, распространяющейся вдоль оси Oz, рассмотренной в § 5. Чтобы сделать это ясным, выберем в качестве $C_n(kr)$ функцию Ханкеля первого рода $H_n^{(1)}(z)$ и рассмотрим ее значения при больших значениях аргумента. Асимптотическое выражение при $x \ll 1$: $H_n^{(1)}(x) \sim \left(\frac{1}{2}\pi x\right)^{-\frac{1}{2}} \exp ix$, т. е. функция Герца, имеет вид

$$\Pi \sim \left(\frac{1}{2}\pi kr\right)^{-\frac{1}{2}} \exp i(kr + n\varphi + \gamma z).$$

В каждой данной точке это выражение определяет собой волну, распространяющуюся как в направлении r, так и в направлении φ; ее можно назвать «расходящейся геликоидальной волной».

Разность фаз между поперечными составляющими вектора E составит, очевидно, $\frac{\pi}{2}$; абсолютные величины этих составляющих тоже различны. Следовательно, волны (14.3) и (14.4) эллиптически поляризованы, а степень эллиптичности меняется с расстоянием от оси волновода, поскольку отношение полуосей эллипса поляризации равно по абсолютной величине отношению составляющих E_r/E_φ. Как мы увидим ниже, для n и $-n$ это отношение различно. В свете только что сказанного это обстоятельство отнюдь не должно показаться странным, ибо собственным числам $+n$ и $-n$ соответствуют две совершенно различные волны.

По сравнению с изотропной средой тут появляется одно существенное отличие: поскольку разные нормальные волны, соответствующие $+n$ и $-n$, асимметричны, их сумма не образует собой волну с линейной поляризацией. Именно

$$\frac{1}{2}[E_r(n) + E_r(-n)] = [ik\sigma C_n'(kr)\cos n\varphi - (n\tau/r)C_n(kr)\sin n\varphi]\exp i\gamma z,$$

$$\frac{1}{2}[E_\varphi(n) + E_\varphi(-n)] = -[k\tau C_n'(kr)\cos n\varphi + i(n\sigma/r)C_n(kr)\sin n\varphi]\exp i\gamma z.$$

Наконец, при одном и том же знаке у n элементы эллипса поляризации волн с $k = k_1$ и $k = k_2$ различны. Эти волны тоже образуют собой две различные нормальные волны. В § 9 было также показано, что τ_1 и τ_2 имеют разные знаки*).

§ 15. КРУГЛЫЙ ВОЛНОВОД (ПРОДОЛЬНОЕ НАМАГНИЧИВАНИЕ)

Если гиромагнитной средой заполнено все сечение бесконечного круглого волновода, то функция $C_n(kr)$ в уравнении (14.2) может быть только бесселевой функцией $J_n(kr)$, ибо эта функция — единственная из цилиндрических функций, которая не имеет особенности при $r = 0$, так что

$$\Pi = J_n(kr)\exp i(n\varphi + \gamma z). \tag{15.1}$$

За единицу длины выберем радиус волновода ($r = 1$). Краевые условия на стенке:

$$E_\varphi(1) = E_z(1) = 0. \tag{15.2}$$

Ясно, что само по себе ни одно из выражений (14.3) этим условиям не удовлетворяет. Однако в нашем распоряжении два таких век-

*) Кривые фарадеева вращения в волноводе вычислены Гамо[3].

тора, поскольку параметр k может принимать два значения k_1 и k_2. Мы назовем их первой и второй системой решений и будем обозначать соответственно индексами 1 или 2. Таким образом, функция Герца равна

$$\Pi = A_1\Pi_1 + A_2\Pi_2. \tag{15.3}$$

Эта линейная комбинация может удовлетворять условиям (15.2) при всех z и φ только в том случае, если множитель $\exp i(n\varphi+\gamma z)$ в обоих ее слагаемых один и тот же и на него можно оба члена сократить. Следовательно,

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \quad n_1 = n_2 = n.$$

Но k остаются различными ($k_1 \neq k_2$), поскольку k_1 и k_2 — различные функции γ.

Краевые условия принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} A_1E_{1\varphi}(1) + A_2E_{2\varphi}(1) &= 0,\\ A_1E_{1z}(1) + A_2E_{2z}(1) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15.4}$$

Они совместны, если

$$E_{1\varphi}(1)\,E_{2z}(1) - E_{2\varphi}(1)\,E_{1z}(1) = 0,$$

т. е. согласно (14.3)

$$[k_1\tau_1J_n'(k_1) + n\sigma J_n(k_1)]\,k_2^2J_n(k_2) - [k_2\tau_2J_n'(k_2) + n\sigma J_n(k_2)]\,k_1^2J_n(k_1) = 0. \tag{15.5}$$

Поскольку обе величины k_1 и k_2 — функции постоянной распространения γ, (15.5) представляет собой уравнение для определения значений γ, допустимых для нормальных волн (15.3) при заданной частоте ω. По значению γ можно вычислить k_1 и k_2, и мы условно будем называть k_1 и k_2 корнями уравнения (15.5).

Отношение коэффициентов A_2 и A_1 равно

$$A_2/A_1 = -k_1^2J_n(k_1)/k_2^2J_n(k_2), \tag{15.6}$$

где k_1 и k_2 удовлетворяют уравнению (15.5). Функция Герца равна

$$\Pi = [k_2^2J_n(k_2)\,J_n(k_1r) - k_1^2J_n(k_1)\,J_n(k_2r)] \times \exp i(n\varphi+\gamma z). \tag{15.7}$$

Из выражений (4.5) для k_1 и k_2 следует, что член в квадратных скобках (15.7) не зависит от знака γ, т. е. такая волна не меняет своего вида при отражении от поршня, закорачивающего волновод. Функция Герца результирующей волны равна тогда

$$\Pi = [A_1J_n(k_1r) + A_2J_n(k_2r)]\exp in\varphi \sin\gamma z. \tag{15.8}$$

Если выбрать постоянную распространения γ равной

$$\gamma = \pi m/l, \tag{15.9}$$

то (15.8) выражает собой поле в цилиндрическом резонаторе высоты l. Уравнения (15.5) и (15.8) определяют собой спектр собственных частот такого резонатора.

§ 16. КОАКСИАЛЬНАЯ ЛИНИЯ (ПРОДОЛЬНОЕ НАМАГНИЧИВАНИЕ)

Для случаев более сложных, чем в предыдущем параграфе, выражения для поля приобретают довольно громоздкий вид. Поэтому в остальной части нашего обзора мы ограничимся лишь общей схемой решений, не выписывая подробно соответствующих аналитических выражений.

Пусть внешний радиус коаксиальной линии равен единице, а внутренний радиус равен R. Краевые условия имеют вид

$$E_\varphi = E_z = 0 \quad \text{при} \quad r = 1,\ r = R. \tag{16.1}$$

Поскольку линия $r=0$ особых точек дифференциального уравнения (14.1) не входит теперь в область изменения независимых переменных r, φ, z, то в дополнение к функции Бесселя (15.1) можно воспользоваться также функцией Неймана:

$$\overline{\Pi}=N_n(kr)\exp i(n\varphi+\gamma z). \tag{16.2}$$

Решения, содержащие функцию Неймана, мы будем обозначать черточкой сверху. Подставляя вместо $C_n(kr)$ в уравнения (14.3) и (14.4) функцию $N_n(kr)$, получаем соответствующие выражения для $\overline{\mathbf{E}}$ и $\overline{\mathbf{H}}$; k принимает, как всегда, два значения, так что полное выражение для E_y и E_z имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}E_\varphi&=A_1E_{1\varphi}+A_2E_{2\varphi}+\overline{A}_1\overline{E}_{1\varphi}+\overline{A}_2\overline{E}_{2\varphi},\\E_z&=A_1E_{1z}+A_2E_{2z}+\overline{A}_2\overline{E}_{1z}+\overline{A}_2\overline{E}_{2z}.\end{aligned}\right\} \tag{16.3}$$

Подставляя эти выражения в краевые условия (16.1), получаем для коэффициентов A систему четырех однородных линейных уравнений. Условие разрешимости этой системы:

$$\begin{vmatrix}E_{1\varphi}(1) & E_{2\varphi}(1) & \overline{E}_{1\varphi}(1) & \overline{E}_{2\varphi}(1)\\ E_{1z}(1) & E_{2z}(1) & \overline{E}_{1z}(1) & \overline{E}_{2z}(1)\\ E_{1\varphi}(R) & E_{2\varphi}(R) & \overline{E}_{1\varphi}(R) & \overline{E}_{2\varphi}(R)\\ E_{1z}(R) & E_{2z}(R) & \overline{E}_{1z}(R) & \overline{E}_{2z}(R)\end{vmatrix}=0. \tag{16.4}$$

Это уравнение служит для определения γ, оно заменяет собой в данном случае уравнение (15.5). Так же как в предыдущем параграфе, решается и задача об отражении. Чтобы получить сумму полей падающей и отраженной волн, достаточно заменить множитель $\exp i\gamma z$ в потенциалах Π_1 и Π_2 на $\sin\gamma z$. Частоты собственных колебаний коаксиального резонатора длины l определяются тогда уравнениями (15.9) и (16.4).

§ 17. КРУГЛЫЙ ВОЛНОВОД С КОАКСИАЛЬНЫМ ФЕРРИТОВЫМ СТЕРЖНЕМ

Рассмотрим бесконечный круглый волновод, внутри которого расположены два коаксиальных концентрических гиромагнитных слоя. Внутренний слой образует цилиндр радиуса R, внешний слой — коаксиальный цилиндр, заполняющий собой объем волновода от $r=R$ и до $r=1$.

Оба цилиндра намагничены вдоль оси z. Значения постоянной k для внешнего цилиндра пусть будут k_1 и k_2, для внутреннего — k_1', k_2'.

Поле во внешнем цилиндре может быть описано так же, как и в § 16, — выражениями (15.3), к которым следует еще прибавить аналогичные выражения для составляющих магнитного поля. Внутренний цилиндр включает особую точку $r=0$, так что выражения поля в нем содержат только бесселевы функции, т. е. поле во внутренней области определяется выражениями (14.3) и (15.3), которые можно записать в виде

$$E'=A_1'E_1'+A_2'E_2',\qquad H'=A_1'H_1'+A_2'H_2' \tag{17.1}$$

(штрихи показывают здесь, что волновые числа выражений (17.1) k_1' и k_2' относятся к внутреннему цилиндру).

Выражения для векторов поля содержат в общей сложности шесть коэффициентов A_i и должны удовлетворять шести краевым условиям:

двум условиям на стенке волновода $r=1$

$$E_\varphi(1)=E_z(1)=0 \tag{17.2}$$

и четырем на границе раздела между цилиндрами $r=R$

$$\left.\begin{aligned} &E_\varphi(R)=E'_\varphi(R), \qquad E_z(R)=E'_z(R),\\ &H_\varphi(R)=H'_\varphi(R), \qquad H_z(R)=H'_z(R). \end{aligned}\right\} \tag{17.3}$$

Таким образом, полная система уравнений для A_i имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &A_1E_{1\varphi}(1)+A_2E_{2\varphi}(1)+\overline{A}_1\overline{E}_{1\varphi}(1)+\overline{A}_2\overline{E}_{2\varphi}(1)=0,\\ &A_1E_{1z}(1)+A_2E_{2z}(1)+\overline{A}_1\overline{E}_{1z}(1)+\overline{A}_2\overline{E}_{2z}(1)=0,\\ &A_1E_{1\varphi}(R)+A_2E_{2\varphi}(R)+\overline{A}_1\overline{E}_{1\varphi}(R)+\overline{A}_2\overline{E}_{2\varphi}(R)-\\ &\qquad\qquad -A'_1E'_{1\varphi}(R)-A'_2E'_{2\varphi}(R)=0,\\ &A_1E_{1z}(R)+A_2E_{2z}(R)+\overline{A}_1\overline{E}_{1z}(R)+\overline{A}_2\overline{E}_{2z}(R)-\\ &\qquad\qquad -A'_1E'_{1z}(R)-A'_2E'_{2z}(R)=0,\\ &A_1H_{1\varphi}(R)+A_2H_{2\varphi}(R)+\overline{A}_1\overline{H}_{1\varphi}(R)+\overline{A}_2\overline{H}_{2\varphi}(R)-\\ &\qquad\qquad -A'_1H'_{1\varphi}(R)-A'_2H'_{2\varphi}(R)=0,\\ &A_1H_{1z}(R)+A_2H_{2z}(R)+\overline{A}_1\overline{H}_{1z}(R)+\overline{A}_2\overline{H}_{2z}(R)-\\ &\qquad\qquad -A'_1H'_{1z}(R)-A'_2H'_{2z}(R)=0. \end{aligned}\right\} \tag{17.4}$$

Приравнивая нулю детерминант этой системы, получаем уравнение для постоянной распространения γ.

Если наружная среда, например воздух, изотропна, то эти уравнения остаются в силе; только выражения для компонент поля в наружной среде несколько меняются. Первая система решений (Π_1) переходит в волну типа TE, вторая система (Π_2) — в волну TM § 8 (причем $M=M_3$). Для обеих систем потенциал равен

$$\Phi=C_n(kr)\exp i(n\varphi+\gamma z),$$

где

$$k_1=k_2=k=(\varepsilon\mu k_0^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{17.5}$$

и соотношения (8.2) и (8.4) приводят к следующим выражениям для составляющих поля:

$$\left.\begin{aligned} &E_{1r}=-i(n/r)C_n(kr), \qquad E_{1\varphi}=kC'_n(kr), \qquad E_{1z}=0,\\ &H_{1r}=-(k\gamma/\mu k_0)C'_n(kr), \qquad H_{1\varphi}=-(n\gamma/\mu k_0 r)C_n(kr),\\ &\qquad\qquad H_{1z}=i(k^2/\mu k_0)C_n(kr), \end{aligned}\right\} \tag{17.6}$$

$$\left.\begin{aligned} &E_{2r}=kC'_n(kr), \qquad E_{2\varphi}=i(n/r)C_n(kr), \qquad E_{2z}=-(k^2/\gamma)C_n(kr),\\ &H_{2r}=-i(nk_0\varepsilon/\gamma r)C_n(kr), \qquad H_{2\varphi}=(kk_0\varepsilon/\gamma)C'_n(kr), \qquad H_{2z}=0 \end{aligned}\right\} \tag{17.7}$$

(множитель $\exp i(n\varphi+\gamma z)$ мы опускаем).

Очень важен случай изотропного внешнего слоя, этот случай часто встречается на практике—в современных ферритовых устройствах. И соответственно встает важная теоретическая проблема — исследовать, какое влияние оказывает ферритовый стержень, расположенный по оси волновода, на распространение волн в окружающей стержень изотропной среде. К сожалению, уравнения (17.4) довольно сложны, и вычисление корней γ_i соответствующего трансцендентного уравнения потребовало бы весьма громоздких числовых расчетов. В случае, когда обе среды не имеют потерь, можно, однако, составить себе некоторое качественное представление о строении поля нормальных волн такого волновода. Это можно сделать в несколько этапов: 1. Из принципа сохранения энергии следует, что собственные значения k, k', k_2', получаемые из условия совместности уравнений (17.4), всегда действительны. Следовательно, будут ли члены, входящие в уравнения (14.3), (14.4), (17.6) и (17.7), действительными или мнимыми величинами, это зависит только от присутствия в них множителя i. 2. Если заменить коэффициенты $A_1A_2 : A_2 = iD$, $\bar{A}_2 = i\bar{D}_2$ и записать уравнение (17.4) через цилиндрические функции, то уравнения, в которые входит множитель i, можно на этот множитель сократить, и вся система (17.4) будет действительной, а не комплексной. Это в свою очередь означает, что отношения коэффициентов A и D — тоже действительные числа, в том числе и $\bar{A}_1/A_1$, D/A, D/A_1. 3. Для того чтобы выяснить влияние перемены знака n на значения коэффициентов, сопоставим рассматриваемый случай с более простым, когда обе среды, внутренняя и наружная, изотропны. В этом случае система (17.4) приобретает замечательную симметрию: если одновременно переменить знак у n, D и $\bar{D}$, уравнения не изменятся. Это значит, что при постоянном A_1 коэффициент $\bar{A}_1$ — четная функция n, а коэффициенты D, $\bar{D}$, наоборот, суть нечетные функции. Если внутренний слой гиромагнитный, то такой симметрии уже не будет, и все три коэффициента $\bar{A}_1$, D, $\bar{D}$ суть несимметричные функции n.

Выписываем подробно выражение для E_r и E_φ (множитель $\exp i(n\varphi+\gamma z)$ мы при этом опускаем):

$$E_r = -i\{(n/r)[A_1J_n(kr)+\bar{A}_1N_n(kr)]+k[DJ_n'(kr)+\bar{D}N_n'(kr)]\},$$
$$E_\varphi = k[A_1J_n'(kr)+\bar{A}_1N_n'(kr)]-(n/r)[DJ_n(kr)+\bar{D}N_n(kr)].$$

Когда внутренний стержень отсутствует, то каждое из этих выражений сводится к одному слагаемому (например, для ТЕ-волн — к члену с A_1). Очевидно, что в этом случае нормальные волны, соответствующие $+n$ и $-n$, поляризованы по эллипсу с противоположным направлением вращения. Но в остальном обе эти волны симметричны, так что их сумма дает линейно поляризованную волну. Присутствие внутреннего цилиндра вызывает появление трех дополнительных членов. Пока, однако, внутренний стержень изотропный, симметрия нормальных волн, соответствующих $+n$ и $-n$, не нарушается в силу симметрии коэффициентов. Иное положение мы имеем в случае гиромагнитного стержня: коэффициенты $\bar{A}$, D, $\bar{D}$ суть несимметричные функции n и влияют на эллиптичность нормальных волн $+n$ и $-n$ в различной степени. Следовательно, линейная комбинация двух нормальных волн, $+n$ и $-n$, не может дать волну с линейной поляризацией.

Как уже указывалось, количественная оценка этих эффектов требует длинных числовых расчетов. Ван-Трир вычислил значение k в первом приближении для весьма тонкого ферритового стержня ($R \ll 1$). Но и в его работе коэффициенты A и D остались невычисленными [18].

Наконец, интересно отметить, что слагаемые выражений (17.6) и (17.7) той же четности относительно $\pm\gamma$, что и соответствующие слагаемые в выражениях (14.3), (14.4), т. е. система (17.4) инвариантна относительно перемены знака γ: волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях оси z, характеризуются одним и тем же спектром постоянных распространения. Поэтому задачи об отражении от проводящего экрана на конце волновода и вычисление собственных частот резонатора производятся в этом случае таким же способом, как и в предыдущих параграфах.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. О свойствах ферритов и истории их разработки см. Сноек, Исследования в области новых магнитных материалов, ИЛ, М., 1949. Donencali, Phys. Rev. 78, 458 (1950); Blewett, Plotkin and Blewett, The properties of ferromagnetic ferrites (Brookhaven National Laboratory).
2. F. F. Roberts, J. phys. et radium 12, 305 (1952).
3. Исследованием физических причин гиромагнитных эффектов в ферритах занимались, наряду с другими авторами: D. Polder, Phil. Mag. 40, 99 (1949); C. L. Hogan, Bell System Techn. J. 31, 1 (1952); C. Kittel, Phys. Rev. 73, 155 (1948); C. Kittel, J. phys. et radium 12, 291 (1951).
4. Некоторые соображения для случая неоднородного намагничивания см. в работе H. Suhl и L. R. Walkes, Bell System Tech. J. 33, 1133 (1954).
5. H. Papas, Office of Naval Research Report № 4, California Institute of Technology, May (1954). До Папаса значительное фарадеево вращение в плазме газового разряда наблюдали Goldstein, Lampert and Heney, Phys. Rev. 82, 956 (1951); см. также H. Suhl, R. Walker, Bell System Techn. J. 33, 579 (1954). В более ранних работах: Appleton, Proc. U.R.S.I., Washington (1927) и D. R. Hartree, Proc. Cambridge Phil. Soc. 27, 143 (1931)—также исследовалось влияние земного магнитного поля на распространение радиоволн в ионосфере, но тензорная символика для E не использовалась.
6. В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, Гостехиздат, 1949.
7. B. D. H. Tellegen, Philips Research Repts. 3, 81 (1948).
8. M. L. Kales, N.B.L. Report № 4027, August, 8 (1952).
9. H. J. Gamo, Phys. Soc. Japan 8, 176 (1953).
10. A. A. Th. M. Van-Trier, Appl. Sci. Research B3, 305 (1953).
11. H. Suhl and R. L. Walker, Phys. Rev. 86, 1922 (1952); Bell System Techn. J. 33, 987 (1954).
12. М. А. Гинцбург, ДАН СССР 95, 489; 95, 753 (1954).
13. Современный обзор экспериментальных возможностей ферритовых устройств см. Миллер и Вейс, Свойства ферритов и их применение в диапазоне сверхвысоких частот. Bell System Techn. J. 34, 5 (1955).
14. H. Weber, Math. Ann. 1, 1(1869); см. также P. S. Epstein, Enzyklop. der Math. Wiss. 24, 505 (1915).
15. Коэффициенты отражения для плоских волн вычислены в работе М. А. Гинцбурга[12]. Там же рассмотрена более общая задача — отражение плоской волны при нормальном падении на плоско-параллельную гиротропную пластинку (при продольном и поперечном намагничивании).
16. Lax, Button and Roth, J. Appl. Phys. 25, 1413 (1954).
17. P. S. Epstein and A. D. Berk J. Appl. Phys. 27, 1328 (1956).
18. Найдя выражение для k, можно определить экспериментальным путем компоненты тензора магнитной проницаемости ферритов. Сравни: A. A. Th. M. Van-Trier, Appl. Sci. Research B3, 142 (1953).