

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В РАДИОДИАПАЗОНЕ

В. М. Файн

ВВЕДЕНИЕ

Диапазон частот, в котором применяются радиофизические методы исследования, простирается от очень длинных волн порядка километров до весьма коротких волн порядка миллиметров. В последнее время наблюдается тенденция к проникновению радиофизических методов исследования в область еще более коротких волн, непосредственно примыкающую к инфракрасному участку спектра (см., например, ¹⁻⁶). В связи с этим увеличивается число задач в области радиофизики, которые необходимо решать методами квантовой теории.

Применение методов квантовой теории необходимо, во-первых, при рассмотрении взаимодействия электромагнитных волн с атомами, молекулами и ядрами, во-вторых, в ряде вопросов, возникающих при рассмотрении взаимодействия электромагнитных волн достаточно большой частоты со свободными электронами и, в-третьих, при рассмотрении шумов в контуре при несоблюдении условия классичности $\hbar\omega \ll kT$, где ω — собственная частота контура, T — его температура, $\hbar$ — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана.

Квантовые шумы в резонаторах были достаточно подробно рассмотрены в работе В. Л. Гинзбурга⁷. Однако уже после этой работы было опубликовано много статей, посвященных квантовым шумам⁸⁻¹⁷. В этих работах значительное место уделяется вопросу об измерении квантовых шумов в резонаторах с помощью свободных электронов. С другой стороны, по существу тот же круг явлений разбирается в ряде работ¹⁸⁻²⁸ по квантовым эффектам, имеющим место при взаимодействии свободных электронов с высокочастотными полями. Первая глава посвящена подробному анализу этого вопроса. Вопросы взаимодействия электромагнитных волн радиодиапазона с атомами, молекулами и ядрами (в газах, жидкостях и твердых телах) составляют содержание целой области радиофизики — радиоспектроскопии. Ряд новых теоретических вопросов, относящихся к этой области, рассмотрен во второй главе.

1. КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ
(квантовые эффекты, имеющие место при взаимодействии электронов с высокочастотными полями в резонаторах)

§ 1. Полуклассическое рассмотрение
(с учетом квантовых шумов в резонаторах) *)

В последнее время появился ряд работ, в которых обсуждается вопрос о квантовых эффектах, имеющих место при взаимодействии электронов с высокочастотными полями в полых резонаторах^{10-15, 18-27}. При

*) В настоящем параграфе мы в основном следуем работе²⁸.

этом в первую очередь вычисляется дисперсия кинетической энергии или скорости электронов, возникающая при их прохождении через резонатор. В некоторых из указанных работ содержатся неверные выводы (это относится особенно к работе¹⁸, см.²³ и ниже), кроме того, результаты одних работ противоречат другим. В то же время задача о прохождении электронов через резонаторы является в электронике одной из важнейших и вместе с тем все больший интерес приобретает область таких высоких частот или низких температур, когда нарушается условие классичности $\hbar\omega \ll kT$. Поэтому имеет смысл подробно обсудить квантовые эффекты при взаимодействии свободных электронов с высокочастотными полями.

Рассмотрим раньше всего классически следующую задачу: нерелятивистский электрон с энергией $K_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ входит в резонатор в момент $t=0$ и выходит из него в момент $t=\tau$ с энергией $K_\tau = \frac{mv_\tau^2}{2}$. При этом для простоты будем считать электрическое поле E в резонаторе на пути электрона однородным и направленным вдоль скорости электрона — по оси x (такой случай отвечает резонатору определенной формы и вполне реален). Если

$$E = E_1 \cos \omega t + (E_2 + E_0) \sin \omega t,$$

то получаем

$$m\ddot{x} = eE,$$

$$v_\tau = \dot{x}(\tau) = v_0 + \frac{e}{m\omega} [E_1 \sin \omega\tau + (E_2 + E_0)(1 - \cos \omega\tau)]. \quad (1,1)$$

Пусть теперь E_1 и E_2 являются случайными величинами, так что

$$\overline{E_1} = \overline{E_2} = 0 \text{ и } \overline{E_1^2} = \overline{E_2^2} = \frac{\overline{V^2}}{d^2},$$

d — проходимый электроном путь (толщина резонатора), $\overline{V^2}$ — средний квадрат флуктуационного напряжения и усреднение, как всегда в таких случаях, проводится по соответствующему ансамблю идентичных систем. Легко видеть, что с точностью до членов порядка e^2 получаем

$$\overline{K_0} = K_0 = \frac{mv_0^2}{2} *),$$

$$\overline{K_\tau} - \overline{K_0} = \frac{e^2}{2m\omega^2} \left\{ \frac{4\overline{V^2}}{d^2} \sin^2 \frac{\omega\tau}{2} + E_0^2 (1 - \cos \omega\tau) \right\} + 2 \frac{ev_0}{\omega} E_0 \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}, \quad (1,2)$$

$$(\overline{\Delta K_\tau})^2 \equiv \overline{K_\tau^2} - (\overline{K_\tau})^2 = \overline{(K_\tau - K_0)^2} - [\overline{(K_\tau - K_0)}]^2 = \frac{4e^2v_0^2}{\omega^2} \frac{\overline{V^2}}{d^2} \sin^2 \frac{1}{2} \omega\tau. \quad (1,3)$$

Опущенный в (1,3) член имеет порядок величины e^4 и незначителен, если скорость электрона при прохождении резонатора достаточно мало меняется. Это последнее условие, отвечающее обычно действительности, будем считать выполненным (это предполагается и в других работах на ту же тему). В этом случае время пролета электрона через резонатор можно положить равным $\tau = \frac{d}{v_0}$, и выражение (1,3) прини-

*) Очевидно при этом нужно предположить, что случайные величины E_1 и E_2 слабо зависят от времени по сравнению с $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$.

мает вид

$$\overline{(\Delta K_\tau)^2} = e^2 V^2 \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \omega \tau}{\frac{1}{2} \omega \tau} \right)^2. \quad (1,4)$$

В рассматриваемом случае, когда

$$\overline{(\Delta v)^2} \equiv \bar{v}^2 - \langle v \rangle^2 \ll v_0^2,$$

имеет место соотношение

$$\overline{(\Delta v_\tau)^2} = \overline{(\Delta K_\tau)^2} m^{-2} v_0^{-2}.$$

Множитель $\left(\frac{\sin \frac{1}{2} \omega \tau}{\frac{1}{2} \omega \tau} \right)^2$ в (1,4) обусловлен изменением поля во время пролета электронов через резонатор. Если в резонаторе имеются колебания разных частот, то вместо (1,4) имеем

$$\overline{(\Delta K_\tau)^2} = e^2 \int_0^\infty |V_\omega|^2 \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \omega \tau}{\frac{1}{2} \omega \tau} \right)^2 d\omega. \quad (1,5)$$

При этом средний квадрат напряжения на резонаторе (конденсаторе) равен

$$\bar{V}^2 = \int_0^\infty |V_\omega|^2 d\omega.$$

При учете лишь одного нормального колебания резонатор эквивалентен контуру из (скажем для простоты) последовательно соединенных сопротивления R , самоиндукции L и емкости C , так что импеданс Z контура при включении в цепь э. д. с. $\mathcal{E}$ равен

$$Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

В этом контуре, если иметь в виду состояние теплового равновесия, спектральная плотность флуктуационной э. д. с. согласно квантовой теореме Найквиста ^{7,29} равна

$$|\mathcal{E}_\omega|^2 = \frac{2}{\pi} R(\omega) \left\{ \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / kT} - 1} \right\}, \quad (1,6)$$

плотность квадрата силы тока

$$|I_\omega|^2 = \frac{|\mathcal{E}_\omega|^2}{|Z_{(\omega)}|^2},$$

плотность квадрата напряжения на конденсаторе

$$|V_\omega|^2 = \frac{|I_\omega|^2}{C^2 \omega^2 |Z_{(\omega)}|^2} = \frac{|\mathcal{E}_\omega|^2}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)}. \quad (1,7)$$

Комбинируя (1,5), (1,6) и (1,7), получаем:

$$\overline{(\Delta K_\tau)^2} = e^2 \int_0^\infty \frac{2}{\pi} R(\omega) \left(\frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / kT} - 1} \right) \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \omega \tau}{\frac{1}{2} \omega \tau} \right)^2 \frac{d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)}. \quad (1,8)$$

Для слабозатухающего резонатора с частотой $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, как легко показать (см., например, ⁷),

$$(\overline{\Delta K_{\tau}})^2 = \frac{e^2}{C(\omega_0)} \left(\frac{\hbar \omega_0}{2} + \frac{\hbar \omega_0}{e^{\hbar \omega_0 / kT} - 1} \right) \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \omega_0 \tau}{\frac{1}{2} \omega_0 \tau} \right)^2 \quad (1,9)$$

Интегрирование в (1,8) до ∞ носит условный характер, но в силу хорошей сходимости интеграла это, вообще говоря, не существенно ²⁸.

§ 2. Эффекты, связанные с квантованием электромагнитного поля

Следует подчеркнуть, что проведенный в § 1 классический расчет в сочетании с использованием формулы Найквиста достаточен только для вычисления $(\overline{\Delta K_{\tau}})^2$. Для получения же, например, функции распределения энергий электрона по выходе из резонатора нельзя, вообще говоря, ограничиться классическим рассмотрением. Поэтому представляет интерес провести последовательный квантовый расчет.

В квантовой теории имеет смысл рассмотреть следующую задачу. Имеется волновой пакет, представляющий электрон. В начальный момент волновой пакет находится вне полости резонатора. Затем волновой пакет с некоторой средней скоростью проходит через полость с излучением. Квантовая теория может дать ответы на следующие вопросы:

1. Как изменится средняя энергия поля и электрона в результате взаимодействия электрона с полем излучения?

2. Чему равны дисперсии энергий поля и электрона в любой момент времени?

3. Какова вероятность изменения энергии поля на величину $n\hbar\omega$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), если в начальный момент времени энергия поля имеет определенное значение, равное $(N + \frac{1}{2})\hbar\omega$?

В основном ответы на эти вопросы содержатся в работах Сеницкого ²³⁻²⁵. Однако в работах ^{24,25} утверждается, что основная часть дисперсии скорости электрона связана с волновым характером движения электрона. Между тем легко видеть, что учет волновых свойств электрона не должен быть существенным. В самом деле, длина волны электрона с энергией $K \gtrsim 10$ эв составляет $\lesssim 10^{-8}$ см. Волновые пакеты (сгустки) электронов, которые можно получить на практике, всегда несравненно шире указанной длины волны, в силу чего классическое рассмотрение движения электрона казалось бы вполне достаточно. Кроме того, в принципиальном отношении более важно то, что рассматриваемое движение электронов в первом приближении является свободным (равномерным и прямолинейным), когда распыливание соответствующих волновых пакетов отвечает распыливанию «роя» классических частиц*). В работах ^{24,25}, тем не менее, движение электронов в резонаторе исследуется квантовым методом и утверждается, что получаются неклассические эффекты. Как будет показано ниже в § 3 (см. также ²⁸), с этим утвер-

*) Это утверждение верно только в отношении дисперсии координаты и дисперсии скорости. Высшие моменты, вообще говоря, не совпадают с классическими.

ждением согласиться нельзя, и в использованном приближении квантовые эффекты по существу отсутствуют.

Мы сейчас кратко рассмотрим эффекты, связанные с квантованием электромагнитного поля, причем электрон мы будем описывать классическим образом.

Система электрон + поле описывается гамильтонианом (см., например, ³⁹⁾)

$$H = \frac{\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2}{2m} + H_{tr}, \quad (1,10)$$

$$H_{tr} = \frac{1}{2} \sum_i (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2), \quad p_i = \frac{dq_i}{dt} \equiv \dot{q}_i,$$

где

$$\mathbf{A} = \sum_i q_i \mathbf{A}_i(r); \quad \text{div } \mathbf{A} = 0; \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad (1,11)$$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}; \quad \Delta \mathbf{A}_i + \frac{\omega_i^2}{c^2} \mathbf{A}_i = 0; \quad \text{div } \mathbf{A}_i = 0; \quad \int \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j dv = 4\pi c^2 \delta_{ij}$$

и $\mathbf{P}$ — обобщенный импульс электрона. Из (1,10) с помощью канонических уравнений движения $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ получаем:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{e}{mc} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}, \mathbf{A}_i[r(t)] \right). \quad (1,12)$$

Если пренебречь действием магнитного поля, то канонические уравнения для P_x и x приводят к уравнению движения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{e}{m} E = -\frac{e}{mc} \sum_i p_i A_i(x(t)). \quad (1,13)$$

Уравнения (1,10) — (1,13) справедливы как в классической, так и в квантовой теориях. Квантование поля сводится к тому, что q_i и p_i в уравнениях (1,10) — (1,13) считаются операторами, удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$[q_i, p_j] \equiv q_i p_j - p_j q_i = i\hbar \delta_{ij}. \quad (1,14)$$

Пусть средняя начальная скорость электрона $v_0 \gg \Delta v$, где Δv — приращение скорости электрона под действием поля. Тогда с точностью до членов порядка первой степени заряда e имеем:

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{ev_0}{c} A_i p_i, \quad (1,15)$$

где $K = \frac{mv^2}{2}$ и для простоты предполагается, что возбуждено только i -е собственное колебание поля*). Операторное уравнение (1,15) можно проинтегрировать.

Очевидно, что интеграл от некоторого оператора есть новый оператор, удовлетворяющий соотношению

$$\left\langle \int \hat{F} dt \right\rangle = \int \langle \hat{F} \rangle dt. \quad (1,16)$$

*) Можно показать, что учет колебаний поля, отличных от собственных, несуществен (см., например, ⁷⁶⁾).

Здесь скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по соответствующему квантовому ансамблю (в отличие от черты, означающей усреднение по соответствующему классическому ансамблю).

Проинтегрировав уравнение (1,15), получаем:

$$K = K_0 - \frac{ev_0}{c} \int_0^t A_i p_i dt. \quad (1,17)$$

В принятом приближении (с точностью до членов порядка e) в (1,17) нужно подставить p_i , соответствующее свободному (без электронов) полю

$$p_i = p_i(0) \cos \omega_i t - \omega_i q_i(0) \sin \omega_i t; \quad (1,18)$$

этот оператор удовлетворяет уравнению (1,12) без правой части. Необходимо еще задать волновую функцию поля в начальный момент $\psi(0)$. Тогда, используя (1,16), получаем (в принятом приближении), что среднее значение энергии электрона равно

$$\langle K_\tau \rangle = \langle K_0 \rangle - \frac{ev_0}{c} \int_0^\tau A_i \langle p_i(t) \rangle dt, \quad (1,19)$$

где

$$\langle p_i(t) \rangle = \int \psi^*(0) p_i(t) \psi(0) dq_i.$$

Дисперсия кинетической энергии электрона равна

$$\langle (\Delta K_\tau)^2 \rangle = \langle K_\tau^2 \rangle - \langle K_\tau \rangle^2 = \frac{e^2 v_0^2}{c^2} A_i^2 \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2 - [\langle p_i(t_1) p_i(t_2) \rangle - \langle p_i(t_1) \rangle \langle p_i(t_2) \rangle]. \quad (1,20)$$

Здесь принята во внимание однородность поля, когда

$$A_i = \frac{\sqrt{4\pi c}}{\sqrt{V}}, \quad (1,21)$$

где V — объем резонатора.

Рассмотрим два случая:

1. В начальный момент энергия поля в резонаторе имеет определенное значение, равное $\left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_i$. Тогда

$$\psi(0) = \Phi_N(q_i), \quad (1,22)$$

где $\Phi_N(q_i)$ — эрмитовский полином N -го порядка (нормированный соответствующим образом). Производя с помощью этой функции усреднение в формулах (1,19), (1,20) и учитывая, что $p_i(0) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i(0)}$, получаем

$$\langle K_\tau \rangle = \langle K_0 \rangle^*, \quad (1,23)$$

$$\langle (\Delta K_\tau)^2 \rangle = \frac{e^2}{c(\omega_i)} \left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_i \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \omega_i \tau}{\frac{1}{2} \omega_i \tau} \right)^2, \quad (1,24)$$

*) Мы вычисляли кинетическую энергию с точностью до членов порядка e . Однако при квантовом усреднении в (1,19) как раз член порядка e исчезает. Чтобы не усложнять изложения, мы не стали проводить вычисление членов порядка e^2 в кинетической энергии. Таким образом, формула (1,23) верна только с точностью

где C — емкость плоского конденсатора. Выражение (1,24) можно записать в виде

$$\langle (\Delta K_\tau)^2 \rangle = \frac{e^2}{C(\omega_i)} H_{tr}(0) \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \omega_i \tau}{\frac{1}{2} \omega_i \tau} \right)^2, \quad (1,25)$$

где $H_{tr}(0)$ — энергия поля в начальный момент времени. В таком виде эта формула совпадает с формулой (1,4), так как $H_{tr}(0) = CV^2$. Чисто квантовым здесь является учет нулевых колебаний. При $N=0$

$$\langle (\Delta K_\tau)^2 \rangle = \frac{e^2}{C(\omega_i)} \frac{\hbar \omega_i}{2} \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \omega_i \tau}{\frac{1}{2} \omega_i \tau} \right)^2. \quad (1,26)$$

2. Другое возможное начальное состояние соответствует минимально возможным флуктуациям поля ^{24, 30}.

$$\Psi(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi \hbar \omega_i}} \exp \left[-\frac{1}{\hbar \omega_i} \left(\frac{1}{2} p_i^2 - i \frac{E_0 \sqrt{V}}{\sqrt{4\pi}} p_i \right) \right] \quad (1,27)$$

(E_0 — амплитуда соответствующего классического поля). Усредняя с помощью этой функции выражение (1,18) (при этом надо учесть, что $q_i(0) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i(0)}$), получаем:

$$\langle p_i \rangle = -E_0 \sqrt{\frac{V}{4\pi}} \sin \omega_i t. \quad (1,28)$$

Отсюда, используя (1,24), находим среднее электрическое поле

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{c} \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle = -\frac{1}{c} A_i \langle p_i \rangle = E_0 \sin \omega_i t. \quad (1,29)$$

Усредняя далее выражение (1,19), имеем:

$$\langle K_\tau \rangle = \langle K_0 \rangle + \frac{2e v_0}{\omega_i} E_0 \sin^2 \frac{\omega_i \tau}{2}. \quad (1,30)$$

С точностью до членов порядка e эта формула совпадает с формулой (1,2), т. е. среднее квантовое совпадает со средним классическим. Усредняя (1,20), находим:

$$\langle (\Delta K_\tau)^2 \rangle = \frac{e^2}{C(\omega_i)} \frac{\hbar \omega_i}{2} \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \omega_i \tau}{\frac{1}{2} \omega_i \tau} \right)^2,$$

что в точности совпадает с (1,26), т. е. в этом случае дисперсия скорости электрона обязана только нулевым флуктуациям поля.

до членов порядка e . Если не учитывать этого обстоятельства, можно прийти к следующему парадоксу. Пусть N (число фотонов в полости) равно нулю. Тогда электрон, пролетающий через полость, может или увеличить число фотонов в полости, или оставить его равным нулю. Уменьшиться число фотонов в полости не может. Следовательно, средняя энергия полости должна увеличиться, а средняя энергия электрона $\langle K_\tau \rangle$ должна уменьшиться, так как $\langle K \rangle + \langle H_{tr} \rangle = \text{const}$. В то же время согласно формуле (1,23) энергия электрона не изменяется.

Подчеркнем также то обстоятельство, что учет в (1,19) членов порядка e^2 скажется в формуле (1,24) для дисперсии энергии электрона на членах порядка, высшего чем e^2 . В этом нетрудно убедиться непосредственным подсчетом.

Интересно отметить, что если в первом из рассматриваемых случаев в начальный момент дисперсия энергии поля $H_{tr}(0)$ равнялась нулю (энергия имела определенное значение $(N + \frac{1}{2})\hbar\omega_i$), то поле, описываемое волновой функцией (1,27), имеет довольно значительную дисперсию, равную

$$V\langle(\Delta H_{tr}(0))^2\rangle = V\hbar\omega V\langle H_{tr}(0)\rangle. \quad (1,31)$$

В самом деле, если поле находится в состоянии, описываемом волновой функцией (1,27), то вероятность обнаружения в полости энергии $(N + \frac{1}{2})\hbar\omega_i$ определяется формулой ^{24, 30}

$$|A_N|^2 = \xi^N e^{-\xi} (N!)^{-1}, \quad (1,32)$$

т. е. пуассоновским распределением со средним N , равным

$$\langle N \rangle = \xi = \frac{E_0^2 V}{8\pi\hbar\omega_i}. \quad (1,33)$$

Как известно, дисперсия числа частиц в этом случае равна

$$V\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = V\langle N \rangle. \quad (1,34)$$

Отсюда следует формула (1,31).

Проведенный в настоящем параграфе квантовый вывод формулы дисперсии энергии электрона подтверждает справедливость полуклассического вывода, приведенного в § 1. Формула (1,24), усредненная по ансамблю осцилляторов, находящихся в термостате температуры T , совпадает с формулой (1,9). Однако полуклассический вывод, во-первых, более прозрачен, чем квантовый, и, во-вторых, формулы (1,5), (1,6) справедливы при любом затухании, что относится поэтому и к (1,8); при использовании же теории возмущений, которой мы неявно пользовались в настоящем параграфе, затухание приходится считать малым.

Сравним полученную формулу для квантовой дисперсии энергии электрона с имеющимися в литературе. Выражение (1,9) совпадает с формулами (15) из ¹² и (23) из ¹³. Что же касается выражения (1,8), то оно отличается по форме от соответствующих формул в ¹³ только потому, что в ¹³ в качестве эквивалентного контура выбран контур с параллельно соединенными R , L и C . Произвести соответствующие пересчеты не составляет труда. В ²⁴ в формуле (31) для $\langle(\Delta v_\tau)^2\rangle = \langle(\Delta K_\tau)^2\rangle m^{-2}v_0^{-2}$ член, связанный с квантованием поля, без труда при-

водится к виду $\frac{e^2}{m^2 v_0^2 C} \frac{\hbar\omega_i}{2} \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \omega_i \tau}{\frac{1}{2} \omega_i \tau} \right)^2$, отвечающему формуле (1,26). Что

касается других членов в формуле (31) из ²⁴, то они связаны с представлением электрона в виде волнового пакета (см. § 3). В работах же ^{18, 19, 21, 26, 27} используется другое выражение для дисперсии скорости электрона

$$\langle(\Delta K_\tau)^2\rangle = (\hbar\omega)^2 (N_+ + N_-), \quad (1,35)$$

где $N_+\hbar\omega = W_+$ и $N_-\hbar\omega = W_-$ — полные классические энергии, полученные и отданные электроном в течение соответственно ускорения и торможения электрона, так что полное изменение энергии электрона за время τ равно

$$\overline{K}_\tau - \overline{K}_0 = W_+ - W_-.$$

При этом N_+ и N_- интерпретируются как средние числа поглощенных и излученных фотонов. Очевидно, что формула (1,35) не совпадает с формулами, приведенными выше. Так, например, в любой момент времени после начала взаимодействия правая часть (1,35) не может

обратиться в нуль, в то время как $\left(\frac{\sin \frac{1}{2} \omega_i \tau}{\frac{1}{2} \omega_i \tau} \right)^2$ в (1,26) равно нулю

при $\omega_i \tau = k\pi$. Это сопоставление показывает, что формула (1,35) неверна, а соображения, приводящие к ней*), не являются строгими (см. также ²³).

Рассмотрим кратко вопрос о вероятности изменения энергии поля на величину $n\hbar\omega$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) ^{12, 13, 23}. Ограничиваясь рассмотрением одного собственного колебания поля в полости резонатора, гамильтониан (1,10) можно с точностью до членов порядка ϵ переписать в виде

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{e}{mc} AP + \frac{1}{2} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2), \quad (1,10a)$$

где

$$A = A_i q_i.$$

Член

$$H' = - \frac{e}{mc} AP \quad (1,36)$$

рассматривается как малое возмущение.

Предполагается, что до начала взаимодействия контур находится в состоянии, описываемом невозмущенным гамильтонианом, и энергия поля равна $\left(N + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_i$. Возмущенные волновые функции системы ищем в виде

$$\Psi = \sum_{s,j} a_s \phi_s b_j \varphi_j \exp \left[- \frac{i}{\hbar} (E_s + E_j) t \right], \quad (1,37)$$

где ϕ_s — невозмущенная волновая функция осциллятора, φ_j — невозмущенная волновая функция электрона. В момент начала взаимодействия

$$a_n = 1, \quad b_m = 1, \quad a_s = 0 \quad (s \neq n), \quad b_j = 0 \quad (j \neq m).$$

Тогда можно показать, что в любой момент времени t после начала взаимодействия

$$|a_k(t) b_l(t)|^2 = 4 |H'_{kl; nm}|^2 \frac{\sin^2 \left\{ \frac{E_k + E_l - E_n - E_m}{2\hbar} t \right\}}{(E_k + E_l - E_n - E_m)^2}, \quad (1,38)$$

где

$$H'_{kl; nm} = - \frac{e}{mc} \int \phi_k^* \varphi_l^* (AP) \phi_n \varphi_m d\tau_\psi d\tau_\varphi \approx - A_i P_{Av} \delta_{lm} q_{kn} \frac{e}{mc}.$$

Здесь q_{kn} — матричный элемент перехода между состояниями осциллятора с энергиями E_k и E_n соответственно, P_{Av} — средний импульс электрона. Используя уравнение (1,38) и начальное условие $b_m(0) = 1$, получаем:

$$|a_k(t)|^2 = \frac{4e^2 A_i^2 P_{Av}^2 q_{kn}^2}{m^2 c^2 \hbar^2 \omega_i^2} \sin^2 \frac{1}{2} \omega_i t, \quad (1,39)$$

*) Представляет, быть может, некоторый интерес привести эти соображения ^{26, 27}. Предполагается, что элементарные акты излучения электроном квантов энергии $\hbar\omega$ статистически независимы. Тогда дисперсия $(\Delta(N_+ - N_-))^2 \approx N_+ + N_-$, откуда следует (1,35).

где $\omega_i = \frac{E_k - E_n}{\hbar}$ — собственная частота осциллятора и (1,39) дает вероятность изменения энергии поля на $\hbar\omega_i$ в момент времени t .

Предположим, что полость достаточно мала и имеет длину d . Время взаимодействия дается приближенной формулой

$$\tau = \frac{md}{|P_{Av}|}.$$

Окончательно получаем следующие выражения для вероятности изменения энергии поля $\pm \hbar\omega_i$:

$$\left. \begin{aligned} |a_k(\tau)|^2 &= \frac{e^2}{\hbar\omega_i C} \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \omega_i \tau}{\frac{1}{2} \omega_i \tau} \right)^2 \frac{N+1}{2} \quad \text{для } k = N+1, \\ |a_k(\tau)|^2 &= \frac{e^2}{\hbar\omega_i C} \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \omega_i \tau}{\frac{1}{2} \omega_i \tau} \right)^2 \frac{N}{2} \quad \text{для } k = N-1. \end{aligned} \right\} \quad (1,40)$$

В работе ²³ получены соответствующие формулы без использования теории возмущений, справедливые при условии $N \gg 1$.

§ 3. Эффекты, связанные с квантовым характером движения электрона*)

Как уже указывалось в § 2, учет квантовых свойств электронов не должен в обсуждаемых случаях оказаться существенным. Поскольку, однако, в ^{24, 25} делается противоположное утверждение, покажем, что результаты ^{24, 25} могут быть получены чисто классически. Для этой цели примем, также как в ^{24, 25}, что начальное положение электрона задается распределением

$$R(\mathbf{r}_0, t=0) d\mathbf{r}_0 = \frac{1}{\pi^{3/2} b^3} e^{-r_0^2/b^2} d\mathbf{r}_0. \quad (1,41)$$

Возможные начальные скорости электрона представим в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ — случайная величина, распределение вероятностей для которой имеет вид

$$Q(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = \frac{b^3}{f^3 \pi^{3/2}} e^{-\frac{b^2 p^2}{f^2}} d\mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{w}, \quad (1,42)$$

где b и f — некоторые постоянные (в ^{24, 25} постоянная f обозначена через $\hbar$). Для нахождения величины $\mathbf{v}(t)$ нужно проинтегрировать уравнение (1,13), в результате чего имеем

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 - \frac{e}{mc} \int_0^t \sum_i p_i(t_1) \mathbf{A}_i(t_1) dt_1, \quad (1,43)$$

где

$$\mathbf{A}_i(t_1) = \mathbf{A}_i(\mathbf{r}(t_1)).$$

Поскольку взаимодействие электрона с полем считается малым (см. ^{24, 25}), положим $\mathbf{A}_i(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{A}_i(\mathbf{r}_0 + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{w})t)$. Далее, учитывая малость $\mathbf{r}_0 + \mathbf{w}t$ по сравнению с $\mathbf{v}_0 t$ (начальные распределения предполагаются достаточно

*) В этом параграфе мы в основном следуем работе ²⁸.

острыми), имеем:

$$\overline{A_i(t)} \approx \{[1 + \delta^2(t) \Delta] A_i(r)\}_{r=v_0 t} = \left\{ \left[1 - \frac{\omega_i^2}{c^2} \delta^2(t) \right] A_i(r) \right\}_{r=v_0 t}, \quad (1,44)$$

$$\delta^2(t) = \frac{b^2}{4} + \left(\frac{ft}{2mb} \right)^2,$$

где учтено, что в силу (1,11), что $\Delta A_i = -\frac{\omega_i^2}{c^2} A_i$ и черта означает, как и в дальнейшем, усреднение по обоим распределениям (1,41) и (1,42).

Если в резонаторе возбуждено только одно колебание типа s , то

$$p_i(t) = -\delta_{is} c E_0 \sin \omega_i t^*,$$

поскольку $p_i(t)$ считается здесь классической величиной. Учитывая (1,44) и сказанное, из (1,43), получаем:

$$\overline{v(t)} = v_0 + \frac{e}{m} E_0 \int_0^t A_s(v_0 t_1) \sin \omega_s t_1 dt_1 -$$

$$- \frac{e}{m} E_0 \frac{\omega_s^2}{c^2} \int_0^t \delta^2(t_1) A_s(v_0 t_1) \sin \omega_s t_1 dt_1. \quad (1,45)$$

Это выражение в точности совпадает с соответствующей формулой (21) из ²⁴, где величина A_s обозначена через u_s , а второй член в (1,45) называется квантово-механической поправкой 1-го порядка.

Найдем теперь дисперсию в момент времени t . Положим

$$v_x(t) = v_x(0) + \Delta v_x, \quad (1,46)$$

где **)

$$\Delta v_x = -\frac{e}{mc} \int_0^t A_s(t_1) p_s(t_1) dt_1.$$

Отсюда

$$[\overline{\Delta v_x(t)}]^2 = \overline{[v_x(t) - v_x(0)]^2} = \overline{[v_x^2(0) - (v_x(0))^2]} +$$

$$+ \overline{[(\Delta v_x)^2 - (\overline{\Delta v_x})^2]} + 2 \overline{[v_x(0) \Delta v_x - (v_x(0)) (\overline{\Delta v_x})]}. \quad (1,47)$$

Из уравнения (1,42) находим:

$$\overline{v_x^2(0) - (v_x(0))^2} = \frac{f^2}{2m^2 b^2}. \quad (1,48)$$

Вычислим теперь вторую квадратную скобку:

$$\overline{(\Delta v_x)^2} = \frac{e^2}{m^2 c^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \overline{A_s(t_1) A_s(t_2)} p_s(t_1) p_s(t_2).$$

Аналогично (1,44) находим:

$$\overline{A_s(t_1) A_s(t_2)} = \left[1 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 (\nabla_1 + \nabla_2)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{f}{2mb} \right)^2 (t_1 \nabla_1 + t_2 \nabla_2)^2 \right] A_s(r_1) A_s(r_2) \Big|_{r_1=v_0 t_1; r_2=v_0 t_2}.$$

*) В настоящем параграфе A_i нормировано на единицу.

**) Далее будем всюду писать A_s вместо A_{sx} .

Отсюда

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta v_x)^2} - (\Delta v_x)^2 = \\ = \frac{e^2}{m^2 c^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \left\{ 2E_0^2 \sin \omega_s t_1 \sin \omega_s t_2 \left[t_1 t_2 \left(\frac{f}{2mb} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right] \nabla_1 \nabla_2 A_s(\mathbf{r}_1) A_s(\mathbf{r}_2) \right\}_{\mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_0 t_1; \mathbf{r}_2 = \mathbf{v}_0 t_2} \end{aligned}$$

После упрощений получаем:

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta v_x)^2} - (\Delta v_x)^2 = \\ = 2E_0^2 \frac{e^2}{m^2} \left\{ \left[\frac{b}{2v_0} \int_{x_1}^{x_2} dx \sin \left(\frac{\omega_s}{v_0} x \right) \nabla A_s(\mathbf{r}) \right]_{y=z=0}^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{f}{2mv_0^2 b} \int_{x_1}^{x_2} dx \left(x \sin \frac{\omega_s}{v_0} x \right) \nabla A_s(\mathbf{r}) \right]_{y=z=0}^2 \right\}, \quad (1,49) \end{aligned}$$

где точки x_1 и x_2 ограничивают часть оси x , лежащую внутри полости. Таким же образом, можно получить:

$$\left. \begin{aligned} \overline{v_x(0) \Delta v_x} = v_0 \overline{\Delta v_x} + \frac{1}{2} \frac{f^2}{m^2 b^2} \frac{e}{m} \int_0^t dt_1 p_s(t_1) t_1 \frac{\partial}{\partial x} A_s(x, 0, 0) \\ \text{и} \\ \overline{v_x(0) \cdot \Delta v_x} = v_0 \overline{\Delta v_x}. \end{aligned} \right\} \quad (1,50)$$

Собирая выражения (1,47), (1,48), (1,49) и (1,50), получаем искомое выражение для дисперсии скорости:

$$\begin{aligned} \overline{(v_x^2(t))} - (\overline{v_x(t)})^2 = \frac{f^2}{2m^2 b^2} \left\{ 1 - \frac{2E_0 e}{mv_0^2} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial A_s(x, 0, 0)}{\partial x} \left(x \sin \frac{\omega_s}{v_0} x \right) + \right. \\ \left. + \frac{E_0^2 e^2}{m^2 v_0^2} \left[\int_{x_1}^{x_2} dx \left(x \sin \frac{\omega_s}{v_0} x \right) \nabla A_s(\mathbf{r}) \right]_{y=z=0}^2 \right\} + \frac{E_0^2 e^2 b^2}{2m^2 v_0^2} \times \\ \times \left[\int_{x_1}^{x_2} dx \left(\sin \frac{\omega_s}{v_0} x \right) \nabla A_s(\mathbf{r}) \right]_{y=z=0}^2. \quad (1,51) \end{aligned}$$

Это выражение в точности совпадает с выражением (30) из ²⁴, за исключением последнего члена, связанного с флуктуациями поля и полученного в §§ 1 и 2.

В работе ²⁵ вычисляется дисперсия поля, которая содержит члены, связанные с неопределенностью (размазанностью) начального положения и скорости электрона. Эти члены также получаются классически. Таким образом, в использованном в ^{24, 25} приближении квантовыми методами решена классическая задача о влиянии начального разброса положения и скорости электрона на дисперсию скорости и поля при прохождении электронов через резонатор.

Соответствующий классический расчет, разумеется, несравненно проще и прозрачнее. Единственный же квантовый элемент во всех этих расчетах можно видеть в том, что, если положить в (1,42) $f = \hbar$, где $\hbar = h/2\pi$ — постоянная Планка, как это сделано в ^{24, 25} с самого начала, то распределения (1,41) — (1,42) отвечают волновому пакету с минимально воз-

возможным, в силу соотношения неопределенности, разбросом по импульсам при данной пространственной ширине. Это ограничение начальных распределений (1,41) — (1,42) не меняет вывода о классическом характере самого расчета дисперсии скорости. Оно не имеет вместе с тем особого практического значения, поскольку в реальных радиофизических условиях распределение по импульсам всегда будет гораздо шире минимального квантово-механического распределения, т. е. распределения (1,42) с $f = \hbar$.

Действительно, даже при $b = 10^{-3}$ см разброс скорости $\frac{\hbar}{mb} \sim 10^3$ см/сек,

в то время как тепловая скорость электрона $v \sim \sqrt{\frac{3kT}{2m}} \sim 4 \cdot 10^5 \sqrt{T} \sim 4 \cdot 10^5$ см/сек при $T \sim 1^\circ \text{K}$.

Таким образом, в радиодиапазоне электрон можно описывать классически и единственный квантовый эффект в задаче, разбираемой в настоящей статье, связан с влиянием квантования поля и, в частности, с наличием нулевых колебаний, как это отражено в формулах (1,8), (1,9), (1,26). Этот квантовый эффект, впрочем, весьма мал*). Так, если ограничиваться только нулевыми колебаниями слабозатухающего контура для случая, когда $\omega_0 \tau \ll 1$, получаем (см. (1,9)):

$$(\Delta K_\tau)^2 = m^2 v_0^2 (\Delta v)^2 = \frac{e^2 \hbar \omega_0}{c^2} \cdot \quad (1,52)$$

Отсюда при емкости $C \approx 1$ см, начальной скорости $v_0 \approx 10^3$ см/сек и частоте $\omega_0 \approx 2 \cdot 10^{12}$ эц ($\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0} \approx 1$ мм) имеем $\sqrt{(\Delta v)^2} \approx 2 \cdot 10^2$ см/сек, в то время как тепловая скорость $\sim 4 \cdot 10^5$ см/сек при $T \approx 1^\circ \text{K}$ (см. выше).

II. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАДИОСПЕКТРОСКОПИИ

§ 4. Особенности радиоспектроскопии

Радиоспектроскопия является одной из самых молодых областей физики. Однако уже имеется целый ряд посвященных ей обзоров и монографий (см., например, ³¹⁻³⁷). В настоящей главе мы коснемся главным образом некоторых вопросов, не нашедших освещения в литературе.

С теоретической точки зрения радиоспектроскопия имеет ряд особенностей, отличающих ее от оптической спектроскопии.

1) В радиодиапазоне разность энергетических уровней квантовой системы обычно удовлетворяет условию

$$|E_1 - E_2| \ll kT.$$

2) Длина испускаемой радиоволны может быть много больше расстояния между излучающими объектами.

3) В радиодиапазоне можно осуществить достаточно большие напряженности электромагнитного поля.

Первая особенность приводит к тому, что заселенности уровней E_1 и E_2 в состоянии термодинамического равновесия почти одинаковы, в силу чего весьма существенную роль приобретает индуцированное излучение ^{38, 31}. Если в оптической области частот коэффициент поглощения электромагнитной волны можно считать просто пропорциональным числу молекул n_1 , находящихся на нижнем из двух рассматриваемых энергетических состояний E_1 и E_2 , то в радиодиапазоне одновременный

*) Хотя дисперсия энергии поля может при этом быть не малой (см. формулу (1,31)).

учет и поглощения и индуцированного испускания, а также возможного отличия статистического веса от единицы, приводит к тому, что наблюдаемый на опыте коэффициент поглощения пропорционален³¹.

$$\frac{n_1}{g_1} - \frac{n_2}{g_2} = C e^{-\frac{E_1}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} \right) \approx \frac{n_1}{g_1} \frac{h\omega}{kT},$$

где g_1 и g_2 — соответственные статистические веса уровней E_1 и E_2 , n_1 и n_2 — заселенности этих уровней и $h\omega = E_2 - E_1$.

Вторая из указанных особенностей радиочастотного диапазона приводит к тому, что нельзя, вообще говоря, рассматривать спонтанное излучение молекул независимо друг от друга, а нужно исследовать излучение всей системы молекул в целом⁴⁰⁻⁴³ (см. также §§ 5, 6, 7). В этом случае оказывается, что интенсивность спонтанного излучения, вообще говоря, не пропорциональна числу молекул, а естественная ширина линии зависит от полного числа молекул газа.

Третья особенность приводит к явлению насыщения⁴⁴⁻⁵¹, которое заключается в том, что при достаточно больших полях поглощаемая системой мощность не зависит от интенсивности падающего излучения. Нетрудно оценить эту мощность. Если поле достаточно сильное, то в течение времени между двумя соударениями ($\sim \tau$) молекула успеет сделать много переходов между рассматриваемыми энергетическими уровнями E_1 и E_2 (частота поля $\omega \approx \frac{E_2 - E_1}{h}$). Таким образом, с равной вероятностью соударение застает молекулу в верхнем или нижнем из двух рассматриваемых состояний. Если в момент соударения молекула находилась в верхнем состоянии, то произошло поглощение кванта $h\omega$, если в нижнем, то поглощение не имело места. Следовательно, поглощаемая в этом случае мощность равна

$$P = \frac{1}{2\tau} n_{\text{акт}} h\omega,$$

где $\frac{1}{2\tau}$ — число соударений в единицу времени, при которых происходит поглощение, $n_{\text{акт}}$ — число активных молекул, равное разности чисел молекул между нижним и верхним уровнями.

Явление насыщения может быть использовано при теоретическом объяснении работы молекулярного генератора⁵²⁻⁵⁴.

При очень больших мощностях падающего излучения может возникнуть вторичное излучение, частота которого зависит от мощности облучения⁵⁵ (см. § 8).

В последующих параграфах мы разбираем ряд квантовых эффектов, связанных с перечисленными особенностями радиоспектроскопии.

§ 5. Когерентность при спонтанном излучении

Обычно спонтанное излучение подсчитывают, исходя из предположения, что все молекулы газа излучают независимо. В этом случае интенсивность излучения равна сумме интенсивностей излучения отдельных молекул, а ширина и форма линии излучения газа определяются свойствами изолированной молекулы.

Предположение о том, что все молекулы излучают независимо, может быть оправдано, если расстояние между отдельными молекулами много больше длины излучаемой волны. Такое положение имеет обычно место в оптическом диапазоне, хотя и здесь встречается обратная ситуация. В том же случае, когда много молекул находится на расстоянии

много меньшем длины излучаемой волны, такие молекулы излучают как единая квантово-механическая система. Дело в том, что даже в отсутствие непосредственного взаимодействия между молекулами здесь всегда существует косвенное взаимодействие через общее поле излучения: каждая молекула находится как в собственном поле излучения, так и в собственных полях излучения соседних молекул.

Сущность вопроса легко уяснить с помощью классической аналогии. Классическим аналогом системы из n молекул может служить система осцилляторов, занимающих область $\ll \lambda^3$. В дипольном приближении сила радиационного трения, действующая на каждый осциллятор системы, равна ⁵⁶

$$F_{\text{рад}} = \frac{2}{3c^3} \sum_{k=1}^n e_k^2 \ddot{\mathbf{r}}_k, \quad (2,1)$$

где $\mathbf{r}_k$ — вектор смещения k -го осциллятора, e_k — заряд.

В отсутствие непосредственных взаимодействий координаты $\mathbf{r}_k$ подчиняются системе уравнений

$$\ddot{\mathbf{r}}_k + \omega_k^2 \mathbf{r}_k = \frac{2}{3mc^3} \sum_{s=1}^n e_s^2 \ddot{\mathbf{r}}_s. \quad (2,2)$$

Таким образом, благодаря взаимодействию через общее поле излучения движение каждого осциллятора не является независимым, а определяется также движением всех других осцилляторов.

Квантовая теория когерентного спонтанного излучения газа была построена Диком ⁴⁰. Сейчас мы кратко приведем некоторые результаты этой работы.

Рассмотрим молекулярный газ, помещенный в полость резонатора, размеры которого много меньше длины волны. Для простоты полагаем, что молекулы газа имеют только два невырожденных энергетических уровня E_+ и E_- ($E_+ > E_-$). Излучение молекул рассматривается в дипольном приближении. Предполагается, что волновые функции молекул не перекрываются, и вопросы симметрии молекулярных состояний несущественны. Гамильтониан системы из молекул без учета поля излучения можно записать тогда в виде

$$H = H_0 + E \sum_{j=1}^n R_{j3}, \quad (2,3)$$

где $E = \hbar\omega_0 = E_+ - E_-$, H_0 действует на координаты центра масс молекул и представляет энергию поступательного движения молекул и энергию междумолекулярного взаимодействия, ER_{j3} есть внутренняя энергия j -й молекулы и имеет собственные значения $\pm \frac{1}{2}E$. В этом случае разность уровней молекулы будет равна $E = E_+ - E_-$. H_0 и все R_{j3} коммутируют друг с другом. Следовательно, можно выбрать такие собственные функции оператора энергии, которые будут одновременно собственными функциями H_0 , R_{13} , R_{23} , ...

Такие собственные функции будут иметь вид:

$$\Psi_{gm} = U_g(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) [+ - - \dots + - - +]; \quad (2,4)$$

здесь $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ суть координаты центра масс n молекул, символы $+$ и $-$ представляют внутренние энергии различных молекул. Так, например, если в системе из 5 молекул 1-я, 3-я и 5-я молекулы находятся в нижнем состоянии E_- , а 2-я и 4-я молекулы —

в верхнем состоянии E_+ , то волновая функция будет иметь вид $\Psi_{gm} = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5) [- + - + -]$. Если количество $+$ и $-$ символов мы будем обозначать через n_+ и n_- соответственно, то величина m определяется как

$$m = \frac{1}{2}(n_+ - n_-); \quad (2,5)$$

очевидно $n = n_+ + n_-$ — число молекул газа. Тогда полная энергия газа имеет вид

$$E_{gm} = E_g + E_m, \quad (2,6)$$

где E_g — энергия поступательного движения и взаимодействия молекул. Энергия E_{gm} имеет вырождение кратности

$$\frac{n!}{n_+! n_-!} = \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}n+m\right)! \left(\frac{1}{2}n-m\right)!}. \quad (2,7)$$

В гамильтониане (2,3) оператор H_0 действует на координаты центра масс так, что

$$H_0 U_g = E_g U_g, \quad (2,8)$$

в то время как R_{j3} действует на $+$ и $-$ символы на j -м месте в $[+ - \dots - +]$. С точностью до множителя $\frac{1}{2}$ оператор R_{j3} совпадает с третьим спиновым оператором Паули, который представляется матрицей

$$\sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем также понадобятся еще два оператора R_{j1} и R_{j2} , аналогичные первым двум операторам Паули

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}.$$

Указанные три оператора R_{j1} , R_{j2} и R_{j3} определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} R_{j1}[\dots \overset{j}{\pm} \dots] &= \frac{1}{2}[\dots \overset{j}{\mp} \dots], \\ R_{j2}[\dots \pm \dots] &= \pm i \frac{1}{2}[\dots \mp \dots], \\ R_{j3}[\dots \pm \dots] &= \pm \frac{1}{2}[\dots \pm \dots]. \end{aligned} \right\} \quad (2,9)$$

Кроме того, введем еще операторы

$$R_k = \sum_{j=1}^n R_{jk}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2,10)$$

и

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2. \quad (2,11)$$

В этих обозначениях

$$H = H_0 + E R_3 \quad (2,12)$$

и

$$R_3 \Psi_{gm} = m \Psi_{gm}. \quad (2,13)$$

Оператор энергии взаимодействия j -й молекулы с полем излучения можно записать в виде

$$H'_j = -A(r_j) \sum_k \frac{e_k}{m_k c} \mathbf{P}_k,$$

где $A(r_j)$ — вектор-потенциал поля излучения в центре масс j -й молекулы; e_k , m_k и $\mathbf{P}_k$ — соответственно заряд, масса и импульс k -й частицы в молекуле. В принятом приближении мы пренебрегаем зависимостью A от координат и H'_j можно записать в виде

$$H'_j = -A(0) \sum_k \frac{e_k}{m_k c} \mathbf{P}_k.$$

Поскольку внутренняя энергия молекулы принимает всего два значения $\pm \frac{1}{2} E$, оператор H'_j может быть представлен в виде эрмитовой матрицы 2-го порядка с равными нулю диагональными членами*). Но любой такой оператор может быть представлен в виде**)

$$H'_j = -A(0) (\mathbf{e}_1 R_{j1} + \mathbf{e}_2 R_{j2}).$$

Векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ являются действительными константами, зависящими от типа молекул. Таким образом, полную энергию взаимодействия можно записать в виде

$$H' = -A(0) (\mathbf{e}_1 R_1 + \mathbf{e}_2 R_2). \quad (2,14)$$

Нетрудно видеть, что операторы $\hbar R_1$, $\hbar R_2$ и $\hbar R_3$ подчиняются тем же перестановочным соотношениям, что и три компоненты момента количества движения. Следовательно, оператор энергии взаимодействия подчиняется правилам отбора

$$\Delta m = \pm 1.$$

Вообще говоря, он имеет неисчезающие матричные элементы между данными состоянием (2,4) и множеством других состояний с $\Delta m = \pm 1$. Для упрощения вычисления вероятностей спонтанных переходов вводятся стационарные состояния, выбранные таким образом, что оператор энергии взаимодействия имеет неисчезающие матричные элементы для переходов между данным состоянием и двумя другими состояниями с большей и меньшей энергией. Эти стационарные состояния вводятся следующим образом. Операторы H и R^2 коммутируют. Следовательно, в качестве волновых функций стационарных состояний можно выбрать собственные функции оператора R^2 . Новые состояния будут линейными комбинациями состояний (2,4). Оператор R^2 имеет собственные значения $r(r+1)$, где r такое целое или полуцелое положительное число, что

$$|m| \leq r \leq \frac{1}{2} n. \quad (2,15)$$

Квантовое число r может быть названо «кооперационным числом» (cooperation number) газа. Будем обозначать новые собственные

*) Предположение о равенстве нулю диагональных членов в энергии взаимодействия не нарушает общности рассуждений, так как во всех нижеследующих выводах диагональные члены не принимают участия.

**) В самом деле, любой оператор указанного типа может быть записан в виде

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & 0 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} = a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 = 2(a_1 R_{j1} + a_2 R_{j2}).$$

состояния Ψ_{gmr} , причем

$$H\Psi_{gmr} = (E_g + mE)\Psi_{gmr}, \quad (2,16)$$

$$R^2\Psi_{gmr} = r(r+1)\Psi_{gmr}. \quad (2,17)$$

Все состояния Ψ_{gmr} , кроме состояния $\Psi_{g, \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n}$, все еще являются вырожденными. После ортогонализации и нормировки всех состояний с данными m и r будем иметь полную ортонормированную систему функций, с помощью которых можно вычислять матричные элементы оператора энергии взаимодействия (2,14). При этом оказывается, что (см., например,⁵⁷⁾ *)

$$(g, r, m | H' | g, r, m \mp 1) = \begin{cases} H'_{+-} \sqrt{(r+m)(r-m+1)}, \\ H'_{-+} \sqrt{(r-m)(r+m+1)}, \end{cases} \quad (2,18)$$

где H'_{+-} — матричный элемент перехода $E_+ \rightarrow E_-$ для изолированной молекулы.

Используя (2,18), легко найти интенсивность спонтанного излучения газа, находящегося в состоянии (r, m) ,

$$I = I_0(r+m)(r-m+1), \quad (2,19)$$

где I_0 — интенсивность спонтанного излучения изолированной молекулы. Таким образом, возможны особые, связанные состояния газа, когда интенсивность спонтанного излучения пропорциональна квадрату числа молекул. Таково, например, состояние $r = \frac{1}{2}n$; $m = 0$. Интенсивность излучения газа, находящегося в таком состоянии, равна

$$I = \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}n+1\right)I_0 \approx \frac{1}{4}n^2I_0. \quad (2,20)$$

С другой стороны, возможны состояния газа, совсем не излучающие энергии. Таково, например, состояние с $r = m = 0$. Заметим, что при всех переходах системы, сопровождающихся излучением, квантовое «кооперационное число» r не изменяется, так как оператор R^2 является интегралом движения

$$\frac{dR^2}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H + H', R^2] = 0. \quad (2,21)$$

В общем случае, когда состояние газа представляет суперпозицию состояний с различными r и m или для смеси состояний с различными r , m , интенсивность излучения равна:

$$I = I_0 \sum_{r,m} P_{rm}(r+m)(r-m+1) = I_0 \langle (R_1 + iR_2)(R_1 - iR_2) \rangle, \quad (2,22)$$

где P_{rm} — вероятность того, что система в момент излучения находится в состоянии (r, m) .

Нетрудно получить, что в состоянии теплового равновесия, когда

$$\frac{n_+}{n_-} = \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad (2,23)$$

среднее значение $\bar{m}$ равно

$$\bar{m} = \frac{1}{2}(n_+ - n_-) = \frac{1}{2}n \operatorname{th}\left(\frac{E}{2kT}\right) \approx -\frac{1}{4} \frac{nE}{kT}. \quad (2,24)$$

*) Правило отбора $\Delta g = 0$ следует из того факта, что H' не зависит от координат⁴⁰.

Здесь черта означает усреднение по ансамблю с больцмановским распределением (2,23). Среднее значение r при этом совпадает с $|\bar{m}|$. Дело в том, что состояния с большим r имеют малый статистический вес. С другой стороны, согласно (2,15), наименьшее значение r равно $|m|$. Если $\bar{m}^2 \gg n \gg 1$ (что обычно выполняется), это наименьшее значение r совпадает со средним $\bar{r}$ ⁴⁰.

При этом, если r в точности совпадает с $-m$, интенсивность излучения равна нулю. Если же r отличается на единицу от $-m$, то

$$I = -2mI_0 \approx \frac{1}{2} \frac{E}{kT} nI_0.$$

В то время как интенсивность спонтанного излучения зависит от состояния газа (r, m), интенсивность полного излучения или поглощения в присутствии внешнего поля всегда пропорциональна числу активных молекул $-2m = (n_- - n_+)$. В самом деле, внешнее поле ответственно как за переходы с уменьшением m ($m \rightarrow m-1$), так и за переходы с увеличением m на единицу ($m \rightarrow m+1$)*; следовательно, интенсивность полного излучения (или поглощения) пропорциональна:

$$I(m \rightarrow m-1) - I(m \rightarrow m+1) \propto \\ \propto (r+m)(r-m+1) - (r+m+1)(r-m) = 2m.$$

Для создания состояний газа с большой излучательной способностью существует два пути. Во-первых, можно сортировкой молекул привести газ в состояние с $m=r=\frac{1}{2}n$. Через некоторый промежуток времени газ перейдет в состояние с $r=\frac{1}{2}n$; $m=0$. Это состояние обладает большой излучательной способностью $I=I_0 \frac{1}{4} n^2$. Такой путь является практически осуществимым только в том случае, если время перехода из состояния $(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n)$ в состояние $(\frac{1}{2}n, 0)$ достаточно мало (подробнее см. § 7). Во-вторых, можно, исходя из наинизшего состояния $r=-m=\frac{1}{2}n$, импульсом излучения частоты $\sim \omega_0$ перевести газ в сильно излучающее состояние $(\frac{1}{2}n, 0)$. Таким образом, возникает нечто вроде «радиационного эха». Спектроскопическая установка, работающая по этому принципу, была осуществлена Диком и Ромером⁴¹.

Заметим, что создание связанных состояний газа возможно также в системе, размеры которой, вообще говоря, не малы по сравнению с длиной волны. В этом случае газ может излучать когерентно только в одном определенном направлении⁴⁰.

§ 6. Естественная ширина линий в радиодиапазоне

Как мы уже отмечали, обычно вычисление естественной ширины линии излучения газа сводится к вычислению естественной ширины линии изолированной молекулы. Однако в том случае, когда много молекул находится на расстоянии много меньшем длины излучаемой волны, необходимо учесть связь между молекулами через общее поле излучения. При этом ширина линии спонтанного излучения газа существенно отличается от естественной ширины линии излучения одной

*) При спонтанном излучении m может только уменьшиться на единицу.

молекулы. Для выяснения сущности вопроса обратимся к классической аналогии, уже использованной в § 5. В рассматриваемом случае, когда все осцилляторы имеют одну и ту же частоту, равную $\omega_0 = \frac{E_+ - E_-}{\hbar}$, и все заряды $e_k = e$, уравнение (2,2) можно переписать в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}_k + \omega_0^2 \mathbf{r}_k = -\gamma_0 \sum_{k=1}^n \dot{\mathbf{r}}_k; \quad (2,2a)$$

здесь мы заменили $\ddot{\mathbf{r}}_k$ на $-\omega_0^2 \mathbf{r}_k$ (так как ширина линии излучения газа много меньше частоты ω_0) и $\gamma_0 = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}$ — ширина линии изолированного осциллятора. Напряженность поля излучения системы осцилляторов пропорциональна

$$\ddot{\mathbf{X}} = \sum_{k=1}^n \ddot{\mathbf{r}}_k = -\omega_0^2 \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k. \quad (2,25)$$

Из (2,2a) получаем

$$\ddot{\mathbf{X}} + \omega_0^2 \mathbf{X} = -n\gamma_0 \dot{\mathbf{X}}. \quad (2,26)$$

Решением уравнения (2,26) будет, приближенно ($n\gamma \ll \omega_0$),

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 e^{-\frac{n\gamma_0 t}{2}} e^{i\omega_0 t}. \quad (2,27)$$

Следовательно, напряженность поля излучения имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{n\gamma_0 t}{2}} e^{i\omega_0 t}. \quad (2,28)$$

Чтобы получить распределение интенсивности, разлагаем (2,28) в ряд Фурье:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{E}_0 \int_0^{\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)t} e^{-\frac{\gamma t}{2}} dt.$$

Для $\mathbf{E}(\omega)$ получается

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{E}_0 \frac{1}{i(\omega_0 - \omega) - \frac{n\gamma_0}{2}}.$$

Это дает для распределения интенсивности

$$J(\omega) \propto |E(\omega)|^2 \propto \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{n^2\gamma_0^2}{4}}. \quad (2,29)$$

Таким образом, система n осцилляторов имеет естественную ширину линии

$$\gamma = n\gamma_0. \quad (2,30)$$

Этот результат справедлив независимо от того, какова интенсивность излучения.

Разберем теперь в рамках классической теории вопрос о ширине линии поглощения с одновременным учетом влияния соударений. Легко

видеть, что в этом случае систему уравнений (2,2a) необходимо заметить системой

$$\ddot{\mathbf{r}}_k + \gamma_0 \sum_{k=1}^n \dot{\mathbf{r}}_k + \gamma_{ef} \dot{\mathbf{r}}_k + \omega_0^2 \mathbf{r}_k = \frac{e}{m} \mathbf{E}(\omega) \cos \omega t. \quad (2,31)$$

Здесь γ_{ef} — эффективное число соударений, $\mathbf{E}(\omega) \cos \omega t$ — заданное внешнее поле. Дипольный момент системы

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^n e \mathbf{r}_k$$

подчиняется уравнению

$$\ddot{\mathbf{p}} + (n\gamma_0 + \gamma_{ef}) \dot{\mathbf{p}} + \omega_0^2 \mathbf{p} = \frac{ne^2}{m} \mathbf{E}(\omega) \cos \omega t. \quad (2,32)$$

Отсюда видно, что ширина линии поглощения равна

$$\Delta\omega = n\gamma_0 + \gamma_{ef}. \quad (2,33)$$

Заметим, что форма линии поглощения совпадает с (2,29), т. е. с формой линии излучения. Это же следует из общих соображений (теорема Кирхгофа). Интенсивность линии поглощения пропорциональна n . В квантовой теории интенсивность линий поглощения пропорциональна числу активных молекул (см. (2,25)).

Теперь перейдем к квантовой теории естественной ширины линии. Сперва мы рассмотрим два простых примера, которые помогут нам разобраться в общей постановке задачи.

Пример первый. Система из двух молекул. В начальный момент молекула № 1 находится в возбужденном состоянии E_+ , молекула № 2 находится в основном состоянии E_- .

Так же, как и в предыдущем параграфе, мы для простоты полагаем, что молекулы имеют только 2 невырожденных энергетических уровня E_+ и E_- . Излучение молекул рассматривается в дипольном приближении. Предполагается, что непосредственным взаимодействием молекул можно пренебречь, волновые функции молекул не перекрываются и вопросы симметрии молекулярных состояний несущественны.

Введем следующие обозначения:

b_{+-0} — амплитуда вероятности того, что первая молекула находится в состоянии E_+ , вторая молекула в состоянии E_- , фотонов нет;

b_{+-0} — то же, но молекулы переставлены местами;

b_{--1_λ} — амплитуда вероятности того, что обе молекулы находятся в состоянии E_- , излучен фотон энергии $k_\lambda = \hbar\omega$.

Величины b_{+-0} , b_{--1_λ} и т. п. являются коэффициентами разложения волновой функции системы по функциям типа (2,4), умноженным на соответствующие функции, описывающие поле излучения. Так, например, b_{--N_λ} есть коэффициент при функции

$$[---] \Phi_{N_\lambda}(q_\lambda),$$

где функция Φ_{N_λ} описывает поле излучения, в котором число фотонов определено и равно N_λ .

Обозначим, далее, через

$$H'_{+-0; --1_\lambda}; \quad H'_{+-0; --1_\lambda}; \quad H'_{+-1_\lambda; +-0}; \quad H'_{+-1_\lambda; +-0}$$

матричные элементы оператора энергии взаимодействия молекул с полем излучения, соответствующие переходам $+0 \rightarrow -1_\lambda$; $-+0 \rightarrow -1_\lambda$ и т. д. В силу предположения о том, что молекулы находятся друг от друга на расстояниях, много меньших длины волны,

$$H'_{+-0; -1_\lambda} = H'_{-+0; -1_\lambda} \equiv H'_{+0; -1_\lambda}. \quad (2,34)$$

Амплитуды вероятности b_n (где под n подразумевается совокупность индексов у введенных нами амплитуд вероятности) подчиняются следующей системе уравнений (см., например, ³⁹):

$$-i\hbar \dot{b}_n(t) = \sum_m H'_{nm} b_m(t) e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t}, \quad (2,35)$$

Следуя методу Вайсскофа и Вигнера ^{58, 39}, мы принимаем во внимание только те состояния, при переходе в которые энергия по крайней мере приблизительно сохраняется. В этом случае уравнения (2,35) принимают вид:

$$\begin{aligned} -i\hbar \dot{b}_{+-0} &= \sum_\lambda H'_{+-0; -1_\lambda} b_{-1_\lambda} e^{\frac{i}{\hbar}(E_{+-0} - E_{-1_\lambda})t}; \\ -i\hbar \dot{b}_{-1_\lambda} &= (H'_{-1_\lambda; +0} b_{+-0} + H'_{-1_\lambda; -+0} b_{-+0}) e^{\frac{i}{\hbar}(E_{-1_\lambda} - E_{+-0})t}; \\ -i\hbar \dot{b}_{-+0} &= \sum_\lambda H'_{-+0; -1_\lambda} b_{-1_\lambda} e^{\frac{i}{\hbar}(E_{-+0} - E_{-1_\lambda})t} \end{aligned}$$

или, учитывая равенство (2,34),

$$-i\hbar \dot{b}_{+-0} = \sum_\lambda H'_{+0; -1_\lambda} b_{-1_\lambda} e^{\frac{i}{\hbar}(E_{+-0} - E_{-1_\lambda})t}; \quad (2,35a)$$

$$-i\hbar \dot{b}_{-1_\lambda} = H'_{-1_\lambda; +0} (b_{+-0} + b_{-+0}) e^{\frac{i}{\hbar}(E_{-1_\lambda} - E_{+-0})t}; \quad (2,35b)$$

$$-i\hbar \dot{b}_{-+0} = \sum_\lambda H'_{+0; -1_\lambda} b_{-1_\lambda} e^{\frac{i}{\hbar}(E_{-+0} - E_{-1_\lambda})t}. \quad (2,35b)$$

Начальные условия имеют вид:

$$b_{+-0}(0) = 1; \quad b_{-+0}(0) = b_{-1_\lambda}(0) = 0.$$

Делаем подстановки

$$b_1 = b_{+-0} + b_{-+0}; \quad b_2 = b_{+-0} - b_{-+0}; \quad b_3 = b_{-1_\lambda} \quad (2,36)$$

и получаем уравнения

$$-i\hbar \dot{b}_1 = \sum_\lambda 2H'_{+0; -1_\lambda} b_3 e^{\frac{i}{\hbar}(E_{+-0} - E_{-1_\lambda})t}, \quad (2,37a)$$

$$-i\hbar \dot{b}_3 = H'_{-1_\lambda; +0} b_1 e^{\frac{i}{\hbar}(E_{-1_\lambda} - E_{+-0})t}, \quad (2,37b)$$

$$\dot{b}_2 = 0 \quad (2,37b)$$

с начальными условиями

$$b_1(0) = 1; \quad b_2(0) = 1; \quad b_3(0) = 0. \quad (2,38)$$

Из (2,37в) и (2,38) имеем:

$$b_2 = 1. \quad (2,39)$$

Будем искать решение уравнений (2,37) в виде

$$b_1(t) = e^{-\frac{1}{2}\gamma t}. \quad (2,40)$$

Подставляя (2,40) в (2,37б), получаем дифференциальное уравнение

$$-i\hbar \dot{b}_3 = H'_{-1\lambda; +0} e^{\frac{i}{\hbar}(E_+ - E_- - \hbar\lambda)t} e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \quad (2,41)$$

с решением

$$b_3 = H'_{-1\lambda; +0} \frac{e^{i(\omega_0 - \omega_\lambda)t - \frac{1}{2}\gamma t} - 1}{\hbar \left(\omega_0 - \omega_\lambda + \frac{i}{2}\gamma \right)}, \quad (2,42)$$

где мы положили $E_+ - E_- = \hbar\omega_0$. Для того чтобы удовлетворить уравнению (2,37а), подставляем (2,42) в (2,37а) и получаем

$$\frac{i\hbar\gamma}{2} = \sum_{\lambda} \frac{2|H'|^2 \left[1 - e^{\left[i(\omega_\lambda - \omega_0) + \frac{1}{2}\gamma \right] t} \right]}{\hbar \left(\omega_0 - \omega_\lambda + \frac{i}{2}\gamma \right)}. \quad (2,43)$$

Суммирование по радиационным осцилляторам в правой части может быть, как это обычно делается, заменено интегрированием по частотам ω . Интеграл от (2,43) будет тогда иметь острый максимум для $\omega = \omega_0$, если предположить, что $\frac{1}{\gamma}$ мало по сравнению с ω_0 . Такое предположение и должно быть, конечно, сделано, потому что $\frac{1}{\gamma}$ представляет собой время жизни начального состояния, которое должно быть много больше периода изменения поля излучения $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Если $\rho_k dk d\Omega$ будет означать число радиационных осцилляторов с данными физическими свойствами (частотой, поляризацией и т. д.) на единицу объема, то правая часть сведется к хорошо известному интегралу³⁹

$$\int f(\omega) \frac{1 - e^{\left[i(\omega - \omega_0) + \frac{\gamma}{2} \right] t}}{\omega_0 - \omega + \frac{i}{2}\gamma} d\omega = i\pi f(\omega_0), \quad (2,44)$$

причем

$$f(\omega) = 2 \int \rho_k |H'|^2 d\Omega,$$

где $\int d\Omega$ означает интегрирование по всем направлениям распространения и суммирование по обоим направлениям поляризации. Следовательно, мы получаем для γ :

$$\gamma = 2 \frac{2\pi}{\hbar} \rho_k \int |H'|^2 d\Omega = 2\gamma_0, \quad (2,45)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{2\pi}{\hbar} \rho_k \int |H'|^2 d\Omega = \omega_{ab}$$

есть естественная ширина линии изолированной молекулы³⁹. Спустя время $t \gg \frac{1}{\gamma}$ вероятность того, что оказался излученным фотон $\hbar\omega_\lambda$, будет

$$|b_{-1\lambda}(\infty)|^2 = \frac{|H'|^2}{\hbar^2} \frac{1}{(\omega_\lambda - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}},$$

а вероятность того, что окажется излученным фотон в интервале $d\omega$, будет

$$\rho_k dk \int |b_{-1\lambda}(\infty)|^2 d\Omega = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{2\pi} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (2,46)$$

Это выражение определяет форму линии излучения. Таким образом, в нашем примере естественная ширина линии

$$\gamma = 2\gamma_0 \quad (2,47)$$

в два раза больше ширины линии одной единственной молекулы. Полная вероятность излучения фотона равна

$$\frac{1}{2} \int \frac{\gamma}{2\pi} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{1}{2}, \quad (2,48)$$

вместо 1 в случае одной молекулы. Дело в том, что существует вероятность того, что фотон не излучится, а останется в системе из двух молекул. Используя (2,39), (2,40) и (2,36), можно найти, что в момент времени $t \gg \frac{1}{\gamma}$:

$$|b_{-+0}(\infty)|^2 = \frac{1}{4}; \quad |b_{+-0}(\infty)|^2 = \frac{1}{4}. \quad (2,49)$$

Таким образом, с вероятностью $\frac{1}{4}$ состояние системы вообще не изменится (молекула № 1 возбуждена, молекула № 2 в основном состоянии). Далее, с вероятностью $\frac{1}{4}$ возбудится вторая молекула, а первая перейдет в основное состояние (молекула № 1 излучает фотон, молекула № 2 поглощает его) и с вероятностью $\frac{1}{2}$ происходит излучение фотона. Уширение линии связано с существованием вероятности возбуждения второй молекулы. Подчеркнем то обстоятельство, что хотя ширина линии удвоилась, интенсивность излучения равна интенсивности излучения изолированной молекулы. Это можно показать при помощи обычной теории возмущений. Дело в том, что хотя время, в течение которого система излучает энергию, в два раза уменьшилось ($\tau = \frac{1}{2\gamma_0}$), излучаемая энергия также в два раза уменьшилась (система из двух молекул в среднем излучает энергию $\frac{1}{2} \hbar\omega_0$, вместо $\hbar\omega_0$ в случае одной молекулы). Таким образом, интенсивность излучения, т. е. энергия, излучаемая в единицу времени, равна

$$I \approx \frac{\hbar\omega_0}{2} : \frac{1}{2\gamma_0} = \hbar\omega_0\gamma_0 \approx I_0, \quad (2,50)$$

где I_0 — интенсивность излучения одной молекулы.

Пример второй. Система из n молекул. В начальный момент молекула № 1 возбуждена, все остальные молекулы находятся в основном состоянии.

Начальные условия можно записать в виде

$$b_{+-\dots-0}=1; \quad b_{-+-\dots-0}=\dots=b_{--\dots-+0}=b_{--\dots-1\lambda}=0. \quad (2,51)$$

Используя те же предположения, что и в случае двух молекул, получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -i\hbar\dot{b}_{+-\dots-0} &= \sum_{\lambda} H'_{+0; -1\lambda} b_{--\dots-1\lambda} e^{i(\omega_{\lambda}-\omega_0)t}, \\ -i\hbar\dot{b}_{-+-\dots-0} &= \sum_{\lambda} H'_{+0; -1\lambda} b_{--\dots-1\lambda} e^{i(\omega_{\lambda}-\omega_0)t}, \\ &\dots\dots\dots \\ -i\hbar\dot{b}_{--\dots+0} &= \sum_{\lambda} H'_{+0; -1\lambda} b_{--\dots-1\lambda} e^{i(\omega_{\lambda}-\omega_0)t}, \\ -i\hbar\dot{b}_{--\dots-1\lambda} &= \\ &= H'_{-1\lambda; +0} (b_{+-\dots-0} + \dots + b_{--\dots+0}) e^{i(\omega_0-\omega_{\lambda})t}. \end{aligned} \right\} \quad (2,52)$$

Из начальных условий и уравнений (2,52) находим:

$$b_{-+-\dots-0}=\dots=b_{--\dots+0}\equiv b. \quad (2,53)$$

Далее делаем подстановку:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= b_{+-\dots-0} + \dots + b_{--\dots+0} = b_{+-\dots-0} + (n-1)b, \\ b_2 &= b_{--\dots-1\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (2,54)$$

Решая эти уравнения, находим:

$$b_1(t) = e^{-\frac{n\gamma_0 t}{2}}, \quad (2,55)$$

$$b_2(t) = H'_{-1\lambda; +0} \frac{e^{i(\omega_0-\omega_{\lambda})t} - \frac{1}{2}n\gamma_0 t}{\hbar \left(\omega_0 - \omega_{\lambda} + \frac{i}{2}n\gamma_0 \right)}. \quad (2,56)$$

Отсюда, подобно тому, как это было сделано в первом примере, находим, что ширина линии равна

$$\gamma = n\gamma_0. \quad (2,57)$$

Вероятность излучения фотона через большой промежуток времени равна $\frac{1}{n}$, вероятность того, что молекула № 1 останется в своем состоянии, равна $\frac{(n-1)^2}{n^2}$ и вероятность возбуждения любой из молекул (кроме первой) равна $\frac{1}{n^2}$. Таким образом, с вероятностью $1 - \frac{1}{n}$ фотон не излучается. Уширение линии связано с возможностью возбуждения каждой из первоначально невозбужденных молекул. Следует отметить, что интенсивность излучения и в рассматриваемом случае такая же, как для изолированной молекулы. Оценка, аналогичная проведенной в формуле (2,50), дает

$$I \approx \frac{\hbar\omega_0}{n} : \frac{1}{n\gamma_0} = \hbar\omega_0\gamma_0 \approx I_0. \quad (2,58)$$

Это же легко показать с помощью теории возмущений.

Теперь перейдем к общей постановке задачи. Для этого удобно воспользоваться формализмом, развитым в работе Дика⁴⁰ (см. также предыдущий параграф). Пусть в начальный момент газ находится в некотором состоянии (чистом или смешанном) таком, что число фотонов поля излучения равно нулю. Затем система начинает спонтанно излучать. Состояние газа в начальный момент можно представить в виде суперпозиции или смеси состояний с определенными r и m . Будем называть эти состояния (r, m) -компонентами. С течением времени каждая (r, m) -компонента излучает фотоны частоты $\sim \omega_0$ и переходит в состояние с $m = -r$ (r при этом не изменяется). Интенсивности различных (r, m) -компонент газа складываются (конечно, с соответствующими весами). Следовательно, излучение всей системы определяется излучением каждой (r, m) -компоненты. Поэтому достаточно рассмотреть излучение газа, находящегося в состоянии с определенными r и m .

Здесь представляет интерес найти следующие характеристики:

а) Среднее время, $\tau_{m_1 m_2}$ в течение которого система переходит из состояния с одним m в состояние с другим m ; будем называть эту величину «временем релаксации».

б) Интенсивность, как функцию времени $I(t)$, или спектральную интенсивность $J(\omega)$.

Начнем с вопроса об интенсивности излучения. Здесь следует различать два предельных случая:

- 1) $r + m = 1, \quad m = -r + 1,$
- 2) $|r \pm m| \gg 1.$

Рассмотрим сперва первый случай. Этому случаю соответствуют следующие начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} b_{r, -r+1, 0}(0) &= 1, \\ b_{r, -r, 1\lambda}(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2,59)$$

Следуя методу Вайскопфа и Вигнера⁵⁸, получим уравнения для этих амплитуд:

$$\left. \begin{aligned} -i\hbar \dot{b}_{r, -r+1, 0} &= \sum_{\lambda} H'_{r, -r+1, 0; r, -r, 1\lambda} b_{r, -r, 1\lambda} e^{i(\omega_{\lambda} - \omega_0)t}, \\ -i\hbar \dot{b}_{r, -r, 1\lambda} &= H'_{r, -r, 1\lambda; r, -r+1, 0} b_{r, -r+1, 0} e^{i(\omega_0 - \omega_{\lambda})t}. \end{aligned} \right\} \quad (2,60)$$

Ищем решение этой системы в виде

$$b_{r, -r+1, 0} = e^{-\frac{1}{2}\gamma t}.$$

Производя те же операции, что и в первом примере, получим:

$$\gamma = 2r\gamma_0. \quad (2,61)$$

При этом спектральная интенсивность излучения будет иметь вид

$$J(\omega) d\omega = \frac{2r\gamma_0}{2\pi} \frac{\hbar \omega d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + r^2 \gamma_0^2}. \quad (2,62)$$

Таким образом, естественная ширина линии равна

$$\gamma = 2r\gamma_0.$$

Легко видеть, что в том случае, когда начальное состояние есть суперпозиция состояний типа $(r, -r+1, 0)$, спектральная интенсивность равна

$$J(\omega) d(\omega) = \sum_r |b_{r, -r+1, 0}(0)|^2 \frac{2r\gamma_0 \hbar \omega d\omega}{2\pi [(\omega - \omega_0)^2 + r^2 \gamma_0^2]}, \quad (2,62a)$$

$$\sum_r |b_{r, -r+1, 0}(0)|^2 = 1.$$

Заметим, что в этом случае форма линии отлична от лоренцевой.

Во втором случае, когда

$$r - |m| \equiv k \gg 1, \quad (2,63)$$

можно воспользоваться векторной моделью ⁴⁰ (рис. 1). Угол φ вводится соотношением

$$m = r \cos \varphi. \quad (2,64)$$

В процессе излучения угол φ увеличивается. При выполнении условия (2,63) интенсивность излучения следующим образом зависит от φ :

$$I = I_0 (r + m) (r - m + 1) \approx I_0 (r^2 - m^2) = I_0 r^2 \sin^2 \varphi. \quad (2,65)$$

Внутренняя энергия системы молекул равна

$$H = mE = m\hbar\omega_0 = \hbar\omega_0 r \cos \varphi. \quad (2,66)$$

Баланс энергии можно записать в виде

$$-\frac{dH}{dt} = I. \quad (2,67)$$

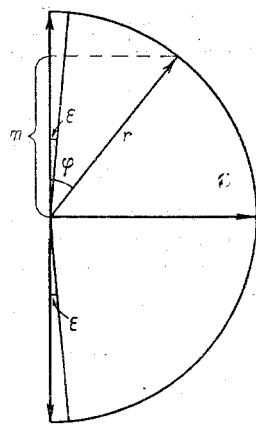


Рис. 1.

Используя (2,65) и (2,66) и тот факт, что длина вектора r не изменяется, находим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \alpha \sin \varphi, \quad \alpha = \frac{I_0 r}{E}. \quad (2,68)$$

Начальное условие:

$$t = 0, \quad \varphi = \varphi_0. \quad (2,69)$$

Решение, удовлетворяющее этому начальному условию, имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} e^{\alpha t}. \quad (2,70)$$

Отсюда находим для интенсивности

$$I = I_0 r^2 \sin^2 \varphi = \frac{4r^2 I_0}{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} e^{\alpha t} + \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} e^{-\alpha t} \right)^2}. \quad (2,71)$$

Интервал углов, в котором справедливы выражения (2,70), (2,71) и др., определяется условиями (2,63)

$$\varepsilon < \varphi < \pi - \varepsilon, \quad (2,72)$$

где ε находится из условия (2,63)

$$k = r - |m| = r(1 - \cos \varepsilon) = 2r \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \approx r \frac{\varepsilon^2}{2}$$

или

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2k}{r}}. \quad (2,73)$$

Если φ_0 не очень близко к $\pi - \varepsilon$, в основном все излучение газа определяется формулой (2,71). Напряженность поля излучения имеет вид

$$A(t) = \begin{cases} e^{i\omega t} \sin \varphi & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases} \quad (2,74)$$

При изменении φ от φ_0 до $\frac{\pi}{2}$ (если $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$) амплитуда излучения растет, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ она достигает максимума и затем падает.

Спектральная интенсивность пропорциональна квадрату модуля Фурье — компоненты $A(t)$:

$$J(\omega) \sim |a(\omega)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{2e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} e^{\alpha t} + \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} e^{-\alpha t}} \right|^2. \quad (2,75)$$

Это выражение определяет форму линии излучения, которая, как мы видим, отлична от лоренцовой*).

Значения ширины линии излучения, полученные из формулы (2,75), приведены в нижеследующей таблице⁶²:

φ_0	~ 0	60°	80°	90°	100°	120°
$\frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\gamma_0 r}$	$\sim 1,0$	1,64	1,70	1,76	1,80	1,84

С другой стороны, ширина линии при $m = -r + 1$, что соответствует $\varphi_0 \approx 180^\circ$, равна $\Delta\omega = 2r\gamma_0$ (см. (2,61)). Таким образом, ширина линии изменяется в зависимости от начального состояния в пределах от $r\gamma_0$ до $2r\gamma_0$.

Легко видеть, что интенсивность излучения, близкая к максимальной ($I \approx r^2 I_0$), длится в течение времени

$$\tau_1 \approx \frac{[1]}{r\gamma_0}. \quad (2,76)$$

Перейдем теперь к вопросу о времени релаксации $\tau_{m_1 m_2}$, т. е. о среднем времени перехода из состояния (r, m_1) в состояние (r, m_2) ($m_1 > m_2$). Время релаксации $\tau_{m_1 m_2}$ можно вычислить, пользуясь следующей статистической схемой. Пусть система в начальный момент $t=0$ находится в состоянии $m = m_1$. Вероятность того, что система останется в этом же состоянии (и не излучит фотон) за время $t + \Delta t$, равна произведению вероятностей

$$w_m(t + \Delta t) = w_m(t) w_m(\Delta t),$$

*) В работе Дика⁴⁰ спектральная интенсивность ошибочно определяется при помощи $\operatorname{Re} a(\omega)$, что приводит к неверному значению для ширины линии.

здесь $w_m(t)$ — вероятность того, что система проживет, не распадаясь, время t . Отсюда нетрудно получить, что $w_m(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw_m}{dt} = -\Gamma_m w_m$$

и имеет вид

$$w_m = e^{-\Gamma_m t},$$

где Γ_m — константа, характеризующая распад системы. Эту константу определяем следующим образом. При $t = 0$

$$\Gamma_m = -\frac{dw_m}{dt} \quad (\text{так как } w_m(0) = 1).$$

Но при $t \approx 0$ согласно теории возмущений

$$w_m + W_{m,m-1}t = 1,$$

где $W_{m,m-1}$ — вероятность на единицу времени спонтанного перехода с m на $m-1$. В нашем случае в первом приближении теории возмущений $W_{m,m-2}$, $W_{m,m-3}$ и т. д. равны нулю (при $t \approx 0$). Таким образом,

$$\Gamma_m = -\left(\frac{dw_m}{dt}\right)_{t=0} = W_{m,m-1} = \gamma_0(r+m)(r-m+1). \quad (2,77)$$

После излучения одного фотона система перейдет в состояние $m-1$. Аналогичным образом находим, что если в начальный момент $t=0$ система находится в состоянии $m-1$, то

$$w_{m-1} = e^{-\Gamma_{m-1}t} \quad \text{и т. д.}$$

При этом Γ_{m-1} , Γ_{m-2} и т. д. определяются формулой (2,77).

Нетрудно сообразить, что вероятность того, что система за время $t = t_{m_1} + t_{m_1-1} + \dots + t_{m_2+1}$ перейдет из состояния m_1 в состояние m_2 , равна произведению вероятности $w_{m_1}(t_{m_1})$ прожить без излучения время t_{m_1} на вероятность излучения за время dt_{m_1} и перехода в состояние m_1-1 на вероятность $w_{m_1-1}(t_{m_1-1})$ прожить время t_{m_1-1} в состоянии m_1-1 и т. д.

$$w_{m_1}(t_{m_1}) \Gamma_{m_1} dt_{m_1} \cdot w_{m_1-1}(t_{m_1-1}) \Gamma_{m_1-1} dt_{m_1-1} \dots w_{m_2+1} \Gamma_{m_2+1} dt_{m_2+1}.$$

Отсюда искомое среднее время $\tau_{m_1 m_2}$ равно

$$\tau_{m_1 m_2} = \int_0^\infty dt_{m_1} \int_0^\infty dt_{m_1-1} \dots \int_0^\infty dt_{m_2+1} e^{-\Gamma_{m_1} t_{m_1} - \Gamma_{m_1-1} t_{m_1-1} - \dots - \Gamma_{m_2+1} t_{m_2+1}} \times \\ \times \Gamma_{m_1} \Gamma_{m_1+1} \dots \Gamma_{m_2+1} (t_{m_1} + t_{m_1+1} + \dots + t_{m_2+1}) = \sum_{s=m_1}^{m_2+1} \frac{1}{\Gamma_s}.$$

Согласно (2,77) имеем:

$$\tau_{m_1, m_2} = \sum_{s=m_1}^{m_2+1} \frac{1}{\Gamma_s} = \sum_{s=m_1}^{m_2+1} \frac{1}{\gamma_0(r+s)(r-s+1)}. \quad (2,78)$$

Эту сумму можно вычислить в общем случае при помощи формулы

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 0,577 + \ln n + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^\infty \frac{A_k}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)},$$

Легко показать, что последний член формулы $\ll 0,077$; в дальнейшем будем им пренебрегать. Тогда τ_{m_1, m_2} имеет вид

$$\tau_{m_1, m_2} = \frac{\pi}{(2r+1)\gamma_0} \left\{ \ln \frac{(r+m_1+1)(r-m_2+1)}{(r-m_1+1)(r+m_2+1)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r+m_2+1} - \frac{1}{r+m_1+1} + \frac{1}{r-m_1+1} - \frac{1}{r-m_2+1} \right) \right\}. \quad (2,79)$$

Представляет интерес время перехода из состояния с $m_1 = r$ в состояние $m_2 = 0$

$$\tau_{r, 0} = \frac{1}{(2r+1)\gamma_0} \left\{ \ln(2r+1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2r+1)} \right\}.$$

При $r \gg 1$ эта формула имеет вид

$$\tau_{r, 0} \approx \frac{\ln 2r}{2r\gamma_0}. \quad (2,79a)$$

Интересно отметить, что время релаксации можно также определить с помощью равенства (2,70)

$$\tau_{\varphi_0, \varphi_1} = \frac{1}{\gamma_0 r} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}. \quad (2,79b)$$

Здесь φ_0 и φ_1 соответственно характеризуют начальное и конечное состояния. Нетрудно проверить, что при выполнении условия (2,63) $r - |m| \gg 1$, формулы (2,79) и (2,79b) совпадают.

Покажем, что описанную выше статистическую схему можно получить из квантовой электродинамики. Мы здесь не будем приводить общего доказательства, а рассмотрим частный случай $r = \frac{3}{2}$.

В этом случае система имеет $2r+1=4$ уровней с $m = \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}$ соответственно. При этом энергии уровней имеют следующие значения:

$$E_{3/2} = 3\hbar\omega_0; \quad E_{1/2} = 2\hbar\omega_0; \quad E_{-1/2} = \hbar\omega_0; \quad E_{-3/2} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что из описанной выше статистической схемы следует, что вероятность обнаружить систему в момент t в состоянии с $m = \frac{1}{2}$ равна *)

$$w_{1/2} = \frac{\Gamma_{3/2}}{\Gamma_{1/2} - \Gamma_{3/2}} (e^{-\Gamma_{3/2}t} - e^{-\Gamma_{1/2}t}). \quad (I)$$

Покажем, что это же выражение следует из квантовой электродинамики. Для этого необходимо решить уравнение (2,35). Решение можно записать в виде ³⁹

$$b_n(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dE U_{n/0}(E) \frac{\zeta(E-E_n) e^{i(E_n-E)t/\hbar}}{E-E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\Gamma_0}, \quad (II)$$

*) При этом предполагается, что в начальный момент $t=0$ система находилась в состоянии с $m = \frac{3}{2}$.

где $U_{n/0}$ определяется из уравнения ³⁹

$$U_{n/0} = H_{n/0} + \sum_{m \neq 0} H_{n/m} \zeta(E - E_m) U_{m/0}, \quad (\text{III})$$

$\zeta(x)$ — сингулярная функция, определенная в книге Гайтлера; она имеет своей мнимой частью δ -функцию, умноженную на 2π , и удовлетворяет равенству

$$x\zeta(x) = 1.$$

В нашем случае b_n можно записать как

$$b_{1/2, 1\lambda}.$$

Здесь первый индекс означает, что $m = \frac{1}{2}$, второй индекс означает, что излучен фотон энергии $\hbar\omega_\lambda \approx \hbar\omega_0$. Нам, очевидно, нужно показать, что

$$\sum_{\lambda} |b_{1/2, 1\lambda}|^2 = w_1(t).$$

Решая уравнения (III), можно получить

$$U_{n/0} = \frac{H'_{n/0}(E - E_n)}{(E - E_n) + \frac{i\hbar}{2} \Gamma_{1/2}}, \quad (\text{IV})$$

где индекс n означает $\frac{1}{2} 1_\lambda$, 0 означает $\frac{3}{2} 0_\lambda$. При вычислении Γ_n мы ограничивались первым приближением по $|H'_{n/m}|^2$. Γ_0 в нашем случае означает $\Gamma_{3/2}$. Таким образом, из формул (II), (IV) находим:

$$\begin{aligned} b_{1/2, 1\lambda} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{H_{n/0}(E - E_n)}{E - E_n + \frac{i\hbar}{2} \Gamma_{1/2}} \cdot \frac{\zeta(E - E_n) e^{i(E_n - E)t/\hbar}}{E - E_{3/2, 0\lambda} + \frac{1}{2} i\hbar \Gamma_{3/2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{H'_{n/0} e^{iE_n t/\hbar}}{E_n - E_{3/2, 0\lambda} + \frac{i\hbar}{2} (\Gamma_{3/2} - \Gamma_{1/2})} \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-iEt/\hbar} \times \\ &\times \left(\frac{1}{E - E_n + \frac{i\hbar}{2} \Gamma_{1/2}} - \frac{1}{E - E_{3/2, 0\lambda} + \frac{i\hbar}{2} \Gamma_{3/2}} \right) = \\ &= \frac{H'_{n/0}}{\hbar} \frac{1}{(\omega_\lambda - \omega_0) + \frac{i}{2} (\Gamma_0 - \Gamma_1)} (e^{-\frac{1}{2} \Gamma_{1/2} t} - e^{i(\omega_\lambda - \omega_0)t - \frac{1}{2} \Gamma_{3/2} t}). \end{aligned}$$

Заменяя суммирование по λ интегрированием, подобно тому, как это делалось в начале этого раздела, находим *):

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} |b_{1/2, 1\lambda}|^2 &= \frac{\Gamma_{3/2}}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\Gamma_{1/2} t} + e^{-\Gamma_{3/2} t} - 2e^{-\frac{1}{2} (\Gamma_{1/2} + \Gamma_{3/2}) t} \cos(\omega_\lambda - \omega_0) t}{(\omega_\lambda - \omega_0)^2 + \frac{(\Gamma_{3/2} - \Gamma_{1/2})^2}{4}} d\omega_\lambda = \\ &= \frac{\Gamma_{3/2}}{\Gamma_{1/2} - \Gamma_{3/2}} (e^{-\Gamma_{3/2} t} - e^{-\Gamma_{1/2} t}) = w_{3/2}(t), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

*) При интегрировании предполагается, что $\omega_0 \gg \Gamma_m$. Такое же предположение делалось во всех предыдущих расчетах.

С помощью полученных решений можно провести исследование излучения газа в ряде случаев, представляющих интерес. Когда имеет место бoльцмановское распределение по энергиям (см. предыдущий параграф)

$$\bar{m} = -\frac{\frac{1}{4}nE}{kT}, \quad (2,80)$$

где черта означает усреднение по ансамблю. При этом r согласно (2,15) не может быть меньше $|m|$. Много больше $|m|$ оно также быть не может, так как состояния с большим r имеют малый статистический вес. Если $r = -m$, то спонтанное излучение происходить не будет. Если же $m = -r + 1$, то интенсивность спонтанного излучения согласно (2,19) и (2,79) будет

$$I = I_0 2r \approx \frac{I_0 \frac{1}{2}nE}{kT}, \quad (2,81)$$

и линия излучения будет иметь форму (2,62) или (2,62а), а ширина линии будет равна (см. (2,61))

$$\gamma = 2r\gamma_0 = \frac{nE}{2kT} \gamma_0. \quad (2,82)$$

Теперь мы в состоянии дать несколько иную интерпретацию разобранного ранее примера, когда одна молекула возбуждена, а $n-1$ молекул находятся в основном состоянии. Такое состояние системы представляет собой, как нетрудно убедиться, суперпозицию состояний с $m = 1 - \frac{n}{2}$ и $r = \frac{n}{2}$, $\frac{n}{2} - 1$. Состояние $r = \frac{n}{2}$; $m = -\frac{n}{2} + 1$ имеет вес $\frac{1}{n}$, состояния $r = \frac{n}{2} - 1$, $m = -\frac{n}{2} + 1$ имеют вес $1 - \frac{1}{n}$, но не вносят вклад в излучение (так как $m = -r$). Таким образом, интенсивность излучения всей системы равна

$$I = \frac{1}{n} I\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{1}{n} n I_0 = I_0,$$

а ширина линии равна

$$\gamma = 2r\gamma_0 = n\gamma_0.$$

Следовательно, во всех разобранных случаях естественная ширина линии излучения по порядку величины равна $r\gamma_0$. При этом максимальное значение $r = \frac{1}{2}n$, а минимальное значение $r = \frac{1}{2}|n_+ - n_-|$. Последнее значение достигается в состояниях, близких к равновесному.

Произведем оценку величины естественной ширины линии. Пусть $\omega_0 = 2 \cdot 10^{11}$ сек, тогда $\gamma_0 \approx 3 \cdot 10^{-7}$ сек $^{-1}$; $\gamma = 2r\gamma_0 = \frac{n\hbar\omega_0\gamma_0}{2kT}$. При $n = 10^{15}$ $T = 300^\circ\text{K}$; $\gamma = 10^5$ сек $^{-1}$. Таким образом, естественная ширина линии в радиодиапазоне не является пренебрежимо малой величиной, как это принято обычно считать.

До сих пор мы рассматривали излучение молекул. Конечно форма и ширина линии поглощения совпадает с формой и шириной линии излучения. Это следует как из общих соображений (теорема Кирхгофа), так и из прямых расчетов.

Заметим, что все результаты настоящего параграфа верны только в дипольном приближении. Учет высших мультиполей приводит к тому,

что и «безизлучательные» состояния (например, с $r=0$) начинают излучать. Рассмотрим, например, состояние двух молекул, описываемое волновой функцией

$$\Psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [+ -] - [- +] \} \quad (2,83)$$

(одна из молекул возбуждена). Матричный элемент, соответствующий излучению фотона, будет иметь вид

$$\langle \Psi_{0,0} | H' | [- -] \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [H'_{+-}(x_1) - H'_{+-}(x_2)],$$

где x_1 и x_2 — координаты первой и второй молекул, соответственно. В дипольном приближении этот матричный элемент равен нулю, и излучения нет. В следующем приближении имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial H'_{+-}}{\partial x} (x_2 - x_1).$$

Это приближение учитывает квадрупольный момент всей системы (а не отдельной молекулы!). Очевидно, квадрупольное излучение будет много меньшим дипольного. Учет квадрупольного излучения необходим в том случае, когда дипольный момент системы молекул равен нулю (т. е. матричный элемент дипольного момента системы равен нулю, как это имеет место в случае (2,83)).

§ 7. Генерирование микрорадиоволн

До последнего времени радиоспектры молекул в большинстве случаев наблюдались как спектры поглощения. Это связано с тем, что обычное «некогерентное» спонтанное излучение имеет очень малую интенсивность в радиодиапазоне, а индуцированное излучение обычно (когда заселенность нижних уровней больше чем верхних) компенсируется излучением. Однако в последнее время создана система, в которой можно наблюдать индуцированное излучение в «чистом» виде. Это молекулярный генератор*).

Теория молекулярного генератора впервые была дана Басовым и Прохоровым⁵². Экспериментально молекулярный генератор был осуществлен в 1954 г. в США⁵³, несколько позже в СССР⁵². В работах⁵² описывается стационарный режим работы молекулярного генератора. В статье⁶⁴ выведены уравнения, описывающие как стационарный, так и нестационарный режим работы молекулярного генератора. Вопросы о стабильности молекулярного генератора, о шумах в нем и т. п. разбираются в статьях^{54, 59, 60, 65-67, 73-75, 77}. Но на этих вопросах мы сейчас останавливаться не будем. Следует только отметить, что в последнее время было предложено использовать уровни парамагнитного резонанса в парамагнетиках в качестве составной части генератора или усилителя (вместо пучка молекул, используемого в молекулярном генераторе). Этому вопросу посвящены работы⁶⁸⁻⁷² **).

Другим возможным молекулярным источником микрорадиоволн может явиться система молекул, переведенная в «сверхизлучающее» состояние, находясь в котором система спонтанно излучает с интенсивностью, пропорциональной квадрату числа молекул⁴¹. Такая возмож-

*) За рубежом молекулярный генератор обозначают словом maser. Это сокращение, расщипывающееся как «микроволновое усиление при помощи индуцированного излучения» (Microwave amplification by stimulated emission of radiation).

**) См. примечание при корректуре а) в конце статьи.

ность была реализована Диком и Ромером ⁴¹. Система, первоначально находящаяся в «несвязанном» состоянии, подвергается действию радиационного импульса, который переводит систему в «сверхизлучающее» состояние. Действие радиационного импульса прекращается, затем наблюдается спонтанное излучение газа — «радиационное эхо». Использование этой методики открывает новые экспериментальные возможности в радиоспектроскопии ⁴¹.

Представляет также интерес другая возможность создания связанных «сверхизлучающих» состояний системы молекул: система молекул может перейти в «сверхизлучающее» состояние, если в начальный момент система находится в состоянии с $r=m$. Достигнуть этого можно путем сортировки молекул. Если в начальный момент молекулы отсортированы так, что все они находятся на верхнем энергетическом уровне, то $m = \frac{1}{2} (n_+ - n_-)$, а так как $\frac{1}{2} k \gg r \gg |m|$ (см. (2.15)), то и $r = \frac{1}{2} n$. Время, в течение которого система переходит в «сверхизлучающее» состояние, определяется по (2.79а). В нашем случае $2r = n$ и $\tau_2 = \ln n/n\gamma_0$. Затем в течение времени $\tau_{r,0} \simeq 1/n\gamma_0$ (см. (2.76)) система излучает с интенсивностью

$$I = \frac{1}{4} n^2 I_0. \quad (2,20a)$$

Генератор микрорадиоволн, основанный на когерентном спонтанном излучении (будем называть его «когетрон»), может иметь примерно следующее устройство (рис. 2).

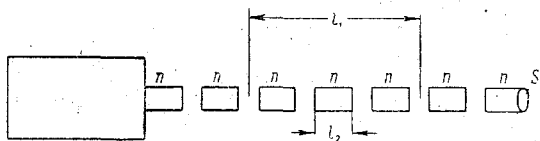


Рис. 2.

Источники молекул испускает молекулярные сгустки по n молекул; размеры сгустков много меньше длины волны излучения (такие сгустки можно реализовать, прерывая молекулярный пучок). Вводим следующие обозначения:

l_1 — расстояние, на котором происходит интенсивное излучение,
 v — скорость сгустка, $l_2 (\ll \lambda)$ — его длина, I_1 — интенсивность одного сгустка, n — число молекул в сгустке,

$k = \frac{l_1}{l_2}$ — число сгустков на длине l_1 , N_0 — число молекул, проходящих в единицу времени через единицу нормального сечения,
 S — площадь сечения сгустка.

Используя эти обозначения, легко найти, что

$$l_1 = v\tau_1 = \frac{v}{n\gamma_0}, \quad n = N_0 \frac{l_2}{v} S. \quad (2,84)$$

Интенсивность когетрона равна

$$I = kI_1 = k \frac{n^2}{4} I_0 = \frac{N_0}{4} S h \omega_0. \quad (2,85)$$

Заметим, что такова же примерно интенсивность молекулярного генератора. Однако следует отметить, что в то время как ширина линии молекулярного генератора чрезвычайно мала ^{52, 54, 59, 60}, ширина линии когетрона равна (2,76)

$$\Delta\omega = 1,76\gamma_0 r = 1,76 \frac{n}{2} \gamma_0.$$

Проведем оценки величин. Положим для средней скорости молекул $v = 6 \cdot 10^4$ см/сек ⁵⁴, $N_0 S = 10^{14}$ сек⁻¹ ⁵⁴, $l_2 = 0,5$ см, тогда $n = \frac{N_0 S l_2}{v} \approx 10^9$.

$\Delta\omega = 2,6 \cdot 10^2 \text{ сек}^{-1}$. Время, в течение которого система переходит в сверхизлучающее состояние, равно $\tau_{r,0} = \frac{\ln n}{n \cdot \gamma_0} \approx 0,07 \text{ сек}$. Интенсивность когерентного излучения при этом равна ($\omega_0 = 2 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$)

$$I = \frac{N_0 S}{4} \hbar \omega_0 \approx 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ W}^*).$$

§ 8. Излучение молекул в сильном высокочастотном поле

Поведение молекул в присутствии сильного высокочастотного поля является интересным объектом радиоспектроскопических исследований. Сейчас мы укажем на один из возможных эффектов при исследовании поведения молекул в сильном высокочастотном поле. Сущность этого эффекта состоит в следующем⁵⁵.

Пусть E_1 и E_2 — два невырожденных энергетических уровня молекулы, μ_{11} и μ_{22} — дипольные моменты молекулы в состояниях с энергиями E_1 и E_2 соответственно, μ_{12} — дипольный момент перехода $1 \rightarrow 2$. В частности, E_1 и E_2 могут быть компонентами штарковского расщепления уровней; тогда μ_{11} и μ_{22} суть эффективные электрические дипольные моменты⁶¹. Пусть, далее, на частоте ω , близкой к резонансной частоте молекулы $\omega_{12} = \frac{E_1 - E_2}{\hbar} \equiv \omega_0$, действует сильное электромагнитное поле. Как известно, такое поле вызовет переходы между состояниями молекулы 1 и 2. В результате таких переходов происходит изменение дипольного момента молекулы от μ_{11} до μ_{22} и обратно. Это изменение происходит с частотой переходов между состояниями 1 и 2. Число таких переходов в единицу времени по порядку величины равно (см., например,⁵⁷ стр. 171)

$$\Omega_0 \sim \frac{\mu_{12} F}{\hbar}, \quad (2,86)$$

где F — амплитуда поля частоты ω . Но всякое изменение дипольного момента должно вызывать излучение энергии. Очевидно, что такое излучение будет иметь частоту Ω_0 . Экспериментальное определение этой частоты дает возможность с большой точностью определить произведение дипольного момента перехода μ_{12} на амплитуду высокочастотного поля.

При известном дипольном моменте μ_{12} таким методом в принципе возможно провести прецизионное измерение высокочастотных полей. С другой стороны, если известна напряженность высокочастотного поля, имеет-ся возможность непосредственного измерения дипольного момента μ_{12} .

Заметим, что описанный здесь эффект до некоторой степени аналогичен эффектам Штарка и Зеемана. В самом деле, штарк-эффект дает возможность наблюдать излучение частоты, пропорциональной произведению напряженности постоянного электрического поля на электрический дипольный момент в данном энергетическом состоянии (в нашем случае μ_{11} или μ_{12}). Зееман-эффект дает возможность наблюдения частоты, пропорциональной произведению напряженности постоянного магнитного поля на магнитный дипольный момент (матричный элемент оператора магнитного дипольного момента). В присутствии же сильного высокочастотного поля появляется излучение частоты Ω_0 , пропорциональной произведению амплитуды этого поля на величину дипольного момента перехода. Следует, однако, подчеркнуть, что по существу своему эффект излучения в высокочастотном поле не совпадает ни с штарк- ни с зееман-эффектами.

*) См. примечание при корректуре б) в конце статьи.

Сейчас мы проведем расчет описанного здесь эффекта с помощью принципа соответствия. При этом молекулы описываются квантово-механически, а излучение классически.

Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

- а) $T_0 \ll \frac{1}{\omega}$, где T_0 — длительность молекулярного соударения, τ — среднее время между соударениями; б) $|\omega - \omega_0| = |\omega - \omega_{12}| \ll \frac{1}{\tau}$ и $|\omega - \omega_{mn}| \gg \frac{1}{\tau}$, где $m, n \neq 1, 2$; в) молекулярное соударение возвращает молекулу в состояние с энергией E_1 или E_2 ; г) $\omega_0 \gg \Omega_0$.

Пусть изолированная молекула имеет уровни E_s , характеризующиеся собственными функциями $\phi_s e^{i \frac{E_s}{\hbar} t}$. Тогда

$$H_0 \phi_s = E_s \phi_s, \quad (2,87)$$

где H_0 — гамильтониан свободной (т. е. без поля излучения) молекулы.

При наличии взаимодействия с электромагнитным полем частоты ω гамильтониан молекулы во внешнем поле будет иметь вид

$$H = H_0 - \mu F(t) = H_0 + V \sin \omega t, \quad (2,88)$$

где $F(t) = F \sin \omega t$, а μ — оператор дипольного момента.

Волновая функция молекулы во внешнем поле удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (H_0 + V \sin \omega t) \psi. \quad (2,89)$$

Решение этого уравнения, отвечающее условиям а) — г), будем искать методом, изложенным в⁵⁷.

При наличии взаимодействия ищем решение уравнения (2,89) в виде

$$\Psi(t) = a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2. \quad (2,90)$$

При этом мы использовали условие б). Пусть в момент соударения $t = t_0$, согласно условию в)

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1^*). \quad (2,91)$$

Используя условия б), г), после преобразований получим следующие уравнения для a_1 и a_2 :

$$i\hbar \frac{da_1}{dt} = -\frac{V_{12}}{2i} e^{i\delta t} a_2; \quad i\hbar \frac{da_2}{dt} = \frac{V_{21}}{2i} e^{-i\delta t} a_1, \quad (2,92)$$

где $\delta \equiv \omega_0 - \omega$.

Делаем подстановку

$$D = |a_2|^2 - |a_1|^2; \quad c_{12} = a_1 a_2^*; \quad c_{21} = a_2 a_1^* \quad (2,93)$$

и получаем уравнения

$$\dot{D} = -\frac{1}{2} [V_{12} c_{21} e^{i\delta t} + V_{21} c_{12} e^{-i\delta t}], \quad (2,94a)$$

$$\dot{c}_{12} = \frac{1}{2\hbar} V_{12} D e^{i\delta t}, \quad (2,94б)$$

$$\dot{c}_{21} = \frac{1}{2\hbar} V_{21} D e^{-i\delta t}. \quad (2,94в)$$

Уравнения (2,94) могут быть решены точно. Дифференцирование (2,94a)

*) Можно было бы принять другое возможное начальное условие $a_2 = 0; a_1 = 1$. Окончательный результат, как это ясно из физических соображений, не зависит от того, какое из этих условий принять.

и подстановка в (2,94б, в) дает

$$\ddot{D} = -\frac{1}{\hbar^2} |V_{12}|^2 D - i \frac{\delta}{\hbar} [V_{12} c_{21} e^{i\delta t} - V_{21} c_{12} e^{-i\delta t}].$$

Снова дифференцируя и используя (2,94в), получаем

$$\ddot{D} = -\left\{ \left(\frac{|V_{12}|}{\hbar} \right)^2 + \delta^2 \right\} \dot{D}. \quad (2,95)$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$D = \alpha \cos \Omega_0 (t - T) + \beta, \quad (2,96)$$

где

$$\Omega_0^2 = \left(\frac{|V_{12}|}{\hbar} \right)^2 + \delta^2, \quad (2,97)$$

и α , β , T — действительные константы. Начальные условия (2,91) в новых обозначениях можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} c_{12} = c_{21} = 0, \\ D = 1 \end{aligned} \right\} t = t_0. \quad (2,98)$$

Если первые два условия подставим в (2,94а), то получим, что $\dot{D} = 0$ при $t = t_0$; отсюда $T = t_0$ в (2,96). Аналогично находим константы α и β . В результате получаем

$$D = \frac{1}{\hbar^2 \Omega_0^2} \{ |V_{12}|^2 \cos \Omega_0 (t - t_0) + (\hbar \delta)^2 \}. \quad (2,99)$$

Определим теперь средний дипольный момент молекулы в момент времени t . Используя уравнение (2,90), находим:

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle &= \int \phi^*(t) \mu \phi(t) dq = \\ &= |a_1|^2 \mu_{11} + |a_2|^2 \mu_{22} + c_{12} \mu_{21} e^{i\omega_0 t} + c_{21} \mu_{12} e^{i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (2,100)$$

Основываясь на принципе соответствия, мы можем теперь найти излучение и поглощение молекулы. Последние два члена в (2,100) дают вклад в поглощение электромагнитного излучения частоты $\omega^{46, 48}$. Поэтому мы будем интересоваться первыми двумя членами в (2,100):

$$\begin{aligned} \langle \mu_1 \rangle &= |a_1|^2 \mu_{11} + |a_2|^2 \mu_{22} = \frac{1}{2} [\mu_{11} + \mu_{22} + (\mu_{22} - \mu_{11}) \Omega_0^{-2} \delta^2] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(\mu_{22} - \mu_{11}) |V_{12}|^2}{\hbar^2 \Omega_0^2} \cos \Omega_0 (t - t_0). \end{aligned} \quad (2,101)$$

Здесь мы использовали равенство (2,99) и тот факт, что $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$. Вклад в излучение дает переменная часть $\langle \mu_1 \rangle$:

$$\langle \tilde{\mu} \rangle = \mu_0 \cos \Omega_0 (t - t_0), \quad (2,102)$$

где

$$\mu_0 = \frac{1}{2} (\mu_{22} - \mu_{11}) (\hbar \Omega_0)^{-2} |V_{12}|^2. \quad (2,103)$$

В случае строгого резонанса $\delta = 0$ и

$$\mu_0 = \frac{1}{2} (\mu_{22} - \mu_{11}), \quad \Omega_0 = \frac{|V_{12}|}{\hbar}. \quad (2,104)$$

Принимая во внимание, что времена между соударениями распределены

по закону

$$\omega(\tau) d\tau = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} d\tau, \quad (2,105)$$

можно найти, что спектральная интенсивность излучения молекулы имеет вид

$$I(\Omega) \propto \frac{1}{(\Omega_0 - \Omega)^2 + \frac{1}{\tau^2}}. \quad (2,106)$$

Полная интенсивность излучения молекулы равна

$$I = \frac{\Omega_0^4}{3c^3} \mu_0^2. \quad (2,107)$$

Это излучение является существенно неравновесным процессом. Оно происходит только под действием внешней вынуждающей силы (которой здесь служит сильное поле частоты ω). Поэтому закон Кирхгофа здесь неприменим, и поглощение молекулой поля частоты Ω не будет носить резонансного характера⁵⁵.

Нетрудно показать, что молекулы излучают частоту Ω некогерентно и суммарная интенсивность излучения всего газа равна⁵⁵.

$$J = \frac{\Omega_0^4}{3c^3} \mu_0^2 n, \quad (2,108)$$

где n — полное число молекул на уровнях E_1 и E_2 .

Произведем оценки величин. Частота Ω_0 имеет порядок $\frac{|p_{12}|F}{\hbar}$.

Пусть $|p_{12}| = 7,3 \cdot 10^{-18}$ CGSE. (Молекула CsF⁶¹, $F = 4$ CGSE = $1,2$ кв/см, тогда $\Omega_0 = 3 \cdot 10^{10}$ рад/сек.) Пусть далее $\mu_0^2 = 10^{-35}$ CGSE, $n = 10^{17}$, тогда $J \approx 8 \cdot 10^{-16}$ вт. Интенсивность излучения можно значительно повысить, если создать когерентное излучение на частоте Ω_0 . Когерентность можно создать следующим образом. Рассмотрим, например, молекулярный пучок, в котором все молекулы находятся в одном энергетическом состоянии. Если на молекулы в таком молекулярном пучке начинает действовать высокочастотное поле, то в первые моменты система будет излучать когерентно с интенсивностью, пропорциональной квадрату числа молекул в пучке — n^2 . Дипольный момент всей системы будет равен $n\mu_0 \cos \Omega_0(t - t_0)$. Однако вновь приходящие молекулы будут уменьшать дипольный момент системы, так как сумма дипольных моментов этих молекул близка к нулю.

В самом деле, пусть поле начало действовать в момент t_0 , тогда дипольный момент всей системы в момент t равен

$$P = n_2(t) \mu_0 \cos \Omega_0(t - t_0) + \sum_{i=1}^{n_2(t)} \mu_0 \cos \Omega_0\left(t - t_0 - \frac{z_i}{v_i}\right),$$

где $n_2(t)$ — число вновь пришедших молекул за время $t - t_0$; $n_2(t)_0 = 0$; $n_1(t)$ — число оставшихся молекул, которые в начальный момент заполняли всю область, в которой действовало поле $n_1 = n - n_2$; z_i и v_i — соответственно координата и скорость i -той молекулы.

В момент времени $t_0 + \tau$, где τ — среднее время пролета молекулы через конденсатор (в котором действует высокочастотное поле), $n_1(t_0 + \tau) = 0$

и дипольный момент $P = \sum_{i=1}^n \mu_0 \cos \Omega_0\left(t - t_0 - \frac{z_i}{v_i}\right) \approx 0$.

Излучение становится полностью некогерентным.

Если теперь выключить поле, то через время $> \tau$, т. е. в момент времени $t'_0 \geq t_0 + 2\tau$, все молекулы в конденсаторе будут вновь находиться в одном энергетическом состоянии. Если в этот момент снова включить поле, опять начнется излучение $\propto n^2$, которое за время τ полностью перейдет в некогерентное излучение $\propto n$.

Таким образом, для достижения когерентного излучения частоты Ω_0 необходимо подавать высокочастотное поле импульсами длительностью $t_1 \leq \tau$; при этом время между импульсами t_2 должно удовлетворять условию $t_2 \geq \tau$. Тогда в промежуток времени t_1 излучение Ω_0 будет приблизительно пропорционально n^2 , а в промежутки t_2 интенсивность будет равна нулю.

Таким образом, если, например, $n = 10^{10}$ (это вполне достижимое число молекул в молекулярном пучке; см., например, ⁵²), то $n^2 = 10^{20}$; это дает интенсивность излучения $\sim$ в 10^8 раз больше ранее вычисленной.

Следует отметить, что когерентность можно создавать не только в молекулярном пучке, но и в газе* и в твердых телах*). Все вышеприведенные рассуждения остаются в силе, только τ теперь следует считать средним временем между соударениями в газе или $\tau = T_1$ — временем релаксации в твердом теле**). Роль n теперь играет число активных молекул $n_{\text{акт}}$ на рассматриваемой паре уровней. Это число определяется с помощью Больцмановского распределения по энергиям.

В момент включения поля $n_{\text{акт}}$ молекул создают дипольный момент $n_{\text{акт}} \mu_0 \cos \Omega_0 (t - t_0)$. Через время $\sim \tau$ когерентность полностью нарушится. Таким образом, опять длительность импульса $t_1 \leq \tau$, а время между импульсами должно быть $\geq \tau$, так как за время $\sim \tau$ устанавливается Больцмановское распределение по энергиям.

Создание когерентного излучения в газе или в твердых телах дает возможность значительно повысить интенсивность на частоте Ω_0 (даже по сравнению с молекулярным пучком).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В главе I рассмотрен вопрос о квантовых эффектах при взаимодействии свободных электронов с высокочастотными полями. В основном квантовые эффекты в этом случае пренебрежимо малы. Однако в принципе возможно измерение некоторых из этих эффектов²⁸. Кроме того, некоторые квантовые эффекты, вообще говоря, не пренебрежимо малы. Так, например, может быть не малой квантовая дисперсия энергии поля (см. стр. 279, формулу (1,31)).

В главе II рассмотрен ряд вопросов радиоспектроскопии, в основном связанных с возможностью создания когерентных состояний в системе молекул. При этом оказывается, что естественная ширина линий в радиодиапазоне, вообще говоря, не мала. Кроме того, рассмотрен вопрос об излучении молекул (спонтанном и вынужденном в присутствии внешнего высокочастотного поля).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Изв. АН СССР (сер. физ.) 11, 165 (1947).
2. Motz, Journ. App. Phys. 22, 527 (1950).
3. Motz, Thina. a. Whitcher, Journ. App. Phys. 24, 826 (1953).

*) Например, в парамагнитных веществах, используя при этом уровни, соответствующие парамagnetному резонансу.

**) Возможность создания когерентных состояний в газах или твердых телах не учитывалась в ⁵⁵.

4. Motz a. Mallory, Journ. App. Phys. 26, 1384 (1955).
5. R. E. Glover a. M. Tinkham, Phys. Rev. 104, 844 (1956).
6. W. H. Sinton, Phys. Rev. 86, 424 (1952); J. P. Hagen, N. Herburn, Nature 170, 244 (1952).
7. В. Л. Гинзбург, УФН 46, 348 (1952); Fortsch. d. Physik 1, 51 (1953).
8. J. L. Jackson, Phys. Rev. 87, 471 (1952).
9. J. Rhodes, Phys. Rev. 93, 1 (1954).
10. J. Weber, Phys. Rev. 90, 977 (1953).
11. J. Weber, Phys. Rev. 94, 211 (1954).
12. J. Weber, Phys. Rev. 94, 215 (1954).
13. J. Weber, Phys. Rev. 96, 556 (1954).
14. J. Weber, Phys. Rev. 101, 1619 (1956).
15. J. Weber, Phys. Rev. 101, 1620 (1956).
16. J. L. Jackson and M. C. Yovits, Phys. Rev. 96, 15 (1954).
17. H. Ekstein a. N. Rostoker, Phys. Rev. 100, 1023 (1956).
18. L. P. Smith, Phys. Rev. 69, 195 (1946).
19. C. Shulman, Phys. Rev. 82, 116 (1951).
20. J. C. Ward, Phys. Rev. 80, 119 (1951).
21. Mac Donald a. R. Kompfner, Proc. I.R.E. 37, 1424 (1950).
22. D. Gabor, Phil. Mag. 41, 1180 (1950).
23. I. R. Senitzky, Phys. Rev. 91, 1309 (1953).
24. I. R. Senitzky, Phys. Rev. 95, 904 (1954).
25. I. R. Senitzky, Phys. Rev. 98, 875 (1955).
26. P. S. Farrago, a. G. Marx, Acta Phys. Hungaricae 4, 23 (1954).
27. P. S. Farrago a. G. Marx, Phys. Rev. 99, 1063 (1955).
28. В. Л. Гинзбург и В. М. Файн, ЖЭТФ 32, 162 (1957), Радиотехника и электроника 2, 780 (1957).
29. H. B. Callen a. T. A. Welton 88, 35 (1951).
30. L. I. Schiff, Quantum Mechanics, N. Y. (1949).
31. В. Л. Гинзбург, УФН 31, 320 (1947).
32. Гортер, УФН 53, 545 (1954).
33. М. А. Ельяшевич, УФН 54, 513 (1954).
34. В. Горди, В. Смит, Р. Трамбаруло, Радиоспектроскопия, Гостехиздат, Москва, 1955.
35. C. H. Townes a. A. L. Schawlow, Microwave Spectroscopy, McGraw-Hill (1955).
36. D. J. E. Ingram, Spectroscopy at Radio and Microwave Frequencies, Lond. (1955).
37. М. Стрендберг, Радиоспектроскопия, ИЛ, Москва, 1956.
38. В. Л. Гинзбург, ДАН 35, 302 (1942).
39. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, Москва, 1956.
40. R. H. Dicke, Phys. Rev. 93, 99 (1954).
41. R. H. Dicke a. R. H. Romer, Rev. Scient. Instr. 26, 915 (1955).
42. S. Bloom, Journ. App. Phys. 27, 785 (1956).
43. В. М. Файн, ЖЭТФ 32, 607 (1957).
44. P. O. Scandion, Phys. Rev. 72, 1121 (1947).
45. P. Richards a. H. Snyders, Phys. Rev. 73, 269 (1948).
46. R. Karplus a. J. Schwinger, Phys. Rev. 73, 1020 (1948).
47. Carter a. Smith, Phys. Rev. 73, 1053 (1948).
48. H. Snyders a. P. Richards, Phys. Rev. 73, 1178 (1948).
49. R. Karplus, Phys. Rev. 74, 223 (1948).
50. Watts, Pietenpole, Rogers, Williams, Phys. Rev. 74, 1246 (1948).
51. V. Griffing, Journ. Chem. Phys. 13, 744 (1950).
52. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, ЖЭТФ 27, 431 (1954); ДАН 101, 47, (1955); Disc. Faraday. Soc. 19, 99 (1955); УФН, LVII, 485 (1955); ЖЭТФ 30, 560 (1956).
53. J. P. Cordon, H. J. Zeiger, C. H. Townes, Phys. Rev. 95, 282 (1954); Phys. Rev. 99, 1253 (1955).
54. K. Shimoda, T. C. Wang a. C. H. Townes, Phys. Rev. 102, 1308 (1956).
55. В. М. Файн, ЖЭТФ 29, 878 (1955); ЖЭТФ 33, 416 (1957).
56. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, изд. 2-е, Гостехиздат, Москва, 1948.
57. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Квантовая механика, часть 1, Гостехиздат, Москва, 1948.
58. V. Weisskopf und E. Wigner, Zs. f. Phys. 63, 54 (1930), 65, 18 (1930).
59. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника (в печати) 1957.
60. Ю. Л. Климонтович, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 32, 1151 (1957).
61. H. Hughes, Phys. Rev. 72, 614 (1947).

62. В. Н. Стариков, Дипломная работа, Горьковский университет (1957).
63. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
64. В. М. Файн, ЖЭТФ, 33, 945, (1957).
65. Ю. Л. Климонтович, Р. В. Хохлов, Некоторые вопросы теории молекулярного генератора, Доклад на Саратовской конференции МВО по радиоэлектронике (1957).
66. M. W. Muller, Phys. Rev. 106, 8 (1957).
67. R. V. Pound, Annals of Physics, 1, 24 (1957).
68. Bloembergen, Phys. Rev. 104, 324 (1956).
69. M. W. P. Strandberg, Proc. IRE, 45, 92 (1957).
70. I. P. Wittke, Proc. IRE 45, 291 (1957).
71. Scovil, Feher, Seidel, Phys. Rev. 105, 762 (1957).
72. В. М. Файн, ЖЭТФ 33, 1290 (1957).
73. R. P. Feynman, F. L. Vernon, P. W. Hellwart, Journ. Appl. Phys. 28, 49 (1957).
74. M.W.P. Strandberg, Phys. Rev. 106 (617), (1957).
75. J. C. Helmer, Journ. Appl. Phys. 28, 212 (1957).
76. I. R. Senitzky, Phys. Rev. 104, 1486 (1956).
77. В. М. Конторович, А. М. Прохоров, ЖЭТФ, 33, 1428 (1957).

ПРИМЕЧАНИЯ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

а) В работе⁷² при решении уравнения для матрицы плотности не учтен ряд резонансных членов (с комбинационными частотами). Это привело к неверному значению диэлектрической (магнитной) проницаемости. Правильный расчет имеется в работе⁷⁷. Однако полученные там выражения нельзя непосредственно использовать для теории генератора, так как в⁷⁷ рассматривается случай слабого поля на основной частоте.

б) Когетрон можно также осуществить, используя уровни электронов (или ядер и т. п.) в парамагнетике, находящемся в магнитном поле. После быстрого (по сравнению со временем релаксации) переключения магнитного поля (с изменением направления на обратное) все электроны окажутся на верхнем энергетическом уровне (при $T=0^\circ\text{K}$). После спонтанного излучения поле опять переключается и т. д.